Przekształcenia liniowe

Zadania

1. Które z następujących przekształceń są liniowe?
   (a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_2) = (2x_1,\ x_1 - x_2)\,,$
   (b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2,\ x_1^2)\,,$
   (c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(x_1, x_2) = |4x_1 + 3x_2|\,,$
   (d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1 - x_2 + 3x_3,$
   (e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_{2,}x_3) = (2x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3)\,,$
   (f) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x_1, x_{2,}x_3) = (2x_3,\ x_1 +)\,,$
   (g) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1,\ x_1 - x_2 + 3x_{3,}\ x_2 - 4x_4)\,,$
   (h) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 3x_2,\ x_1^2,\ x_2 - 4x_3)\,,$
   (i) $T: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6, \quad T(x_1, x_2, x_3, x_{4,}x_{5,}x_6) = (0,\ 2\,x_1 - x_2 + 3x_3, -x_2 - 4x_5, 0,\ x_1 + x_3, 0)\,.$

2. Zbadać liniowość przekształcenia $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\right) = a + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}.$

3. Zbadać liniowość podanych przekształceń:
   (a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, T jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $x0y$,
   (b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T jest rzutem prostokątnym na prostą o równaniu $x + y = 0$,
   (c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $(0, 0)$.
   (d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T jest przesunięciem o wektor $\vec{v} = [4, -2]\,.$

4. Wykazać, że każde przekształcenie liniowe przekształca układ wektorów liniowo zależnych w układ wektorów liniowo zależnych. Czy prawdziwe jest analogicznie sformułowanie twierdzenie dla wektorów liniowo niezależnych?

Obraz i jądro przekształcenia liniowego

5. Znaleźć bazę i wymiar jądra oraz bazę i wymiar obrazu przekształcenia liniowego $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, danego wzorem

   $$T(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t,\ x - y + z + 6t,\ x + y - z - 4t,\ 2x + 2y - 2z)\,.$$

6. Wyznaczyć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem

$$T(x, y, z, t) = (x + 2z + t,\ -2x + y - 3z - 5t,\ x - y + z + 4t).$$

7. Wyznaczyć jądro, obraz i rząd przekształcenia liniowego $T : M_{22} \to P_2$ danego wzorem

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (2a + b - c + 3d) + (a + 3c + d)\, x + (-2b + c)\, x^2,$$

gdzie M_{22} oznacza przestrzeń liniową macierzy stopnia 2, a $\mathbb{P}_2$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$.

8. Wyznaczyć jądro, rząd i obraz przekształcenia liniowego $T : P_3 \to M_{22}$ danego wzorem $T : (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a - 2c & 2a - b - 2d \\ -b + 2d & c - d \end{bmatrix}$.

9. Niech $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, które dowolnemu wektorowi $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ przypisuje wektor $(x_1 + x_2,\ -x_1 - x_2,\ 2x_3)$. Znaleźć bazę jądra i rząd przekształcenia T.

10. Sprawdzić, czy wektory $(1, 1, -1, 1)$, $(1, -1, 1, -3)$ generują jądro przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ danego wzorem

$$T(x, y, z, u) = (x + y + 3z + u,\ -2x - y - 4z - u,\ y + 2z + u,\ x + 2y + 3z).$$

11. Sprawdzić, czy wektory $(1, 1, -2, 0, 1)$, $(-2, 0, 0, 1, 1)$ generują jądro przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ danego wzorem

$$T(x, y, z, u, v) = (x - 2y + u + v,\ x - y + z + 2v,\ 3x - 4y + 2z + u + 5v,\ x - 3y - z + 2u).$$

12. Znaleźć dwie różne bazy obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ danego wzorem

$$T(x, y, z, u, v) = (x + y - z,\ -x + 2y + 3z - u,\ 3y + 2z - u - v,\ 2v).$$

13. Napisać wzór przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takiego, że $T(-1, 1, -1, 1) = (0, 2, 1)$, $T(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ oraz $\mathrm{Ker}T = \{(x, 0, 0, t)\ ;\ x, t \in \mathbb{R}\}$.

Reprezentacja macierzowa przekształcenia liniowego

14. Napisać macierze podanych przekształceń w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych:

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x - 5z,\ y + 4z)$,
    (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x + 2y,\ x - y,\ y)$,
    (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x - 5z)$,
    (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2x + 4y,\ 5x - 3y)$.

15. Przekształcenia liniowe $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określone są wzorami:
    $L_1(x, y) = (6x - 2y,\ x - 3y)$,
    $L_2(x, y) = (2x - y,\ -x)$,
    $L_3(x, y) = 4x + y$.
    Napisać macierze tych przekształceń w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać macierze następujących przekształceń liniowych (w odpowiednich bazach standardowych):

    (a) $3L_1$; (b) $L_1 + L_2$; (c) $3L_1 - 4L_2$; (d) $L_3 \circ (L_1 + L_2)$.

16. Przekształcenia liniowe $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określone są wzorami:
    $L_1(x, y) = (x + 2y,\ 3x - 4y, x + y)$,
    $L_2(x, y, z) = (y - z,\ -x + y + z)$,
    $L_3(x, y) = 5x - 2y$.
    Napisać macierze tych przekształceń w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać wzory następujących przekształceń liniowych:

    (a) $L_2 \circ L_1$; (b) $L_3 \circ L_2$; (c) $L_1 \circ L_2 \circ L_3$.

17. Spośród przekształceń liniowych wybrać przekształcenia odwracalne i napisać macierze przekształceń odwrotnych do nich w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych. Ponadto napisać wzory przekształceń odwrotnych, jeżeli:

    (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) = (x - y,\ 2x + y)$,
    (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) = (x - y,\ 2x - 2y)$,
    (c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y,\ y - z)$,
    (d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x - y + z,\ 2x + y,\ 3x + z)$.

18. Sprawdzić, czy istnieje przekształcenie odwrotne do przekształcenia liniowego $T : M_{22} \to \mathbb{R}^4$ określonego wzorem

$$T\left[a_{ij}\right]_{i,j=1,2} = (a_{11} + a_{12} + a_{21},\ a_{11} - a_{12},\ a_{21}, a_{21} - a_{22}).$$

Przykłady

19. Pokazać, że przekształcenie $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, postaci $T(x,y)=(x+4y,\,x-6y)$ jest przekształceniem liniowym.

Rozwiązanie

Sprawdzimy najpierw *addytywność* przekształcenia T. Niech $v=(x_1,y_1)$, $w=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$.
Obliczmy

$$\begin{aligned}
T(v+w) &= T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2,y_1+y_2) = \\
&= (x_1+x_2+4(y_1+y_2),\, x_1+x_2-6(y_1+y_2)) = \\
&= ((x_1+4y_1)+(x_2+4y_2),\,(x_1-6y_1)+(x_2-6y_2)) = \\
&= (x_1+4y_1,\,x_1-6y_1)+(x_2+4y_2,\,x_2-6y_2)) = \\
&= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) = \\
&= T(v)+T(w).
\end{aligned}$$

Zatem $T(v+w)=T(v)+T(w)$, a więc T jest przekształceniem addytywnym.
Sprawdzimy teraz *jednorodność* przekształcenia T. Niech $a\in\mathbb{R}$.
Obliczmy

$$\begin{aligned}
T(av) &= T(a(x_1,y_1)) = T(ax_1,ay_1) = (ax_1+4ay_1,\,ax_1-6ay_1) = \\
&= a\,(x_1+4y_1,\,x_1-6y_1) = a\,T(x_1,y_1) = a\,T(v)
\end{aligned}$$

Zatem $T(av)=a\,T(v)$, co oznacza, że T jest przekształceniem jednorodnym. Skoro T jest przekształceniem addytywnym i jednorodnym, to jest przekształceniem liniowym.

20. Wyznaczyć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ danego wzorem

$$T(x,y,z,t)=(x+2y+z+t,\ -x+y-2z-2t,\ 0).$$

Podać wymiary jądra i obrazu tego przekształcenia.

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw bazę *jądra* przekształcenia T.
Z definicji jądra wynika, że należą do niego te wektory przestrzeni $\mathbb{R}^4$, których współrzędne spełniają układ równań

$$\begin{aligned}
x+2y+z+t &= 0,\\
-x+y-2z-2t &= 0.
\end{aligned}$$

Przyjmując $y=\alpha$, $t=\beta$, otrzymujemy $x=-5\alpha$, $z=3\alpha-\beta$. Zatem dowolny wektor należący do jądra ma postać $(-5\alpha,\,\alpha,\,3\alpha-\beta,\,\beta)$. Wektor ten można przedstawić w postaci

$$(-5\alpha,\,\alpha,\,3\alpha-\beta,\,\beta)=\alpha(-5,1,3,0)+\beta(0,0,-1,1).$$

Z definicji bazy wynika, że układ $((-5,1,3,0),(0,0,-1,1))$ stanowi bazę jądra, a z definicji wymiaru wynika, że wymiar jądra jest równy 2. Ponieważ wymiar dziedziny przekształcenia liniowego jest równy sumie wymiarów jądra i obrazu, to wymiar obrazu naszego przekształcenia jest równy 2.

Wyznaczymy teraz bazę o*brazu* przekształcenia T.

Oznaczmy $T(x,y,z,t)=(y_1,\ y_2\ ,y_3)$. Wtedy

$$\begin{aligned}(y_1,\ y_2\ ,y_3) &= (x+2y+z+t,\ -x+y-2z-2t,\ 0)= \\ &= x(1,-1,0)+y(2,1,0)+z(1,-2,0)+t(1,-2,0)= \\ &= x(1,-1,0)+y(2,1,0)+(z+t)(1,-2,0).\end{aligned}$$

Wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ utworzony z wektorów $(1,-1,0),(2,1,0),(1,-2,0)$ jest równy 0. Widzimy więc, że te trzy wektory są liniowo zależne i w związku z tym nie mogą stanowić bazy. Liniowo niezależne są np. wektory $(1,-1,0)$, $(2,1,0)$. Zatem układ $((1,-1,0),(2,1,0))$ stanowi bazę obrazu naszego przekształcenia, gdyż wektory $(1,-1,0),(2,1,0)$ stanowią uklad liniowo niezależny generujący obraz.

21. Przekształcenia liniowe $L_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $L_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ określone są wzorami:
$L_1(x,y)=(-x-2y-z,\ x-3y+z,\ y-z)$,
$L_2(x,y)=(2x-4y,\ -x+z,\ x+y+z)$.
Znaleźć macierze tych przekształceń w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać macierze następujących przekształceń liniowych (w odpowiednich bazach standardowych tych przestrzeni):
(a) $5L_1$; (b) L_1-L_2; (c) $3L_1+2L_2$.

Rozwiązanie

Macierze przekształceń L_1 L_2 w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mają odpowiednio postać

$$L_1:\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad L_2:\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz przekształcenia $5L_1$ w bazach standardowych ma postać

$$5\cdot\begin{bmatrix} & -1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & 1 \\ & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -10 & -5 \\ 5 & -15 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Macierz przekształcenia L_1-L_2 w bazach standardowych ma postać

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Macierz przekształcenia $3L_1 + 2L_2$ w bazach standardowych ma postać

$$3\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -9 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

22. Przekształcenia liniowe $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, określone są wzorami:
$L_1(x, y) = (6x - 2y,\ x - 3y,\ -y)\,,$
$L_2(x, y) = (2x - y + z,\ -x + 2y)\,.$
Znaleźć macierze tych przekształceń w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać macierze następujących przekształceń liniowych (w odpowiednich bazach standardowych tych przestrzeni):
(a) $L_2 \circ L_1$; (b) $L_1 \circ L_2$.

Rozwiązanie

Macierze przekształceń L_1 oraz L_2 w bazach standardowych mają odpowiednio postać

$$L_1 : \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad L_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem szukane macierze $L_2 \circ L_1$ oraz $L_1 \circ L_2$ w bazach standardowych mają postać

$$\text{macierz } L_2 \circ L_1 \ : \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\text{macierz } L_1 \circ L_2 \ : \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 6 \\ 5 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Podać wzory przekształceń $L_2 \circ L_1$ oraz $L_1 \circ L_2$ z przykładu 9.

Rozwiązanie

$L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (L_2 \circ L_1)(x, y) = (11x - 2y, -4x - 4y)\,,$
$L_1 \circ L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (L_1 \circ L_2)(x, y, z) = (14x - 10y + 6z,\ 5x - 7y + z,\ x - 2y)\,.$

24. Sprawdzić, czy dane przekształcenia są odwracalne. Jeśli tak, to napisać macierze przekształceń odwrotnych do nich w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych. Ponadto (dla przekształceń odwracalnych) napisać wzory przekształceń odwrotnych, jeżeli:
(a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x - 2y,\ x + y)\,,$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) = (x - y,\, 2x - 2y)\,,$

(c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x - y + z,\, 2x + y,\, y - z)\,.$

Rozwiązanie

(a) Macierz przekształcenia w bazach standardowych L ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy $-1 \neq 0$. Macierz A jest odwracalna. Zatem nasze przekształcenie moża odwrócić. Macierz odwrotna do macierzy A, ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem przekształcenie L^{-1}, odwrotne do L, dane jest wzorem

$$L^{-1}(x, y) = (-x + 2y,\, x - y)\,.$$

(b) Macierz przekształcenia w bazach standardowych L ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy 0. Macierz A nie jest odwracalna. Zatem i nasze przekształcenie jest nie jest odwracalne.

(c) Macierz przekształcenia w bazach standardowych L ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy $-4 \neq 0$. Macierz A jest więc odwracalna. Zatem i nasze przekształcenie moża odwrócić. Macierz odwrotna do macierzy A, ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Zatem przekształcenie L^{-1}, odwrotne do L, dane jest wzorem

$$L^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + y + z}{4},\, \frac{-x + y - z}{2},\, \frac{x + y - 3z}{4} \right).$$