Geometria analityczna - przykłady

1. Znaleźć równanie ogólne i równania parametryczne prostej w $\mathbb{R}^2$, któr przechodzi przez punkt $(-4, 3)$ oraz

   (a) jest równoległa do prostej $x + 5y - 2 = 0$.

   (b) jest prostopadła do prostej $3x + 4y + 7 = 0$.

   Rozwiązanie

   (a) Prosta równoległa do naszej prostej ma postać $x + 5y + C = 0$. Ponieważ przechodzi ona przez punkt $(-4, 3)$, to punkt ten musi spełniać jej równanie. Zatem
   $$-4 + 15 + C = 11 + C = 0.$$
   Stąd $C = -11$.

   Równanie ogólne szukanej prostej dane jest wzorem
   $$(*) \qquad x + 5y - 11 = 0.$$
   Ze wzoru $(*)$ wyliczamy $x = 11 - 5y$. Oznaczmy $y = t$.

   Równania parametryczne naszej prostej mają postać
   $$l : \begin{cases} x &= 11 - 5t \\ y &= t \end{cases}, \qquad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Prosta prostopadła do naszej prostej ma postać $5x - y + D = 0$. Ponieważ przechodzi ona przez punkt $(-4, 3)$, to punkt ten musi spełniać jej równanie. Zatem
   $$5(-4) - 3 + D = -17 + D = 0.$$
   Stąd $D = -17$.

   Równanie ogólne szukanej prostej dane jest wzorem
   $$(**) \qquad 5x - y - 17 = 0.$$
   Ze wzoru $(**)$ wyliczamy $y = 5x - 17$. Oznaczmy $x = s$.

   Równania parametryczne naszej prostej mają postać
   $$l : \begin{cases} x &= s \\ y &= -17 + 5s \end{cases}, \qquad \text{gdzie } s \in \mathbb{R}.$$

2. Obliczyć kąt między prostymi
   $$l_1 : 3x - y = 0 \quad \text{oraz} \quad l_2 : 2x + y - 5 = 0.$$

Rozwiązanie

Cosinus kąta między prostymi l_1 i $l_2$jest równy kątowi między wektorami $[3,-1]$ oraz $[2,1]$ prostopadłymi do tych prostych

$$\cos\sphericalangle(l_1,l_2)=\frac{[3,-1]\cdot[2,1]}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}.}{2}$$

Zatem $\sphericalangle(l_1,l_2)=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(3,4)$. Napisać równanie prostej na której leży dwusieczna kąta o wierzchołku w punkcie A.

Rozwiązanie

Wektory $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ oraz $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ są wektorami kierunkowymi ramion kąta $\sphericalangle BAC$ i mają jednakowe długości. Suma

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

tych wektorów jest wektorem kierunkowym dwusiecznej kąta. Obliczmy tę sumę

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{[4,0]}{\sqrt{16}}+\frac{[3,4]}{\sqrt{9+16}}=[1,0]+\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]=\left[\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right].$$

Wektor $\left[\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right]$ jest równoległy do wektora $[8,5]$. Równanie szukanej prostej ma postać

$$8x+5y=0.$$

4. Ułożyć równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste

$$l_1: 9x-2y+18=0 \quad \text{i} \quad l_2: 7x+6y-21=0.$$

Sprawdzić, że te dwusieczne są wzajemnie prostopadłe.

Rozwiązanie

Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów płaszczyzny równooddalonych od ramion kąta. Oznaczmy symbolem (X,Y) punkt leżący na dwusiecznej. Wtedy odległości $\mathrm{d}((X,Y),l_1)=\mathrm{d}((X,Y),l_2)$.

Stąd

$$\begin{aligned}\frac{|9X-2Y+18|}{\sqrt{81+4}} &= \frac{|7X+6Y-21|}{\sqrt{49+36}},\\ |9X-2Y+18| &= |7X+6Y-21|\,.\end{aligned}$$

Zatem

$$9X-2Y+18 = 7X+6Y-21 \ \text{ lub } \ 9X-2Y+18 = -\left(7X+6Y-21\right).$$

Szukane dwusieczne dane są równaniami

$$2X-8Y+39=0 \ \text{ oraz } \ 16X+4Y-3=0.$$

Dwusieczne są prostopadłe, gdyż iloczyn skalarny wektorów do nich prostopadłych $[2,-8]\cdot[16,4]=0$

5. Obliczyć objętość równoległościanu o wierzchołkach $A=(1,4,0)$, $B=(3,1,2)$, $C=(1,3,2)$, $D=(2,0,0)$.

Rozwiązanie

Objętość równoległościanu o wierzchołkach A,B,C,D jest równa wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Z kolei iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ jest równy wyznacznikowi utworzonemu odpowiednio ze współrzędnych tych wektorów.

Obliczmy $\overrightarrow{AB}=[2,-3,2]$, $\overrightarrow{AC}=[0,-1,2]$, $\overrightarrow{AD}=[1,-4,0]$.

Stąd

$$\det\begin{bmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{vmatrix} = 12.$$

Zatem objętość rozważanego równoległościanu jest równa 12.

6. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ jest równa 3. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach

$$\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}, \quad \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}, \quad \vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}-3\vec{r}.$$

Rozwiązanie

Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jest równa wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego tych wektorów.

Obliczymy iloczyn mieszany $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Policzmy najpierw iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$;

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) \times (2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}) = \\ &= 2\vec{p} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r} + 2\vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{r} - 2\vec{r} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{r} - \vec{r} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

Korzystając z własności iloczynu wektorowego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}& 2\vec{p} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r} + 2\vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{r} - 2\vec{r} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{r} - \vec{r} \times \vec{r} = \\ = \ & -\vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r} - 2\vec{p} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{r} + 2\vec{p} \times \vec{r} - \vec{q} \times \vec{r} = -3\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

Policzmy teraz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} \times \vec{b}$ oraz $\vec{c}$;

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (-3\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{r}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}) \, .$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}& (-3\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{r}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}) = \\ = \ & -3\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{p} - 6\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{q} + 9\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} + 3\,(\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} + 6\,(\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{q} - 9\,(\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{r} = \\ = \ & 9\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} + 6\,(\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{q} = 9\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} - 6\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} = 3\,(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}.\end{aligned}$$

Ale objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jest równa 3. Zatem Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wynosi

$$\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = 3\,|(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}| = 3 \cdot 3 = 9.$$

7. Podać równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3, 1, -2)$ i równoległej do płaszczyzny π danej równaniem $\pi : x - 2y + 5z - 5 = 0$.

   Rozwiązanie

   Szukana płaszczyzna ma być równoległa do płaszczyzny danej, zatem wektor $\vec{n} = [1, -2, 5]$ jest również wektorem prostopadłym do szukanej płaszczyzny. Równanie szukanej płaszczyzny ma więc postać

   $$(*) \qquad x - 2y + 5z + D = 0.$$

   Punkt $P = (3, 1, -2)$ należy do poszukiwanej płaszczyzny. Zatem współrzędne punktu P spełniają równanie $(*)$. Stąd $3 - 2 - 10 + D = 0$. Co daje $D = 9$. Szukana płaszczyzna dana jest więc równaniem

   $$x - 2y + 5z + 9 = 0.$$

8. Napisać równanie ogólne płaszczyzny π', która przechodzi przez punkty $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (1, 1, 2)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny π o równaniu

$$\pi : x + 3y + z - 5 = 0.$$

Rozwiązanie

Wektory $\overrightarrow{PQ} = [-2, 0, 4]$ $\vec{n} = [1, 3, 1]$ są do poszukiwanej płaszczyzny π' równoległe. Zatem wektor $\overrightarrow{PQ} \times \vec{n} = [-12, 6, -6]$ jest do niej prostopadły. Ponieważ wektor $[-12, 6, -6]$ jest równoległy do wektora $[2, -1, 1]$, a punkt $(1, 1, 2) \in \pi'$, to równanie szukanej płaszczyzny π' ma postać

$$2x - y + z - 3 = 0.$$

9. Przez punkt $A = (-1, 2, -1)$ poprowadzić płaszczyznę równoległą do prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{i} \quad l_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Podać równanie ogólne i równania parametryczne szukanej płaszczyzny.

Rozwiązanie

(a) Znajdziemy najpierw równanie ogólne szukanej płaszczyzny.Wektor prostopadły do naszej płaszczyzny ma postać

$$\begin{aligned} \vec{n} &= [1, -1, -1] \times [-2, 1, 5] = \\ &= \left[\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Punkt $A = (-1, 2, -1)$ ma do naszej płaszczyzny ma należeć. Stąd $4(x+1) + 3(y-2) + (z+1) = 0$. Porządkując ostatnie równaniu otzymujemy równanie ogólne szukanej płaszczyzny

$$4x + 3y + z - 1 = 0.$$

(b) Podamy teraz równania parametryczne szukanej płaszczyzny.

Proste l_1, i l_2 są równoległe do szukanej płaszczyzny. Więc wektory $[1, -1, -1]$, $[-2, 1, 5]$ też są do niej równoległe. Punkt $A = (-1, 2, -1)$ do naszej płaszczyzny należy. Zatem płaszczyzna ta dana jest równaniami

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + t - 2s \\ y = 2 - t + s \\ z = -1 - t + 5s \end{cases}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

10. Przy jakich wartościach współczynników B i C płaszczyzna

$$\pi : 2x - By + Cz - 4 = 0.$$

jest prostopadła do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie

Płaszczyzna π jest prostopadła do prostej l, jeśli wektor $\vec{n} = [2, -B, C]$ jest równoległy do wektora $[2, -1, -3]$. Stąd

$$\frac{2}{2} = \frac{-B}{-1} = \frac{C}{-3}.$$

Zatem $B = 1$, a $C = -3$.

11. Znaleźć kąt między płaszczyznami

$$\pi_1 : x + 2y + 3z + 4 = 0 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 3x - y + 2z - 3 = 0.$$

Rozwiązanie

Kąty między dwiema płaszczyznami są równe kątom między wektorami prostopadłymi do tych płaszczyzn. Wektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ jest prostopadły do płaszczyzny π_1.Wektor $\vec{w} = [3, -1, 2]$ jest prostopadły do płaszczyzny π_2.

$$\cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{[1, 2, 3] \cdot [3, -1, 2]}{|[1, 2, 3]| \; |[3, -1, 2]|} = \frac{3 - 2 + 6}{\sqrt{1 + 4 + 9}\,\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Zatem $\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{\pi}{3}$.

12. Znaleźć rzut prostopadły punktu $(8, 1, 1)$ na płaszczyznę π o równaniu

$$(*) \qquad \pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Rozwiązanie

Równania prostej l prostopadłej do płaszczyzny π i przechodzącej przez punkt $(8, 1, 1)$ mają postać

$$(*\star) \qquad l : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Szukamy punktu $P = l \cap \pi$, który jest szukanym rzutem. Znajdziemy rozwiązanie układu złożonego z równania $(*)$ i $(**)$.

W tym celu obliczmy

$$8 + t - 2\,(1 - 2t) + 1 + t - 1 = 6 + 6t = 0.$$

Stąd $t = -1$. Szukany rzut $P = (7, 3, 0)$.

13. Sprawdzić, czy proste l_1 i l_2 się przecinają

$$l_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & 2 & - & 3t \\ z & = & 4 & + & t \end{array} \right. , \quad l_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 3 & + & t \\ y & = & -1 & + & 6t \\ z & = & 5 & + & 2t \end{array} \right. , \qquad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Jeśli tak, to podać równanie ogólne płaszczyzny zawierającej te proste.

Rozwiązanie

Jeśli istnieje punkt należący do obu prostych, to jego wspólrzędne spełniają równanie każdej z tych prostych. Układ równań

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2t & = & 3 & + & s \\ 2 & - & 3t & = & -1 & + & 6s \\ 4 & + & t & = & 5 & + & 2s \end{array}$$

musi mieć rozwiązanie. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $t = 1$, $s = 0$. Punkt przecięcia prostych ma współrzędne $(3, -1, 5)$. Wektor $\vec{n} = [2, -3, 1] \times [1, 6, 2] = [-12, -3, 15]$ jest prostopadły do szukanej płaszczyzny. Zatem płaszczyzna ta dana jest równaniem

$$-12\,(x - 3) - 3\,(y + 1) + 15\,(z - 5) = 0.$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy równanie ogólne szukanej płaszczyzny :

$$4x + y - 5z + 14 = 0.$$

14. Znaleźć równania rzutu prostopadłego prostej

$$l : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 2 & - & 3t \\ y & = & 2 & + & t \\ z & = & 1 & - & t \end{array} \right. , \qquad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

na płaszczyznę π o równaniu

$$\pi : x + 2y - 4z - 2 = 0.$$

Rozwiaząnie

Szukany rzut prostopadły l', prostej l na płaszczyznę π jest prostą będącą krawędzią przecięcia płaszczyzny π z płaszczyzną π', zawierającą prostą l i prostopadłą do płaszczyzny π. Znajdziemy równanie płaszczyzny π'. Zauważmy, że wektory $[-3,1,-1]$ oraz $[1,2,-4]$ są równoległe do płaszczyzny π'. Iloczyn wektorowy $[-3,1,-1]\times[1,2,-4]=[-2,-13,-7]$ jest wektorem do płaszczyzny π' prostopadłym, a punkt $(2,2,1)$ do niej należy. Zatem równanie tej płaszczyzny ma postać $-2(x-2)-13(y-2)-7(z-1)=0$. Po uporządkowaniu dostajemy równanie ogólne płaszczyzny $\pi' : 2x+13y+7z-37=0$.

Równania szukanej prostej l', będącej rzutem prostej l na płaszczyznę π, mają postać

$$l' : \begin{cases} x+2y-4z-2=0 \\ 2x+13y+7z-37=0 \end{cases}.$$

15. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana jest prosta l

$$l : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

i prosta do niej równoległa przechodząca przez punkt $A=(1,0,1)$. Znaleźć równania parametryczne płaszczyzny zawierającej te proste.

Rozwiązanie

Prosta l przechodzi przez punkt $B=(2,1,2)$. Wektory $\vec{v}=[-2,1,-1]$ oraz wektor $\overrightarrow{AB}=[1,1,1]$ są wektorami równoległymi do szukanej płaszczyzny. Zatem równania tej płaszczyzny mają postać

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - 2t + s \\ y = 1 + t + s \\ z = 2 - t + s \end{cases}, \qquad t,s\in\mathbb{R}.$$

16. Znaleźć odległość punktu $P=(2,1,-3)$ od płaszczyzny π o równaniu

$$\pi : x-2y+5z-1=0.$$

Rozwiązanie

Można skorzystać ze wzoru. Jeśli $P=(x_0,y_0,z_0)$, a płaszczyzna π dana jest równaniem $Ax+By+Cz+D=0$, to odległość punktu P od płaszczyzny π jest równa

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Obliczmy

$$\frac{|2-2-15-1|}{\sqrt{1+4+25}}=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}.$$

Zatem szukana odległość wynosi $\frac{8}{25}$.

17. Znaleźć odległość punktu $P = (2, 1, -3)$ od prostej l o równaniu

$$(*) \qquad l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $(2, 1, -3)$ i prostopadłej do prostej l ma postać

$$(**) \qquad \pi : 2x - 3y + z + 2 = 0.$$

Rozwiązując układ złożony z równań $(*)$ i $(**)$ wyliczamy parametr $t = -\frac{1}{7}$, a następnie współrzędne punktu przecięcia prostej l z płaszczyzną π

$$Q = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{7}\right),\ 2 - 3\left(-\frac{1}{7}\right),\ 4 + \left(-\frac{1}{7}\right)\right) = \left(\frac{5}{7}, \frac{17}{7}, \frac{27}{7}\right).$$

Dalej znajdujemy odległość pomiędzy punktami P oraz Q. Odległość ta wynosi $\frac{\sqrt{2485}}{7}$.

18. Obliczyć odległość między prostymi równoległymi

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie

Napiszemy równanie płaszczyzny π prostopadłej do obydwu prostych, przechodzącej przez punkt $P = (1, 3, 0)$ .Następnie znajdziemy punkt Q przecięcia tej płaszczyzny z prostą l_1. Odległość pomiędzy punktemi P i Q jest szukaną odległością pomiędzy prostymi równoległymi l_1 i l_2. Równanie płaszczyzny π ma postać

$$\pi : x - 2y + z + D = 0.$$

Wyliczamy $D : 1 - 6 + D = 0$. Zatem $D = 5$. Czyli płaszczyzna π dana jest równaniem

$$\pi : x - 2y + z + 5 = 0.$$

Dalej szukamy punktu przecięcia prostej l_1 z płaszczyzna π.

Obliczmy

$$-1 - t - 2(1 + 2t) + 1 - t + 5 = 3 - 6t = 0.$$

Zatem $t = \frac{1}{2}$. Punkt przecięcia $l_1 \cap \pi = \left(-\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$. Szukana odległość $|PQ|$ wynosi $\frac{1}{2}\sqrt{30}$.

19. Obliczyć odległość między prostymi skośnymi

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie

Odległość między prostymi skośnymi l_1 i l_2 jest równa odległości pomiędzy płaszczyznami równoległymi zawierającymi te proste. Z kolei odległość między płaszczyznami równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej płaszczyzny od drugiej płaszczyzny.

Znajdziemy teraz równanie płaszczyzny π zawierającej prostą l_1 i równoległą do prostej l_2.

Płaszczyzna ta przechodzi przez punkt $(1, 3, 2)$ i jest prostopadła do wektora $[1, 2, 1] \times [1, -2, -1] = [0, 2, -4]$, który jest równoległy do wektora $[0, 1, -2]$. Równanie płaszczyzny π ma postać

$$\pi : y - 2z + 1 = 0.$$

Odległość punktu $(3, -1, 2)$ od tej płaszczyzny jest równa

$$\frac{|-1 - 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Zatem odległość pomiędzy prostymi l_1 i l_2 też jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

20. Dane jest równanie elipsy $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Obliczyć długości osi tej elipsy, współrzędne ognisk i mimośród.

Rozwiązanie

Dzieląc obie strony równania elipsy przez 4225 otrzymujemy równanie elipsy w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Z tego równania odczytujemy oś wielka $2a = 2\sqrt{169} = 26$, oś mała $2b = 2\sqrt{25} = 10$. Współrzędne ognisk są równe $(c, 0)$ oraz $(-c, 0)$, gdzie $c = \sqrt{169 - 25} = 12$. Mimośród $e = \frac{c}{a}$ jest równy $\frac{12}{13}$.

21. Napisać równanie stycznej do elipsy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ w punkcie o jednakowych współrzędnych dodatnich.

Rozwiązanie

Skoro punkt styczności ma jednakowe współrzędne, to możemy go wyznaczyć z równania

$$\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{3}=1.$$

Dalej, skoro współrzędne mają być dodatnie, to szukanym punktem jest punkt $P_0=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. Styczna do naszej elipsy w punkcie P_0 ma postać

$$\frac{x}{9}\cdot\frac{3}{2}+\frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2}=1.$$

Po wykonaniu przekształceń ostatecznie otrzymujemy równanie szukanej stycznej w postaci

$$x+3y-6=0.$$

22. Znaleźć równania stycznych do elipsy, $2x^2+3y^2=10$, które są równoległe do prostej $y=x+2$.

Rozwiązanie

Równanie dowolnej prostej równoległej do prostej $y=x$ ma postać $y=x+b$, gdzie b jest stałą. Skoro ta prosta ma być styczna do naszej elipsy, to układ równań postaci

$$\begin{array}{ccccc} 2x^2 & + & 3y^2 & = & 10 \\ x & + & b & = & y \end{array}$$

musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Podstawiając y z drugiego równania do równania pierwszego otrzymujemy

$$2x^2+3\left(x+b\right)^2-10=0.$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń dostajemy równanie kwadratowe

$$5x^2+6bx+\left(3b^2-10\right)=0,$$

które musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Wynika stąd, że

$$\Delta=36b^2-4\cdot5\cdot\left(3b^2-10\right)=0.$$

Zatem $b=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ lub $b=-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$. Równania szukanych stycznych maja wiec postać $y=x+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ oraz $y=x-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$.

23. Znaleźć półosie hiperboli oraz współrzędne wierzchołków hiperboli

$$(*) \qquad 9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0.$$

Rozwiązanie

Równanie $(*)$ zapiszmy w postaci

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Półosie są odpowiednio równe $a = 4$, $b = 3$. Wspólrzędne wierzchołków $(-6, 3)$ i $(2., 3)$.

24. Hiperbola jest styczna do prostej $x - y - 2 = 0$ w punkcie $P = (4, 2)$. Napisać równanie tej hiperboli.

Rozwiązanie

Równanie stycznej możemy zapisać w postaci

$$(**) \qquad \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1.$$

Hiperbola niech będzie dana równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Styczna do tej hiperboli w punkcie $(4, 2)$ ma postać

$$(***) \qquad \frac{x \cdot 4}{a^2} - \frac{y \cdot 2}{b^2} = 1.$$

Porównując równania $(**)$ oraz $(***)$ dostajemy $a^2 = 8$, $a^2 = 4$. Stąd ostatecznie równanie szukanej hiperboli ma postać

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

25. Znaleźć równanie prostej na której leży cięciwa paraboli $y^2 = 4x$, której to cięciwy środkiem jest punkt $M = (4, 1)$.

Rozwiązanie

Niech (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) będą punktami przecięcia szukanej cięciwy z parabolą $y^2 = 4x$. Punkt $(1, 1)$ jest środkiem cięciwy, zatem $(1, 1) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Jednocześnie punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) spełniają równanie danej paraboli. Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ y_1 + y_2 &= 2 \\ y_1^2 &= 4x_1 \\ y_2^2 &= 4x_2. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $y_1^2 + y_2^2 = 4\,(x_1 + x_2) = 8$. Dostajemy zatem układ równań postaci

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= 8 \\ y_1 + y_2 &= 2. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy $(x_1, y_1) = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \sqrt{3}\right)$, $(x_2, y_2) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \sqrt{3}\right)$.

Szukana prosta przechodzi w szczególności przez punkty $(1, 1)$ i $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \sqrt{3}\right)$.

Stąd

$$\frac{x - 1}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{y - 1}{1 + \sqrt{3} - 1}.$$

Ostatecznie szukana prosta dana jest wzorem $2x - y - 1 = 0$.