5. Ciągłość funkcji.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x \in D} \ (| x - x_0 |< \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) |< \varepsilon).$$

Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, to mówimy, że x_0 jest punktem ciągłości funkcji f. W przeciwnym wypadku - punktem nieciągłości. Jeśli funkcja jest ciągła w kazdym punkcie swojej dziedziny, to nazywamy ją funkcją ciągłą.

Twierdzenie

Jeśli $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D$ dla pewnej liczby dodatniej r, to funkcja f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Twierdzenie

Jeśli $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D$ dla pewnej liczby dodatniej r, to funkcja f jest ciągła w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeżeli dla pewnej liczby dodatniej r $(x_0 - r, x_0 + r) \cap D = \{x_0\}$ (czyli x_0 jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f), to f jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie

Suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile jest określony) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie

Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie

(Weierstrassa)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to jest na tym przedziale ograniczona i osiaga w nim swoją wartość najwieksza i najmniejszą.

Twierdzenie

(Darboux - o przyjmowaniu wartości pośrednich)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ przy czym $f(a) \neq f(b)$ i w jest dowolną liczbą zawartą pomiędzy $f(a)$ a $f(b)$, to istnieje co najmniej jeden punkt $c \in (a, b)$ taki że $f(c) = w$.

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ przy czym $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje co najmniej jeden punkt $c \in (a, b)$ taki że $f(c) = 0$.

Twierdzenie

(o lokalnym zachowaniu znaku)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, który nie jest punktem izolowanym dziedziny oraz $f(x_0) > 0$, to istnieje takie otoczenie $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0, że funkcja f ma w każdym punkcie tego otoczenia wartość dodatnią (analogicznie dla $f(x_0) < 0$).