7. Całki nieoznaczone

Funkcje pierwotne

Definicja

Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I jeśli

$$F'(x) = f(x)$$

dla dowolnego punktu $x \in I$.

Twierdzenie

(podstawowe o funkcjach pierwotnych)
Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f na I. Wtedy
1) Dla dowolnego $C \in \mathbb{R}$ funkcja $F(x) + C$ jest funkcją pierwotną dla f na I.
2)Każdą funkcję pierwotną funkcji f można przedstawić jako $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie

(warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)
Jeżeli f jest ciągła na I, to posiada funkcję pierwotną na I.

Całka nieoznaczona

Definicja

Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f na I.
Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną zapisujemy następująco

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Uwaga: W zapisach pomijamy $\{\}$.

C nazywamy stałą całkowania.

Całka nieoznaczona

Twierdzenie

(o pochodnej całki)
Niech funkcja f ma funkcję pierwotną na I. Wtedy pochodna całki nieoznaczonej jest równa funkcji podcałkowej,
tzn. dla dowolnego $x \in I$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Twierdzenie

(całka nieoznaczona pochodnej)
Niech funkcja f' ma funkcję pierwotną na I. Wtedy dla dowolnego $x \in I$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C,$$

tzn. całka nieoznaczona pochodnej jest sumą funkcji i dowolnej stałej.

Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie

(o całkowaniu przez części)
Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int (f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie

(o całkowaniu przez podstawienie)
Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$, f jest ciągła na I, $g : J \to \mathcal{I}$ ma ciągłą pochodną na przedziale J, to

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f i $C \in \mathbb{R}$.