Liczby zespolone

Podstawowe własności

1. Wykonać podane działania:

a) $(-3+2i)+(4+i)\,,$ b) $(7-6i)-(1+4i)\,,$

c) $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(3-2i)\,,$ d) $\dfrac{5+3i}{1-\ i}.$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania**:**

a) $z^2-\ \overline{z}\ =0,$

b) $z^2+z-2=0,$

c) $2z+(1+i)\,\overline{z}\ =1-4i.$

3. Znaleźć takie liczby rzeczywiste λ i μ aby zachodziły równości:

a) $\lambda\,(2+3i)+\mu\,(4-5i)=6-2i,$

b) $\lambda\,(4-3i)^2+\mu\,(1+i)^2=7-12i,$

c) $\dfrac{2\lambda-3i}{5+3i}+\dfrac{3\mu+2i}{3-5i}=0.$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej Wzór de'Moivre'a

4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez użycia tablic) następujące liczby zespolone:

a) $1,\ \ -1,\ \ i,\ \ -i,$ b) $1+i,\ \ 1-i,\ \ -1-i,$ c) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$
d) $-\sqrt{5}.$

5. Wykonać działania stosując przedstawienie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej:

a) $(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right),$ *b)* $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}},$ *c)* $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+i}\right),$ *d)* $(1+i)^7.$

6. Obliczyć. Wynik podać w postaci algebraicznej liczby zespolonej):

a) $\left(\dfrac{1+i}{i-\sqrt{3}}\right)^{2004},$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{100},$ c) $\left(\cos 33^0+i\sin 33^0\right)^{10},$ d) $\left(-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{14},$

e) $\left(\dfrac{1+i}{i-\sqrt{3}}\right)^{2004},$ f) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)^2}\right).$

7. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyprowadzić wzory na:

a) $\sin 3x$, b) $\cos 5x$, c) $\sin 6x$.

8. Udowodnić następujące wzory:

$$a)\quad \cos 2nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k \cos^{2(n-k)} x \sin^{2k} x,$$

$$b)\quad \sin 2nx = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \cos^{2(n-k)-1} \sin^{2k+1} x,$$

gdzie $x \in \mathbf{R}$, a $n \in \mathbf{N}$.

9. Obliczyć i narysować na płszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

a) $\sqrt{-2i}$, b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$, c) $\sqrt[6]{1}$.

10. Przedstawić w postaci algebraicznej pierwiastki kwadratowe nastepujących liczb zespolonych, bez posługiwania się postacia trygonometryczną liczby zespolonej:

$a)$ i, $-i$, $b)$ $3+4i$, $8+6i$, $c)$ $-2-3i$.

11. Obliczyć:

$a)$ $\sqrt[4]{16}$, $b)$ $\sqrt[4]{-1}$, $c)$ $\sqrt[4]{i}$.

12. Znaleźć rozwiązania podanych równań:

$a)$ $z^4 = (1-i)^4$,

$b)$ $(z-1)^6 = (i-z)^6$,

$c)$ $z^3 = (iz+1)^3$.

13. Rozwiązać równanie kwadratowe:

$a)$ $z^2 - 3z + 3 + i = 0$,

$b)$ $(4-3i)\,z^2 - (2+11i)\,z - (5+i) = 0$,

$c)$ $z^2 + 2\,(1+i)\,z + 2i = 0$.

14. Rozwiązać równanie dwukwadratowe:

$a)$ $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$,

$b)$ $z^4 - (18+4i)\,z^2 + 77 - 36i = 0$.

15. Rozwiązać równanie:

$a)$ $(z^3 - i)(z^2 - 5iz - 6) = 0,$

$b)$ $z^6 - (1 + 8i)\,z^3 + 8i = 0,$

$c)$ $(z - i)^n + (z + i)^n = 0,$

$d)$ $z^6 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12},$

$e)$ $z^4 = \dfrac{-18}{1 + i\sqrt{4}}.$

16. Niech ε_i oznacza i-ty pierwiastek n-tego stopnia z jedności, $i = 1, 2, ..., n-1$. Policzyć

$a)$ $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{n-1},$

$b)$ $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_{n-1}.$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

17. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych spełniających warunek:

a) $|z - i| = |z + 2|,$ b) $3 \leq |z + i| \leq 5$ c) $|z - 2 + i| = 6,$ d) $Imz \leq 3$ i $Rez \geq 5.$

e) $0 < Argz^3 < \frac{\pi}{2},$ f) $Arg\,(z - 1) = \frac{\pi}{3},$ g) $0 \leq Arg\,(z - 3 + 2i) \leq \frac{\pi}{3},$

$h)$ $\dfrac{|z - 1|}{|z + 1|} = \lambda, \quad \lambda \geq 0,$ $i)$ $log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{|z|^2 + |z| + 1}{2 + |z|}\right) < 1.$

18. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A \cap B$, gdy

$a)$ $A = \{z \in \mathbf{C};\ 1 \leq |z + 1 + 2i| \leq 2\},$ $B = \left\{z \in \mathbf{C};\ -\frac{\pi}{2} \leq Arg\,(z + 1) \leq 0\right\},$

$b)$ $A = \{z \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\,(z^2) = 2\},$ $B = \left\{z \in \mathbf{C};\ [\mathrm{Re}\,(z + i)]^2 = 1\right\},$

$c)$ $A = \left\{z \in \mathbf{C};\ 0 < Arg\,(i\ z) < \frac{\pi}{2}\right\},$ $B = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = \mathrm{Re}\,z + 1\},$

$d)$ $A = \{z \in \mathbf{C};\ Arg\,(z^6) = \pi\},$ $B = \{z \in \mathbf{C};\ |z + i| + |z - i| < 2\}.$

19. Udowodnić tożsamość:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Jaki jest sens geometryczny tej tożsamości?