Elementy algebry abstrakcyjnej

Grupy

1. Które z następujących zbiorów stanowią grupę względem wskazanego działania:

1) Zbiór liczb całkowitych, ze względu na zwykłe dodawanie,
2) Zbiór liczb całkowitych, ze względu na zwykłe mnożenie,
3) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby naturalnej n, ze zwykłym dodawaniem,
4) Zbiór liczb zespolonych, różnych od zera, ze względu na mnożenie zespolone,
5) Pierwiastki n-tego stopnia z jedności, względem mnożenia zespolonego,
6) Zbiór macierzy kwadratowych stopnia n, o wyrazach rzeczywistych, wraz z mnożeniem macierzowym,
7) Zbiór macierzy kwadratowych, nieosobliwych, stopnia n, wraz z mnożeniem macierzowym.

2. W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie

$$a \circ b = a + b + 2.$$

Czy zbiór liczb całkowitych stanowi grupę ze względu na to działanie?

3. W zbiorze liczb rzeczywistych należących do przedziału $A = [-1, \infty)$ określamy działanie

$$a * b = ab + a + b.$$

Sprawdzić, czy zbiór A wraz z działaniem $*$ stanowi grupę abelową.

4. Niech $(G_1, \circ)$ oraz $(G_2, \diamond)$ będa dwiema grupami. Udowodnić, że zbiór par (g_1, g_2), gdzie $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, tworzy grupę względem działania określonego wzorem:

$$(g_1, g_2) \bigtriangledown (g_1', g_2') = (g_1 \circ g_1',\ g_2 \diamond g_2'), \quad g_1, g_1' \in G_1, \quad g_2, g_2' \in G_2.$$

Grupę tę nazywamy **sumą prostą grup** $(G_1, \circ)$ oraz $(G_2, \diamond)$.

5. Niech $G = [0, 2)$. Określmy w G działanie

$$a \oplus b = a + b - 2\,[a + b]\,.$$

Sprawdzić, czy G wraz z działaniem $\oplus$ stanowi grupę.

6. Zbadać, czy zbiór wielomianów $\mathbf{R}[x]$ podzielnych przez wielomian $x^2 + 1$ stanowi grupę ze względu na mnożenie.

7. Wykazać, że zbiór B_n wszystkich ciagów n-elementowych $(a_1, a_2, ..., a_n)$, których elementami są zera i jedynki jest grupą abelową skończoną względem działania

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \bigtriangledown (b_1, b_2, ..., b_n) = \left(a_1 \underset{2}{+} b_1,\ a_2 \underset{2}{+} b_2, ..., a_n \underset{2}{+} b_n\right).$$

Określić rząd tej grupy.

8. Udowodnić, że grupa której każdy element spełnia warunek $a^2 = e$ (e-element neutralny) jest abelowa.

9. Sprawdzić, czy zbiór liczb rzeczywistych z działaniem

$$x \circledast y = \left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}\right)^5, \ x, y \in \mathbf{R},$$

stanowi grupę abelową.

10. **Centrum grupy** G nazywamy zbiór tych elementów G, które są przemienne z dowolnym elementem grupy G :

$$Z(G) = \left\{ a \in G; \bigwedge_{g \in G} ag = ga \right\}.$$

Wykazać, że $Z(G)$ jest podgrupą grupy G.

11. Wyznaczyć centrum grupy macierzy postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$.

12. Czy następująca podgrupa grupy wszystkich izometrii płaszczyzny jest cykliczna:

a) podgrupa wszystkich przesunięć,
b) podgrupa przesunięć o ustalony wektor $\mathbf{v}$,
c) podgrupa złożona z tożsamości i ustalonej symatrii osiowej,
d) podgrupa obrotów dokoła ustalonego punktu o kąt π,
e) podgrupa wszystkich obrotów dokoła ustalonego punktu?

13. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n, grupa reszt $\mathbf{Z/n}$ jest cykliczna.

Grupy permutacji

14. Obliczyć $\tau\sigma$, $\tau\sigma^2$, $\sigma\tau\sigma^{-1}$, $(\tau\sigma)^2$, $\sigma\tau^{-1}$, gdzie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 7\,3\,1\,8\,2\,4\,5\,6 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 4\,8\,6\,5\,2\,3\,1\,7 \end{pmatrix}.$$

16. Rozłożyć na iloczyn cykli permutacje:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,3\,1\,7\,2\,9\,6\,4\,5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 6\,8\,4\,5\,2\,9\,1\,7\,3 \end{pmatrix}.$$

17. Znaleźć permutację ξ spełniająca równanie $\tau\xi\sigma = \rho$, gdzie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,3\,1\,4\,2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,4\,5\,3\,1 \end{pmatrix}.$$

18. Niech

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,5\,1\,9\,2\,7\,6\,4\,3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 6\,9\,1\,4\,2\,3\,7\,8\,5 \end{pmatrix}.$$

Obliczyć $\operatorname{sgn}\sigma$, i $\operatorname{sgn}\tau$.

19. Dla jakich liczb naturalnych n permutacja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ n & n-1 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jest parzysta ?

20. Obliczyć ilość inwersji w następujących ciągach:

a) $\big(\ 1,\ \ 2,\ \ ...\ \ ,\ m,\ \ n,\ \ n-1,\ \ ...\ \ ,\ m+1\ \big)$, $(m < n)$,

b) $\big(\ n,\ \ n-1,\ \ ...\ \ ,\ m+1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ ...\ \ ,\ m\ \big)$ $(m < n)$.

Homomorfizmy, izomorfizmy grup

20. Wskazać, które z przekształceń grupy addytywnej liczb całkowitych na siebie są homomorfizmami:

a) $\varphi(n) = 2n$, b) $\varphi(n) = 2n + 1$, c) $\varphi(n) = n$?
W przypadku gdy φ jest homomorfizmem wyznaczyć jądro.

21. Wykazać, że grupa macierzy nieosobliwych stopnia n o elementach rzeczywistych odwzorowuje się homomorficznie na grupę multiplikatywną liczb rzeczywistych. Co jest jądrem tego homomoprfizmu?

22. Dla jakich grup odwzorowanie $a \to a^{-1}$ jest automorfizmem?

23. Zbadać, czy grupa multiplikatywna liczb rzeczywistych różnych od zera jest izomorficzna z grupą addytywną liczb rzeczywistych.

24*. Wykazać, że zbiór $A = [0,1)$ z działaniem

$$x \oplus y = x + y - [x+y]$$

jest grupą izomorficzną z grupą multiplikatywną liczb zespolonych o module równym jeden.

25*. Wykazać, że grupa addytywna $\mathbf{Z/n}$ jest izomorficzna z grupą multiplikatywną pierwiastków n-tego stopnia z jedności.

26. Wykazać, że zbiór U macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $x \in \mathbf{R}$, stanowi podgrupę macierzy trójkątnych stopnia 2 izomorficzną z multiplikatywną grupą $\mathbf{R}^+$.

27. Wykazać, że zbiór obrotów dowolnego n-kąta foremnego dokoła jego środka stanowi grupę izomorficzną z pewną podgrupą grupy permutacji parzystych grupy S_n.

Dzielnik normalny. Grupy ilorazowe

28 Wykazać, że H jest dzielnikiem normalnym grupy G wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $a \in G$ i dowolnego $h \in H$ iloczyn $a\,h\,a^{-1} \in H$.

29. Wykazać, że grupa macierzy stopnia n o elementach rzeczywistych i o wyznacznikach równych 1 (tzw. **grupa unimodularna**) jest dzielnikiem normalnym w grupie wszystkich macierzy rzeczywistych nieosobliwych stopnia n z mnożeniem jako działaniem.

30. Dowieść, że zbiór macierzy M macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a, b \in \mathbf{R},\, a \neq 0,$$

jest grupą ze względu na mnożenie macierzy. Dla jakich wartości parametrów a, b, M jest dzielnikiem normalnym?

31. Grupa $\mathbf{S}_3$ ma następujące podgrupy właściwe:

$$\mathbf{A}_3 \;:\; \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{S}_2 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{S}_2' \;:\; \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{S}_2'' : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}.$$

Które z nich są dzielnikami normalnymi?

32. Wykazać, że jeśli A oraz B są dzielnikami normalnymi grupy G i $a \in A$, $b \in B$, to $a\, b\, a^{-1} b^{-1} \in A \cap B$.

33..Wykazać, że grupa ilorazowa której elementami są półproste wychodzące z poczatku układu współrzędnych w $\mathbf{R}^2$, jest izomorficzna z grupą multiplikatywną liczb zespolonych o module równym jedności.

34. Podzielmy grupę addytywną wielomianów o współczynnikach rzeczywistych przez podgrupę wielomianów podzielnych przez $x^2 - 1$. Wykazać, że otrzymana grupa ilorazowa jest izomorficzna z grupą addytywną $\mathbf{R}^2$.

35. Podzielmy multiplikatywną grupą liczb zespolonych, różnych od zera, przez podgrupę liczb zespolonych o module równym 1. Wykazać, że ta grupa jest izomorficzna z multiplikatywną grupą liczb rzeczywistych dodatnich.

Pierścienie i ciała

36. Sprawdzić, które z następujacych zbiorów są pierścieniami (za każdym razem jako dzialania rozpatruje się zwykłe w tym zbiorze dodawanie i mnożenie):

a) zbiór liczb zespolonych postaci bi, gdzie b jest liczba rzeczywistą,

b zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi,

c) zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi,

d) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi,

e) zbiór funkcji rzeczywistych określonych na prostej.

37. W pierścieniu $\mathbf{Z/10}$ rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

38. W $\mathbf{Z/12}$ rozwiązać równania

$$a)\quad x^2 - 7x = 0, \qquad b)\quad x^3 - 2x^2 + 3 = 0, \qquad c)\quad (x-1)\ (x+1) = 1.$$

39. Czy zbiór wektorów przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wraz z dodawaniwm wektorów i iloczynem wektorowym stanowi pierścień? Czy istnieją tu dzielniki zera?

40. Sprawdzić, które z następujacych zbiorów są ciałami (za każdym razem jako dzialania rozpatruje się zwykłe w tym zbiorze dodawanie i mnożenie):

a) wielomiany o współczynnikach całkowitych,
b) zbiór liczb postaci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi?
c) zbiór postaci $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

41. Udowodnić,że zbiór liczb rzeczywistych z działaniami

$$a \oplus b = a + b + 1, \qquad a \circledcirc b = a + b + ab$$

jest ciałem. (Nie jest to ciało liczbowe.)

Homomorfizmy, izomorfizmy ciał i pierścieni

42. Udowodnić, odwzorowanie ciała liczb zespolonych na siebie dane wzorem $h(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$, jest izomorfizmem.

43. Czy ciało liczbowe złożone z liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Q$, jest izomorficzne z ciałem liczbowym złożonym z liczb postaci: $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in Q$?

44. Udowodnić, że ciało macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b \in Q$, jest izomorficzne z ciałem liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Q$.

45. Udowodnić, że pierścień wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych odwzorowuje sie homomorficznie na ciało liczb rzeczywistych.

Wielomiany

46. Znaleźć sumę i iloczyn wielomianów

$$x^3 + 2\,i\,x^2 - 1 + i, \qquad i\,x^2 + 3\,x^2 - (1 + i)\,x'$$

w pierścieniu $\mathbf{C}\,[x]$ wielomianów nad ciałem $\mathbf{C}$ liczb zespolonych.

47. Na przykładzie odpowiednio dobranych wielomianów o współczynnikach z pierścienia $\mathbf{Z/8}$ pokazać,że stopień iloczynu dwu wielomianów może być mniejszy od sumy stopni czynników.

48. Wykazać, że wielomiany $1 - x$ oraz $1 - x^3$ określają w ciele $\mathbf{Z/3}$ jedną i tę samą funkcję.

49. Znaleźć wartości wielomianów

$$x^5 + 3x^4 - x^2 + 1, \qquad 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 + x - 3,$$

w pierścieniu $\mathbf{Z}/\mathbf{6}$, dla $x = 3$.

50. Przedstawić wielomian

$$x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 2$$

z pierścienia wielomianów nad pierścieniem $\mathbf{Z}/\mathbf{4}$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

51. Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia podanych wielomianów w $\mathbf{R}[x]$.
a) $P(x) = 6x^4 + 3x^2 - x - 3, \quad Q(x) = x^2 - 1,$
b) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2, \quad Q(x) = x^2 - 2x + 3.$
c) $P(x) = 2x^7 + 3x^4 - x + 1, \quad Q(x) = x^3 + x^4 + x + 1.$

52. Wyznaczyć iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez g w $\mathbf{Z}[x]$ oraz $\mathbf{Z}/\mathbf{8}[x]$, gdy

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 7, \qquad g(x) = x^2 + 3x - 1.$$

53. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:
a) $x^3 - 2x^2 + 5x + 8,$
b) $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3,$
c) $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x - 2.$

54. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:
a) $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1,$
b) $4x^4 + x^2 - 3x + 1.$

55. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian U, jeżeli

$$W(x) = x^{100} - 2x^{51} - 3x^2 + 1, \qquad U(x) = x^2 - 1.$$

56. Policzyć największy wspólny dzielnik wielomianów

$$8x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2, \qquad x^4 - 4x + 3 \in \mathbf{R}[x].$$

57. Dane są wielomiany

$$f(x) = 3(x-1)^4 (x+1)^3 \left(x^2+1\right), \qquad g(x) = -6(x-1)^2 (x+1)^7 \left(x^2+1\right)^2 \left(x^2+4\right).$$

Znaleźć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność tych wielomianów.