3.1. Ciągi liczbowe.

Definicja

Nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Oznaczamy
$$a(n) = a_n.$$

Element a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Ciąg oznaczamy także $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sposoby określania ciągów:
- opisowo
- jawnie wzorem
- rekurencyjnie.

- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy
  - ograniczonym z dołu, gdy

$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geqslant m,$$

- ograniczonym z góry, gdy

$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leqslant m,$$

-ograniczonym, gdy jest ograniczony z dołu i z góry, tzn.

$$\exists_{m\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ -m \leqslant a_n \leqslant m,$$

-nieograniczonym, gdy nie jest ograniczony.

- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy
  - rosnącym, jeśli
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n < a_{n+1},$$
- - malejącym, jeśli
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n > a_{n+1},$$
- - niemalejącym, jeśli
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n \leqslant a_{n+1},$$
- - nierosnącym, jeśli
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n \geqslant a_{n+1},$$
- - monotonicznym, jeśli spełnia jeden z ostatnich czterech warunków.
- - stałym, jeśli $\exists_{a\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n = a$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem arytmetycznym, jeśli

$$\exists_{r\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_{n+1}-a_n=r.$$

Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

Jeśli $r>0$, to ciąg jest rosnący,
jeśli $r<0$, to ciąg jest malejący,
a jeśli $r=0$, to ciąg jest stały.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem geometrycznym, jeśli

$$\exists_{q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

Jeśli $q < 0$, to ciąg jest naprzemienny,
jeśli

$$(q \in (0,1) \wedge a_1 > 0) \vee (q \in (1,\infty) \wedge a_1 < 0),$$

to ciąg jest malejący,
jeśli

$$(q \in (0,1) \wedge a_1 < 0) \vee (q \in (1,\infty) \wedge a_1 > 0),$$

to ciąg jest rosnący,
a jeśli $q = 1$, to ciąg jest stały.