Podprzestrzenie niezmiennicze. Wektory własne, wartości własne

1. Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne przekształcenia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ określonego wzorem

$$F(x, y) = (2x + y,\ 0).$$

3. Wyznaczyć wektory własne i wartości własne przekształcenia liniowego F, jeżeli

   (a) $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ i $F(x, y) = -(y, -x)$,

   (b) $F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ i $F(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)$.

4. Znaleźc bazę przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^3$ złożoną z wektorów własnych przekształcenia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ danego wzorem

$$T(x, y, z) = (5x - 3y + 2z,\ 6x - 4y + 4z,\ 4x - 4y + 5c)$$

   i wyznaczyć macierz przekształcenia T w tej bazie.

5. Znaleźć bazę przestrzeni liniowej P_2 złożoną z wektorów własnych przekształcenia $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ danego wzorem

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = (-a + 2b) + (2a - 2c)\,x + (-2b + c)\,x^2$$

   i wyznaczyć macierz przekształcenia T w tej bazie.

6. Dany jest endomorfizm $T(x, y, z) = (3x + z,\ 3y + z,\ x + y - 2z)$ przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wykazać, że przekształcenie T posiada symetryczną macierz i wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbf{R}^3$ złożoną z wektorów własnych przekształcalcenia T.

7. Wyznaczyć bazę ortogonalną przestrzeni P_2 złożoną z wektorów własnych przekształcenia T, o ile istnieje,

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = (-a - 3b - 7c) + (3a + 5b + 7c)\,x - (3a + 3b + 5c)\,x^2.$$

   Iloczyn skalarny jest tu zdefiniowany wzorem: $\langle a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2 \rangle = aa' + bb' + cc'$.

8. Niech $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ będzie dane wzorem

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = (8a - 2b + 2c) + (-2a + 5b + 4c)\,x - (2a + 4b + 5c)\,x^2.$$

   Pokazać, że T jest samosprzężone. Znaleźć bazę przestrzeni P_2 złożoną z wektorów własnych przekształcenia T . Iloczyn skalarny jak w zadaniu **7.**