1. Funkcje, podstawowe własności.

Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy relację $f \subset X \times Y$ spełniającą warunki:

$$\forall_{x \in X} \ \exists_{y \in Y} \ xfy,$$

$$\forall_{x \in X} \ \forall_{y_1, y_2 \in Y} ((xfy_1 \ \wedge xfy_2) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Funkcję taką oznaczamy $f : X \to Y$. Wartość funkcji w punkcie x oznaczamy $f(x)$.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji i oznaczamy D_f , a zbiór Y - przeciwdziedziną.

Zbiór $\{f(x); x \in D\}$ nazywamy zbiorem wartości funkcji f.

Funkcje $f : D_f \to Y$ i $g : D_g \to Y$ są równe, jeśli równe są ich dziedziny $D_f = D_g$ oraz

$$\forall_{x \in D_f} \ f(x) = g(x).$$

Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór

$$\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ odwzorowuje zbiór X na Y, jeśli

$$\forall_{y \in Y} \ \exists_{x \in X} \ y = f(x).$$

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa, jeśli

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Mówimy, że jest funkcja $f : X \to Y$ wzajemnie jednoznaczna, jeśli jest różnowartościowa i „na”.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją wzajemnie jednoznaczną. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $g : y \to X$ taką, że

$$\forall_{y \in Y, x \in X} \ \ (g(y) = x \ \ \Leftrightarrow \ \ f(x) = y).$$

Niech X, Y, Z, W będą zbiorami takimi że $Y \subset Z$ i niech $f : X \to Y$, $g : Z \to W$.
Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $h : X \to W$ określoną następująco:

$$\forall_{x \in X} \ \ h(x) = g(f(x)).$$

Ograniczmy się teraz do funkcji, których dziedzina i zbiór wartości są podzbiorami $\mathbb{R}$.

- Wykres funkcji $f : X \to Y$ jest podzbiorem płaszczyzny. Podzbiór płaszczyzny jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x, gdy każda prosta pionowa przecina go w co najwyżej jednym punkcie.
- Rzut prostokątny wykresu na oś $0X$ to dziedzina f-kcji, a rzut prostokątny na oś $0Y$ to zbiór wartości.
- F-kcja $f : X \to Y$ jest „na", gdy rzut prostokątny jej wykresu na oś $0Y$ pokrywa się ze zb. Y (każda prosta pozioma "poprowadzona na wysokości ze zbioru Y", przecina wykres w co najmniej jednym punkcie).
- Funkcja jest różnowartościowa, jeśli każda prosta pozioma przecina wykres co najwyżej raz.
- Wykres funkcji odwrotnej do f powstaje z wykresu f-kcji f przez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$.

- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy okresową, jeśli

  $$\exists_{T>0} \ \forall_{x \in X} \ (x + T \in X \ \wedge \ x - T \in X \ \wedge f(x+T) = f(x)).$$

  Liczbę T nazywamy okresem funkcji, a jeśli istnieje najmniejszy okres funkcji, to nazywamy go okresem podstawowym.
  Funkcja jest okresowa, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $[T, 0]$ nie zmieni się.

- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy parzystą, jeśli:

$$\forall_{x \in X} \ (-x \in X \ \wedge f(-x) = f(x)).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi $0Y$.

- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy nieparzystą, jeśli:

$$\forall_{x \in X} \ (-x \in X \ \wedge f(-x) = -f(x)).$$

Wykres f-kcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.

- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy
  - ograniczoną z dołu, gdy

$$\exists_{m \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in X} \ \ f(x) \geqslant m$$

(wykres leży nad pewną prostą poziomą),
- ograniczoną z góry, gdy

$$\exists_{m \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in X} \ \ f(x) \leqslant m$$

(wykres leży pod pewną prostą poziomą)
-ograniczoną, gdy jest ograniczona z dołu i z góry, tzn.

$$\exists_{m \in \mathbb{R}_+} \ \forall_{x \in X} \ \ -m \leqslant f(x) \leqslant m$$

(wykres jest położony pomiędzy dwoma prostymi poziomymi).

- Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy - rosnącą na zbiorze $A \subset X$, jeśli
$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

- - malejącą na zbiorze $A \subset X$, jeśli
$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

- - niemalejącą na zbiorze $A \subset X$, jeśli
$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

- - nierosnącą na zbiorze $A \subset X$, jeśli
$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \ (x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

- - monotoniczną jeśli spełnia jeden z ostatnich czterech warunków.
- - stałą na zbiorze $A \subset X$, jeśli $\exists_{a \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in A} \ f(x) = a$.