

KSIĘGA PIERWSZA

**ELEMENTARNA TEORIA
PRAWDOPODOBIENSTWA**

Rozdział I

Algebra Boole'a

§ 1. Uwagi wstępne, treść rozdziału

Znamy obecnie różne, nieraz mocno od siebie odbiegające sposoby wprowadzania pojęcia prawdopodobieństwa: teoria „klasyczna” w różnych odmianach, teorie aksjomatyczne: Bohlmanna, Keynesa, Kołmogorowa, teoria „częstościowa” Misesa i inne ¹⁾. Porównanie tych sposobów prowadzi do następujących spostrzeżeń:

add missing
citations

1° Prawdopodobieństwo bywa określane rozmaicie, zawsze jednak jest ono liczbą nieujemną, nie większą od jedności, przyporządkowaną pewnym przedmiotom.

2° Co do natury przedmiotów, którym zostaje przyporządkowane prawdopodobieństwo, panuje rozbieżność między poszczególnymi teoriami, w każdym jednak razie można uważać za ustalone, że przedmioty te (zdarzenia, zdania, zbiory, cechy) tworzą tak zwane *ciała Boole'a*, którą intuicyjnie określić można jako algebrę wyrazów: „nie”, „i” oraz „lub”.

Wobec tego podajemy w tym rozdziale zarys teorii ciał Boole'a, a więc: ich określenie przez postulaty (§ 2), elementarne twierdzenia algebry Boole'a (§§ 3 i 4), związek teorii ciał Boole'a z teorią zbiorów częściowo uporządkowanych (§ 5), określenie działań nieskończonych w ciałach Boole'a i prawa nimi rządzące (§ 6), zastosowania ciał Boole'a w teorii zbiorów (§§ 7 i 9) i w logice (§ 11), określenie podciał (§ 8), określenie homomorfizmu między dwoma ciałami Boole'a, kongruencji w ciałach Boole'a i uogólnienie ciał Boole'a na tak zwane ciała zrelatywizowane (§ 10) oraz określenie atomu, ciała atomowego i operacji skalania atomów (§§ 12, 13). Ostatni paragraf każdego rozdziału będzie zawierał przykłady i zadania.

§ 2. Określenie ciał Boole'a

Ciałem Boole'a nazywamy zbiór U , na którego elementach określone są działania $+$, \cdot i $'$ (dwa pierwsze na dwu, trzecie na jednym elemencie) w taki sposób, aby dla dowolnych elementów $u, v, w \in U$ były spełnione następujące związki:

¹⁾[1] [2] [3] [4]

$$\begin{array}{ll}
(\text{B1}) & u + v \in U, \quad u \cdot v \in U, \quad u' \in U, \\
(\text{B}^+2) & u + (v + w) = (u + v) + w, \quad (\text{B} \cdot 2) \quad u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w, \\
(\text{B}^+3) & u + v = v + u, \quad (\text{B} \cdot 3) \quad u \cdot v = v \cdot u, \\
(\text{B}^+4) & u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w), \quad (\text{B} \cdot 4) \quad u + (v \cdot w) = (u + w) \cdot (u + w), \\
(\text{B}^+5) & u + (u \cdot u') = u, \quad (\text{B} \cdot 5) \quad u \cdot (u + u') = u, \\
(\text{B}^+6) & u + u' = v + v', \quad (\text{B} \cdot 6) \quad u \cdot u' = v \cdot v'.
\end{array}$$

Działanie $+$ nazywamy *dodawaniem* w ciele U , a element $u + v$ *sumą* elementów u i v ; działanie \cdot nazywamy *mnożeniem* w ciele U , a element $u \cdot v$ *iloczynem* elementów u i v , wreszcie działanie $'$ nazywamy *dopełnianiem* w ciele U , a element u' *uzupełnieniem* elementu u .

Wyrażenie zapisane sensownie za pomocą zmiennych przebiegających zbioru U lub nazw elementów zbioru U , znaków $+$, \cdot , $'$ i nawiasów nazywamy *wyrażeniem algebraicznym* ciała U . Zdanie powstałe z dwu wyrażeń algebraicznych przez połączenie ich znakiem identyczności ($+$) nazywamy *równością algebraiczną* lub *równością*. Przy pisaniu wyrażeń algebraicznych umawiamy się, w celu oszczędzania pisania zbędnych nawiasów, że znak mnożenia (\cdot) wiąże silniej niż znak oddawania ($+$), a następnie umawiamy się opuszczać nawiasy przy wielokrotnych sumach lub iloczynach ze względu na aksjomaty (B^+2) i $(\text{B} \cdot 2)$ wyrażające łączność tych działań. Ponadto będziemy opuszczali, ilekroć nie będzie to groziło nieporozumieniem, znak iloczynu, pisząc zamiast $u \cdot v$ po prostu uv . To postępowanie upodabnia nasze znakowanie do znakowania zwykłej algebry, w której te uproszczenia są ogólnie przyjęte.

W ten sposób wyrażenie algebraiczne $u + (v \cdot w)$ (por. (B^+4)) zapisujemy w postaci $u + vw$, wyrażenie zaś $u + [(v \cdot w) + (u \cdot w)]$ - w postaci $u + vw + uw$.

Związki (B1) - $(\text{B} \cdot 6)$ nazywamy *układem postulatów algebry Boole'a*, w skróceniu: *układem* (B) . Wychodząc z postulatów układu (B) możemy, za pomocą rozumowań opartych na prawach logiki, wyprowadzać nowe związki prawdziwe w każdym ciele Boole'a, to znaczy spełnione przez każdy układ elementów każdego ciała Boole'a. Ogół tych wszystkich związków (zdań), które dają się wyprowadzić z postulatów układu (B) przez logicznie poprawne rozumowanie, nazywamy *systemem algebry Boole'a*.

Używając współczesnej terminologii logicznej możemy powiedzieć, że ciała Boole'a ¹⁾ są *modelami systemu algebry Boole'a* lub - co na jedno wychodzi - *modelami układu postulatów* (B) ²⁾.

Przedstawiony tu układ postulatów algebry Boole'a nie jest ani jedynym

¹⁾cytowanie

²⁾cytowanie2

3. OMÓWIENIE POSTULATÓW UKŁADU (B). TWIERDZENIE O DWOISTOŚCI³

możliwym (tę własność dzieli on ze wszystkimi układami postulatów abstrakcyjnych teorii), ani też najprostszym. Znane są rozmaite równoważne między sobą układy postulatów algebry Boole'a¹⁾. Zaierają one przeważnie mniej postulatów niż podany tu układ (B), a często też mniej pojęć pierwotnych. Jednak podany tu układ postulatów ma wiele stron dodatnich; poszczególne postulaty mają łatwo uchwytne sens intuicyjny, są łatwe do zapamiętania i elementarne twierdzenia dają się z nich prosto wyprowadzić. Poza tym uwiadacznia on istotną dla ciał Boole'a symetrię między działaniami dodawania i mnożenia. W następnym paragrafie wyciągniemy z tej uwagi ważną konsekwencję.

Można wykazać, że do ugruntowania algebry Boole'a wystarczają postulaty (B1), (B⁺3), (B⁺4), (B·4), (B·5), (B⁺6), (B·6), których zespół oznaczmy przez (B*); natomiast pozostałe postulaty, tj. (B⁺2), (B·2), (B·3), (B·5), można z poprzednich wyprowadzić na drodze poprawnych rozumowań. Można też wykazać, że z układu postulatów (B*) nie da się już odrzucić żadnego postulatów bez uszczerbku dla systemu algebry Boole'a; mówimy, że układ postulatów (B*) jest niezależny, a układ (B) nie jest taki.

§ 3. Omówienie postulatów układu (B). Twierdzenie o dwoistości

Postulat (B1) ma nieco odmienny charakter od pozostałych. Żąda on, aby działania $'$, $+$ i \cdot były *wykonalne* w ciele U , czyli aby ciało U było *zamknięte* ze względu na podstawowe działania, to znaczy, aby element powstały w wyniku wykonania któregoś z działań podstawowych na elementach lub elementach ciała U należał do ciała U . Dalsze postulaty charakteryzują pewne własności działań podstawowych, a mianowicie: postulaty (B⁺2) i (B·2) wyrażają *łączność* działań dodawania i mnożenia, postulaty (B⁺3) i (B·3) ich *przemienność*, postulaty (B⁺4) i (B·4) ich wzajemną *rozdzielność*. Pozostałe cztery postulaty charakteryzują własności działania uzupełniania w związku z dodawaniem i mnożeniem.

Postulaty (B⁺6) i (B·6) żądają, aby elementy przedstawione wyrażeniami algebraicznymi $u + u'$ i uu' nie zależały od wyboru elementu u w ciele U . Są to więc dwa wyróżnione elementy w ciele U , które umawiamy się oznaczać odpowiednio przez 1 i 0, to znaczy przyjmujemy następujące określenia:

$$(3.1) \quad 1 = u + u',$$

$$(3.2) \quad 0 = uu'.$$

Mamy prawo do przyjęcia takich określeń, gdyż ich jednoznaczność gwarantują nam postulaty (B⁺6) i (B·6). Nie możemy co prawda twierdzić, że 0 nie

¹⁾cytowanie³

jest identyczne z 1, nie wiemy bowiem, czy zbiór U składa się z więcej niż jednego elementu, łatwo jednak dowieść, że jeżeli zbiór U zawiera więcej niż jeden element, to 0 nie jest identyczne z 1.

Niech bowiem będzie $0 = 1 \in U$ i $u \in U$ niech będzie elementem różnym od 1 (a więc i od 0). Ponieważ jak udowodnimy później (??, (??)), w każdym ciele Boole'a zachodzi równość $u = u + u$ dla dowolnego elementu, więc

- (I) $uu' = u + u'$ (na mocy założenia $0 = 1$),
- (II) $u + (u + u') = u$ (na mocy postulatu (B⁺5) oraz (I)),
- (III) $(u + u) + u' = u$ (na mocy postulatu (B⁺2) oraz (II)),
- (IV) $u + u' = u$ (na mocy równości $u + u = u$),
- (V) $1 = u$ (na mocy (IV) i określenia (3.1))

Równość (V) przeczy założeniu, że u jest elementem różnym od 1, a to dowodzi słuszności tezy.

Zwróćmy uwagę na to że elementy 0 i 1 zależą od ciała U , to znaczy, że jeżeli U i V są różnymi ciałami Boole'a, to elementy 0 i 1 w ciele U są na ogół różne od elementów 0 i 1 w ciele V .

Po przyjęciu określeń (3.1) i (3.2) możemy postulaty (B⁺5) i (B·5) zapisać w postaci

$$\overline{(B^+5)} \qquad 8 \quad 1$$

W tej postaci są one zwykle przyjmowane w układach postulatów algebry Boole'a.

Nie należy zapominać, że ciało Boole'a tworzy nie sam zbiór U , lecz zbiór U wraz z określonymi w nim działaniami podstawowymi. Na przykład, gdy w pewnym zbiorze mamy określone dwa różne układy działań tworzące wraz z tym zbiorem ciało Boole'a, uważamy, że mamy do czynienia z dwoma różnymi ciałami Boole'a.