6. Pochodna funkcji (cz.3)

Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie

Jeżeli spełnione sa jednocześnie trzy warunki

1. funkcje $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sa określone w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$,
2. iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ "daje" w punkcie x_0 symbol nieoznaczony typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ lub $\left[\frac{0}{0}\right]$, tzn. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (lub $-\infty$) i $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (lub $-\infty$) albo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,
3. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jest równa $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

UWAGA: Reguła ta jest prawdziwa także dla granic jednostronnych i granic w nieskończoności.

Asymptoty wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ (lub $+\infty$)
($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ (lub $+\infty$)) .
Prostą o równaniu $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $f(x)$, jeżeli jest ona jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu tej funkcji.

Asymptoty wykresu funkcji

Definicja

Prostą o równaniu $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeżeli
$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$
$(\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0\ )$.
Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x)$, jeżeli jest ona jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną wykresu tej funkcji.
Jeżeli współczynnik $a = 0$, to asymptotę ukośną nazywamy poziomą.

Warunek konieczny i wystarczający istnienia asymptoty ukośnej

Twierdzenie

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwie granice
$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$
($a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$).

Jeżeli choć jedna z granic z twierdzenia nie istnieje lub jest niewłaściwa, to nie istnieje asymptota ukośna lewostronna (prawostronna).

Aproksymacja liniowa funkcji różniczkowalnej

Jeżeli funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x_0, to

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile granica ta istnieje i jest skończona.

Możemy zatem używać przybliżenia:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

W konsekwencji

$$f(x_0 + h) \approx f'(x_0)h + f(x_0)$$

otrzymujemy przybliżenie wartości funkcji w punkcie $x_0 + h$ przez wartość funkcji liniowej zmiennej h, a dokładnie przez wartość funkcji, której wykresem jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0.

Funkcję $df_{x_0}(h) := f'(x_0)h$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie x_0.

Twierdzenie Taylora - aproksymacja wielomianem

Definicja

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą k-tego rzędu, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wielomian

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu k funkcji f w punkcie x_0.
Dla $x_0 = 0$ wielomian ten nazywamy wielomianem Maclaurina.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu $n-1$ na przedziale $[x_0, x]$ i pochodną rzędu n na przedziale (x_0, x), to istnieje punkt $c \in (x_0, x)$, taki, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Twierdzenie Taylora

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu $n-1$ na przedziale $[x_0, x]$ i pochodną rzędu n na przedziale (x_0, x), to istnieje punkt $c \in (x_0, x)$, taki, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(wzór Taylora z resztą Lagrange'a)

Ostatni składnik nazywamy resztą Lagrange'a: $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$.
Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przyjmuje postać:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

Twierdzenie jest prawdziwe również dla $[x, x_0]$. Wtedy $c \in (x, x_0)$.