Elementy algebry abstrakcyjnej

Grupy

1. Które z następujących zbiorów stanowią grupę względem wskazanego działania:

1) Zbiór liczb całkowitych, ze względu na zwykłe dodawanie,
2) Zbiór liczb całkowitych, ze względu na zwykłe mnożenie,
3) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby naturalnej n, ze zwykłym dodawaniem,
4) Zbiór liczb zespolonych, różnych od zera, ze względu na mnożenie zespolone,
5) Pierwiastki n-tego stopnia z jedności, względem mnożenia zespolonego,
6) Zbiór macierzy kwadratowych stopnia n, o wyrazach rzeczywistych, wraz z mnożeniem macierzowym,
7) Zbiór macierzy kwadratowych, nieosobliwych, stopnia n, wraz z mnożeniem macierzowym.

2. W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie

$$a \circ b = a + b + 2.$$

Czy zbiór liczb całkowitych stanowi grupę ze względu na to działanie?

3. W zbiorze liczb rzeczywistych należących do przedziału $A = [-1, \infty)$ określamy działanie

$$a * b = ab + a + b.$$

Sprawdzić, czy zbiór A wraz z działaniem $*$ stanowi grupę abelową.

4. Niech $(G_1, \circ)$ oraz $(G_2, \diamond)$ będa dwiema grupami. Udowodnić, że zbiór par (g_1, g_2), gdzie $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, tworzy grupę względem działania określonego wzorem:

$$(g_1, g_2) \bigtriangledown (g_1', g_2') = (g_1 \circ g_1',\, g_2 \diamond g_2'), \quad g_1, g_1' \in G_1, \quad g_2, g_2' \in G_2.$$

Grupę tę nazywamy **sumą prostą grup** $(G_1, \circ)$ oraz $(G_2, \diamond)$.

5. Niech $G = [0, 2)$. Określmy w G działanie

$$a \oplus b = a + b - 2\,[a + b]\,.$$

Sprawdzić, czy G wraz z działaniem $\oplus$ stanowi grupę.

6. Zbadać, czy zbiór wielomianów $\mathbf{R}[x]$ podzielnych przez wielomian $x^2 + 1$ stanowi grupę ze względu na mnożenie.

7. Wykazać, że zbiór B_n wszystkich ciagów n-elementowych $(a_1, a_2, ..., a_n)$, których elementami są zera i jedynki jest grupą abelową skończoną względem działania

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \bigtriangledown (b_1, b_2, ..., b_n) = \left(a_1 \underset{2}{+} b_1,\, a_2 \underset{2}{+} b_2, ..., a_n \underset{2}{+} b_n\right).$$

Określić rząd tej grupy.

8. Udowodnić, że grupa której każdy element spełnia warunek $a^2 = e$ (e-element neutralny) jest abelowa.

9. Sprawdzić, czy zbiór liczb rzeczywistych z działaniem

$$x \circledast y = \left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}\right)^5, \ x, y \in \mathbf{R},$$

stanowi grupę abelową.

10. **Centrum grupy** G nazywamy zbiór tych elementów G, które są przemienne z dowolnym elementem grupy G :

$$Z(G) = \left\{ a \in G; \bigwedge_{g \in G} ag = ga \right\}.$$

Wykazać, że $Z(G)$ jest podgrupą grupy G.

11. Wyznaczyć centrum grupy macierzy postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$.

12. Czy następująca podgrupa grupy wszystkich izometrii płaszczyzny jest cykliczna:

a) podgrupa wszystkich przesunięć,
b) podgrupa przesunięć o ustalony wektor $\mathbf{v}$,
c) podgrupa złożona z tożsamości i ustalonej symatrii osiowej,
d) podgrupa obrotów dokoła ustalonego punktu o kąt π,
e) podgrupa wszystkich obrotów dokoła ustalonego punktu?

13. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n, grupa reszt $\mathbf{Z/n}$ jest cykliczna.

Grupy permutacji

14. Obliczyć $\tau\sigma$, $\tau\sigma^2$, $\sigma\tau\sigma^{-1}$, $(\tau\sigma)^2$, $\sigma\tau^{-1}$, gdzie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 7\,3\,1\,8\,2\,4\,5\,6 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 4\,8\,6\,5\,2\,3\,1\,7 \end{pmatrix}.$$

16. Rozłożyć na iloczyn cykli permutacje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 1 & 7 & 2 & 9 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Znaleźć permutację ξ spełniająca równanie $\tau\xi\sigma = \rho$, gdzie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Niech

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 9 & 2 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 & 3 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Przedstawić permutacje w postaci iloczynu transpozycji.

b) Obliczyć $sgn\,\sigma$, i $sgn\,\tau$.

19. Dla jakich liczb naturalnych n permutacja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ n & n-1 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jest parzysta ?

20. Obliczyć ilość inwersji w następujących ciągach:

a) $(\ 1,\ \ 2,\ \ ...\ \ ,\ m,\ \ n,\ \ n-1,\ \ ...\ \ ,\ m+1\ )$, $(m < n)$,

b) $(\ n,\ \ n-1,\ \ ...\ \ ,\ m+1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ ...\ \ ,\ m\ )$ $(m < n)$.

Homomorfizmy, izomorfizmy grup

20. Wskazać, które z przekształceń grupy addytywnej liczb całkowitych na siebie są homomorfizmami:

a) $\varphi(n) = 2n$, b) $\varphi(n) = 2n+1$, c) $\varphi(n) = n$?
W przypadku gdy φ jest homomorfizmem wyznaczyć jądro.

21. Wykazać, że grupa macierzy nieosobliwych stopnia n o elementach rzeczywistych odwzorowuje się homomorficznie na grupę multiplikatywną liczb rzeczywistych. Co jest jądrem tego homomoprfizmu?

22. Dla jakich grup odwzorowanie $a \to a^{-1}$ jest automorfizmem?

23. Zbadać, czy grupa multiplikatywna liczb rzeczywistych różnych od zera jest izomorficzna z grupą addytywną liczb rzeczywistych.

24. Wyznaczyć nietrywialny homomorfizm grup:
a) $\mathbf{Z/8} \to \mathbf{Z/12}$,
b) $\mathbf{Z/12} \to \mathbf{Z/8}$.

25. Wykazać, że zbiór $A = [0,1)$ z działaniem

$$x \oplus y = x + y - [x + y]$$

jest grupą izomorficzną z grupą multiplikatywną liczb zespolonych o module równym jeden.

26. Wykazać, że grupa addytywna $\mathbf{Z/n}$ jest izomorficzna z grupą multiplikatywną pierwiastków n-tego stopnia z jedności.

27. Wykazać, że zbiór U macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $x \in \mathbf{R}$, stanowi podgrupę macierzy trójkątnych stopnia 2 izomorficzną z multiplikatywną grupą $\mathbf{R}^+$.

29. Wykazać, że zbiór obrotów dowolnego n-kąta foremnego dokoła jego środka stanowi grupę izomorficzną z pewną podgrupą grupy permutacji parzystych grupy S_n.

Dzielnik normalny. Grupy ilorazowe

30 Wykazać, że H jest dzielnikiem normalnym grupy G wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $a \in G$ i dowolnego $h \in H$ iloczyn $a\,h\,a^{-1} \in H$.

31. Wykazać, że grupa macierzy stopnia n o elementach rzeczywistych i o wyznacznikach równych 1 (tzw. **grupa unimodularna**) jest dzielnikiem normalnym w grupie wszystkich macierzy rzeczywistych nieosobliwych stopnia n z mnożeniem jako działaniem.

32. Dowieść, że zbiór macierzy M macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

jest grupą ze względu na mnożenie macierzy. Dla jakich wartości parametrów a, b, M jest dzielnikiem normalnym?

33. Grupa $\mathbf{S}_3$ ma następujące podgrupy właściwe:

$$\mathbf{A}_3 \ : \ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{S}_2 : \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix};$$
$$\mathbf{S}_2' \ : \ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{S}_2'' : \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}.$$

Które z nich są dzielnikami normalnymi?

34. Wykazać, że jeśli A oraz B są dzielnikami normalnymi grupy G i $a \in A$, $b \in B$, to $a\,b\,a^{-1}b^{-1} \in A \cap B$.

35..Wykazać, że grupa ilorazowa której elementami są półproste wychodzące z poczatku układu współrzędnych w $\mathbf{R}^2$, jest izomorficzna z grupą multiplikatywną liczb zespolonych o module równym jedności.

36. Podzielmy grupę addytywną wielomianów o współczynnikach rzeczywistych przez podgrupę wielomianów podzielnych przez $x^2 - 1$. Wykazać, że otrzymana grupa ilorazowa jest izomorficzna z grupą addytywną $\mathbf{R}^2$.

37. Podzielmy multiplikatywną grupą liczb zespolonych, różnych od zera, przez podgrupę liczb zespolonych o module równym 1. Wykazać, że ta grupa jest izomorficzna z multiplikatywną grupą liczb rzeczywistych dodatnich.

Pierścienie i ciała

38. Sprawdzić, które z następujacych zbiorów są pierścieniami (za każdym razem jako dzialania rozpatruje się zwykłe w tym zbiorze dodawanie i mnożenie):

a) zbiór liczb zespolonych postaci bi, gdzie b jest liczba rzeczywistą,
b zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi,
c) zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi,
d) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi,
e) zbiór funkcji rzeczywistych określonych na prostej.

39. W pierścieniu $\mathbf{Z/10}$ rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

40. W $\mathbf{Z}/12$ rozwiązać równania

$a)\quad x^2 - 7x = 0, \qquad b)\quad x^3 - 2x^2 + 3 = 0, \qquad c)\quad (x-1)\,(x+1) = 1.$

41. Czy zbiór wektorów przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wraz z dodawaniwm wektorów i iloczynem wektorowym stanowi pierścień? Czy istnieją tu dzielniki zera?

42. Sprawdzić, które z następujacych zbiorów są ciałami (za każdym razem jako dzialania rozpatruje się zwykłe w tym zbiorze dodawanie i mnożenie):
a) wielomiany o współczynnikach całkowitych,
b) zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi?
c) zbiór postaci $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

43. Udowodnić,że zbiór liczb rzeczywistych z działaniami

$$a \oplus b = a + b + 1, \qquad a \circledcirc b = a + b + ab$$

jest ciałem. (Nie jest to ciało liczbowe.)

Homomorfizmy, izomorfizmy ciał i pierścieni

44. Udowodnić, odwzorowanie ciała liczb zespolonych na siebie dane wzorem $h(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$, jest izomorfizmem.

45. Czy ciało liczbowe złożone z liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Q$, jest izomorficzne z ciałem liczbowym złożonym z liczb postaci: $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in Q$?

46. Udowodnić, że ciało macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b \in Q$, jest izomorficzne z ciałem liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Q$.

47. Udowodnić, że pierścień wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych odwzorowuje sie homomorficznie na ciało liczb rzeczywistych.

Wielomiany

48. Znaleźć sumę i iloczyn wielomianów

$$x^3 + 2\,i\,x^2 - 1 + i, \qquad i\,x^2 + 3\,x^2 - (1+i)\,x'$$

w pierścieniu $\mathbf{C}\,[x]$ wielomianów nad ciałem $\mathbf{C}$ liczb zespolonych.

49. Na przykładzie odpowiednio dobranych wielomianów o współczynnikach z pierścienia $\mathbf{Z}/\mathbf{8}$ pokazać,że stopień iloczynu dwu wielomianów może być mniejszy od sumy stopni czynników.

50. Wykazać, że wielomiany $1-x$ oraz $1-x^3$ określają w ciele $\mathbf{Z}/\mathbf{3}$ jedną i tę samą funkcję.

51. Znaleźć wartości wielomianów

$$x^5 + 3x^4 - x^2 + 1, \qquad 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 + x - 3,$$

w pierścieniu $\mathbf{Z}/\mathbf{6}$, dla $x = 3$.

52. Przedstawić wielomian

$$x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 2$$

z pierścienia wielomianów nad pierścieniem $\mathbf{Z}/\mathbf{4}$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

53. Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia podanych wielomianów w $\mathbf{R}\,[x]$.
a) $P\,(x) = 6x^4 + 3x^2 - x - 3, \quad Q\,(x) = x^2 - 1,$
b) $P\,(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2, \quad Q\,(x) = x^2 - 2x + 3.$
c) $P\,(x) = 2x^7 + 3x^4 - x + 1, \quad Q\,(x) = x^3 + x^4 + x + 1.$

54. Wyznaczyć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez g w $\mathbf{Z}\,[x]$ oraz $\mathbf{Z}/\mathbf{8}\,[x]$, gdy

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 7, \qquad g(x) = x^2 + 3x - 1.$$

55. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:
a) $x^3 - 2x^2 + 5x + 8,$
b) $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3,$
c) $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x - 2.$

56. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:
a) $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1,$
b) $4x^4 + x^2 - 3x + 1.$

57. Policzyć największy wspólny dzielnik wielomianów

$$8x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2, \qquad x^4 - 4x + 3 \in \mathbf{R}[x].$$

58. Dane są wielomiany

$$f(x) = 3(x-1)^4(x+1)^3\left(x^2+1\right), \qquad g(x) = -6(x-1)^2(x+1)^7\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right).$$

Znaleźć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność tych wielomianów.

Liczby zespolone

Podstawowe własności

1. Wykonać podane działania:

a) $(-3+2i)+(4+i)$, b) $(7-6i)-(1+4i)$,

c) $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(3-2i)$, d) $\frac{5+3i}{1-i}$.

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania**:**

a) $z^2 - \overline{z} = 0$

b) $z^2 + z - 2 = 0$

c) $2z + (1+i)\overline{z} = 1 - 4i$

3. Znaleźć takie liczby rzeczywiste λ i μ aby zachodziły równości:

a) $\lambda(2+3i)+\mu(4-5i) = 6-2i,$

b) $\lambda(4-3i)^2+\mu(1+i)^2 = 7-12i,$

c) $\frac{2\lambda-3i}{5+3i}+\frac{3\mu+2i}{3-5i} = 0.$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej Wzór de'Moivre'a

4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez użycia tablic) następujące liczby zespolone:

a) $1, \ -1, \ i, \ -i,$ b) $1+i, \ 1-i, \ -1-i,$ c) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$ d) $-\sqrt{5}.$

5. Wykonać działania stosując przedstawienie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej:

$a)\quad (1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right), \qquad b)\quad \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}, \qquad c)\quad \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+i}\right), \qquad d)\quad (1+i)^7.$

6. Obliczyć. Wynik podać w postaci algebraicznej liczby zespolonej):

a) $\left(\frac{1+i}{i-\sqrt{3}}\right)^{2004}$.) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$, b) $(\cos 33^0 + i\sin 33^0)^{10}$, c) $\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}$,

d) $\left(\frac{1+i}{i-\sqrt{3}}\right)^{2004}$, e) $\mathrm{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)^2}\right)$.

7. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyprowadzić wzory na:

a) $\sin 3x$, b) $\cos 5x$, c) $\sin 6x$.

8. Udowodnić następujące wzory:

$$a)\quad \cos 2nx = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k \cos^{2(n-k)}x\ \sin^{2k}x,$$

$$b)\quad \sin 2nx = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k \cos^{2(n-k)-1}\sin^{2k+1}x,$$

gdzie $x\in\mathbf{R}$, a $n\in\mathbf{N}$.

9. Obliczyć i narysować na płszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

a) $\sqrt{-2i}$, b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$, c) $\sqrt[6]{1}$.

10. Przedstawić w postaci algebraicznej pierwiastki kwadratowe nastepujących liczb zespolonych, bez posługiwania się postacia trygonometryczną liczby zespolonej:

$a)$ i, $-i$, $b)$ $3+4i$, $8+6i$, $c)$ $-2-3i$.

11. Obliczyć:

$a)$ $\sqrt[4]{16}$, $b)$ $\sqrt[4]{-1}$, $c)$ $\sqrt[4]{i}$.

12. Znaleźć rozwiązania podanych równań:

$a)$ $z^4 = (1-i)^4$,

$b)$ $(z-1)^6 = (i-z)^6$,

$c)$ $z^3 = (iz+1)^3$.

13. Rozwiązać równanie kwadratowe:

$a)$ $z^2 - 3z + 3 + i = 0$,

$b)$ $(4-3i)\,z^2 - (2+11i)\,z - (5+i) = 0$,

$c)$ $z^2 + 2\,(1+i)\,z + 2i = 0$.

14. Rozwiązać równanie dwukwadratowe:

$a)$ $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$,

$b)$ $z^4 - (18+4i)\,z^2 + 77 - 36i = 0$.

15. Rozwiązać równanie:

$a)$ $(z^3 - i)\,(z^2 - 5iz - 6) = 0$,

$b)$ $z^6 - (1+8i)\,z^3 + 8i = 0$,

$c)$ $(z-i)^n + (z+i)^n = 0$,

$d)$ $z^6 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12}$,

$e)$ $z^4 = \dfrac{-18}{1+i\sqrt{4}}$.

16. Niech ε_i oznacza i-ty pierwiastek n-tego stopnia z jedności, $i = 1, 2, ..., n-1$. Policzyć

$a)$ $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{n-1}$,

$b)$ $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_{n-1}$.

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

17. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych spełniających warunek:

a) $|z-i| = |z+2|$, b) $3 \le |z+i| \le 5$ c) $|z-2+i| = 6$, d) $Imz \le 3$ i $Rez \ge 5$.

e) $0 < Argz^3 < \frac{\pi}{2}$, f) $Arg\,(z-1) = \frac{\pi}{3}$, g) $0 \le Arg\,(z-3+2i) \le \frac{\pi}{3}$,

$h)$ $\dfrac{|z-1|}{|z+1|} = \lambda, \quad \lambda \ge 0,$ $i)$ $log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{|z|^2 + |z| + 1}{2+|z|}\right) < 1.$

18. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A \cap B$, gdy

a) $A = \{z \in \mathbf{C};\ 1 \le |z+1+2i| \le 2\}$, $B = \left\{z \in \mathbf{C};\ -\frac{\pi}{2} \le Arg\,(z+1) \le 0\right\}$,

b) $A = \{z \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\,(z^2) = 2\}$, $B = \left\{z \in \mathbf{C};\ [\mathrm{Re}\,(z+i)]^2 = 1\right\}$,

c) $A = \left\{z \in \mathbf{C};\ 0 < Arg\,(i\,z) < \frac{\pi}{2}\right\}$, $B = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = \mathrm{Re}\,z + 1\}$,

d) $A = \{z \in \mathbf{C};\ Arg\,(z^6) = \pi\}$, $B = \{z \in \mathbf{C};\ |z+i| + |z-i| < 2\}$.

19. Udowodnić tożsamość:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Jaki jest sens geometryczny tej tożsamości?

Macierze - działania na macierzach

1. Wykonać podane działania:

a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; *d)* $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; *g)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Policzyć

$a)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^3;\quad b)\ \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5;\quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n;\quad d)\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n;$

$$e)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}^3; \qquad f)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}^n;$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b)\ \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą Gaussa-Jordana

Następujące układy równań rozwiązać stosując **metodę eliminacji Gaussa-Jordana:**

$$a)\ \begin{aligned} x+y+2z &= 1 \\ 3x-y+z &= -1 \\ -x+3y+4z &= 1 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} -2x+3y+3z &= -9 \\ 3x-4y+z &= 5 \\ -5x+7y+2z &= -14 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ x\quad +z &= 5 \\ 2x+5y+2z &= 5, \end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned} x_1+3x_2+x_3 &= 4 \\ -3x_1+x_2 &= 4 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 3, \end{aligned} \qquad e)\ \begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3 &= 11 \\ -2x_1+x_2+3x_3 &= -5 \\ 2x_1+x_2-x_3 &= 8, \end{aligned}$$

$$f)\ \begin{aligned} x_1-3x_2\qquad\quad -x_4 &= -1 \\ -x_1+3x_2+x_3\quad +x_4 &= 3 \\ 2x_1-6x_2+x_3\quad -x_5 &= -1 \\ -x_1+3x_2+2x_3+5x_4+x_5 &= 6, \end{aligned} \qquad g)\ \begin{aligned} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5 &= 0 \\ 3x_1+4x_2-x_3+x_4+3x_5 &= 1 \\ x_1-8x_2+5x_3-9x_4+x_5 &= -1 \\ 2x_1-9x_2+6x_3+11x_4+2x_5 &= -1. \end{aligned}$$

$$h)\quad \begin{aligned} 6\,x_1-4x_2+5x_3+2x_4+3x_5 &= 1\\ 3\,x_1-2x_2+4x_3+x_4+2x_5 &= 3\\ 3\,x_1-2x_2-2x_3+x_4 &= -7\\ 9\,x_1-6x_2+3x_3+3x_4+2x_5 &= 2, \end{aligned}$$

$$i)\quad \begin{aligned} 2\,x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5 &= 2\\ 6\,x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5 &= 3\\ 6\,x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5 &= 9\\ 4\,x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5 &= 1, \end{aligned}$$

$$j)\quad \begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5 &= 0\\ x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5 &= 1\\ x_1+2x_3-x_4 &= -1, \end{aligned}$$

$$k)\quad \begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &= 1\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5 &= -1\\ 5x_1-2x_2-4x_5 &= 0, \end{aligned}$$

$$l)\quad \begin{array}{ccccccccccc} 2x & + & 3y & + & 2z & & & - & t & = & 3\\ 2x & + & y & + & z & + & 2s & + & 3t & = & 6\\ 3x & & & - & z & + & s & + & t & = & 3\\ & & y & & & + & 4s & + & t & = & 1\\ 2x & + & y & + & z & - & 2s & + & 5t & = & 8. \end{array}$$

Macierze - macierz odwrotna, transponowana

4. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy stopnia n

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1\\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1\\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & n-1 & n\\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & . & . & n-2 & n-1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & . & . & . & n-3 & n-2\\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Rozwiązać równanie macierzowe

$$a)\ \left(\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2\\ 1 & 0 \end{bmatrix},\qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix} -1 & 2\\ 3 & -1\\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

6. Wyznaczyć macierz

$$\left(A - C^T\right)^T \; A\,B^2, \quad gdzie\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Rozwiązać równania macierzowe

$$a)\ X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Korzystając z własności działań na macierzach oraz własności transponowania macierzy uzasadnić następujace tożsamości

a)

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

gdzie A, B, C są macierzami o wymiarach odpowiednio n x m, m x k, k x l;

b)

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2,$$

gdzie A i B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

Macierze - równania macierzowe

9. Rozwiązać równanie

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

10. Znaleźć wszystkie macierze A takie, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Rozwiązać równania

$$a)\ X - iX^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ X \cdot X^T - X^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. Sprawdzić, że macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ spełnia równanie $\mathrm{A}^2 - 3A + 2I = 0$ i korzystając z tego faktu pokazać,że

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A),$$

I jest tu macierzą jednostkową stopnia drugiego

5. Udowodnić następujące własności macierzy:

a) Różnica dwóch macierzy diagonalnych tego samego stopnia jest macierzą diagonalną.

b) Dla dowolnej macierzy kwadratowej A macierz A - A ^{T} *jest skośnie symetryczna.*

Macierz kwadratową P nazywamy *idempotentną* jeżeli $\mathrm{P}^2 = P$.

c) Jeżeli macierz P jest idempotentna, to dla każdej macierz A tego samego stopnia co P macierz

Q = P + AP - PAP jest idempotentna.

d) Jeżeli macierz P jest macierza idempotentną, to macierz Q = I - aP jest odwracalna dla a $\neq 1$ i

$\mathrm{Q}^{-1} = I + \frac{a}{1-a}P$.

e) Jeżeli macierze AB i ABC sa odwracalne, to macierz C jest odwracalna.

Wyznaczniki

1. Policzyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} i & 1-i \\ 2i & 1 \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; $d)$ $\begin{vmatrix} z & -\bar{z} \\ z & \bar{z} \end{vmatrix}$;

$e)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; $f)$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; $g)$ $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; $h)$ $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, gdzie $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}$; $j)$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

$k)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix};\qquad l)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & i & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 & 0 & 0 \\ \sin x & \cos x & 2 & i & 0 \end{vmatrix};\qquad \text{ł})\ \begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

2. Elementy macierzy A oraz A^{-1} są liczbami calkowitymi. Jaka jest wartość wyznacznika macierzy A?

3. Korzystając z indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości:

$$\text{a)}\ \ W_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1},\ n - \textit{stopień wyznacznika};$$

$$\text{b)}\ \ W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} = 1,\ n - \text{stopień wyznacznika}.$$

4. Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 4x-2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 3 & 6 \\ x+1 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4x \\ -1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & x^2-2 & x+3 \\ -1 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Obliczyć podane wyznaczniki stopnia n:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = 8A^{-1}$; *b*) $A^3 - A = 0$; *c*) $A^T = 4A^{-1}$?

7. Korzystając z twierdzenia o macierzy odwtotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych macierzy:

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad b)\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\ gdzie\ \alpha \in \mathbf{R}; \qquad \mathbf{c})\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Policzyć wyznaczniki:

$$a)\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

9. Niech A i B będą macierzami tego samego stopnia. Wskazać które z podanych niżej wzorów są ogólnie prawdziwe. Do wzorów nieprawdziwych podać kontrprzykłady.

a) $\det\,(A+B) = \det A + \det B$;

b) $\det\,(\lambda A) = \lambda \det A$, gdzie $\lambda \in \mathbf{R}$;

c) $\det\,(A^2) = \det A\ \det(A^T)$.

Wyznacznikiem *Vandermonde'a* nazywamy wyznacznik postaci

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le l < k \le n} (x_k - x_l).$$

10. Wykazać, że

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 9 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{\infty} k!\,; \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{\infty} k!\,.$$

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

11. Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy diagonalnej stopnia n która na głównej przekątnej ma kolejne liczby naturalne.

Pojęcie przestrzeni wektorowej. Podprzestrzenie liniowe

Zadanie 1. Wykazać, $\mathbf{K}^n$, gdzie $\mathbf{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, z działaniami:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \\ \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n), \end{aligned}$$

$\alpha,\ x_i, y_i \in K$ dla $i \in \{1, 2, ..., n\}$, jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbf{K}$.

Zadanie 2. Wykazać, że zbiór $\mathbf{C}_{(a,b)}$ wszystkich funkcji określonych na przedziale (a, b), przyjmujących wartości rzeczywiste, stanowi przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. (Dodawanie funkcji i mnożenie funkcji przez liczbe rzeczywistą określone jest w sposób standardowy).

Zadanie 3. Wykazać, że zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, stopnia $\leq n,\ n \in \mathbf{N}$, ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem przez liczby rzeczywiste, stanowi przestrzen wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Zadanie 4. Pokazać, korzystając z definicji, że zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy trójkątnych górnych stopnia 2, wraz dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczby rzeczywiste, stanowi przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Zadanie 5. Sprawdzić, czy $\mathbf{W} = \{(x, y)\,;\ x \in \mathbf{R},\ y = 0 \in \mathbf{R}\}$ z działaniami:

$$(x, 0) \boxplus (x', 0) = (x + x', 0)\,, \qquad \alpha \boxdot (x, 0) = (\alpha x, 0)\,,\ \alpha \in \mathbf{R}^2,$$

jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbf{R}^2$.

Zadanie 6. Niech $\mathbf{F} = \{f \in \mathbf{F};\ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$.

Wykazać, że $\mathbf{F}$ wraz ze zwykłym dodawaniem funkcji i mnożeniem funkcji przez liczby rzeczywiste, stanowi przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. **b)**

Pokazać, że zbiór $\mathbf{F}_{0,1} = \{f \in \mathbf{F};\ f(0) = f(1) = 0\}$ stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbf{F}$.

Zadanie 7. Oznaczmy symbolem $\mathbf{F}_{[2,5]}$ przestrzeń funkcji rzeczywistych ciągłych na odcinku $[2, 5]$. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbf{V} = \left\{\, f \in \mathbf{F}_{[2,5]}\,;\ f(2) = 3\,F(5)\right\}$ stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbf{F}_{[2,5]}$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy zbiór wielomianów rzeczywistych podzielnych przez wielomian $x^2 + 1$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wszystkich wielomianów rzeczywistych.

Zadanie 9. Sprawdzić, czy zbiór

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4;\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$$

stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

Zadanie 10. Sprawdzić, czy zbiór

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5;\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0,\ x_2 - 4x_3 + x_5 - 1 = 0\right\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbf{R}^5$.

Zadanie 11. Uzasadnić, że podane zbiory $\mathbf{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych $\mathbf{V}$:

a) $\mathbf{W} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 2x = 3y\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$.

b) $\mathbf{W} = \{(x, y, z);\ x - y = y + z = 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$,

c) $\mathbf{W} = \left\{f \in \mathbf{C}_{[0,1]};\ f\,'(0) = 0\right\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{C}_{[0,1]}$.

Zadanie 12. Czy podane zbiory $\mathbf{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych $\mathbf{V}$?

a) $\mathbf{W} = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ x + y & 2x \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbf{R}\right\}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{M}_2\,(\mathbf{R})$,

b) $\mathbf{W} = \left\{\mathbf{A};\ \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

Liniowa zależność wektorów

Zadanie 13. Wektory (3,-2,5), (0,1,0) przedstawić jako kombinacje liniowe wektorów:

a) $(3, -2, 5)\,, \quad (0, -1, -1)\,;$
b) $(3, -2, 5)\,, \quad (1, 1, 1)\,, \quad (0, -5, 2)\,;$
c) $(1, -2, 3)\,, \quad (1, 0, 1)\,, \quad (-1, -2, 1)\,.$

Zadanie 14. Zbadać liniową zależność następującego układu wektorów przestrzeni $\mathbf{R}^3$

a) $(1, 0, 2)\,, \quad (1, 3, 0), \quad (1, 1, 1),$ *b)* $(2, 3, 1)\,, \quad (3, 2, 0)\,, \quad (7, 8, 2)\,.$

Zadanie 15. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ takie, że układ wektorów

$$(1,2,2a)\,,\quad (3,2,1)\,,\quad (2,0,a)$$

jest liniowo niezależny w $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 16. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru m dla których układ wektorów

$$(1,2,0)\,,\quad (2,-1,-1)\,,\quad (0,m,2)$$

w przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^3$ jest liniowo zależny.

Zadanie 17, Zbadać liniową zależność wektorów

$a)$ $1,\ \sin x,\ x;$
$b)$ $2,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,\ x^2+1;$
$c)$ $2^x,\quad 2^{x+1},\quad \cos x,\quad \sin 2x;$
$d)$ $x+1,\quad x^2+1,\quad x^2+2x+2,\quad x^3-1,\quad x^3-x^2;$

w przestrzeni funkcji rzeczywistych ciąłych na przedziale $[0,2\pi]$.

Zadanie 18, Sprawdzić, czy funkcje

$$x^2+1,\quad \sin x,\quad tgx$$

w przestrzeni funkcji ciagłych określonych na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ są liniowo niezależne.

Zadanie 19. Zbadać, czy jeśli wektory $u,\ v,\ w\ \in \mathbf{V}(\mathbf{K})$ są liniowo niezależne, to wektory

$a)$ $u+v,\quad u+v+w,\quad w,$
$b)$ $u+v-w,\quad u-v,\quad u+v;$

też są liniowo niezależne?

Zadanie 20. Zbadać liniową niezależność wektorów $I,\ A,\ A^2,$ dla $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbf{M}_2\,(\mathbf{R})$.

Podprzestrzenie liniowe przestrzeni wektorowych

Zadanie 21. Który z następujących zbiorów jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbf{R}^3$?

$a)$ $U = \{ (x, y, 1) \; ; \; x, y \in \mathbf{R} \}$,

$b)$ $U = \{ (x, y, z) \, ; \; x + 2y - z = 0, \; x, y, z \in \mathbf{R} \}$,

$c)$ $U = \{ (0, 0, z) \, ; \; z \in \mathbf{R} \}$,

$d)$ $U = \{ (x, y, 0) \, ; \; x^2 = y^2, \; x, y \in \mathbf{R} \}$,

$e)$ $U = \{ (x, y, z) \; ; \; x^2 + y^2 + z^2, \; x, y, z \in \mathbf{R} \}$,

$f)$ $U = \{ (x, x, z) \, ; \; x, z \in \mathbf{R} \}$.

Zadanie 22. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3, którą oznaczamy symbolem $\mathbf{P}_3$?

$a)$ $U = \{ (f(x) \, ; \; f(2) = 1, \; f(x) \in \mathbf{P}_3 \}$,

$b)$ $U = \{ x \; f(x) \, ; \; f(x) \in \mathbf{P}_2 \}$,

$c)$ $U = \{ x \; f(x) \, ; \; f(x) \in \mathbf{P}_3 \}$,

$d)$ $U = \{ x \; f(x) + (1 - x) \, g(x) \; ; \; f(x), \; g(x) \in \mathbf{P}_2 \}$,

$e)$ $U = \{ f(x) \, ; \; f(2) = 0, \; f(x) \in \mathbf{P}_3 \}$.

Zadanie 23. Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni macierzy $M_2(\mathbf{R})$?

$a)$ $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$,

$b)$ $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; ; \; a + b = c + d, \; a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$,

$c)$ $\{ A \, ; \; A \in M_2(\mathbf{R}), \; A = A^T \}$

$d)$ $\{ A \, ; \; A \in M_2(\mathbf{R}), \; A \, B = 0 \}$, gdzie B jest pewną macierzą należącą do $M_2(\mathbf{R})$,

$e)$ $\{ A \, ; \; A \in M_2(\mathbf{R}), \; A^2 = A \}$,

$f)$ $\{ A ; \; A \in M_2(\mathbf{R}), \; \det A = 0 \}$.

Zadanie 24. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbf{F}_{[0,1]}$

a) $U = \{\ f\ ;\ f(0) = 1\}$,

b) $U = \{\ f\ ;\ f(0) = 0\}$,

c) $U = \{\ f\ ;\ f(0) = f(1)\}$,

d) $U = \{\ f\ ;\ f(x) \geq 0 \ dla\ ka\dot{z}\deg o\ x \in [0,1]\}$.

Zadanie 25. Który z podanych niżej wektorów jest kombinacją liniową wektorów

$$x + 1, \quad x^2 + x, \quad x^2 + 2,$$

a) $x^2 + 3x + 2$, *b*) $2x^2 - 3x + 1$, *c*) $x^2 + 1$, *d*) $x + 5$.

Zadanie 26. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{v}$ jest elementem podprzestrzeni $lin(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$;

b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$;

c) $\mathbf{v} = (4, 1, -3, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 3)$;

d) $\mathbf{v} = x$, $\mathbf{u} = x^2 + 1$, $\mathbf{w} = x + 4$;

e) $\mathbf{v} = x^3$, $\mathbf{u} = 2x^2 + 1$, $\mathbf{w} = x^3 + 2x^2 + 4$;

f) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 27. Niech $x \in [0, \pi]$. Które z podanych niżej funkcji są elementami podprzestrzeni $lin(\cos x^2, \sin^2 x)$?

a) $\cos 2x$, *b*) $\sin 2x$, *c*) $\sin x + \cos x$, *d*) x^3, *e*) $x^2 + 1$, *f*) 1, *g*) 5.

Zadanie 28. (*a*) Sprawdzić, czy przestrzeń $\mathbf{R}^3$ jest rozpięta na wektorach $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$.

(b) Sprawdzić, czy przestrzeń $\mathbf{P}_2$ jest rozpięta na wektorach $1+2x^2,\ 3x,\ 1+x.$

(c) Sprawdzić, czy przestrzeń $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ jest rozpięta na wektorach

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Zadanie 29. Sprawdzić czy następujący układ wektorów stanowi bazę przestrzeni wektorowej $\mathbf{V}$

a) $((1,0,-1)\,,\ (1,-1,0),\ (0,1,-1));\quad \mathbf{V}=\mathbf{R}^3,$

b) $((1,2,-1)\,,\ (3,-1,0),\ (5,3,-2));\quad \mathbf{V}=\mathbf{R}^3,$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{V}=\mathbf{M}_2(\mathbf{R}),$

d) $1+x,\ x+x^2,\ x^3+x^2,\ x^3;\quad \mathbf{V}=\mathbf{P}_3,$

e) $(1,i,-1,0),\ (0,1,-i,1-i),\ (1,0,0,i),\ (0,1+i,0,0);\quad \mathbf{V}=\mathbf{C}^4.$

Zadanie 30. Znaleźć bazę i wymiar następujących podprzestrzeni przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

$a)$ $\{(a,a+b,a-b,b)\,;\ a,b\in\mathbf{R}\}\,,$

$b)$ $\{(a,b,c,d)\,;\ a+2b-c+3d=0,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\}\,,$

$c)$ $\{(a,b,c,d)\,;\ a-2b=3c-d,\ 3b-4d=a-2c,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\}\,.$

Zadanie 31. Znaleźć bazę i wymiar następujących podprzestrzeni przestrzeni przestrzeni $M_2(\mathbf{K})$.

$a)$ $\{A\,;\ A^T=-A\}\,,$

$b)$ $\left\{A\,;\ A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A\right\};$

$c)$ $\left\{A\,;\ A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A\right\},$

$d)$ $\left\{A\,;\ A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A\right\}.$

Zadanie 32. Niech $\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1, 3) \in \mathbf{R}^5$.

a) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbf{R}^5$ zawierającą wektor $\mathbf{v}$,
b) Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbf{R}^5$ nie zawierającą wektora $\mathbf{v}$.

Zadanie 33. Układ $((1, 2i, 0),\ (0, 1, -i))$ wektorów przestrzeni $\mathbf{C}^3$ uzupełnić do bazy tej przestrzeni.

Zadanie 34. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ złożonej ze wszystkich wektorów $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5$ spełniających układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie 35. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbf{U}$ złożonej ze wszystkich wektorów $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ spełniających układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie 36. Załóżmy, że układ wektorów $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ stanowi baze przestrzeni liniowej $\mathbf{V}$. Które z następujących układów wektorów przestrzeni $\mathbf{V}$ stanowią bazę tej przestrzeni?

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{u} + \mathbf{w},\ \mathbf{v} + \mathbf{w})$, *b)* $(2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w},\ 3\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{v} - 4\mathbf{w})$,

b) $(\mathbf{u},\ \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$, *d)* $(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ 3\mathbf{u} + \mathbf{v},\ -\mathbf{w},\ \mathbf{v} - 4\mathbf{w})$,

Zadanie 37. Czy istnieją takie wartości parametrów a i b, by wektory $(a, a + b, 0, 1)$, $(b, 2, a, 0)$ stanowiły bazę podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbf{R}^4$ danej równaniami:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie38. Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni wektorowych:

$a)$ $\mathbf{V} = \{p \in \mathbf{P}_4\,;\ p(1) + p(-1) = p'(0)\}$,

$b)$ $\mathbf{V} = lin\left(1,\, \sin^2 x,\, \cos 2x,\, \cos^2 x\right)$, prz czym $\mathbf{V} \subset \mathbf{C}(\mathbf{R})$.

(Symbol $\mathbf{P}_4$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów stopnia ≤ 4, a symbol $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ oznacza przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych ciągłych określonych na zbiorze liczb rzeczywistych.)

Suma. Suma prosta. Przestrzenie ilorazowe

Zadanie 1. Wyznaczyć $V_1 + V_2$. Kiedy $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$?

a) $V_1 = \{(x, 2x, z)\,;\quad x, z \in \mathbf{R}\}$, $\qquad V_2 = \{(x, x, x)\,;\quad x \in \mathbf{R}\}$,

b) $V_1 = \{(x, 2x, z)\,;\quad x, z \in \mathbf{R}\}$, $\qquad V_2 = \{(0, y, z)\,;\quad y, z \in \mathbf{R}\}$,

c) $V_1 = \{(x, y, x + y)\,;\quad x, y \in \mathbf{R}\}$, $\qquad V_2 = \{(x, y, y)\,;\quad x, y \in \mathbf{R}\}$.

Zadanie 2. Zbadać, czy $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2 V_1 \oplus V_3$, jeśli

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad 2x - y = 0\right\}, \qquad V_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad y + 3z = 0\right\}, \\ V_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad z = 0\right\}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeżeli $V' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad x + y + z = 0\}$, $\qquad V'' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad x = y = 0\}$, są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbf{R}^3$, to $\mathbf{R}^3 = V' + V''$.

Zadanie 4. Podprzestrzeń U przestrzeni $\mathbf{R}^3$ daną równaniem $x + y - z = 0$ przedstawić w postaci sumy prostej jej dwu podprzestrzeni jednowymiarowych.

Zadanie 5. Znaleźć równanie podprzestrzeni przestrzeni $\mathbf{R}^3$ będącej sumą prostą jej podprzestrzeni jednowymiarowych danych równaniami

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

Zadanie 6. Rozłożyć przestrzeń $\mathbf{R}^5$ na sumę prostą swoich podprzestrzeni, z ktorych jedna jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbf{R}^3$, a druga z przestrzenią $\mathbf{R}^2$.

Ogólnie: Rozłożyć przestrzeń $\mathbf{K}^n$ na sumę prostą swoich podprzestrzeni, z których jedna jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbf{K}^p$, a druga z przestrzenią $\mathbf{K}^q$, $p + q = n$.

Zadanie 7. Niech $V = V_1 \oplus V_2$, $dimV = n$. Dowieść, że jeśli $v_1, v_2, ..., v_p$ jest bazą przestrzeni V_1, $w_1, w_2, ..., w_q$ jest bazą przestrzeni V_2, $p + q = n$, to $v_1, v_2, ..., v_p, w_1, w_2, ..., w_q$ jest bazą przestrzeni V.

Zadanie 8. Dzielimy przzstrzeń $\mathbf{R}^3$ przez jej podprzestrzeń U daną równaniem $x + y - 2z = 0$. Znaleźć równania warstw elementów : $(1, 2, 0)$, $(3, 0, 1)$, $(1, 2, 3)$ oraz równanie warstwy będącej sumą warstw tych elementów.

Zadanie 9. Dzielimy przestrzeń $\mathbf{R}^4$ przez jej podprzestrzeń U daną równaniami $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$. Znaleźć

a) równania warstw elementów $(1, 1, 1, 1)$ i $(0, 1, 2, 0)$,

b) równania warstwy będącej sumą warstw elementów $(1, 1, 1, 0)$ i $(1, 1, 2, 0)$,

c) równania warstwy będącej różnicą warstw elementów $(1, -1, 1, 2)$ i $(1, 1, -3, 0)$,

d) równania warstwy będącej iloczynem warstwy elementu $(1, -1, 1, 2)$ przez liczbę 5.

Zadanie 10. W przestrzeni $C(\mathbf{R})$ funkcji rzeczywistych ciągłych na prostej rozważamy podprzestrzeń złożoną z funkcji które przyjmują wartość 0 na przedziele $[-1, 1]$. Opisać warstwy ilorazu przestrzeni $C(\mathbf{R})$ przez tę podprzestrzeń.

Zadanie 11. W przestrzeni $C(\mathbf{R})$ funkcji rzeczywistych ciągłych na prostej rozważamy podprzestrzeń $C_1(\mathbf{R})$ złożoną z funkcji które w 1 przyjmują wartość 0. Wykazać, że przestrzeń ilorazowa $C(\mathbf{R})/C_1(\mathbf{R})$

jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbf{R}$.

Zadanie 12. W przestrzeni $C(\mathbf{R})$ funkcji rzeczywistych ciągłych na prostej rozważamy podprzestrzeń $C_1(\mathbf{R})$ złożoną z funkcji które w 1 i -1 przyjmują wartość 0. Wykazać, że przestrzeń ilorazowa $C(\mathbf{R})/C_1(\mathbf{R})$

jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbf{R}^2$.

zadanie 13. Przestrzeń wielomianów $\mathbf{R}[x]$ dzielimy przez podprzestrzeń złożoną z wielomianów podzielnych przez wielomian $x^3 - x + 1$. Jaki jest wymiar otrzymanej przestrzeni ilorazowej?

Zadanie 14. Przestrzeń wielomianów $\mathbf{R}[x]$ dzielimy przez podprzestrzeń złożoną z wielomianów podzielnych przez wielomian

a) $x^2 - 1$,

b) $x^2 + 1$,

Zbadać, czy otrzymane przestrzenie ilorazowe są izomorficzne.

Zadanie 15. Niech V będzie przestrzenią wektorową o wymiarze n . V_1 i V_2 niech bedą jej podprzestrzeniami takimi, że $V = V_1 \oplus V_2$. Wykazać, że V/V_1 jest izomorficzna z V_2 oraz V/V_2 jest izomorficzna z V_1. Wskazać bazy otrzymanych przestrzeni ilorazowych.

Zadanie 16. Przestrzeń $\mathbf{R}^3$ dzielimy przez jej podprzestrzeń daną równaniami

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}.$$

Znaleźć bazę otrzymanej przestrzeni ilorazowej.

Układy równań liniowych. Rząd macierzy

Zadanie 1. Rozwiązać podane układy równań stosując metodę **macierzy odwrotnej**:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 4 \\ 2x &-& 3y &+& 5z &=& -5 \\ -x &+& 2y &-& z &=& 2 \end{array}; \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} & & y &+& z &+& t &=& 4 \\ x & & &+& z &+& t &=& -1 \\ x &+& y & & &+& t &=& 2 \\ x &+& y &+& z & & &=& -2 \end{array};$$

$$c)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x &+& y & & & & & & &=& 3 \\ & & y &+& z & & & & &=& 5 \\ & & & & z &+& u & & &=& 7 \\ & & & & & & u &+& v &=& 9 \\ 10x & & & & & & &+& v &=& 15 \end{array}$$

Zadanie 2. Rozwiązać przy pomocy **wzorów Cramera** następujące układy równań

$$a)\quad \begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - 5y + z &= -4 \\ 4x - 7y + z &= 5, \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} 2x - y - 6z + 3 &= 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15 &= 0 \\ x - 2y - 4z + 9 &= 0. \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6, \end{aligned} \qquad d)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 17 \\ -x_1 + 3x_3 - x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 9, \end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ 2\,x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 &= 5 \\ -2\,x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= -6 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned} \qquad f)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 79 \\ 3\,x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 &= 263 \\ 2\,x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 &= 146 \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 &= 92, \end{aligned}$$

$$g)\quad \begin{array}{l} a\,x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + a\,x_n = 1,\ a \in \mathbf{R}, \end{array} \qquad h)\quad \begin{aligned} i\,x + 2y + 3z + 4 &= 2\,i \\ 2x + 3y + 4z + t &= i \\ 3x + 4y + z + 2t &= 0 \\ 4x + y + 2z + 3t &= -i. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Pokazać, że wektory postaci $\begin{bmatrix} t-s-1 \\ t+s+1 \\ s \\ t \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbf{R}$, stanowią rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Zadanie 4 Zapisać na dwa sposoby wszystkie rozwiązania równania

$$2x - 3y - z = 0, \ x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 5. Znaleźć wartości parametrów $a, b, c \in \mathbf{R}$ dla których układ równań posiada jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiazań, nie posiada rozwiązań;

$a)$
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= a \\ x - y + 2z &= b \\ 5x + 3y - 4z &= c \end{aligned}$$

$a)$
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= a \\ 2y + 3z &= b \\ x \quad - z &= c \end{aligned}$$

$c)$
$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -8 \\ x \quad + z &= 2 \\ 3x + 3y + az &= b \end{aligned}$$

$d)$
$$\begin{aligned} a\,x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + a\,x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + a\,x_3 &= 1, \end{aligned}$$

$e)$
$$\begin{aligned} a\,x + y + z &= 1 \\ x + b\,y + z &= 1 \\ x + y + c\,z &= 1, \end{aligned}$$

$f)$
$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= -b \\ 3x + 5y - bz &= 3 \\ bx + 3by + z &= b. \end{aligned}$$

Zadanie 6. Znaleźć wartości parametru $z \in \mathbf{C}$ dla których układ równań posiada jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiazań, nie posiada rozwiązań;

$a)$
$$\begin{aligned} x_1 + z\,x_2 + z^2\,x_3 &= 0 \\ \bar{z}x_1 + x_2 + z\,x_3 &= 0 \\ \bar{z}^2 x_1 + \bar{z}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + z\,x_3 &= \bar{z} \\ x_1 + \bar{z}x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + z\,x_3 &= \bar{z}, \end{aligned}$$

Zadanie 7. Rozwiązać układ równań z parametrem $a \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a\,x + y + z + t &= 1 \\ x + a\,y + z + t &= a \\ x + y + a\,z + t &= a^2 \\ x + y + z + a\,t &= a^3. \end{aligned}$$

Rząd macierzy

Zadanie 8. . Znaleźć rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Znaleźć rząd macierzy wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix},2 \qquad c)\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad e)\ \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}, \quad f)\ \begin{bmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{bmatrix}.$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad i)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & - & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. Znaleźć wartości parametru λ dla których macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ma najmniejszy rząd.

Zadanie 11. Jak przedstawia się rząd macierzy A w zależności od parametru λ ?

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12. W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów

$$a) \quad \begin{aligned} x - y + 2z + t &= 1 \\ 3x + y + z - t &= 2 \\ 5x - y + 5z + t &= 4, \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 2x + 2y - z + t = 1 \\ x - y - z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - 4z - t = 0. \end{aligned}$$

Układy równań liniowych jednorodnych i niejednorodnych

Zadanie 13. Wyznaczyć przestrzenie rozwiązań podanych układów równań, znaleźć ich wymiary i bazy.

$$a) \quad \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & 0 \end{array}, \qquad b) \quad \begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & + & 4s & = & 0 \\ 2x & - & y & & & + & 2t & + & s & = & 0 \\ 4x & - & y & - & 3z & - & t & - & s & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & & & & & = & 0 \end{array}.$$

Zadanie 14. Przedstawić rozwiązania podanych układów równań niejednorodnych w postaci kombinacji liniowych rozwiązań odpowiednich układów jednorodnych i rozwiązań szczególnych:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & - & 2s & - & t & = & 6 \\ 4x & + & 7y & + & 2z & - & 5s & + & t & = & 17 \\ 6x & + & 5y & + & 3z & - & 2s & - & 9t & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & z & - & 5s & - & 10t & = & 12 \end{array} ; \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 3y & + & z & - & 2s & - & t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & + & s & + & 3t & = & 1 \\ x & - & 8y & + & 5z & - & 9s & + & t & = & -1 \end{array} .$$

Zadanie 15. Rozwiązać następujące układy równań:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \end{array} ; \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \end{array} ;$$

$$c)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 7 \end{array} ; \qquad d)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 1 \end{array} ;$$

$$e)\quad \begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} ; \qquad f)\quad \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{array} .$$

Przestrzenie afiniczne

1. Znaleźć środek układu punktów $((1,2,0),\ (3,5,6),\ (8,9,1))$ w $\mathbf{R}^3$ o wagach odpowiednio równych $\left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2. Udowodnić, że podprzestrzenie afiniczne przestrzeni $\mathbf{R}^3$:
a)

$$af\,((1,2,5)\,,\;(-1,1,2)) \quad \text{oraz} \quad af\,((8,-6,2)\,,\;(6,-7,-1))$$

są równoległe. Znaleźć ich równania.

b)

$$af\,((1,2,5,1)\,,\;(-1,1,2,3)) \quad \text{oraz} \quad af\,((3,6,9,7)\,,\;(1,5,6,9)\,,\;(1,1,0,0))$$

są równoległe.

3. Czy punkt $(1,2,3) \in \mathbf{E}\,(\mathbf{R}^3)$ należy do podprzestrzeni

a) $H = af\,\{(1,2,6)\,,\;(3,2,1)\,,\;(0,0,1)\}\,,$

b) $H = af\,\{(1,0,0)\,,\;(0,1,0)\,,\;(0,0,1)\}$? A punkt $\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$?

4. Czy podprzestrzenie

$$af\;\{(0,1,1)\,,\;(0,1,2)\,,\;(1,1,1)\} \quad \text{oraz} \quad af\;\{(2,1,1)\,,\;(0,1,0)\,,\;(2,1,2)\}$$

są identyczne?

5. Czy punkt $(0,0,0)$ należy do podprzestrzeni przechodzącej przez punkt $(1,1,0)$ i równoległej do $af\,\{(0,1,1)\,,\;(0,1,2)\,,\;(1,3,1)\}$?

6. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ znaleźć prostą l przechodząca przez punkt $(0,1,0)$ i przecinającą proste l_1 i l_2 o przedstawieniach parametrycznych:

$$l_1 : (x,y,z) = (1,0,0) + t\,(0,2,1)\,, \qquad l_2 : (x,y,z) = (0,0,0) + t\,(-1,0,-1)\,.$$

Znaleźć punkty przecięcia prostej l z prostymi l_1 i l_2.

7. Sprawdzić, czy podprzestrzenie afiniczne:

$$H_1 : \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \quad \text{oraz} \quad H_2 = af\,((1,0,-1)\,,\;(1,3,2)\,,\;(3,2,0))$$

są równoległe?

8. Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$ złożoną z punktów leżących na prostych l_1 i l_2 o przedstawieniach parametrycznych

$$l_1 : \quad (1,0,1) + t\,(0,1,1)\,, \qquad l_2 : \quad (0,0,0) + t\,(1,1,0)\,.$$

9. Znaleźć przedstawienie parametryczne podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozpiętej na układzie punktów

a) $(0,1,2,3)$, $(1,0,1,0)$, $(-1,2,0,4)$, $(1,1,3,3)$,
b) $(-2,1,0,3)$, $(0,0,-1,0)$, $(0,2,0,4)$, $(1,1,2,0)$,
c) $(2,1,0,-2)$, $(0,-1,1,0)$, $(2,0,1,-2)$, $(4,1,1,-2)$.

10. Wyznaczyć równania prostej w $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(3,-2,0)$ i przecinającej proste

a) $l_1: \begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& t \\ y &=& -1 &-& 2t \\ z &=& 2 &+& 3t \end{array}, \quad l_2: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& -t \\ y &=& -3 &+& t \\ z &=& 5 &+& 2t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R},$

b) $l_1: \begin{array}{rcrcr} x &=& 0 &+& 3t \\ y &=& -4 &+& t \\ z &=& 2 &+& t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l_2: \begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 3y &-& z &+& 3 &=& 0 \\ 4x &-& y &+& z &-& 1 &=& 0. \end{array}$

11. Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni afinicznej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ danej równaniem

a) $x_1 - 2x_4 = 0$,
b) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

12. Znaleźć wymiar podprzestrzeni afinicznej podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określonej układem równań

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 &-& 5x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &-& 1 &=& 0 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& x_3 &-& 3x_4 &-& 6 &=& 0\,. \end{array}$$

Przestrzenie euklidesowe

Iloczyn skalarny

1. Sprawdzić, czy rozważane funkcje są iloczynami skalarnymi w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

a) $\varphi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$, dla $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$;
b) $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}(1)\ \mathbf{q}(1) + 2\,\mathbf{p}(2)\ \mathbf{q}(2)$, dla $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{R}_1[x]$;
c) $\varphi((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = 2x_1y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$; dla $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbf{R}^3$.

2. Sprawdzić, czy $\mathbf{R}^3$ wraz z formą dwuliniową $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, określoną wzorem:

a) $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_3$;

b) $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2$;

c) $\varphi\left(\left(x_1, x_2, x_3\right), \left(y_1, y_2, y_3\right)\right) = \left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_2\right) + \left(x_1 - x_3\right)\left(y_1 - y_3\right) + x_3 y_3;$

jest przestrzenią euklidesową ?

3. Niech $\mathbf{F}_{[0,1]}$ oznacza przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $[0,1]$. Zdefiniujmy formę dwuliniową

$$\langle f, g\rangle = f(1)\ g(0) + f(0)\ g(1) \quad \text{dla} \quad f, g \in \mathbf{F}_{[0,1]}.$$

Czy ta przestrzeń liniowa z tak zdefiniowaną forma dwuliniową jest przestrzenią euklidesową ?

4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^4$:

a) Obliczyć długość wektora $(2, 0, 4, -1)$;

b) Zbadać prostopadłość wektorów $(-1, 1, -3, 2)$ i $(7, -2, 1, 6)$;

c) Obliczyć kąt między wektorami $(-2, 1, 2, 1)$ i $(1, 0, 1, -2)$.

5. W przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^3$ opisać zbiór wektorów prostopadłych do wektora $(1, 2, -2)$.

6. Stosując metodę Grama-Schmidta zortogonalizować podane wektory we wskazanych przestrzeniach euklidesowych:

a) $u = (1, 0, 1)$, $v = (4, 1, 0)$, $(0, 1, -2)$ w przestrzeni $\mathbf{E}^3$;

b) $u = (1, 0, 1, -1)$, $v = (4, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -2)$ w przestrzeni $\mathbf{E}^4$.

Baza ortogonalna i ortonormalna

7. Wskazać bazę ortogonalną w podprzestrzeni $lin\left((1, 1, 1, 1),\ (1, -1, 1, 1),\ (-1, 1, 1, -1)\right)$. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 5, 0, 10)$ w tej bazie.

8. Wyznaczyć bazę ortonormalną obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ danego wzorem

$$T\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 + 2x_2 - x_4,\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4,\ -x_2 + x_3 - x_4,\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4\right).$$

Przy czym w $\mathbf{R}^4$ mamy dany standardowy iloczyn skalarny.

9. W $\mathbf{R}^4$ mamy dany standardowy iloczyn skalarny.Wyznaczyć bazę ortogonalną jądra przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ danego wzorem

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=$$
$$=(x_1+x_2+2x_3,\ x_1+x_2+x_4,\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4,\ 2x_3-x_4,\ x_1+x_3-x_5)\,.$$

10. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$, ze zwykłym iloczynem skalarnym, dane są podprzestrzenie

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x+y+z=0\right\}, \qquad W=lin\,((2,-1,3))\,.$$

Znaleźć rzut ortogonalny podprzestrzeni W na podprzestrzeń V.

11. W przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^5$, ze standardowym iloczynem skalarnym, wskazać bazę ortogonalną przestrzeni liniowej

$$lin\,((1,2,3,4,5)\,,\,(1,1,0,1,1)\,,\,(2,3,3,5,7))$$

zawierającą wektor $(0,1,3,3,4)\,.$

12. Wyznaczyć bazę ortonormalną podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbf{E}^4$

$$W=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{E}^4: \quad 4x-z=2y-3z+2t=0\right\}.$$

Płaszczyzna w R³

Zadanie 1. Przez które z punktów:

$A=(-1,6,3)\,,\quad B=(3,-2,-5)\,,\quad C=(0,4,1)\,,\quad D=(2,0,5)\,,\quad E=(2,7,0)\,,\quad F=(0,1,0)$

przechodzi płaszczyzna o równanie $4x-y+3z+1=0$?

Zadanie 2. Wskazać na osobliwości położenia następujących płaszczyzn względem osi układu współrzędnych:

$a)$ $3x-5z+1=0$, $\quad b)$ $9y-2=0$, $\quad c)$ $x+y-5=0$, $\quad d)$ $2x+3y-7z=0$, $\quad e)$ $8y-3z=0$.

Zadanie 3. Napisać równanie płaszczyzny

a) równoległej do płaszczyzny Oxz i przechodzącej przez punkt $(2, -5, 3)$,

b) przechodzącej przez punkt $(-3, 1, -2)$ oraz oś Oz,

c) równoległej do osi Ox i przechodzącej przez dwa punkty $(4, 0, -2)$ i $(5, 1, 7)$.

Zadanie 4. Przez punkt $(7, 5, 1)$ poprowadzić płaszczyznę odcinającą na osiach współrzędnych odcinki jednakowej długości poczatku w punkcie $(0, 0, 0)$, których końce mają współrzędne dodatnie.

Zadanie 5. Znaleźć kąt miedzy płaszczyzną $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$, a płaszczyzną $0yz$.

Zadanie 6. Znaleźć punkt symetryczny do początku układu współrzędnych względem płaszczyzny

$$6x + 2y - 9z + 121 = 0.$$

Zadanie 7. Obliczyć odległość punktu $(3, 1, -1)$ od płaszczyzny $22x + 4y - 20 - 45 = 0$.

Zadanie 8. Obliczyć kąty między płaszczyznami:

a) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ i $x - 4y - z + 9 = 0$,
b) $3x - y + 2z + 15 = 0$ i $5x + 9y - 3z - 1 = 0$,

c) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ i $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

Zadanie 9. Ułożyć równanie płaszczyzny:

a) przechodzącej przez punkt $(-2,7,3)$ równolegle do płaszczyzny $x-4y=5z-1=0$,

b) przechodzącej przez początek wspłrzędnych i prostopadłej do dwóch płaszczyzn

$$2x-y+5z+3=0 \qquad i \qquad x+3y-z-7=0,$$

c) przechodzącej przez punkty $(0,0,1)$ i $(3,0,0)$ i tworzącej kąt $\frac{\pi}{6}$ z płaszczyzną $0xy$,

Zadanie 10. Sprawdzić, że trzy płaszczyzny $2x-2y+z-3=0$ i $3x-6z+1=0$ i $4x+5y+2z=0$

są wzajemnie prostopadłe.

Zadanie 11. Znaleźć równania płaszczyzn przepoławiających kąty dwuścienne między płaszczyznami:

$$3x-y+7z-4=0 \qquad i \qquad 5x+3y-5z+2=0.$$

Zadanie 12. Na osi Oz znaleźć punkt równo oddalony od dwóch płaszczyzn:

$$x+4y-3z-2=0 \qquad i \qquad 5x+z+8=0.$$

Zadanie 13. Obliczyć odległość między płaszczyznami równoległymi:

$$11x-2y-10z+15=0 \qquad i \qquad 11x-2y-10z-45=0.$$

Zadanie 14. Sprawdzić czy mozna poprowadzić płaszczyznę przez cztery dane punkty:

$$\begin{aligned} a) \quad & (3,1,0)\,, \quad (0,7,2)\,, \quad (-1,0,-5)\,, \quad (4,1,5)\,, \\ b) \quad & (1,-1,1)\,, \quad (0,2,4)\,, \quad (1,3,3)\,, \quad (4,0,-3)\,. \end{aligned}$$

Zadanie 15. przez linie przecięcia płaszczyzn $4x-y+3z-1=0$ i $x+5y-z+2=0$ poprowadzić płaszczyznę:

a) przechodzącą przez punkt $(0,0,0)$,

b) przechodzącą przez punkt $(1,1,1)$,

c) równoległą do osi Oy,

d) prostopdłą do płaszczyzny $2x-y+5z-3=0$.

Prosta w R^3

Zadanie 1. Wskazać na osobliwości położenia następujących prostych:

a) $3x+2z=0, \quad 5x-1=0;$
b) $5x+y-3z-7=0, \quad 2x+y-3z-7=0,$
c) $x+y+z=0, \quad 2x+3y-z=0.$

Zadanie 2. Ułożyć równania rzutu prostej $x-4y+2z-5=0, \quad 3x+y-z+2=0$ na płaszczyznę $2x+3y+z-6=0$.

Zadanie 3. Sprawdzić, czy punkty $(3,0,1)$, $(0,2,4)$, $\left(1,\frac{4}{3},3\right)$ leżą na jednej prostej.

Zadanie 4. Wyznaczyć kat jaki tworza proste:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2} \quad i \quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{4}.$$

Zadanie 5. Przez punkt $(2,-5,3)$ poprowadzić prostą:

a) równoległą do osi Ox,

b) równoległą do prostej $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$,

c) równoległą do prostej $x+y-z+1=0, \quad x+2y=0.$

Zadanie 6. Sprawdzić, czy następujące proste sie przecinają:

a)

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4} \qquad \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & z & & -1 & = & 0 \\ x & - & 2y & & +3 & = & 0 \end{array} \qquad i \qquad \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & - & z & + & 4 & = & 0 \\ & & y & + & 2z & - & 8 & = & 0. \end{array}$$

Zadanie 7. Napisać równania prostej prostopadłej poprowadzonej z punktu $(2,3,1)$ do prostej:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

Zadanie 8. Przez punkt $(4,0,-1)$ poprowadzić prostą w ten sposób by przecięła dwie dane proste

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+5}{4} \qquad i \qquad \frac{x-1}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Zadanie 9. Spośród wszystkich prostych przecinajacych dwie proste

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{2} \qquad i \qquad \frac{x-1}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1},$$

wybrać tę która jest równoległa do prostej

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{7}=\frac{z}{2}.$$

Zadanie 10. Ułożyć równania prostej prostopadłej do prostych

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \qquad i \qquad \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

i przecinającej te proste.

Prosta i płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$

Zadanie 1. Znaleźć punkt przecięcia prostej

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$$

z płaszczyzną $\quad 3x + 5y - z - 2 = 0.$

Zadanie 2. Ułożyć równania prostej przechodzącej przez punkty przeciecia płaszczyzny $2x + y - 3z + 1 = 0$ z prostymi

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \qquad i \qquad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

Zadanie 3. Przy jakiej wartości współczynnika A płaszczyzna $Ax+3y-5z+1 = 0$ jest równoległa do prostej

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \quad ?$$

Zadanie 4. Przy jakich wartościach współczynników A i B płaszczyzna $Ax + By + 6z - 7 = 0$ jest prostopadła do prostej

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{3} \quad ?$$

Zadanie 5. Sprawdzić, czy prosta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

leży w płaszczyźnie $\quad 4x + 3y - z + 3 = 0.$

Zadanie 6. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez dwie proste równoległe

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \qquad i \qquad \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}.$$

Zadanie 7. Znaleźć odległość punktu $(7,9,7)$ od prostej

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

Zadanie 8. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $(4,3,10)$ względem prostej

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Zadanie 9. Znaleźć odległość między dwiema prostymi skośnymi:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2} \qquad i \qquad \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

Zadanie 10. Znaleźć odległość między prostymi równoległymi:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{1} \qquad i \qquad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{1}.$$

Zadanie 11. Czy można przez prostą

$$\frac{x-7}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-6}{6}$$

poprowadzić płaszczyznę równoległa do płaszczyzny $2x+y-7z=0$?

Zadanie 12. Napisać równanie płaszczyzny która przechodzi przez punkt $(3,1,-2)$ i przez prostą

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}.$$

Zadanie 13. Sprawdzić, że następujące proste się przecinają

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4} \qquad i \qquad \frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}.$$

Zadanie 14. Napisać równanie płaszczyzny w której leżą proste z poprzedniego zadania.

Przekształcenia liniowe

Zadanie 1. Czy następujące przekształcenia są liniowe?

a) $T:\ \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3,\quad T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2x_1,\ x_1-x_2+3x_3,\ x_2-4x_4)$,

b) $T:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\quad T(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+3x_2,\ x_1^2,\ x_2-4x_3)$,

c) $T:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^6,\quad T(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,\ 2x_1-x_2+3x_3,-x_2-4x_5,0,\ x_1+x_3,0)$,

Zadanie 2. Zbadać liniowość podanych przekształceń:

a) $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, T jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $x0y$,

b) $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, T jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę o równaniu $x+y+z=0$,

c) $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, T jest rzutem prostokątnym na prostą $x=1,\ y=0$,

d) $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, T jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $(0,0)$,

e) $T:C(\mathbf{R})\to\mathbf{P}_2$, $(Tf)(x)=x^2\ f(2)+x\ f(1)+f(0)$ dla $f\in C(\mathbf{R})$,

gdzie $C(\mathbf{R})$ oznacza przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych ciągłych na prostej, a $\mathbf{P}_n$ oznacza przestrzeń liniową wielomianów stopnia $\le n,\ n\in\mathbf{N}$.

Zadanie 3. Które z podanych przekształceń przestrzeni funkcji ciągłych na $\mathbf{R}$ są liniowe?

a) $(T\ g)(x)=g(\sin x)$, $\qquad$ *b)* $(L\ g)\ (x)=\sin g(x)$,

gdzie $g\in C(\mathbf{R})$ oraz $x\in\mathbf{R}$.

Zadanie 4. Wykazać, że każde przekształcenie liniowe przekształca układ wektorów liniowo zależnych w układ wektorów liniowo zależnych. Czy prawdziwe jest analogicznie sformułowanie twierdzenie dla wektorów liniowo niezależnych?

Zadanie 5. Wykazać, że dla izomorfizmu g skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V w przestrzeń skończenie wymiarową W zachodzi zależność $\dim V = \dim W$.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy istnieje przekształcenie odwrotne do przekształcenia liniowego $T : M_{22} \to \mathbf{R}^4$ określonego wzorem

$$T\left[a_{ij}\right]_{i,j=1,2} = \left(a_{11} + a_{12} + a_{21},\ a_{11} - a_{12},\ a_{21}, a_{21} - a_{22}\right).$$

Obraz i jądro przekształcenia liniowego

Zadanie 7. Znaleźć bazę i wymiar jądra oraz bazę i wymiar obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$,

danego wzorem:

$$T(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t,\ x - y + z + 6t,\ x + y - z - 4t,\ 2x + 2y - 2z).$$

Zadanie 8. Wyznaczyć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ danego wzorem

$$T(x, y, z, t) = (x + 2z + t,\ -2x + y - 3z - 5t,\ x - y + z + 4t).$$

Zadanie 9. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ danego wzorem:

$$(T\ p)(x) = x^3 p''(x) - 2p(x).$$

Zadanie 10. Wyznaczyć jądro, obraz i rząd przekształcenia liniowego $T : \mathbf{M}_{22} \rightarrow \mathbf{P}_2$ danego wzorem

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (2a + b - c + 3d) + (a + 3c + d)\, x + (-2b + c)\, x^2,$$

gdzie M_{22} oznacza przestrzeń liniową macierzy stopnia 2, a P_2 oznacza przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$.

Zadanie 11. Wyznaczyć jądro, rząd i obraz przekształcenia liniowego $T : P_3 \rightarrow M_{22}$ danego wzorem

$$T : \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \begin{bmatrix} a - 2c & 2a - b - 2d \\ -b + 2d & c - d \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12. Niech $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, które dowolnemu wektorowi $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ przypisuje wektor $(x_1 + x_2,\ -x_1 - x_2,\ 2x_3)$.

Znaleźć bazę jądra i rząd przekształcenia T.

Zadanie 13. Sprawdzić, czy wektory $(1, 1, -1, 1)$, $(1, -1, 1, -3)$ generują jądro przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ danego wzorem:

$$T\,(x, y, z, u) = (x + y + 3z + u,\ -2x - y - 4z - u,\ y + 2z + u,\ x + 2y + 3z)\,.$$

Zadanie 14. Sprawdzić, czy wektory $(1, 1, -2, 0, 1)$, $(-2, 0, 0, 1, 1)$ generują jądro przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^4$ danego wzorem:

$$T\,(x, y, z, u, v) = (x - 2y + u + v,\ x - y + z + 2v,\ 3x - 4y + 2z + u + 5v,\ x - 3y - z + 2u)\,.$$

Zadanie 15. Znaleźć dwie różne bazy obrazu przekształcenia liniowego $T:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^4$ danego wzorem: $T\,(x,y,z,u,v)=(x+y-z,\ -x+2y+3z-u,\ 3y+2z-u-v,\ 2v)\,.$

Reprezentacja macierzowa przekształcenia liniowego

Zadanie 16. Napisać macierze podanych przekształceń w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych:

a) $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\quad T\,(x,y,z)=(2x+y-z,\ x-5z,\ y+4z)\,,$

b) $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3,\quad T\,(x,y,z,u)=(x+2y-z,\ x-5z-u,\ y+z)\,,$

c) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_1,\quad (Tp)\,(x)=(2-p)\ p\text{"}\,(x)+4\,p'(x).$

Zadanie 17. Znaleźć z dedinicji macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

a) $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3,\quad L\,(x,y)=(x+y,\ 2x+y,\ x-3y)\,,$ gdzie

$$\mathbb{B}_2=((1,1)\,,\ (1,-1))\,,\qquad \mathbb{B}_3=((1,-1,0)\,,\ (0,1,-1)\,,\ (0,0,1))\,.$$

b) $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\quad L$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $0yz,$ gdzie

$$\mathbb{B}_3'=((4,1,2)\,,\ (6,-1,2)\,,\ (5,3,2))\,,\qquad \mathbb{B}_3''=((1,0,-1)\,,\ (1,0,1)\,,\ (2,1,0))\,.$$

c) $L:\mathbf{R}_2\,[x]\to\mathbf{R}_3\,[x]\,,\quad (Lp)\,(x)=3x\,p\,(-x)\,,$ gdzie

$$\mathbb{B}_3=\big(x^2+2x,\ 3x-1,\ x-5\big)\,,\qquad \mathbb{B}_4=\big(x^3+x,\ x^3-x,\ x^2+1,\ x^2-1\big)\,.$$

Zadanie 18 Rozwiązać ponownie **zadanie 17** stosując tym razem wzór na macierz przekształcenia liniowego przy zmianie baz.

Zadanie 19. Napisać macierze podanych przekształceń liniowych $L: V \to V$ we wskazanych bazach;

a) $L(x,y) = (3x+4y,\, 2x+y)\,, \quad V = \mathbf{R}^2, \qquad \mathbb{B} = ((1,-1)\,,\ (2,3))\,,$

b) L jest symetrią względem płaszczyzny Oyz, $V = \mathbf{R}^3$,

$$\mathbb{B} = ((1,2,0)\,,\ (-1,0,1)\,,\ (2,0,-1))\,.$$

Zadanie 20. Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ ma w bazie (u_1, u_2, u_3) przestrzeni liniowej U i w bazie (v_1, v_2) przestrzeni liniowej V macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazach:

$$\mathbb{B}_U = (2u_1,\ u_3,\ u_2+u_3)\,, \qquad \mathbb{B}_V = (v_1 - v_2,\ 2v_1 + v_2)\,.$$

Zadanie 21. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ w bazach

$$\mathbb{B}' = ((1,0)\,,(1,1)) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{B}'' = ((1,1,0)\,,(2,1,1)\,,(0,0,1))$$

Znaleźć wzór przekształcenia T.

Zadanie 22. Dane jest przekształcenie liniowe g takie, że $g(1,2) = (1,1,1)\,,$ $g(0,1) = (1,0,1)$ .Znaleźć macierz przekształcenia g, jeżeli w przestrzeni $\mathbf{R}^2$ bazę stanowi układ wektorów: $(1,0)$, $(-1,2)$, a w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ układ wektorów: $(1,2,0)\,,$ $(1,1,1)\,,$ $(0,0,1)\,.$

Działania na przekształceniach liniowych

Zadanie 23. Przekształcenia liniowe $L_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $L_2 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $L_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ określone są wzorami:

$$L_1(x,y,z) = (x+2y,\ 3y-4z, x+y+z,\ y-3z)\,,$$
$$L_2(x,y,z,t) = (y-z-t,\ -x+y+z+t)\,,$$
$$L_3(x,y) = (x+y,\ -x,\ 3x+y,\ y).$$

Napisać macierze tych przekształceń w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni oraz podać wzory następujących przekształceń liniowych:

a) $L_2 \circ L_1$; b) $L_3 \circ L_2$; c) $L_1 \circ L_2 \circ L_1$.

Zadanie 24. Spośród przekształceń liniowych wybrać przekształcenia odwracalne i napisać macierze przekształceń odwrotnych do nich w bazach standardowych rozważanych przestrzeni liniowych. Ponadto napisać wzory przekształceń odwrotnych, jeżeli:

a) $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (x-y,\ 2x+y)\,,$

b) $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (x-y,\ 2x-2y)\,,$

c) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x+y,\ y-z)\,,$

d) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x+y,\ 3x+z)\,.$

Wektory własne i wartości wlasne przekształceń liniowych

Zadanie 25. Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych przekształceń liniowych:

a) $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $L(x,y) = (-y,\ x+y)\,,$

b) $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y-z,\ x+y,\ y+z)\,,$

c) $L : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$, $L(a+bx+cx^2) = (8a-2b+2c+(-2a+5b+4c)\,x+(2a+4b+5c)\,x^2)\,,$

d) $L : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $L(x,y) = (y,\ -x)\,,$

e) $L : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $L(x,y) = ((1+3i)x-4y,\ -2x+(1-3i)\,y)\,,$

f) $L : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, $L(x,y,z) = ((x-z,\ 2y,\ x+z)\,.$

Sprawdzić, czy otrzymane wektory własne przekształcenia L stanowią bazę przestrzeni liniowej będącej jego dziedziną.

Zadanie 26. Czy można utworzyć bazę przestrzeni $M_{22}(\mathbf{R})$ (Przestrzeń macierzy stopnia drugiego o wyrazach rzeczywistych) złożoną z wektorów własnych przekształcenia liniowego $T: M_{22}(\mathbf{R}) \to M_{22}(\mathbf{R})$ danego wzorem:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+3b & 2a+2b+d \\ 4c & c-d \end{bmatrix}?$$

Formy kwadratowe

1. Sprowadzić do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a formy:

a) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$,

b) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$,

c) $x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_3x_4 + x_1x_4$.

2. Następujące formy kwadratowe sprowadzić do postaci kanonicznej:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$,

d) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

f) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

3. Znaleźć postać kanoniczną i liniowe przekształcenie nieosobliwe sprowadzające do tej postaci kwadratową.

a) $3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

c) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

d) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4. Które z nastepujących form są między sobą równoważne między sobą w ciele liczb rzeczywistych?

a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $\quad f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $\quad f_3 = z_1z_2 + z_3^2$,

b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$,

$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$,

$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

5. Znaleźć wszystkie wartości parametru λ dla których następujące formy są dodatnio określone:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$

) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3,$

c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3,$

e) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

6. Znaleźć wyróżniki i rzędy następujących form kwadratowych,
1. zmiennych: x_1, x_2, x_3, x_4:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_3,$
b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4,$

c) $x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4,$

2. zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$:

d) $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n.$

7. Podać formę kwadratową związaną z daną macierzą symetryczną:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Dane formy kwadratowe sprowadzić do postaci kanonicznej metodą Jacobiego:

a) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3,$

)b) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3.$

9. Niech odwzorowanie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ będzie dane wzorem:

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + 2xz + y^2 - 5z^2.$$

a) Dowieść, że f jest formą dwuliniową na $\mathbf{R}^3$. Jaki jest rząd formy f ? Jaka jest sygnatura formy f ?

b) Znaleźć bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ (ze standardowym iliczynem skalarnym), w której macierz formy f jest diagonalna.

Przekształcenia afiniczne.

1. Znaleźć przekształcenie afiniczne przy którym punkty $0 = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$ i $B = (0,1,0)$ przechodza na siebie, a punkt $C = (0,0,1)$ na punkt $D = (1,1,1)$.

2. Znaleźć punkty stałe przekształcenia afinicznego określonego wzorami:

$$\begin{array}{rcl} x' &=& 2x + y + z + 1 \\ y' &=& x + z + 1 \\ z' &=& -z - 2. \end{array}$$

3. Znaleźć przekształcenie afiniczne w $\mathbf{R}^3$ przy którym oś Ox przechodzi na oś Oz, a oś Ox przechodzi na siebie.

4. Dane jest przekształcenie afiniczne w $\mathbf{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} x' &=& 2x + 5y + z \\ y' &=& 3x + 2y \\ z' &=& 4x + 4y. \end{array}$$

Znaleźć wektory które przy tym przekształceniu nie zmieniają kierunku.

5. Znaleźć proste niezmiennicze przekształcenia afinicznego w $\mathbf{R}^2$. (O ile istnieją.)

$$a)\ \begin{array}{rcl} x' &=& 2x + y - 1 \\ y' &=& -2x + 3y + 4, \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl} x' &=& 6x + y + 1 \\ y' &=& 5x - 6y + 2, \end{array}$$

$$c)\ \begin{array}{rcl} x' &=& 2x + 1 \\ y' &=& x + 3y - 1. \end{array}$$

6. Zbadać istnienie prostych niezmienniczych przekształcenia afinicznego

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcl} x' &=& 2x + y + 1 \\ y' &=& x + 2y \\ z' &=& 3x + 4y - 5z + 2, \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rcl} x' &=& 2x + y + z \\ y' &=& 2x + y - 2z \\ z' &=& -x - z + 1. \end{array}$$

Jeżeli proste nienmiennicze istnieją, to napisać ich równania.

7. Znaleźć przekształcenie afiniczne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przekształcające punkty $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$, $(1,2,3)$, $(0,0,1)$ na punkty $(0,1,0)$, $(0,-2,-1)$, $(1,0,3)$, $(1,0,1)$.

Powtórzenie

I

1. Podać interpretację geometryczną następującego zbioru liczb zespolonych

   (a) $\left\{z \in \mathbf{C} : \left|\frac{z}{i} + 5\right| \geq 3\right\}$,

   (b) $\left\{z \in \mathbf{C};\ 0 < \operatorname{Arg}(z + 2i) < \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |z - i| < 2\right\}$,

   (c) $\left\{z \in \mathbf{C};\ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(iz) \leq \pi \quad \wedge \quad 1 \leq |z - 2i| \leq 2\right\}$,

   (d) $\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Arg}(z^4) \leq \pi \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0\}$,

   (e) $\{z \in \mathbf{C};\ \cos(\pi\,|z - i|) > 0) \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(iz) < 0\}$,

   (f) $\left\{z \in \mathbf{C};\ \left|\frac{z - 2i}{z + 1 - i}\right| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z^2 \leq \pi\right\}$,

   (g) $\left\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im}(z^2) \leq 2\left[\operatorname{Re}(\bar{z})^2\right]\right\}$,

   (h) $\left\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im}(z^2) = 2 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(z + i)^2 = 1\right\}$

2. Rozwiązać równania

   (a) $z^3(1 - i)^2 - 1 = 0$,

   (b) $z^4 - iz^2 + 2 = 0$,

   (c) $(z - i)^2 = 4(1 + i)^2$,

   (d) $(z - 2)^2 = (\bar{z} - 2)^2$.

3. Obliczyć. Wynik podać w postaci algebraicznej.

   (a) $\left(\frac{1 + i}{-1 + i\sqrt{3}}\right)^{100}$

   (b) $\left(\frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^{n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$

4. Rozwiązać równania macierzowe

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^T + \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

5. Udowodnić, że

   (a) Dla dowolnej macierzy kwadratowej A i dowolnego $k \in \mathbb{R}$ ślad macierzy kA jest równy iloczynowi k i śladu macierzy kA,

(b) Dla dowolnej macierzy kwadratowej A macierz $A - A^T$ jest macierzą antysymetryczną,

(c) Dla dowolnej macierzy kwadratowej A macierz $A + A^T$ jest macierzą symetryczną.

6. Niech

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Rozwiązać równanie $\sigma^2 x = \tau \circ \sigma^{-1}$,

(b) Rozłożyć σ na iloczyn transpozycji,

(c) Podać znak permutacji σ.

7. Zbadać, czy

(a) $(\mathbb{R}_+, \circ)$ jest grupą, jeśli dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a \circ b = 3^{\log_3 a \cdot \log_3 b}$.

(b) zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych podzielnych przez wielomian $x^2 - 1$ stanowi podgrupę grupy addytywnej wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

(c) zbiór funkcji rzeczywistych przyjmujących wartość zero na przedziale $[-1, 1]$ stanowi podgrupę grupy addytywnej wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}$.

(d) zbiór złożony z trzech macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z mnożeniem macierzowym stanowi grupę.

(e) zbiór macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

dodawaniem i mnożeniem macierzowym stanowi ciało,

(f) zbiór pierwiastków zespolonych czwartego stopnia z liczby 1 wraz z zerem stanowi pierścień.

(g) zbiór macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in Q,$$

z dodawaniem i mnożeniem macierzowym stanowi ciało. Jeśli tak, to czy jest to ciało izomorficzne z ciałem $Q\sqrt{2}$

(h) to samo polecenie co w punkcie (f) gdy $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) przekształcenie

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = a + b, \quad a, b \in \mathbf{R},$$

jest homomorfizmem grupy której elementami są macierze diagonalne postaci $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$, a działaniem jest dodawanie macierzy, w grupę addytywną liczb rzeczywistych $(\mathbf{R}, +)$. Jeśli przekształcenie jest homomorfizmem, to znaleźć jego jądro.

(j) zbiór $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ - macierzy nieosobliwych stopnia drugiego o wyrazach rzeczywistych wraz z mnożeniem macierzowym stanowi grupę. Sprawdzić, czy przekształcenie określone wzorem

$$h(A) = (\det A)^{-1}, \quad A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}),$$

jest izomorfizmem tej grupy na grupę multiplikatywną liczb rzeczywistych różnych od zera.

(k) zbiór liczb postaci postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $a, b \in Q$, jest pierścieniem zawartym w ciele liczb rzeczywistych. Jeśli tak, to czy pierścień ten jest ciałem?

(l) ciało liczb $Q\sqrt{2}$ jest izomorficzne z ciałem $Q\sqrt{3}$.

8. Załóżmy, że rozważane wielomiany są elementami pierścienia $\mathbf{R}[x]$. Znaleźć

(a) wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów

$$x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99.$$

(b) wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów

$$4x^3 + x - 1, \quad , x^4 + 3x^3 - x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

resztę z dzielenia wielomianu

$$x^{1000} + 3x^{50} - 1 \text{ przez wielomian } x^2 - 4.$$

II

1. Zbadać, czy podane zbiory $\mathbb{U}$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni wektorowych $\mathbb{V}$. Jeśli tak, to znaleźć bazę i wymiar tych podprzestrzeni.

   (a) $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 2z = -x + 2y = 0, \}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$,

   (b) $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x\,z \leq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$,

   (c) $\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p = q',\ q \in \mathbb{R}_n[x]\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_n[x]$,

   (d) $\mathbb{U} = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$,

   (e) $\mathbb{U} = \left\{\begin{bmatrix} x - y & x \\ 0 & -x + 2y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2[\mathbb{R}]$,

   (f) $\mathbb{U} = \{M \in \mathbb{V} = \mathbb{M}_2[\mathbb{R}] : \det M = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2[\mathbb{R}]$,

   (g) $\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \text{wielomian } p \text{ jest funkcją parzystą}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$,

   (h) $\mathbb{U} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$,

   (i) $\mathbb{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - t + 2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$,

   (j) $\mathbb{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 8xy + 16y^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

2. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^5$ danej układem równań

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 3y & + & z & & & - & t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & s & + & t & = & 0 \\ 2x & - & 6y & + & 2z & + & 3s & & & = & 0 \\ x & - & y & & & - & 2s & - & t & = & 0 \end{array}.$$

3. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^5$,

$$\mathbb{U} = \operatorname{lin}\{(1,1,1,1,1), (-1,0,-2,0,-1), (-1,1,-3,1,-1), (0,1,-1,1,0)\}.$$

4. Określić wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wektory

   (a)

$$(1,4,2,-1,3), \quad (2,9,6,-2,8), \quad (1,2,-1,-1,0), \quad (-2,-7,1,3,-1),$$

   (b)

$$x^3 + x^2 - 1, \quad x^3 + 2x - 1, \quad x^3 + x^2 + x - 3, \quad -2x^2 + 3x + 2.$$

5. Sprawdzić, czy wektor $(2,2,-3,0)$ należy do przestrzeni liniowej generowanej przez wektory

$$(1,0,-2,3)\,,\quad (2,1,0,-1)\,,\quad (0,1,-3,0)\,,\quad (3,2,-5,3)\,.$$

6. Wyznaczyć współrzędne wektora $(1,2,-3)$ w bazie

$$(-1,0,1)\,,\quad (-1,2,1)\,,\quad (0,2,3)\,.$$

7. Obliczając odpowiednie wyznaczniki sprawdzić, czy podane układy wektorów stanowią bazy wskazanych przestrzeni liniowych

   (a) $v_1=(1,2,3,4)\,,\ \ v_2=(0,1,0,2)\,,\ \ v_3=(-1,2,0,1)\,,\ \ v_4=(0,-1,0,1)\,;$ $\mathbb{R}^4$,

   (b) $v_1=(1,0,4)\,,\ \ v_2=(1,0,2)\,,\ \ v_3=(-1,0,-3)\,;\ \mathbb{R}^3$.

8. Zbadać liniową zależność wektorów we wskazanej przestrzeni liniowej

   (a) $(1,2,3,4,-5)\,,(0,1,2,3,0)\,,(0,0,-3,-4,1)\,,(-1,1,2,0,-1)\,,(0,4,3,3,-5)\,;$ $\mathbb{R}^5$,

   (b) $x^2-1,\ \ x-1,\ \ 2x^2+x+1;\ \ \mathbb{R}_2[x]$

   (c) $3,\ \ \sin^2 x,\cos^2 x,\ \ x^2+2^x;\ \ C(\mathbb{R})\,.$

9. Podane układy wektorów uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych

   (a) $(3,4,-5)\,,\ \ (-1,0,2)\,;\mathbb{R}^3$,

   (b) $(1,2,0,-1)\,,(0,2,3,3)\,;\mathbb{R}^4$,

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ \ M_2[\mathbb{R}]\,.$

10. Znaleźć współrzędne wektora

    (a) $(2,3,6,2)$ w bazie $\mathcal{B}=((1,2,0,1)\,,\ \ (3,1,0,2)\,,\ \ (0,0,1,4)\,,\ \ (0,0,1,0))\,,$

    (b) $(x,y,z,t)=(1,1,0,0)$ w wybranej przez siebie bazie przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}.$$

11. Zbadać liniowość podanych przekształceń

    (a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z)=(x+2y-z,z-y)\,,$

    (b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4,\quad T(x,y)=(3x+2y,-y,2x-y,x-y)\,,$

    (c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad T(x,y,z)=(x+2y-z,-y,2x-y-2)\,,$

    (d) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad T(x,y,z)=(x,|y-z|\,,z)\,,$

    (e) $T:C_{[-1,1]}\to C_{[-1,1]},\quad (T(f))(x)=-f(-x)\,,\ \ f\in C_{[-1,1]},\ \ x\in[0,1]\,.$

12. Znaleźć bazę jądra oraz rząd przekształcenia liniowego

   (a) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\ T(x,y,z,t)=(x+2y+4z-3t,3x+5y+6z-4t,4x+5y-2z+3t)$,
   (b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\ T(x,y,z)=(x-3z,3x+5y+6z,x+y-2z,5x+6y+z)$.

13. Znaleźć bazę obrazu oraz wymiar jądra przekształcenia liniowego $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$,

$$T(x,y,z)=(2x+y+3z,-x-y-2z,y+z,x+z).$$

14. Znaleźć bazę obrazu oraz wymiar jądra przekształcenia liniowego $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}&T(x,y,z,s,t)=\\&=(x+4y+2z-s+3t,2x+9y+6z-2s+8t,x+2y-z-s,-2x-7y+z+3s-t).\end{aligned}$$

15. Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego

   (a)
   $$T(x,y,z)=(-z,-x,y)$$
   w bazie $\mathcal{B}=[(1,1,1),(1,2,2),(1,2,0)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$,

   (b)
   $$T(x,y,z,t)=(x-z,-x+y,y+z)$$
   w bazie $\mathcal{B}_1=[(0,1,1,0),(0,-1,0,0,-1),(-1,0,0,1)\,(0,-1,1,0)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz bazie $\mathcal{B}_2=[(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$,

   (c)
   $$T\left(ax^2+bx+c\right)=(a+b,c,-a+c)$$
   w bazie $\mathcal{B}_1=[1,x^2,-x]$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ oraz bazie $\mathcal{B}_2=[(0,1,1),(1,0,2),(1,-1,0)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

16. Dane jest przekształcenie liniowe $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ takie, że $L(1,1,1)=(0,1)$, $L(0,1,1)=(1,1)$, $L(0,0,1)=(-1,0)$.

   (a) Podać wzór tego przekształcenia,
   (b) Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazach odpowiednio: $[(0,0,1),(1,1,1),(1,0,0)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $[(0,1),(1,-1)]$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

17. Przekształcenie liniowe $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ w pewnych bazach odpowiednio przestrzeni $\mathbb{R}^5$ oraz $\mathbb{R}^3$ ma macierz

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1&1&2\\-1&1&1&3&4\\-1&5&3&5&8\end{bmatrix}.$$

   Podać wymiar jądra i rząd tego przekształcenia.

18. Określić dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{C}$ podane układy równań są układami Cramera, a następnie te układy rozwiązać w zależności od parametrów

$$
\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcl}
(1-p)\,x & - & y & + & z & = & 1 \\
x & + & (1-p)\,y & + & z & = & 2p \\
x & + & y & + & (1+p)\,z & = & 0
\end{array}, \quad
\text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcrcl}
x & - & 2py & + & & & pt & = & 1 \\
 & & 2y & + & pz & - & pt & = & 2 \\
px & + & 2y & + & z & & & = & p \\
1 & + & 2py & + & z & & & = & 3
\end{array}.
$$

19. Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

$$
\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcrcl}
5x & + & & & 4z & + & 2t & = & 3 \\
x & - & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\
4x & + & y & + & 2z & & & = & 1 \\
x & + & y & + & z & + & t & = & 0
\end{array}, \quad
\text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x & + & 3y & + & 2z & & & - & t & = & 3 \\
2x & + & y & + & z & + & 2s & + & 3t & = & 6 \\
3x & & & - & z & + & s & + & t & = & 3 \\
 & & y & & & + & 4s & + & t & = & 1 \\
2x & + & y & + & z & - & 2s & + & 5t & = & 8
\end{array}.
$$

20. Znaleźć rzędy następujących macierzy:

$$
\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad
\text{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\text{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.
$$

21. Zbadać rząd macierzy w zależności od parametru a

$$
\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 & a^2 \end{bmatrix}, \quad
\text{b)}\ \begin{bmatrix} a & a & 1 & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a^3-a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\text{c)}\ \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & a^2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ a^2 & a & -2 \end{bmatrix},
$$

$$
\text{d)}\ \begin{bmatrix} 1+a & a & a & a & 1 \\ a & 1+a & a & a & 1 \\ a & a & 1+a & a & 1 \\ a & a & a & 1+a & 1 \end{bmatrix}.
$$

22. Zbadać rozwiązalność układów równań

$$
\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcrcl}
3x & - & 5y & + & 2z & + & 4 & = & 2 \\
7x & - & 4y & + & z & + & 3 & = & 5 \\
5x & + & 7y & - & 4z & - & 6 & = & 3
\end{array}, \quad
\text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
24x & - & 28y & + & 30z & + & 40t & - & 41s & = & 28 \\
36x & - & 42y & + & 45z & + & 61t & - & 62s & = & 43 \\
48x & - & 56y & + & 60z & + & 82t & - & 83s & = & 58 \\
60x & - & 70y & + & 75z & + & 99t & - & 102s & = & 69
\end{array}.
$$

23. Rozwiązać układy równań:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}, \quad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & + & 2z & & & = & -1 \\ 2x & - & 3y & - & z & - & 5t & = & -7 \\ 3x & - & 7y & + & z & - & 5t & = & -8 \\ & & y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}.$$

24. Określić w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań układów równań, a następnie dane układy rozwiązać w zależności od parametrów

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & \lambda z & = & \lambda^2 \\ x & + & \lambda^2 y & + & z & = & -\lambda \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}, \quad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & -1 \\ \lambda x & + & 3y & + & \lambda z & = & 0 \\ \lambda x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array},$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{rcrcrcrcr} \lambda x & - & \lambda y & + & \lambda z & - & \lambda t & = & -\lambda \\ x & - & \lambda y & + & \lambda z & - & \lambda t & = & -\lambda \\ x & - & y & + & \lambda z & - & \lambda t & = & -\lambda \\ x & - & y & + & z & - & \lambda t & = & -\lambda \end{array}, \quad \text{d)}\ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & \lambda y & + & \lambda z & - & \lambda t & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & \lambda z & - & \lambda t & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & - & \lambda t & = & 3 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & 4 \end{array}.$$

25. Określić w zależności od parametrów $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań układów równań, a następnie dane układy rozwiązać w zależności od parametrów

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & + & s & = & 1 \\ x & - & \lambda y & + & z & + & t & + & s & = & \mu \\ x & + & y & - & \lambda z & + & t & + & s & = & \lambda^2 \\ x & + & y & + & z & - & \lambda t & + & s & = & \mu \end{array}, \quad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & + & z & = & \mu \end{array}.$$