Przestrzenie afiniczne

1. Udowodnić, że podprzestrzenie afiniczne l_1 i l_2 przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wyznaczone odpowiednio przez punkty:

   (a)
   $$(1,2,5)\,,\ (-1,1,2) \quad \text{oraz} \quad (8,-6,2)\,,\ (6,-7,-1)$$

   (b)
   $$(1,2,5,1)\,,\ (-1,1,2,3) \quad \text{oraz} \quad (3,6,9,7)\,,\ (1,5,6,9)\,,\ (1,1,0,0)$$

   są równoległe. Znaleźć ich równania.

2. Czy punkt $(1,2,3) \in \mathbf{E}(\mathbf{R}^3)$ należy do podprzestrzeni afinicznej rozpiętej na punktach

   (a) $(1,2,6)\,,\ (3,2,1)\,,\ (0,0,1)\,,$
   (b) $(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,0,1)\,,$
   (c) A punkt $\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$?

3. Czy podprzestrzenie afiniczne π_1, π_2 przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wyznaczone odpowiednio przez punkty: $(0,1,1)\,,\ (0,1,2)\,,\ (1,1,1)$ oraz $(2,1,1)\,,\ (0,1,0)\,,\ (2,1,2)$ są identyczne?

4. Czy punkt $(1,-2,0)$ należy do podprzestrzeni afinicznej zawierającej punkt $(2,1,1)$ i równoległej do podprzestrzeni afinicznej wyznaczonej przez punkty: $(0,1,1)\,,\ (0,1,2)\,,\ (1,3,1)$?

5. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ znaleźć równanie prostej l przechodzącej przez punkt $(0,1,0)$ i przecinającej proste l_1 i l_2 o przedstawieniach parametrycznych
   $$l_1 : (x,y,z) = (0,1,0) + t\,(2,0,1)\,, \qquad l_2 : (x,y,z) = (1,1,1) + t\,(0,1,1)\,.$$
   Znaleźć punkty przecięcia prostej l z prostymi l_1 i l_2.

6. Sprawdzić, czy podprzestrzenie afiniczne H_1 o równaniu $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ oraz H_2 wyznaczona przez punkty: $(1,0,-1)\,,\ (1,3,2)\,,\ (3,2,0)$, są równoległe?

7. Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni afinicznej przestrzeni $\mathbf{R}^3$ złożoną z punktów leżących na prostych l_1 i l_2 o przedstawieniach parametrycznych
   $$l_1 : \quad (1,0,1) + t\,(0,1,1)\,, \qquad l_2 : \quad (0,0,0) + t\,(1,1,0)\,.$$

8. Znaleźć przedstawienie parametryczne podprzestrzeni przestrzeni $\mathbf{R}^4$ rozpiętej na układzie punktów:

   (a) $(0,1,2,3)\,,\ (1,0,1,0)\,,\ (-1,2,0,4)\,,\ (1,1,3,3),$
   (b) $(-2,1,0,3)\,,\ (0,0,-1,0)\,,\ (0,2,0,4)\,,\ (1,1,2,0),$

(c) $(2,1,0,-2)\,,\ (0,-1,1,0)\,,\ (2,0,1,-2)\,,\ (4,1,1,-2)$.

9. Wyznaczyć równania prostej w $\mathbf{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(3,-2,0)$ i przecinającej proste

(a)

$$l_1: \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & t \\ y & = & -1 & - & 2t \\ z & = & 2 & + & 3t \end{array}, \qquad l_2: \begin{array}{ccccc} x & = & 2 & + & -t \\ y & = & -3 & + & t \\ z & = & 5 & + & 2t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(b)

$$l_1: \begin{array}{ccccc} x & = & 0 & + & 3t \\ y & = & -4 & + & t \\ z & = & 2 & + & t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad l_2: \begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & - & z & + & 3 & = & 0 \\ 4x & - & y & + & z & - & 1 & = & 0. \end{array}$$

10. Znaleźć bazę punktową podprzestrzeni afinicznej przestrzeni $\mathbf{R}^4$ danej równaniem

(a) $x_1 - 2x_4 = 0$,

(b) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

11. Znaleźć wymiar podprzestrzeni afinicznej podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określonej układem równań

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 1 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & - & 6 & = & 0\,. \end{array}$$

Przestrzenie euklidesowe

Iloczyn skalarny. Ortogonalizacja Schmidta. Dopełnienie ortogonalne. Baza ortogonalna, ortonormalna.

1. Sprawdzić, czy rozważane funkcje są iloczynami skalarnymi w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

(a) $\varphi\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$, dla $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$;

(b) $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}(1)\ \mathbf{q}(1) + 2\,\mathbf{p}(2)\ \mathbf{q}(2)$, dla $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{R}_1[x]$;

(c) $\varphi\left((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\right) = 2x_1y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$.

2. Sprawdzić, czy $\mathbf{R}^3$ wraz z formą dwuliniową $\varphi: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, jest przestrzenią euklidesową, jesli φ określona jest wzorem:

(a) $\varphi\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_3$;

(b) $\varphi\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = x_1y_1 + x_2y_2$;

(c) $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_1-x_2)\ (y_1-y_2) + (x_1-x_3)\ (y_1-y_3) + x_3y_3$.

3. Niech $\mathbf{F}_{[0,1]}$ oznacza przestrzeń liniową funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $[0,1]$. Zdefiniujmy formę dwuliniową

$$\langle f,g\rangle = f(1)\ g(0) + f(0)\ g(1) \quad \text{dla} \quad f,g \in \mathbf{F}_{[0,1]}.$$

Czy ta przestrzeń liniowa z tak zdefiniowaną forma dwuliniową jest przestrzenią euklidesową ?

4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^4$:

   (a) Obliczyć długość wektora $(2,0,4,-1)$;

   (b) badać prostopadłość wektorów $(-1,1,-3,2)$ i $(7,-2,1,6)$;

   (c) Obliczyć kąt między wektorami $(-2,1,2,1)$ i $(1,0,1,-2)$.

5. Wiedząc, że $|v|=2$, $|w|=5$ i $\sphericalangle(v,w)=\frac{2}{3}\pi$. Obliczyć przy jakiej wartości współczynnika α wektory $p=\alpha v+17w$ i $q=3v-w$ są prostopadłe.

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^3$ opisać zbiór wektorów prostopadłych do wektora $(1,2,-2)$.

7. Stosując metodę Grama-Schmidta zortogonalizować podane wektory we wskazanych przestrzeniach euklidesowych:

   (a) $u=(1,0,1)$, $v=(4,1,0)$, $(0,1,-2)$ w przestrzeni $\mathbf{E}^3$;

   (b) $u=(1,0,1,-1)$, $v=(4,0,1,0)$, $(0,1,0,-2)$ w przestrzeni $\mathbf{E}^4$.

8. Niech $U = \text{lin}((1,-1,0,1),(2,0,-1,1)) \subset R^4$. Znaleźć bazę dopełnienia ortogonalnego przestrzeni U. (Iloczyn skalarny standardowy). (Iloczyn skalarny standardowy).

9. W przestrzeni R^4 rozłożyć wektor $v=(3,-2,5,1)$ na dwie składowe v_1 i v_2, tak by $v_1 \in \text{lin}((3,-1,2,0),(1,1,-1,3))$, zaś v_2 był prostopadły do U.

10. Wskazać bazę ortogonalną w podprzestrzeni $\text{lin}((1,1,1,1),\ (1,-1,1,1),\ (-1,1,1,-1))$. Znaleźć współrzędne wektora $(1,5,0,10)$ w tej bazie.

11. Pokazać, że

    (a)

$$B = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

(b)

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

jest bazą ortogonalną w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ z iloczynem skalarnym postaci

$$\langle v, w \rangle = v^T A w, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Wyznaczyć bazę ortonormalną obrazu przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ danego wzorem

(a)

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4,\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4,\ -x_2 + x_3 - x_4,\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4).$$

(b)

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4,\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4,\ -x_2 + x_3 - x_4,\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4).$$

Przy czym w $\mathbf{R}^4$ mamy dany standardowy iloczyn skalarny.

13. W $\mathbf{R}^4$ mamy dany standardowy iloczyn skalarny. Wyznaczyć bazę ortogonalną jądra przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ danego wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= (x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + x_4,\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4,\ 2x_3 - x_4,\ x_1 + x_3 - x_5).$$

14. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$, ze zwykłym iloczynem skalarnym, dane są podprzestrzeni

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z = 0 \right\}, \qquad W = \operatorname{lin}((2, -1, 3)).$$

Znaleźć rzut ortogonalny podprzestrzeni W na podprzestrzeń V.

15. W przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^5$, ze standardowym iloczynem skalarnym, wskazać bazę ortogonalną przestrzeni liniowej $\operatorname{lin}((1, 2, 3, 4, 5),\ (1, 1, 0, 1, 1),\ (2, 3, 3, 5, 7))$ zawierającą wektor $(0, 1, 3, 3, 4)$.

16. Wyznaczyć bazę ortonormalną podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbf{R}^4$

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \quad 4x - z = 2y - 3z + 2t = 0 \right\}.$$