

Prosta na płaszczyźnie

Zadanie 1. Zbadać jak są położone względem osi współrzędnych proste o równaniach

$$3x - y = 0, \quad 3x - y + 1 = 0, \quad 2x + 5y = 0, \quad 4x - 9 = 0, \quad 7x = 0, \quad x + 2y = 0.$$

Zadanie 2. Dane jest równanie stopnia pierwszego:

$$\frac{3x + 2}{6} - \frac{2y - 5}{3} = 6.$$

Znaleźć dla odpowiadającej mu prostej

a) równanie ogólne, b) równania parametryczne.

Zadanie 3. Obliczyć długości boków trójkąta danego trzema prostymi:

$$18x + 6y - 17 = 0, \quad 14x - 7y + 15 = 0, \quad 5x + 10y - 9 = 0.$$

Znaleźć też kąty tego trójkąta.

Zadanie 4. Czy są wśród prostych danych równaniami:

$$\begin{array}{lll} a) 3x - 2y + 7 = 0, & b) 6x - 4y - 9 = 0, & c) 6x + 4y - 5 = 0, \\ d) 2x + 3y - 6 = 0, & e) x - y + 8 = 0, & f) x - y - 20 = 0, \end{array}$$

są proste wzajemnie równoległe lub proste wzajemnie prostopadłe?

Zadanie 5. Przy jakiej wartości parametru a równania

$$3ax - 8y + 13 = 0 \quad \text{ i } \quad (a + 1)x - 2ay - 21 = 0$$

przedstawiają proste równoległe?

Zadanie 6. Przy jakiej wartości parametru a równania

$$(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0 \quad \text{ i } \quad (5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0$$

przedstawiają proste wzajemnie prostopadłe?

Zadanie 7. Przez początek układu współrzędnych poprowadzić prostą

- a) równoległą,
- b) prostopadłą do prostej o równaniu $2x - 3y + 5 = 0$.

Zadanie 8. Przez punkt przecięcia dwóch prostych $2x + 5y - 8 = 0$ i $x - 3y + 4 = 0$ poprowadzić prostą która ponadto:

- a) jest równoległa do osi odciętych,
- b) przechodzi przez punkt $(4, 3)$.

Zadanie 9. Napisać równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste

$$x + 7y - 6 = 0 \quad \text{i} \quad 5x - 5y + 1 = 0.$$

Zadanie 10 Obliczyć współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A = \left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$ $B = (0, 4)$ $C = (-3, -2)$.

Zadanie 11. Przez punkt $M = (1, 2)$ poprowadzić prostą tak, aby leżała w jednakowej odległości od punktów $A = (3, 3)$, $B = (5, 2)$.

Zadanie 12. Dana jest prosta $12x + 5y - 52 = 0$. Znaleźć równanie prostej równoległej do danej i odległej od niej o $d = 2$.

Zadanie 13. Dane są równania prostych równoległych $4x - 6y - 3 = 0$ i $2x - 3y + 7 = 0$. Ułożyć równanie prostej równoległej do danych prostych i leżącej pośrodku między nimi.

Zadanie 14. Znaleźć środek okręgu o promieniu $r = 8$, stycznego do dwóch prostych $3x - 4y + 10 = 0$ i $3x + 4y = 0$.

Zadanie 15. Obliczyć współrzędne wierzchołków rombu znając równania dwóch jego boków $2x + 5y - 1 = 0$ i $2x - 5y - 34 = 0$ oraz równanie jednej z jego przekątnych $x + 3y - 6 = 0$.

Zadanie 16. Zbadać czy następujące trójki prostych się przecinają:

- a) $3x - y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$,
- b) $x + 2y - 1 = 0$, $3x - 6y + 2 = 0$, $7x + y + 1 = 0$,
- c) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$,
- d) $3x - y + 6 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$,

Płaszczyzna w przestrzeni 3-wymiarowej

Zadanie 1. Przez które z punktów:

$$A = (-1, 6, 3), \quad B = (3, -2, -5), \quad C = (0, 4, 1),$$

$$D = (2, 0, 5), \quad E = (2, 7, 0), \quad F = (0, 1, 0).$$

przechodzi płaszczyzna o równanie $4x - y + 3z + 1 = 0$?

Zadanie 2. Wskazać na osobliwości położenia następujących płaszczyzn względem osi układu współrzędnych:

$$a) 3x - 5z + 1 = 0, \quad b) 9y - 2 = 0, \quad c) x + y - 5 = 0,$$

$$d) 2x + 3y - 7z = 0, \quad e) 8y - 3z = 0.$$

Zadanie 3. Napisać równanie płaszczyzny

- a) równoległej do płaszczyzny Oxz i przechodzącej przez punkt $(2, -5, 3)$,
- b) przechodzącej przez punkt $(-3, 1, -2)$ oraz oś Oz ,
- c) równoległej do osi Ox i przechodzącej przez dwa punkty $(4, 0, -2)$ i $(5, 1, 7)$.

Zadanie 4. Przez punkt $(7, 5, 1)$ poprowadzić płaszczyznę odcinającą na osiach współrzędnych odcinki jednakowej długości początku w punkcie $(0, 0, 0)$, których końce mają współrzędne dodatnie.

Zadanie 5. Znaleźć kąt między płaszczyzną $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$, a płaszczyzną Oyz .

Zadanie 6. Znaleźć punkt symetryczny do początku układu współrzędnych względem płaszczyzny

$$6x + 2y - 9z + 121 = 0.$$

Zadanie 7. Obliczyć odległość punktu $(3, 1, -1)$ od płaszczyzny $22x + 4y - 20z - 45 = 0$.

Zadanie 8. Obliczyć kąty między płaszczyznami:

- a) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ i $x - 4y - z + 9 = 0$,
- b) $3x - y + 2z + 15 = 0$ i $5x + 9y - 3z - 1 = 0$,
- c) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ i $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

Zadanie 9. Ułożyć równanie płaszczyzny:

- a) przechodzącej przez punkt $(-2, 7, 3)$ równoległej do płaszczyzny $x - 4y = 5z - 1 = 0$,
- b) przechodzącej przez początek współrzędnych i prostopadłej do dwóch płaszczyzn

$$2x - y + 5z + 3 = 0 \text{ i } x + 3y - z - 7 = 0,$$

- c) przechodzącej przez punkty $(0, 0, 1)$ i $(3, 0, 0)$ i tworzącej kąt $\frac{\pi}{6}$ z płaszczyzną Oxy ,

Zadanie 10. Sprawdzić, że trzy płaszczyzny

$$2x - 2y + z - 3 = 0 \quad \text{i} \quad 3x - 6z + 1 = 0 \quad \text{i} \quad 4x + 5y + 2z = 0$$

są wzajemnie prostopadłe.

Zadanie 11. Znaleźć równania płaszczyzn przepoławiających kąty dwuścienne między płaszczyznami:

$$3x - y + 7z - 4 = 0 \quad \text{i} \quad 5x + 3y - 5z + 2 = 0.$$

Zadanie 12. Na osi Oz znaleźć punkt równo oddalony od dwóch płaszczyzn:

$$x + 4y - 3z - 2 = 0 \quad \text{i} \quad 5x + z + 8 = 0.$$

Zadanie 13. Obliczyć odległość między płaszczyznami równoległymi:

$$11x - 2y - 10z + 15 = 0 \quad \text{i} \quad 11x - 2y - 10z - 45 = 0.$$

Zadanie 14. Sprawdzić czy można poprowadzić płaszczyznę przez cztery dane punkty:

- a) $(3, 1, 0)$, $(0, 7, 2)$, $(-1, 0, -5)$, $(4, 1, 5)$,
- b) $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(4, 0, -3)$.

Zadanie 15. przez linie przecięcia płaszczyzn $4x - y + 3z - 1 = 0$ i $x + 5y - z + 2 = 0$ poprowadzić płaszczyznę:

- a) przechodzącą przez punkt $(0, 0, 0)$,
- b) przechodzącą przez punkt $(1, 1, 1)$,
- c) równoległą do osi Oy ,
- d) prostopadłą do płaszczyzny $2x - y + 5z - 3 = 0$.

Prosta w przestrzeni 3-wymiarowej

Zadanie 1. Wskazać na osłobiwości położenia następujących prostych:

- a) $3x + 2z = 0, \quad 5x - 1 = 0$;
- b) $5x + y - 3z - 7 = 0, \quad 2x + y - 3z - 7 = 0$,
- c) $x + y + z = 0, \quad 2x + 3y - z = 0$.

Zadanie 2. Ułożyć równania rzutu prostej $x - 4y + 2z - 5 = 0, \quad 3x + y - z + 2 = 0$ na płaszczyznę $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Zadanie 3. Sprawdzić, czy punkty $(3, 0, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(1, \frac{4}{3}, 3)$ leżą na jednej prostej.

Zadanie 4. Wyznaczyć kąt jaki tworzą proste:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{4}.$$

Zadanie 5. Przez punkt $(2, -5, 3)$ poprowadzić prostą:

- a) równoległą do osi Ox ,
- b) równoległą do prostej

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4},$$

- c) równoległą do prostej $x + y - z + 1 = 0, \quad x + 2y = 0$.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy następujące proste się przecinają:

a)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1},$$

b)

$$\begin{cases} 4x + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

Zadanie 7. Napisać równania prostej prostopadłej poprowadzonej z punktu $(2, 3, 1)$ do prostej:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$

Zadanie 8. Przez punkt $(4, 0, -1)$ poprowadzić prostą w ten sposób by przecięła dwie dane proste

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Zadanie 9. Spośród wszystkich prostych przecinających dwie proste

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1},$$

wybrać tę która jest równoległa do prostej o równaniu

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}.$$

Zadanie 10. Ułożyć równania prostej prostopadłej do prostych

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{i} \quad \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

i przecinającej te proste

Prosta i płaszczyzna w przestrzeni 3-wymiarowej

Zadanie 1. Znaleźć punkt przecięcia prostej

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$$

z płaszczyzną $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Zadanie 2. Ułożyć równania prostej przechodzącej przez punkty przecięcia płaszczyzny $2x + y - 3z + 1 = 0$ z prostymi

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

Zadanie 3. Przy jakiej wartości współczynnika A płaszczyzna $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ jest równoległa do prostej

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \quad ?$$

Zadanie 4. Przy jakich wartościach współczynników A i B płaszczyzna $Ax + By + 6z - 7 = 0$ jest prostopadła do prostej

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{3} \quad ?$$

Zadanie 5. Sprawdzić, czy prosta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

leży w płaszczyźnie $4x + 3y - z + 3 = 0$.

Zadanie 6. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez dwie proste równoległe

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}.$$

Zadanie 7. Znaleźć odległość punktu $(7, 9, 7)$ od prostej

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Zadanie 8. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $(4, 3, 10)$ względem prostej

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

Zadanie 9. Znaleźć odległość między dwiema prostymi skośnymi:

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Zadanie 10. Znaleźć odległość między prostymi równoległymi:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Zadanie 11. Czy można przez prostą

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-6}{6}$$

poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $2x + y - 7z = 0$?

Zadanie 12. Napisać równanie płaszczyzny która przechodzi przez punkt $(3, 1, -2)$ i przez prostą

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}.$$

Zadanie 13. Sprawdzić, że następujące proste się przecinają

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}.$$

Zadanie 14. Napisać równanie płaszczyzny w której leżą proste z poprzedniego zadania.