Pozycyjne systemy liczbowe

Wprowadzenie

Przykład
System dziesiętny
$7682.341 = 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$;
$27.333... = 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + ...$

System o dowolnej podstawie $p \in \{2, 3, 4, ...\}$:
$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_0 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^2 + ... + a_{-k} \cdot p^{-k} (+ ...)$;
$a_n, a_{n-1}, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-k}, (...) \in \{0, 1, ..., p-1\}$.
Zapis: $x = (a_n a_{n-1} \ ... \ a_0 . a_{-1} \ a_{-2} ...)_p$.
Oznaczenie cyfr powyżej 10: $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$, ...

Terminologia:
$p = 2 \Rightarrow$ *system binarny* lub inaczej *dwójkowy*;
$p = 8 \Rightarrow$ *system octagonalny* lub inaczej *ósemkowy*;
$p = 16 \Rightarrow$ *system hexadecymalny* lub inaczej *szesnastkowy*.

Zmiana podstawy systemu

Przypadek przejścia z systemu niedziesiętnego na dziesiętny

Przykład
$A7B_{12} = 10 \cdot 12^2 + 7 \cdot \mathbf{12}^1 + 11 \cdot 12^0 = 1440 + 84 + 11 = 1535$;
$DB.C_{14} = 13 \cdot 14^1 + 11 \cdot 14^0 + 12 \cdot 14^{-1} = 192 + 11 + \frac{12}{14} = 203\frac{6}{7}$.

Przypadek przejścia z systemu dziesiętnego na niedziesiętny

Przykłady
a) $x = 81$.
Metoda elementarna
$p = 2 \Rightarrow x = 1 \cdot 2^6 + 17 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1010001_2$;
$p = 8 \Rightarrow x = 1 \cdot 8^2 + 17 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 121_8$;
$p = 16 \Rightarrow x = 5 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 51_{16}$.

Metoda algorytmiczna

$p = 2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 81:2 = 40\ r\ 1 \\ 40:2 = 20\ r\ 0 \\ 20:2 = 10\ r\ 0 \\ 10:2 = 5\ r\ 0 \\ 5:2 = 2\ r\ 1 \\ 2:2 = 1\ r\ 0 \\ 1:2 = 0\ r\ 1 \end{array} \quad \Rightarrow x = 1010001_2$$

$p = 8 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 81:8 = 10\ r\ 1 \\ 10:8 = 1\ r\ 2 \\ 1:8 = 0\ r\ 1 \end{array} \quad \Rightarrow x = 121_8$$

$p = 16 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 81:16 = 5\ r\ 1 \\ 5:16 = 0\ r\ 5 \end{array} \quad \Rightarrow x = 51_{16}$$

b) $y = 167.6875.$

Metoda elementarna

$$p = 2 \Rightarrow y = 1\cdot 2^7 + 39 + \frac{275}{400} = 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 7 + \frac{11}{16} =$$

$$1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 3 + 1\cdot 2^{-1} + \frac{3}{16} =$$

$$1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} = 10100111.1011_2$$

$$p = 8 \Rightarrow y = 2\cdot 8^2 + 39 + \frac{11}{16} = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 + 5\cdot 8^{-1} + \frac{1}{16} =$$

$$2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 + 5\cdot 8^{-1} + 4\cdot 8^{-2} = 247.54_8;$$

$$p = 16 \Rightarrow y = 10\cdot 16^1 + 7\cdot 16^0 + 11\cdot 16^{-1} = A7.B_{16}.$$

Metoda algorytmiczna

$p = 2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 167:2 = 83\ r\ 1 \\ 83:2 = 41\ r\ 1 \\ 41:2 = 20\ r\ 1 \\ 20:2 = 10\ r\ 0 \\ 10:2 = 5\ r\ 0 \\ 5:2 = 2\ r\ 1 \\ 2:2 = 1\ r\ 0 \\ 1:2 = 0\ r\ 1 \end{array} \quad \Rightarrow 167 = 10100111_2$$

$0.6875\cdot 2 = \mathbf{1}.3750;\quad 0.375\cdot 2 = \mathbf{0}.75;\quad 0.75\cdot 2 = \mathbf{1}.5;\quad 0.5\cdot 2 = \mathbf{1}.0 \quad \Rightarrow 0.6875 = 0.1011_2.$

Stąd $y = 10100111.1011_2$.

$p = 8 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 167:8 = 20\ r\ 7 \\ 20:8 = 2\ r\ 4 \\ 2:8 = 0\ r\ 2 \end{array}\right\uparrow \quad \Rightarrow 167 = 247_8$$

$0.6875 \cdot 8 = \mathbf{5}.5000$; $0.5 \cdot 8 = \mathbf{4}.0$; $\Rightarrow 0.6875 = 0.54_8$.

Stąd $y = 247.54_8$.

$p = 16 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 167:16 = 10\ r\ 7 \\ 10:16 = 0\ r\ 10 \end{array}\right\uparrow \quad \Rightarrow 167 = A7_{16}$$

$0.6875 \cdot 16 = \mathbf{1}\ .0000$; $\Rightarrow 0.6875 = 0.B_{16}$.

Stąd $y = A7.B_{16}$.

Przypadek przejścia z systemu niedziesiętnego na inny niedziesiętny

Zawsze można przejść pośrednio przez system dziesiętny i w ten sposób problem sprowadzić do poprzednio omówionych przypadków. Ważny wyjątek to sytuacja, gdy jedna z podstaw jest naturalną potęgą drugiej podstawy. W tym przypadku możemy zastosować *metodę grupowania*, którą wyjaśnimy na przykładach.

Przykłady

Oznaczmy przez p podstawę wyjściową oraz przez q podstawę docelową.

a) Niech $u = 111010011_2$.

$p = 2$, $q = 4 = 2^{\mathbf{2}} \Rightarrow u = 01|11|01|00|11_2 = 13103_4$;

$p = 2$, $q = 8 = 2^{\mathbf{3}} \Rightarrow u = 111|010|011_2 = 723_8$;

$p = 2$, $q = 16 = 2^{\mathbf{4}} \Rightarrow u = 0001|1101|0011_2 = 1D3_{16}$.

b) Niech $v = 101100111.11011_2$.

$p = 2$, $q = 4 = 2^{\mathbf{2}} \Rightarrow v = 01|01|10|01|11.11|01|10_2 = 11213.312_4$;

$p = 2$, $q = 8 = 2^{\mathbf{3}} \Rightarrow v = 101|100|111.110|110_2 = 547.66_8$;

$p = 2$, $q = 8 = 2^{\mathbf{4}} \Rightarrow v = 0001|0110|0111.1101|1000_2 = 167.D8_{16}$.

c) Niech $w = F9C.7E_{16}$.

$p = 16 = 2^{\mathbf{4}}$, $q = 2 \Rightarrow w = 1111|1001|1100|.0111|1110_2 = 111110011100.01111111_2$;

$p = 16 = 4^{\mathbf{2}}$, $q = 4 \Rightarrow w = 33|21|30.13|32 = 332130.1332_4$;

$p = 16$, $q = 8 \Rightarrow w = 111110011100.0111111_2 \Rightarrow$

$p = 2$, $q = 2^{\mathbf{3}} \Rightarrow w = 111|110|011|100.011|111|100_2 = 7634.374_8$.

d) Niech $x = 765.43201_8$.

$p = 8 = 2^{\mathbf{3}}$, $q = 2 \Rightarrow x = 111|110|101.100|011|010|000|001_2 = 111110101.100011010000001_2$;

$\Rightarrow p = 2$, $q = 4 = 2^{\mathbf{2}} \Rightarrow x = 01|11|11|01|01.10|00|11|01|00|00|00|10_2 = 13311.20310002_4$;

$\Rightarrow p = 2$, $q = 16 = 2^{\mathbf{4}} \Rightarrow x = 0001|1111|0101.1000|1101|0000|0010_2 ;= 1F5.8D02_{16}$;

$\Rightarrow p = 4$, $q = 16 = 4^{\mathbf{2}} \Rightarrow x = 01|33|11.20|31|00|02_4 = 1F5.8D02_{16}$.

Cztery podstawowe działania arytmetyczne w systemach niedziesiętnych

Przykłady. Zilustrujemy problematykę na przykładzie systemów o podstawach 2, 8 i 16.

Dodawanie

$p=2$.

$$
\begin{array}{r}
1011011101_2 \\
+1111010101_2 \\
\hline
10101000010_2
\end{array}
$$

$p=8$.

$101|101|101_2 = 555_8$;

$001|111|010|101_2 = 1725_8$.

$$
\begin{array}{r}
555_8 \\
+1725_8 \\
\hline
2502_8
\end{array}
$$

Sprawdzenie: $010|101|000|010_2 = 2502_8$.

$p=16$.

$0001|0110|1101_2 = 16D_{16}$;

$0011|1101|0101_2 = 3D5_{16}$.

$$
\begin{array}{r}
1\,6\,D_{16} \\
+3\,D\,5_{16} \\
\hline
5\,4\,2_{16}
\end{array}
$$

Sprawdzenie: $0101|0100|0010_2 = 542_{16}$.

Odejmowanie

$p=2$.

$$
\begin{array}{r}
10000000.000_2 \\
-\ 1101101.101_2 \\
\hline
10010.011_2
\end{array}
$$

$p=8$.

$010|000|000.000_2 = 200.0_8$;

$001|101|101.101_2 = 155.5_8$.

$$
\begin{array}{r}
200.0_8 \\
-155.5_8 \\
\hline
22.3_8
\end{array}
$$

Sprawdzenie: $010|010.011_2 = 22.3_8$

$p = 16$.

$1000|0000.0000_2 = 80.0_{16}$;

$0110|1101.1010_2 = 6D.A_{16}$.

$$\begin{array}{r} 8\,0.\,0_{16} \\ -\,6\,D.\,A_{16} \\ \hline 1\,2.\,6_{16} \end{array}$$

Sprawdzenie: $0001|0010.0110_2 = 12.6_8$.

<u>Mnożenie</u>

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1.\,1\,1_2 \\ \times 1\,0\,1\,0\,1.\,0\,1_2 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1.\,0\,0\,1\,1_2 \end{array}$$

$p = 8$.

$001|110|001.110_2 = 161.6_8$;

$010|101.010_2 = 25.2_8$

$$\begin{array}{r} 1\,6\,1.\,6_8 \\ \times 2\,5.\,2_8 \\ \hline 3\,4\,3\,4 \\ 1\,0\,7\,0\,6 \\ 3\,4\,3\,4 \\ \hline 4\,5\,6\,1.\,1\,4_8 \end{array}$$

Sprawdzenie: $100|101|110|001.001|100_2 = 4561.14_8$.

$p = 16$.

$0111|0001.1100_2 = 71.C_{16}$;

$0001|0101.0100_2 = 15.4_{16}$.

$$\begin{array}{r} 7\,1.\,C_{16} \\ \times 1\,5.\,4_{16} \\ \hline 1\,C\,7\,0 \\ 2\,3\,8\,C \\ 7\,1\,C \\ \hline 9\,7\,1.\,3\,0_{16} \end{array}$$

Sprawdzenie: $1001|0111|0001.0011_2 = 9711.3_{16}$.

Dzielenie

$p = 2.$

$$
\begin{array}{r}
\underline{100011110_2\qquad\qquad} \\
11110101110010_2 : 110111_2 \\
\underline{110111}\qquad\qquad\qquad\quad \\
1100111\qquad\qquad\qquad \\
\underline{110111}\qquad\qquad\qquad \\
1100000\qquad\qquad \\
\underline{110111}\qquad\qquad \\
1010010\qquad\quad \\
\underline{110111}\qquad\quad \\
110111\qquad \\
\underline{110111}\qquad \\
0\qquad
\end{array}
$$

$p = 8.$

$011|110|101|110|010_2 = 36562_8$

$110|111_2 = 67_8$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad 436_8 \qquad} \\
36562_8 : 67_8 \\
\underline{334\;\;} \\
\;\;316 \\
\;\;\underline{245\;\;} \\
\quad\;\; 51\,2 \\
\quad\;\; \underline{51\,2\;} \\
\qquad\quad\; 0
\end{array}
$$

Sprawdzenie: $100|011|110_2 = 436_8$.

$p = 16.$

$0011|1101|0111|0010_2 = 3D72_{16}$

$0011|0111_2 = 37_{16}$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\;\;1\,1\,E_{16}\qquad} \\
3D\,7\,2_{16} : 37_{16} \\
\underline{3\,7\;\;} \\
\;\;6\,7 \\
\;\;\underline{3\,7\;\;\;} \\
\;\;3\,0\;\;2 \\
\;\;\underline{3\,0\;\;2} \\
\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

Sprawdzenie: $0001|0001|1110_2 = 11E_{16}$.