## *Ćwiczenia z algebry Boole'a*

Rozwiążemy serię zadań dotyczących dotychczas omówionej problematyki.

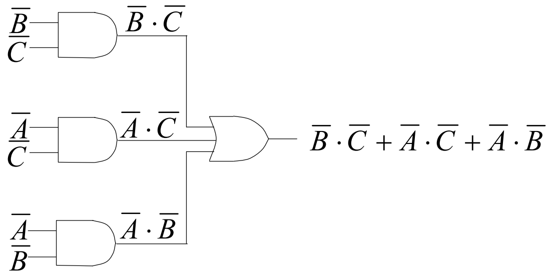
<u>*Ćwiczenie*</u>.

Uprościć wyrażenie algebry Boole'a oraz podać jego realizację przy pomocy bramek:

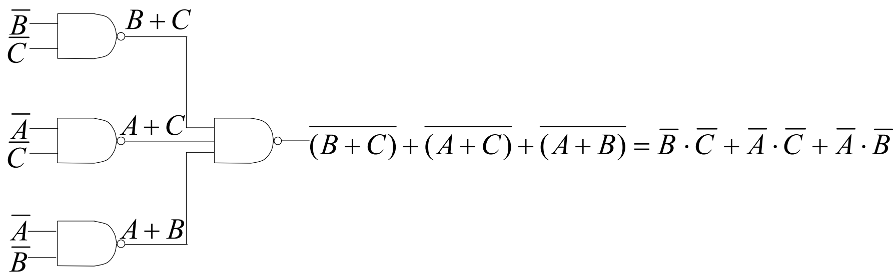
***a)***

$$A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C=(A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C)=$$
$$\overline{B}\,\overline{C}\,(A+\overline{A})+\overline{A}\,\overline{C}\,(\overline{B}+B)+\overline{A}\,\overline{B}\,(\overline{C}+C)=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,.$$

<u>*Realizacja typu And-to-Or*</u>:



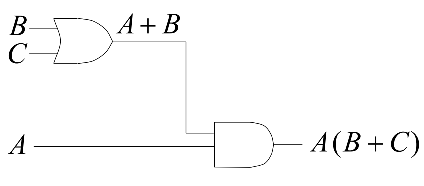

<u>*Realizacja typu Nand-to-Nand*</u>:



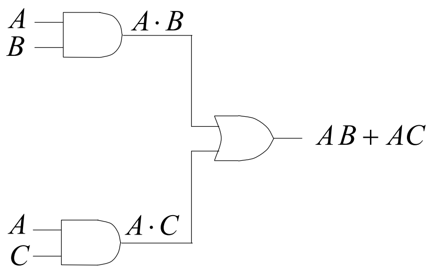

***b)***

$$A(A+B+C)(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})=$$
$$A\big((A+B+C)(\overline{A}+B+C)\big)\big((A+B+C)(A+\overline{B}+C)\big)\big((A+B+C)(A+B+\overline{C})\big)=$$
$$A\big((B+C)+A\,\overline{A}\big)\big((A+C)+B\,\overline{B}\big)\big((A+B)+C\,\overline{C}\big)=A(B+C)(A+C)(A+B)=$$
$$(B+C)\big(A(A+C)\big)\big(A(A+B)\big)=(B+C)\,A\,A=A(B+C)\overset{\text{lub}}{=}A\,B+A\,C\,.$$

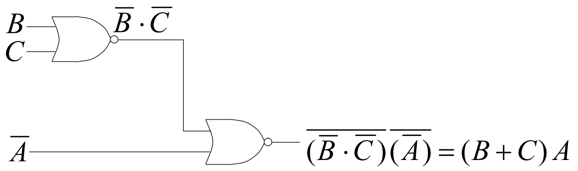
<u>*Realizacja typu Or-to-And*</u>:



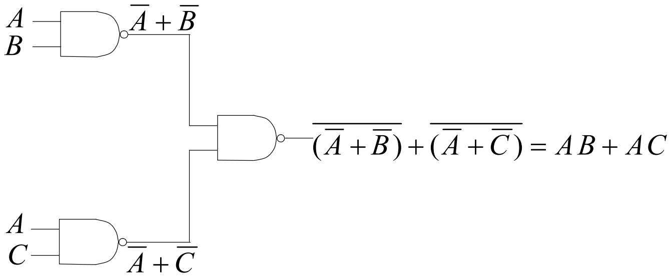

<u>*Realizacja typu And-to-Or*</u>:



*Realizacja typu Nor-to-Nor*:




*Realizacja typu Nand-toNand*:




*Ćwiczenie*.

Uprościć wyrażenie algebry Boole'a:

***a)***

$$AB + A\overline{B} + \overline{A}C + \overline{A}\,\overline{C} = (AB + A\overline{B}) + (\overline{A}C + \overline{A}\,\overline{C}) = A(B+\overline{B}) + \overline{A}(C+\overline{C}) = A + \overline{A} = 1.$$

***b)***

$$XY(\overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}) = XY\big((\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}) + (X\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z})\big) =$$
$$XY\big(\overline{X}\,\overline{Z}(Y+\overline{Y}) + \overline{Y}\,\overline{Z}(X+\overline{X})\big) = XY(\overline{X}\,\overline{Z} + \overline{Y}\,\overline{Z}) = XY\overline{X}\,\overline{Z} + XY\overline{Y}\,\overline{Z} = 0+0 = 0.$$

*Ćwiczenie*.

Przekształcić wyrażenie do najprostszej postaci sumy iloczynów:

***a)***

$$(\overline{A}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}) = \big((\overline{A}\,\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + C\overline{A}) + C\overline{B} + C\overline{C}\big)(A+\overline{B}) =$$
$$\big(\overline{A}(1+\overline{B}+\overline{C}+C) + \overline{B}C\big)(A+\overline{B}) = (\overline{A}+\overline{B}C)(A+\overline{B}) = \overline{A}A + (\overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}CA + \overline{B}C\overline{B}) =$$
$$\overline{B}\big(\overline{A} + (AC+C)\big) = \overline{B}\big(\overline{A} + C(A+1)\big) = \overline{B}(\overline{A}+C) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}C.$$

***b)***

$$(A+B\overline{C})(\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B) = (A+B\overline{C})\overline{A}(\overline{B}+B) = (A+B\overline{C})\overline{A} = A\overline{A} + B\overline{C}\,\overline{A} = \overline{A}B\overline{C}.$$

***c)***

$$(\overline{A}+C)(AB + \overline{A}\,\overline{B} + AC) = \overline{A}AB + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}AC + CAB + C\overline{A}\,\overline{B} + CAC =$$
$$(\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}C) + (ABC + AC) = \overline{A}\,\overline{B}(1+C) + AC(B+1) = \overline{A}\,\overline{B} + AC.$$

*Ćwiczenie*.
Zaprojektować możliwie najprostsze wyrażenie logiczne w postaci kanonicznej sumy iloczynów, przedstawić jego możliwe realizacje przy pomocy bramek:

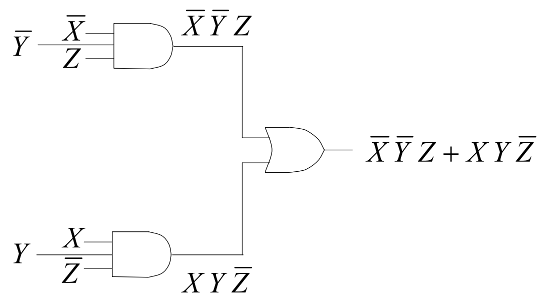
| *Input* | | | *Output* |
|---|---|---|---|
| *X* | *Y* | *Z* | *A* |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

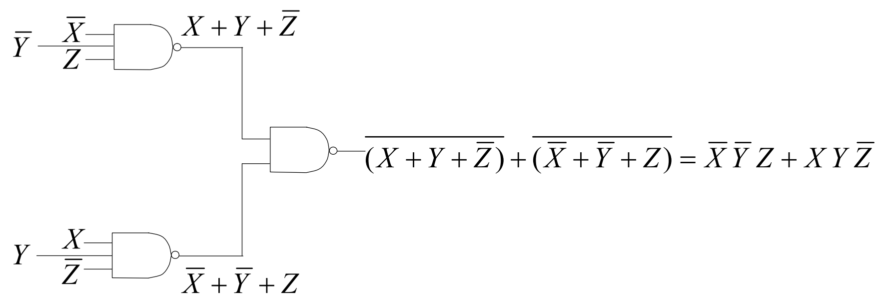
Dodajemy do tabeli definicyjnej dodatkową kolumnę iloczynów:

| *Input* | | | *Output* | *Iloczyny* |
|---|---|---|---|---|
| *X* | *Y* | *Z* | *A* | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $X\,Y\,\overline{Z}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |

Stąd szukane wyrażenie ma postać|:
$A = \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z}$.

Może być ono zrealizowane przy pomocy układu bramek typu *And-to-Or* lub *Nand-to-Nand*:



*Ćwiczenie*.
Zaprojektować możliwie najprostsze wyrażenie logiczne w postaci kanonicznej iloczynu sum, przedstawić jego możliwe realizacje przy pomocy bramek:

| *Input* | | | *Output* |
|---|---|---|---|
| *A* | *B* | *C* | *Z* |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

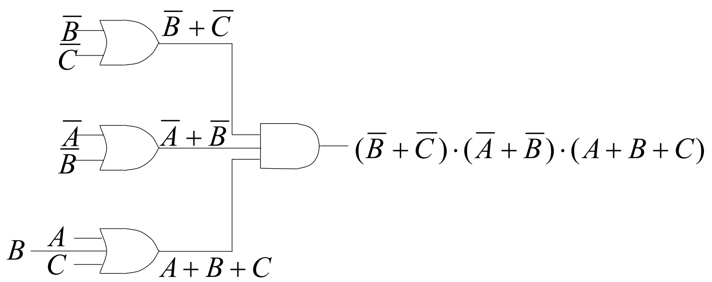
Dodajemy do tabeli definicyjnej dodatkową kolumnę sum:

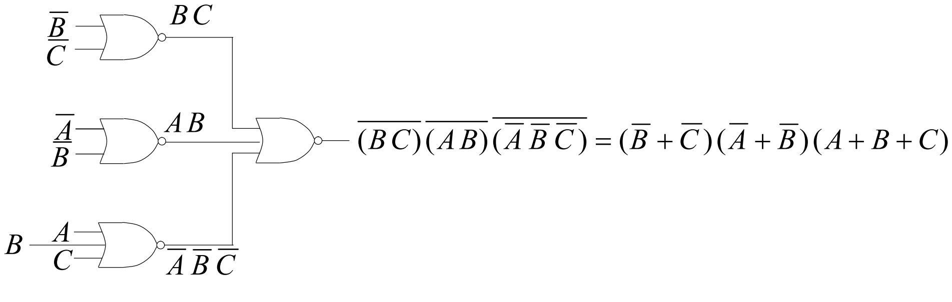
| *Input* | | | *Output* | *Sumy* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | *C* | *Z* | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $A+B+C$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $A+\overline{B}+\overline{C}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $\overline{A}+\overline{B}+C$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ |

Stąd szukane wyrażenie ma postać|:

$$A=(A+B+C)\big((A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\big)\big((\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\big)=$$
$$(A+B+C)\big((\overline{B}+\overline{C})+A\overline{A}\big)\big((\overline{A}+\overline{B})+C\overline{C}\big)=(\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B})(A+B+C).$$

Może być ono zrealizowane przy pomocy układu bramek typu *Or-to-And* lub *Nor-to-Nor*:



*Ćwiczenie*.

Przekształcić wyrażenie do najprostszej postaci kanonicznej iloczynu sum, w przypadku *b)* podać jego realizacje przy pomocy bramek:

***a)***

$W = A\overline{B}(A+B)(\overline{B}+\overline{C}) = \big((A+0)(A+B)\big)\big((\overline{B}+0)(\overline{B}+\overline{C})\big) = (A+0\cdot B)(\overline{B}+0\cdot\overline{C}) = A\overline{B}$.

***b)***

$W = (A+\overline{B}+C)(AB+\overline{A}C)$.

Wyjściowa postać wyrażenia $W$ nie jest w żadnej postaci kanonicznej i dlatego przekształcimy najpierw wyrażenie $\overline{W}$ do najprostszej postaci sumy iloczynów:

$\overline{W} = \overline{A}B\overline{C} + (\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{C}) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}A + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}A + \overline{B}\overline{C} = (\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{C}) + \overline{B}A + \overline{B}\overline{C} =$

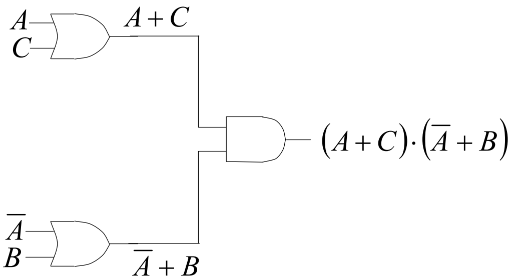
$\overline{A}\overline{C}(B+1) + A\overline{B} + \overline{B}\overline{C} = \overline{A}\overline{C} + A\overline{B} + \overline{B}\overline{C}(A+\overline{A}) = (\overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{A}) + (A\overline{B} + \overline{B}\overline{C}A) =$

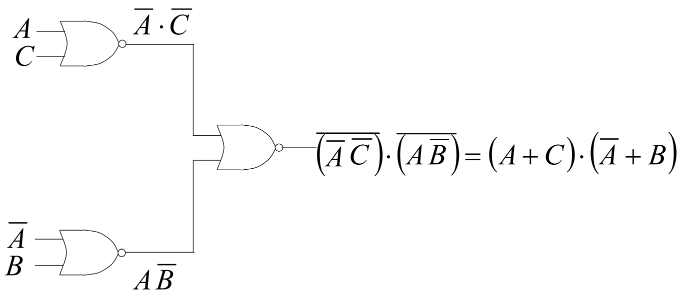
$\overline{A}\overline{C}(1+\overline{B}) + A\overline{B}(1+\overline{C}) = \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}$.

A *s*tąd stosując prawa de'Morgana otrzymujemy szukane rozwiązanie:

$W = \overline{(\overline{W})} = (A+C)(\overline{A}+B)$.

Może być ono zrealizowane przy pomocy układu bramek typu *Or-to-And* lub *Nor-to-Nor*:




***c)***

$W = AB + \overline{A}(B+\overline{C})(\overline{B}+D)$.

Postępujemy w analogiczny sposób jak w poprzednim rozwiązaniu:

$\overline{W} = (\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}C+B\overline{D}) = \overline{A}A + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}A + \overline{B}\overline{B}C + \overline{B}B\overline{D} =$

$(\overline{A}\overline{B}C + \overline{B}C) + \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}A = \overline{B}C(\overline{A}+1) + \overline{A}B\overline{D} + A\overline{B} = \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}C + A\overline{B}$,

*0*skąd

$W = (A+\overline{B}+D)(B+\overline{C})(\overline{A}+B)$.

## Mapy Karnaugh

Omówimy pewną metodę definiowania i upraszczania wyrażeń algebry Boole'a, która wykorzystuje tzw. <u>mapy Karnaugh</u>. Opiszemy ja przy pomocy przykładów.

*<u>Przykłady</u>*

***a)*** Przykładem mapy Karnaugh dla dwóch zmiennych wejściowych $X$, $Y$ i zmiennej wyjściowej $A$ jest tabliczka

| | $\overline{X}$ | $X$ |
|---|---|---|
| $\overline{Y}$ | 0 | 1 |
| $Y$ | 0 | 1 |

przedstawiana alternatywnie w postaci

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Definiuje ona wyrażenie $A = X\,\overline{Y} + X\,Y$.

***b)*** Przykładem mapy Karnaugh dla trzech zmiennych wejściowych $X$, $Y$, $Z$ i zmiennej wyjściowej $A$ jest tabliczka

| | $\overline{X}\,\overline{Y}$ | $\overline{X}\,Y$ | $X\,Y$ | $X\,\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{Z}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $Z$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

przedstawiana alternatywnie w postaci

| $Z \backslash X\,Y$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Definiuje ona wyrażenie $A = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,Y\,Z + X\,Y\,Z$.

***c)*** Przykładem mapy Karnaugh dla czterech zmiennych wejściowych $W, X$, $Y$, $Z$ i zmiennej wyjściowej $A$ jest tabliczka

| | $\overline{W}\,\overline{X}$ | $\overline{W}\,X$ | $W\,X$ | $W\,\overline{X}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{Y}\,\overline{Z}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\overline{Y}\,Z$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $Y\,Z$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $Y\,\overline{Z}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |

przedstawiana alternatywnie w postaci

| $Y\,Z \backslash W\,X$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Definiuje ona wyrażenie

$$A = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,Z + W\,X\,\overline{Y}\,Z + \overline{W}\,\overline{X}\,Y\,Z + \overline{W}\,X\,Y\,Z + \overline{W}\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,Y\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z}.$$

Na potrzebę upraszczania wyrażeń algebry Boole'a wyróżnia się grupy komórek tworzące tzw. <u>subcubes</u> (z języka angielskiego). Ilość takich komórek musi się wyrażać liczbą naturalną będącą potęgą całkowitą liczby 2 i muszą one tworzyć figurę w kształcie prostokąta z uwzględnieniem efektu *<u>zawijania mapy</u>*.

*Przykłady*

Zademonstrujemy zdefiniowane wyżej pojęcie *subcube* upraszczając wyrażenia z poprzedniego przykładu.

***a)***

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Stąd

$$A = X\overline{Y} + XY = X.$$

***b)***

| $Z \backslash XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Stąd

$$A = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}YZ + XYZ = \overline{Y}\,\overline{Z} + YZ.$$

***c)***

| $YZ \backslash WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Stąd

$$A = \overline{W}Y + \overline{X}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z.$$

Prześledzimy serię przykładów ilustrujących proces redukcji wyrażeń algebry Boole'a przy pomocy map Karnaugh. Na razie ograniczymy się do przypadku wyrażeń w postaci kanonicznej sumy iloczynów.

*Przykłady*.

***a)***

| $YZ \backslash WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | |
| 01 | 1 | | 1 | |
| 11 | 1 | | 1 | |
| 10 | 1 | | | |

Stąd

$$A = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{W}\,\overline{X}YZ + \overline{W}\,\overline{X}Y\overline{Z} + WX\overline{Y}Z + WXYZ = \overline{W}\,\overline{X} + WXZ.$$

***b)***

| $YZ \backslash WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | |

Stąd

$$A = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,Z + W\,X\,\overline{Y}\,Z + \overline{W}\,X\,Y\,Z + W\,X\,Y\,Z = X\,Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\,.$$

***c)***

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | 1 | |
| 01 | 1 | | | 1 |
| 11 | 1 | | | 1 |
| 10 | | 1 | 1 | |

Stąd

$$A = X\,\overline{Z} + \overline{X}\,Z\,.$$

<u>Przykłady</u>.

***a)***

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | 1 | | |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | 1 | | | 1 |

Stąd

$$A = \overline{W}\,X\,Z + X\,Y\,Z + \overline{X}\,Y\,\overline{Z}\,.$$

***b)***

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | |
| 01 | 1 | | 1 | 1 |
| 11 | | | 1 | 1 |
| 10 | | | | |

Stąd

$$A = W\,Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,\overline{Z}\,.$$

***c)***

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | 1 | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | | 1 | | |

Stąd

$$A = X\,Z + W\,X\,\overline{Y} + \overline{W}\,X\,Y + \overline{W}\,\overline{Y}\,Z + W\,Y\,Z\,.$$

Inne rozwiązanie:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | 1 | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 |
| 10 | | 1 | | |

Stąd

$$A = W\,X\,\overline{Y} + \overline{W}\,X\,Y + \overline{W}\,\overline{Y}\,Z + W\,Y\,Z.$$

***d)***

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | |

Stąd

$$A = X\,Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{W}\,X\,\overline{Y}.$$

Inne rozwiązanie:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | |

Stąd

$$A = X\,Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,\overline{Y} + W\,\overline{Y}\,Z.$$

Najprostsze rozwiązanie:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | |

Stąd

$$A = X\,Z + \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,\overline{Y}.$$

Mapy Karnaugh mogą być zastosowane również do projektowania i upraszczania wyrażeń w postaci kanonicznej iloczynu sum. Wykorzystuje się tu fakt, że dopełnienie wyrażenia każdej z postaci kanonicznych jest wyrażeniem drugiej z tych postaci. Dlatego w omawianym przypadku stosuje się następujące postępowanie:

$1^0$ Tworzy się mapę wpisując we właściwych komórkach zera.

$2^0$ Upraszcza się wyróżnione w ten sposób komórki tak, jak się to robiło dla „jedynek".

$3^0$ Otrzymane w ten sposób wyrażenie jest dopełnieniem wyrażenia szukanego i dlatego wystarczy na koniec zastosować prawa de'Morgana.

Zilustrujmy zapowiedzianą metodę.

*Przykład*
Zaprojektujemy najprostsze wyrażenie w postaci iloczynu sum spełniające założenia:

| Input | | | | Output |
|---|---|---|---|---|
| *W* | *X* | *Y* | *Z* | *A* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tworzymy mapę Karnaugh szukanego wyrażenia uwidoczniając położenie zer i ją upraszczamy:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 0 | 0 | |
| 01 | | 0 | 0 | |
| 11 | | | | |
| 10 | 0 | 0 | | |

Stąd

$$\overline{A} = X\,\overline{Y} + \overline{W}\,Y\,\overline{Z}$$

i dlatego

$$A = (\overline{X} + Y)(W + \overline{Y} + Z).$$

Często spotykaną sytuacją jest przypadek projektów, kiedy wartość wyjściowa dla niektórych danych wejściowych jest nieistotna, np. wtedy, gdy wartości takie nigdy nie wystąpią. W takich przypadkach mamy swobodę wyboru wartości wyjściowych, co można wykorzystać w celu uzyskania możliwie najprostszego rozwiązania.

*Ćwiczenie*

Zaprojektujemy najprostsze wyrażenia w postaci sumy iloczynów i iloczynu sum spełniające założenia:

| Input | | | | Output |
|---|---|---|---|---|
| *W* | *X* | *Y* | *Z* | *A* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | d |
| 1 | 0 | 1 | 1 | d |
| 1 | 1 | 0 | 0 | d |
| 1 | 1 | 0 | 1 | d |
| 1 | 1 | 1 | 0 | d |
| 1 | 1 | 1 | 1 | d |

gdzie d oznacza wartość dowolną, tj. 0 lub 1.

*Rozwiązanie w postaci sumy iloczynów*:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | d | 1 |
| 01 | | | d | |
| 11 | 1 | 1 | d | d |
| 10 | | | d | d |

Stąd

$$A = \overline{Y}\,\overline{Z} + Y\,Z.$$

*Rozwiązanie w postaci iloczynu sum*:

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | d | |
| 01 | 0 | 0 | d | 0 |
| 11 | | | d | d |
| 10 | 0 | 0 | d | d |

Stąd

$$\overline{A} = \overline{Y}\,Z + Y\,\overline{Z} \;\Rightarrow\; A = (Y + \overline{Z})(\overline{Y} + Z).$$

## *Ćwiczenia podsumowujące*

Rozwiążemy serię zadań utrwalających i uzupełniających omówioną tematykę.

<u>*Ćwiczenie*</u>.
Zaznacz grupy komórek tworzących *subcube* dla danego wyrażenia zależnego od zmiennych $W$, $X$, $Y$, $Z$ wyznaczające po redukcji wskazaną wartość:
***a)*** $\overline{X}$.

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | 1 |
| 01 | 1 | | | 1 |
| 11 | 1 | | | 1 |
| 10 | 1 | | | 1 |

***b)*** $X\,Y\,\overline{Z}$.

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | | | | |
| 10 | | 1 | 1 | |

***c)*** $\overline{W}\,Z$.

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | 1 | 1 | | |
| 11 | 1 | 1 | | |
| 10 | | | | |

***d)*** $W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$.

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | 1 |
| 11 | | | | |
| 10 | | | | |

<u>*Ćwiczenie*</u>.
Narysować mapę Karnaugh wyrażenia zależnego od zmiennych $X$, $Y$, $Z$ i, jeżeli trzeba, uprościć je:
***a)*** $A = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,Z$.

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 1 | | 1 | 1 |

Stąd

$$A = \overline{X}\,\overline{Y} + X\,Z.$$

***b)*** $A = \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + \overline{X}\,Y\,Z + X\,Y\,Z.$

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

Stąd

$$A = \overline{X}\,Y + \overline{X}\,Z + Y\,Z.$$

***c)*** $A = (X + \overline{Y} + Z)(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)(Y + \overline{Z}).$

Mamy

$$\overline{A} = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z,$$

skąd mapa ma postać:

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | | 0 | 0 |

Jednym z możliwych uproszczeń jest

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | | 0 | 0 |

i wtedy

$$\overline{A} = X\,Y + Y\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z \Rightarrow A = (\overline{X} + \overline{Y})(\overline{Y} + Z)(Y + \overline{Z}).$$

Innym uproszczeniem jest

| $Z$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | | 0 | 0 |

i wtedy

$$\overline{A} = Y\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z + X\,Z \Rightarrow A = (\overline{Y} + Z)(Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Z}).$$

*<u>Ćwiczenie</u>.*
Narysować mapy Karnaugh wyrażenia *A* zależnego od zmiennych *X*, *Y*, *Z* i przy ich pomocy znaleźć jego najprostsze postacie sumy iloczynów i iloczynu sum:

$$A = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z + X\,\overline{Y}\,Z.$$

*<u>Mapa i uproszczenie dla sumy iloczynów:</u>*

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 1 | 1 | | 1 |

Stąd

$$A = \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z + \overline{Y}\,Z.$$

*Mapa i uproszczenie dla iloczynu sum:*

| $Z$ \ $XY$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | | 0 | |

Stąd

$$\overline{A} = XY + Y\overline{Z} + X\overline{Z} \;\Rightarrow\; A = (\overline{X}+\overline{Y})(\overline{Y}+Z)(\overline{X}+Z).$$

*Ćwiczenie*.

Narysować mapy Karnaugh wyrażenia $A$ zależnego od zmiennych $W$, $X$, $Y$, $Z$ i przy ich pomocy znaleźć jego najprostsze postacie sumy iloczynów i iloczynu sum:

$$A = \overline{W}\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z} + \overline{W}\,\overline{X}\,Y\,Z + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,Z + \overline{W}\,X\,Y\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,Y\,Z + W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,Z + W\,\overline{X}\,Y\,Z + W\,X\,\overline{Y}\,Z.$$

*Mapa i uproszczenie dla sumy iloczynów:*

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | 1 |
| 10 | 1 | 1 | | |

Stąd

$$A = \overline{W}\,Y + X\,\overline{Y}\,Z + W\,\overline{X}\,Z.$$

*Mapa i uproszczenie dla iloczynu sum:*

| $YZ$ \ $WX$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | | | |
| 11 | | | 0 | |
| 10 | | | 0 | 0 |

Stąd

$$\overline{A} = \overline{Y}\,\overline{Z} + W\,\overline{Z} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y} + W\,X\,Y \;\Rightarrow\; (Y+Z)(\overline{W}+Z)(W+X+Y)(\overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}).$$

*Ćwiczenie*

Uprościć wyrażenie zakładając, że każdy składnik części podkreślonej może, ale nie musi wystąpić:

$$W = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + \underline{A\,B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C}.$$

Mapa Karnaugh wyrażenia ma postać:

| $C$ \ $AB$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | d | 1 | |
| 1 | d | | d | |

Stąd

$$W = \overline{A}\,\overline{C} + A\,B$$

Inna wersja rozwiązania (nie jedyna):

| $C$ \ $AB$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | d | 1 | |
| 1 | d | | d | |

Stąd

$$W = \overline{A}\,\overline{B} + A\,B.$$

*Ćwiczenie*

Uprościć wyrażenie zakładając, że każdy czynnik części podkreślonej może, ale nie musi wystąpić:

$$W = (\overline{A} + B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})\underline{(\overline{A} + B + C + \overline{D})(\overline{A} + B + C + D)(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})}.$$

Mapa Karnaugh wyrażenia ma postać:

| $CD$ \ $AB$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | d | | d |
| 01 | | d | | d |
| 11 | | | | 0 |
| 10 | | | | 0 |

Stąd

$$\overline{W} = A\overline{B} \Rightarrow W = \overline{A} + B.$$

Powyższe rozwiązanie otrzymuje się, jeżeli uwzględnia się dwa pierwsze czynniki części podkreślonej:

$$W = \big((\overline{A} + B + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})\big)\big((\overline{A} + B + C + \overline{D})(\overline{A} + B + C + D)\big) =$$

$$\big((\overline{A} + B + \overline{C}) + D\,\overline{D}\big)\big((\overline{A} + B + C) + \overline{D}\,D\big) = (\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C) = (\overline{A} + B) + \overline{C}\,C = \overline{A} + B.$$