Układy równań - Przykłady

1. Dany układ równań rozwiązać trzema sposobami:

   (a) korzystając ze wzorów Cramera,

   (b) metodą macierzy odwrotnej,

   (c) metodą eliminacji Gaussa,

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}.$$

   Rozwiązanie

   (a) Obliczmy wyznacznik $\det A$ macierzy danego układu oraz wyznaczniki macierzy A_x, A_y, A_z, gdzie

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad \det A_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12, \qquad \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

   Z twierdzenia Cramera wynika, że

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-6} = 2,$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{-6} = 3.$$

   (b) Z definicji mnożenia macierzy wynika, że rozważany układ równań możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ale $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, więc $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Zatem $x = 1,\ y = 2,\ z = -3$.

(c) Za pomocą przekształceń elementarnych na wierszach macierzy uzupełnionej naszego układu równań, uzyskamy postać schodkową macierzy.

Macierz uzupełniona ma postać

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Pomnóżmy pierwszy wiersz tej macierz przez -1 i dodajmy do wiersza drugiego. Następnie pomnóżmy pierwszy wiersz przez -2 i dodajmy do wiersza trzeciego. Dostaniemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Podzielmy drugi wiersz przez -3. Wówczas otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Pomnóżmy teraz drugi wiersz przez 5 i dodajmy do wiersz trzeciego. Otrzymamy macierz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right].$$

Napiszmy postać naszego układu równań odpowiadajacą tej macierzy

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & -6 \end{array}.$$

Ponieważ $2z = -6$, to $z = -3$. Dalej $y = -1 - z = -1 + 3 = 2$, $z = 2 - x - 2y = 2 - 1 - 4 = -3$.

2. Rozwiązać układ równań dwiema metodami:

   (a) metodą Gaussa,

   (b) metodą z zastosowaniem pojęcia rzędu macierzy,

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & & & & & = & 2 \end{array}.$$

Rozwiązanie

(a) Macierz uzupełniona układu ma postać

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Pomnóżmy pierwszy wiersz tej macierz przez -1 i dodajmy do wiersza drugiego, a następnie do wiersz trzeciego. Dostaniemy

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Wiersze drugi i trzeci są proporcjonalne. Wykreślmy zatem wiersz drugi. Otrzymujemy macierz

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Układ równań równoważny naszemu układowi równań ma postać

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 2 \end{array}.$$

Macierz układu ma dwa schodki. Zatem rozwiązanie jest zależne od dwóch parametrów. Ponieważ schodek odpowiadający niewiadomym x i y jest podwójny, podobnie schodek odpowiadający niewiadomym z i t jest podwójny, to możemy przyjąć $y = \alpha$, $t = \beta$. Wówczas

$$x = 2 - \alpha, \quad y = \alpha, \quad z = 2 - \beta, \quad z = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

(b) Zauważmy, że rząd macierzy układu i rząd macierzy uzupełnionej naszego układu są jednakowe i równe ilości schodków, czyli 2.)Wynika, to z rozważań przeprowadzonych w części (a) zadania.) Różny od zera jest np. minor stopnia drugiego postaci $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ odpowiadający niewiadomym x oraz t w równaniu pierwszym i drugim. Odrzućmy z układu równanie trzecie i przyjmijmy za parametry $x = \mu$ i $t = \nu$. Układ równań ma teraz postać

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & z & = & - & \mu & + & \nu & \\ x & + & z & = & & 1 & - & \mu & - & \nu \end{array}.$$

Stąd

$$x = \mu, \quad y = \frac{1}{2} - \mu, \quad z = \frac{1}{2} - \nu, \quad t = \nu, \quad \mu, \nu \in \mathbf{R}.$$

3. Rozwiązać układ równań w zależności od parametru $p \in \mathbf{R}$.

$$\begin{array}{ccccccc} px & & & + & pz & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2py & + & 5z & = & 1 \end{array}.$$

Rozwiązanie

Obliczmy wyznacznik macierzy rozważanego układu

$$\det A_p = \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2p & 5 \end{vmatrix} = 2p^2 - 2p = 2p\,(p-1)\,.$$

$\det A_p \neq 0$ dla $p \neq 0$ i $p \neq 1$. Oznacza to, że

$$\boxed{\text{układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla } p \neq 0 \text{ i } p \neq 1,}$$

gdyż jest wtedy układem Cramerowskim. Teraz znajdziemy to rozwiązanie. Obliczmy

$$\det A_{px} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2p & 5 \end{vmatrix} = p\,(2p-1)\,, \qquad \det A_{py} = \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = p,$$

$$\det A_{pz} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2p & 1 \end{vmatrix} = p\,(1-2p)\,.$$

Stąd

$$x = \frac{2p-1}{2\,(p-1)}, \quad y = \frac{1}{2\,(p-1)}, \quad z = \frac{-\,(2p-1)}{2\,(p-1)}, \quad \text{dla} \quad p \neq 0 \text{ i } p \neq 1.$$

$\boxed{\text{Jeśli } p = 0}$, to układ ma postać

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & & & + & 5z & = & 1 \end{array}.$$

Układ w tej sytuacji posiada rozwiązanie układu zależne od jednego parametru, gdyż mamy trzy niewiadome, a wspólny rząd macierzy układu i macierzy uzupełnionej jest równy 2.

Wyznacznik odpowiadający niewiadomym x oraz z: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ jest równy 1. Przyjmując niewiadomą y za parametr $(y = \alpha)$ otrzymujemy

$$x = 2 - 5\alpha, \quad y = \alpha, \quad z = -1 + 3\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

$\boxed{\text{Jeśli } p = 1}$, to układ przybiera postać

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 5z & = & 1 \end{array}.$$

Rząd macierzy układu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ jest równy 2, a rząd macierz uzupełnionej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ jest równy 3. Zatem w tej sytuacji układ nie ma rozwiązania. Ostatecznie

- dla $p \neq 0$ i $p \neq 1$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie postaci:

$$x = \frac{2p - 1}{2(p-1)}, \quad y = \frac{1}{2(p-1)}, \quad z = \frac{-(2p-1)}{2(p-1)},$$

- dla $p = 0$ układ posiada ∞ wiele rozwiazań zależnych od jednego parametru, postaci:

$$x = 2 - 5\alpha, \quad y = \alpha, \quad z = -1 + 3\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

- dla $p = 1$ układ jest sprzeczny.

4. Zbadać rozwiązalność układu równań w zależności od parametru $m \in \mathbf{R}$

$$(*) \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & m \\ 2x & + & (m+1)\,y & + & z & = & 2 \\ x & + & my & & & = & 2 - m \end{array}.$$

Rozwiązanie

Macierz uzupełniona układu ma postać

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 2-m \end{array}\right].$$

Pomnóżmy pierwszy wiersz tej macierz przez -2 i dodajmy do wiersza drugiego. Następnie pomnóżmy pierwszy wiersz przez -1 i dodajmy do wiersza trzeciego. Dostaniemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & -1 & 2-2m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-2m \end{array}\right].$$

Możemy skreślić ostatni wiersz i wówczas otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & -1 & 2-2m \end{array}\right].$$

Widzimy, ze rząd macierzy układu i rząd macierzy uzupełnionej tego układu jest równy 2. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$. Przyjmijmy niewiadomą y za parametr. Oznaczmy $y = \lambda$. Usuńmy z układu $(*)$ ostatnie równanie. Wówczas układ przyjmie postać

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & m \\ 2x & + & (m+1)\,y & + & z & = & 2 \end{array}.$$

Stąd

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & m-\lambda \\ 2x & + & z & = & 2-(m+1)\,\lambda \end{array}.$$

Zatem

$$x = 2 - m\,(\lambda+1)\,, \quad y = \lambda, \quad z = -2 + 2m - \lambda + m\lambda \quad m\lambda \in \mathbf{R}.$$