KSIĘGA PIERWSZA

ELEMENTARNA TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rozdział I

Algebra Boole'a

§ 1. Uwagi wstępne, treść rozdziału

Znamy obecnie różne, nieraz mocno od siebie odbiegające sposoby wprowadzania pojęcia prawdopodobieństwa: teoria „klasyczna” w różnych odmianach, teorie aksjomatyczne: `Bohlmanna, Keynesa, Kołmogorowa`, teoria „częstościowa” `Misesa` i inne [1]). Porównanie tych sposobów prowadzi do następujących spostrzeżeń:

add missing citations

1° Prawdopodobieństwo bywa określane rozmaicie, zawsze jednak jest ono liczbą nieujemną, nie większą od jedności, przyporządkowaną pewnym przedmiotom.

2° Co do natury przedmiotów, którym zostaje przyporządkowane prawdopodobieństwo, panuje rozbieżność między poszczególnymi teoriami, w każdym jednak razie można uważać za ustalone, że przedmioty te (zdarzenia, zdania, zbiory, cechy) tworzą tak zwane *ciała Boole'a*, którą intuicyjnie określić można jako algebrę wyrazów: „nie”, „i” oraz „lub”.

Wobec tego podajemy w tym rozdziale zarys teorii ciał Boole'a, a więc: ich określenie przez postulaty (§ 2), elementarne twierdzenia algebry Boole'a (§§ 3 i 4), związek teorii ciał Boole'a z teorią zbiorów częściowo uporządkowanych (§ 5), określenie działań nieskończonych w ciałach Boole'a i prawa nimi rządzące (§ 6), zastosowania ciał Boole'a w teorii zbiorów (§§ 7 i 9) i w logice (§ 11), określenie podciał (§ 8), określenie homomorfizmu między dwoma ciałami Boole'a, kongruencji w ciałach Boole'a i uogólnienie ciał Boole'a na tak zwane ciała zrelatywizowane (§ 10) oraz określenie atomu, ciała atomowego i operacji scalania atomów (§§ 12, 13). Ostatni paragraf każdego rozdziału będzie zawierał przykłady i zadania.

§ 2. Określenie ciał Boole'a

Ciałem Boole'a nazywamy zbiór U, na którego elementach określone są działania $+$, $\cdot$ i $'$ (dwa pierwsze na dwu, trzecie na jednym elemencie) w taki sposób, aby dla dowolnych elementów $u, v, w \in U$ były spełnione następujące związki:

[1])[1] [2] [3] [4]

(B1) $u + v \in U, \quad u \cdot v \in U, \quad u' \in U,$

(B$^+$2) $u + (v + w) = (u + v) + w,$ (B$^\cdot$2) $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w,$

(B$^+$3) $u + v = v + u,$ (B$^\cdot$3) $u \cdot v = v \cdot u,$

(B$^+$4) $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w),$ (B$^\cdot$4) $u + (v \cdot w) = (u + w) \cdot (u + w),$

(B$^+$5) $u + (u \cdot u') = u,$ (B$^\cdot$5) $u \cdot (u + u') = u,$

(B$^+$6) $u + u' = v + v',$ (B$^\cdot$6) $u \cdot u' = v \cdot v'.$

Działanie + nazywamy *dodawaniem* w ciele U, a element $u + v$ *sumą* elementów u i v; działanie $\cdot$ nazywamy *mnożeniem* w ciele U, a element $u \cdot v$ *iloczynem* elementów u i v, wreszcie działanie $'$ nazywamy *dopełnianiem* w ciele U, a element u' *uzupełnieniem* elementu u.

Wyrażenie zapisane sensownie za pomocą zmiennych przebiegających zbiór U lub nazw elementów zbioru U, znaków $+$, $\cdot$, $'$ i nawiasów nazywamy *wyrażeniem algebraicznym* ciała U. Zdanie powstałe z dwu wyrażeń algebraicznych przez połączenie ich znakiem identyczności (+) nazywamy *równością algebraiczną* lub *równością*. Przy pisaniu wyrażeń algebraicznych umawiamy się, w celu oszczędzania pisania zbędnych nawiasów, że znak mnożenia ($\cdot$) wiąże silniej niż znak oddawania (+), a następnie umawiamy się opuszczać nawiasy przy wielokrotnych sumach lub iloczynach ze względu na aksjomaty (B$^+$2) i (B$^\cdot$2) wyrażające łączność tych działań. Ponadto będziemy opuszczali, ilekrośc nie będzie to groziło nieporozumieniem, znak iloczynu, pisząc zamiast $u \cdot v$ po prostu uv. To postępowanie upodabnia nasze znakowanie do znakowania zwykłej algebry, w której te uproszczenia są ogólnie przyjęte.

W ten sposób wyrażenie algebraczine $u + (v \cdot w)$ (por. (B$^+$4)) zapisujemy w postaci $u + vw$, wyrażenie zaś $u + [(v \cdot w) + (u \cdot w)]$ - w postaci $u + vw + uw$.

Związki (B1)-(B$^\cdot$6) nazywamy *układem postulatów algebry Boole'a*, w skróceniu: *układem* (B). Wychodząc z postulatów układu (B) możemy, za pomocą rozumowań opartych na prawach logiki, wyprowadzać nowe związki prawdziwe w każdym ciele Boole'a, to znaczy spełnione przez każdy układ elementów każdego ciała Boole'a. Ogół tych wyszstkich związków (zdań), które dają się wyprowadzić z postulatów układu (B) przez logicznie poprawne rozumowanie, nazywamy *systemem algebry Boole'a*.

Używając współczesnej terminologii logicznej możemy powiedzieć, że ciała Boole'a [1]) są *modelami systemu algebry Boole'a* lub - co na jedno wychodzi - *modelami układu postulatów* (B) [2]).

Przedstawiony tu układ postulatów algenry Boole'a nie jest ani jedynym

[1])cytowanie

[2])cytowanie2

możliwym (tę własność dzieli on ze wszystkimi układami postulatów abstrakcyjnych teorii), ani też najprostszym. Znane są rozmaite równoważne między sobą układy postulatów algebry Boole'a [1]). Zaierają one przeważnie mniej postulatów niż podany tu układ (B), a często też mniej pojęć pierwotnych. Jednak podany tu układ postulatów ma wiele stron dodatnich; poszczególne postulaty mają łatwo uchwytny sens intuicyjny, są łatwe do zapamiętania i elementarne twierdzenia dają się z nich prosto wyprowadzić. Poza tym uwidacznia on istotną dla ciał Boole'a symetrię między działaniami dodawania i mnożenia. W następnym paragrafie wyciągniemy z tej uwagi ważną konsekwencję.

Można wykazać, że do ugruntowania algebry Boole'a wystarczają postulaty (B1), (B^{+}3), (B^{+}4), (B$^{\cdot}$4), (B$^{\cdot}$5), (B^{+}6), (B$^{\cdot}$6), których zespół oznaczmy przez (B*); natomiast pozostałe postulaty, tj. (B^{+}2), (B$^{\cdot}$2), (B$^{\cdot}$3), (B$^{\cdot}$5), można z poprzednich wyprowadzić na drodze poprawnych rozumowań. Można też wykazać, ze z układu postulatów (B*) nie da się już odrzucić żadnego postulatu bez uszczerbku dla systemu algebry Boole'a; mówimy, że układ postulatów (B*) jest niezależny, a układ (B) nie jest taki.

§ 3. Omówienie postulatów układu (B). Twierdzenie o dwoistości

Postulat (B1) ma nieco odmienny charakter od pozostałych. Żąda on, aby działania $'$, $+$ i $\cdot$ były *wykonalne* w ciele U, czyli aby ciało U było *zamknięte* ze względu na podstawowe działania, to znaczy, aby element powstały w wyniku wykonania któregoś z działań podstawowych na elementach lub elemencie ciała U należał do ciała U. Dalsze postulaty charakteryzują pewne własności działań podstawowych, a mianowicie: postulaty (B^{+}2) i (B$^{\cdot}$2) wyrażają *łączność* działań dodawania i mnożenia, postulaty (B^{+}3) i (B$^{\cdot}$3) ich *przemienność*, postulaty (B^{+}4) i (B$^{\cdot}$4) ich wzajemną *rozdzielność*. Pozostałe cztery postulaty charakteryzują własności działania uzupełniania w związku z dodawaniem i mnożeniem.

Postulaty (B^{+}6) i (B$^{\cdot}$6) żądają, aby elementy przedstawione wyrażeniami algebraicznymi $u + u'$ i uu' nie zależały od wyboru elementu u w ciele U. Są to więc dwa wyróżnione elementy w ciele U, które umawiamy się oznaczać odpowiednio przez 1 i 0, to znaczy przyjmujemy następujące określenia:

$$1 = u + u', \tag{3.1}$$

$$0 = uu'. \tag{3.2}$$

Mamy prawo do przyjęcia takich określeń, gdyż ich jednoznaczność gwarantują nam postulaty (B^{+}6) i (B$^{\cdot}$6). Nie możemy co prawda twierdzić, że 0 nie

[1])cytowanie3

jes tidentyczne z 1, nie wiemy bowiem, czy zbiór U składa się z więcej niż jednego elementu, łatwo jednak dowieść, że jeżeli zbiór U zawiera więcej niż jeden element, to 0 nie jest identyczne z 1.

Niech bowiem będzie $0 = 1 \in U$ i $u \in U$ niech będzie elementem różnym od 1 (a więc i od 0). Ponieważ jak udowodnimy później (**??**, (**??**)), w każdym ciele Boole'a zachodzi równość $u = u + u$ dla dowolnego elementu, więc

(I) $uu' = u + u'$ (na mocy założenia $0 = 1$),

(II) $u + (u + u') = u$ (na mocy postulatu (B^+5) oraz (I)),

(III) $(u + u) + u' = u$ (na mocy postulatu (B^+2) oraz (II)),

(IV) $u + u' = u$ (na mocy równości $u + u = u$),

(V) $1 = u$ (na mocy (IV) i określenia (3.1))

Równość (V) przeczy założeniu, że u jest elementem różnym od 1, a to dowodzi słuszności tezy.

Zwróćmy uwagę na to że elementy 0 i 1 zależą od ciała U, to znaczy, że jeżeli U i V są różnymi ciałami Boole'a, to elementy 0 i 1 w ciele U są na ogół różne od elementów o i 1 w ciele V.

Po przyjęciu określeń (3.1) i (3.2) możemy postulaty (B^+5) i ($\mathrm{B}^{\cdot}5$) zapisać w postaci:

($\overline{\mathrm{B}^+5}$)
$$u + 0 = u,$$
$$u \cdot 1 = u.$$

W tej postaci