3.2. Granice ciągów liczbowych.

Definicja

Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą (właściwą) ciągu liczbowego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jeśli dla dowolnie małej liczby dodatniej ε wyrazy ciągu o numerach dostatecznie dużych różnią się od g o mniej niż ε.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \in \mathbb{N}, n > n_0} \quad | \, a_n - g \, | < \varepsilon$$

Ciąg liczbowy posiadający granicę właściwą nazywamy zbieżnym, nie posiadający granicy - rozbieżnym.

Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Definicja

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$, jeśli dla dowolnie dużej liczby M wyrazy ciągu o numerach dostatecznie dużych są większe niż ta liczba.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{M\in\mathbb{R}} \ \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \ \forall_{n\in\mathbb{N}, n>n_0} \quad a_n > M$$

Definicja

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli dla dowolnej liczby M wyrazy ciągu o numerach dostatecznie dużych są mniejsze niż ta liczba.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{M\in\mathbb{R}} \ \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \ \forall_{n\in\mathbb{N}, n>n_0} \quad a_n < M$$

Twierdzenie

Jeśli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Twierdzenie

Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.

Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest monotoniczny i ograniczony. Zatem jest zbieżny.
Granicę tego ciągu oznaczamy przez e i nazywamy liczbą Eulera.
Liczba e jest liczbą niewymierną $e \approx 2,71828...$

Twierdzenie

Jeżeli ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniają warunki:
1) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$
2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = b$
to
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ i } \lim_{n\to+\infty} b_n = b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

to

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right), \text{ o ile } b_n \neq 0 \text{ i } b \neq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^p = a^p, \quad \text{dla } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}, \quad \text{dla } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ i } \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty.$$

Symbolicznie zapisujemy

$$[\infty + \infty] = +\infty \quad [\infty \cdot \infty] = +\infty.$$

Podobnie

$$[(-\infty) + (-\infty)] = -\infty \quad [(-\infty) \cdot (-\infty)] = +\infty.$$

UWAGA: Z informacji, że

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ i } \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$

nie można wywnioskować jaka jest granica ciągu $(a_n - b_n)$ ani $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.
Mówimy krótko, że symbole $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ są symbolami nieoznaczonymi.

Jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ i } \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$$

Symbolicznie zapisujemy

$$[a - \infty] = [-\infty + a] = -\infty.$$

Podobnie

$$[a + \infty] = [\infty + a] = +\infty,$$

$$\left[\frac{a}{\infty}\right] = \left[\frac{a}{-\infty}\right] = 0,$$

a dla $a > 0$:

$$[a \cdot \infty] = \infty \quad [a \cdot (-\infty)] = -\infty.$$

Symbole nieoznaczone:

$$[0 \cdot \infty] \quad \left[\frac{0}{0}\right] \quad [1^{\infty}] \quad [\infty^0] \quad [0^0].$$

Charakterystyczne granice:

- $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

- $$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{jeżeli } \alpha > 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \alpha < 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{n\to+\infty} q^{n} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mid q \mid < 1 \\ 1 & \text{jeżeli } q = 1 \\ +\infty & \text{jeżeli } q > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{jeżeli } q \leqslant -1 \end{cases}$$

- $$\text{Jeżeli} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \text{gdzie} \quad a_n \geqslant 0, \ a > 0,$$
  $$\text{to} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

- $$\text{Jeżeli} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ \text{lub} \quad -\infty,$$
  $$\text{to} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

$$n^4 + 3250n^3 + 200000$$

$$n = 1000 \quad \frac{n^4}{n^4 + 3250n^3 + 200000} \approx 24\%$$

$$n = 10^4 \quad \frac{n^4}{n^4 + 3250n^3 + 200000} \approx 75\%$$

$$n = 10^6 \quad \frac{n^4}{n^4 + 3250n^3 + 200000} \approx 99,67\%$$

$$n = 10^9 \quad \frac{n^4}{n^4 + 3250n^3 + 200000} \approx 99,999675\%$$

.