

Algebra i geometria

Zadania domowe z algebry abstrakcyjnej

1. W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie.

$$a * b = a + b - 3.$$

(Działania występujące po prawej stronie wzoru są zwykłym dodawaniem i odejmowaniem.)

Czy zbiór liczb całkowitych stanowi grupę względem tego działania?

2. Czy zbiór liczb całkowitych parzystych stanowi grupę względem zwykłego dodawania?

3. Zdefiniujmy działanie

$$a \circ b = 3^{\log_3 a \cdot \log_3 b}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Sprawdzić, czy zbiór liczb rzeczywistych dodatnich wraz z działaniem \circ stanowi grupę.

4. Rozpatrzmy grupę wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera względem mnożenia. Czy tworzy podgrupę:

(a) zbiór liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, dla których $a^2+b^2 > 0$?

(b) zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich?

5. Sprawdzić, czy zbiór liczb postaci $\{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem stanowi pierścień.