Algebra abstrakcyjna

Przykłady

1. Niech będzie dany zbiór $G = (2, \infty)$ i działanie $*$ określone wzorem

$$a * b = ab - 2a - 2b + 6, \quad a, b \in G.$$

Sprawdzić, czy zbiór G wraz z tym działaniem stanowi grupę abelową.

Rozwiązanie

Najpierw musimy sprawdzić, czy działanie $*$ jest działaniem *wewnętrznym*. W tym celu zauważmy, że

$$ab - 2a - 2b + 6 = (a-2)(b-2) + 2.$$

Jeśli $a > 2$ i $b > 2$, to $(a-2)(b-2) > 0$. Wynika stąd, że

$$a * b = ab - 2a - 2b + 6 = (a-2)(b-2) + 2 > 2.$$

Widzimy więc, że jeśli $a, b \in G$, to $a * b \in G$, co oznacza, że działanie $*$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze G.

Sprawdzimy teraz *łączność* działania $*$. Niech a, b, c będą dowolnymi elementami zbioru G. Wówczas

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (ab - 2a - 2b + 6) * c = (ab - 2a - 2b + 6)\,c - 2\,(ab - 2a - 2b + 6) - 2c + 6 = \\ &= abc - 2ab - 2ac - 2bc + 4a + 4b + 4c - 6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (bc - 2b - 2c + 6) = a\,(bc - 2b - 2c + 6) - 2a - 2\,(bc - 2b - 2c + 6) + 6 = \\ &= abc - 2ab - 2ac - 2bc + 4a + 4b + 4c - 6.\end{aligned}$$

Z powyższych rachunków wynika, że $(a * b) * c = a * (b * c)$. Zatem działanie $*$ jest łączne.

Pokażemy teraz, że nasze działanie jest *przemienne*. Niech a, b będą dowolnymi elementami zbioru G. Wówczas

$$a * b = ab - 2a - 2b + 6 = ba - 2b - 2a + 6 = b * a.$$

Działanie $*$ jest więc przemienne.

Znajdziemy teraz *element neutralny* działania $*$. Działanie $*$ jest przemienne, zatem wystarczy znaleźć niewiadomą e z równania

$$a * e = a, \quad a \in G.$$

Z definicji naszego działania wynika, że

$$ae - 2a - 2e + 6 = a.$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy $e = 3$. Liczba 3 jest elementem zbioru G, co oznacza, że $e = 3$ jest elementem neutralnym działania $*$.

Pozostało jeszcze sprawdzenie istnienia elementu *odwrotnego* dla każdego elementu zbioru G. Niech $a \in G$. Działanie $*$ jest przemienne, zatem wystarczy znaleźć niewiadomą b z równania $a * b = 3$. Z definicji naszego działania wynika, że

$$ab - 2a - 2b + 6 = 3.$$

Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymujemy $b = \dfrac{2a-3}{a-2}$. Należy jeszcze sprawdzić, czy $\dfrac{2a-3}{a-2}$ jest elementem zbioru G, czyli czy $\dfrac{2a-3}{a-2} > 2$. Ponieważ $a > 2$, to $a - 2 > 0$. Stąd $2a - 3 > 2(a-2)$. Co daje prawdziwą nierówność $-3 > -4$. Element a posiada zatem element odwrotny $a^{-1} = \dfrac{2a-3}{a-2}$.

Odpowiedź. Zbiór G wraz z działaniem $*$ stanowi grupę abelową.

2. Pokazać, że grupa z zadania 1 jest izomorficzna z grupą multiplikatywną liczb trzeczywistych dodatnich $\mathbf{R}_+$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że odwzorowanie φ dane wzorem

$$\varphi(x) = x - 2, \quad x \in (2, \infty)$$

jest szukanym izomorfizmem.

Sprawdźmy najpierw warunek homomorfizmu.

$$\varphi(a * b) = (ab - 2a - 2b + 6) - 2 = ab - 2a - 2b + 4 = (a-2)(b-2) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

Widzimy, że warunek homomorfizmu jest spełniony.

Odwzorowanie φ jest różnowartościowe, gdyż jeśli $\varphi(a) = \varphi(b)$, to $a - 2 = b - 2$, a więc $a = b$.

Odwzorowanie φ odwzorowuje zbiór $(2, \infty)$ na zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbf{R}_+$. Rzeczywiście, niech c będzie dowolna liczbą rzeczywistą dodatnią. Musimy pokazać, że dla liczby c istnieje liczba $a \in (2, \infty)$ taka, że $\varphi(a) = c$. Połóżmy $a = c + 2$. Wówczas $\varphi(a) = \varphi(c+2) = (c+2) - 2 = c$. Czyli istotnie, dla dowolnej liczby $c \in \mathbf{R}_+$ istnieje liczba $a \in (2, \infty)$ taka, że $\varphi(a) = c$.

Odpowiednie warunki są spełnione. Zatem grupa z zadania 1 jest izomorficzna z grupą multiplikatywną liczb trzeczywistych dodatnich $\mathbf{R}_+$.

3. Zbadać, czy zbiór $A = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}\right\}$ wraz ze zwykłym mnożeniem stanowi podgrupę grupy multiplikatywnej liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Sprawdzimy, czy dla elementów $x, y \in A$, element $x\, y^{-1} \in A$. Niech $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, $a, b, c, d \in a, b \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Policzmy

$$\begin{aligned} x\, y^{-1} &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{c^2 - 2d^2} = \\ &= \frac{ac - 2bd + (-ad + bc)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $c^2 - 2d^2 \neq 0$. Bo gdyby $c^2 - 2d^2 = 0$, to $c^2 = 2d^2$ i wtedy $c = \pm d\sqrt{2}$. To jednak jest niemożliwe ponieważ c jest liczbą wymierną. Ponieważ iloczyny i sumy liczb wymiernych są liczbami wymiernymi, więc element

$$x\, y^{-1} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$$

jest elementem zbioru A. Warunek na to, by zbiór A stanowił podgrupę grupy multiplikatywnej liczb rzeczywistych jest zatem spełniony.

Odpowiedź. Zbiór A stanowi podgrupę grupy multiplikatywnej liczb rzeczywistych.

4. Pokazać, że zbiór $G = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ wraz z działaniem $+_n$ (dodawaniem modulo n) stanowi grupę abelową.

Rozwiązanie

Przy sprawdzaniu łączności działania przydatny będzie wzór

$$r_n(a + b) = r_n(r_n a + b) = r_n(a + r_n b), \quad a, b \in \mathbf{Z}. \tag{$*$}$$

Symbol $r_n a$ oznacza resztę powstała przy dzieleniu liczby całkowitaj a przy dzieleniu przez liczbę naturalną n.

Przypomnijmy definicję dodawania modulo n: $a +_n b = r_n(a + b)$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

Sprawdzimy teraz, czy spełnione są wszystkie aksjomaty grupy abelowej.

Działanie $+_n$ jest działaniem *wewnętrznym* w zbiorze G , gdyż reszta z dzielenia liczby całkowitej przez liczbę naturalną n jest jednym z elementów zbioru G.

Sprawdzimy teraz *łączność* działania $+_n$. Niech a, b, c będą dowolnymi elementami zbioru G. Wówczas korzystając ze wzoru $(*)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (a +_n b) +_n c &= r_n(a + b) +_n c = r_n(r_n(a + b) + c) = r_n(a + b + c), \\ a +_n (b +_n c) &= a +_n r_n(b + c) = r_n(a + r_n(b + c)) = r_n(a + b + c). \end{aligned}$$

Z powyższych rachunków wynika, że $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$. Zatem działanie $+_n$ jest łączne.

Przemienność dodawania $+_n$ wynika z przemienności zwykłego dodawania w zbiorze liczb całkowitych. Rzeczywiście, niech a, b będą dowolnymi elementami zbioru G. Wówczas

$$a +_n b = r_n (a + b) = r_n (b + a) = b +_n a.$$

Działanie $+_n$ jest więc przemienne.

Pokażemy teraz, że liczba 0 jest *elementem neutralnym* naszego działania. Z przemienności naszego działania i definicji elementu neutralnego wynika, że element neutralny można znaleźć rozwiązując równanie postaci $a +_n e = a$, gdzie e jest niewiadomą. Z definicji działania $+_n$ otrzymujemy $a +_n e = r_n (a + e) = a$. Liczba $a + e$ należy do zbioru $\{0, 1, 2, ..., n-1, n, ..., 2n-2, \}$. Rozważmy dwa przypadki:

1^o gdy $a + e \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, wtedy $r_n (a + e) = a + e = a$ i stąd otrzymujemy $e = 0$,

2^o gdy $a + e \in \{n, ..., 2n-2, \}$, wtedy $r_n (a + e) = a + e - n = a$ i stąd otrzymujemy $e = n$.

Przypadek drugi jest sprzeczny, gdyż liczba $n \notin G$. Zatem element neutralny $e = 0$.

Należy jeszcze znaleźć *element przeciwny* do dowolnego elementu $a \in G$. Z przemienności naszego działania i definicji elementu przeciwnego do danego elementu a wynika, że wystarczy rozwiązać równanie postaci $a +_n b = e$, gdzie b jest niewiadomą. Ale $a +_n b = r_n (a + b) = e$. Liczba $a + b$ należy do zbioru $\{0, 1, 2, ..., n-1, n, ..., 2n-2, \}$. Musimy zatem znów rozważyć dwa przypadki:

1^o gdy $a + b \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, wtedy $r_n (a + b) = a + b = 0$ i stąd otrzymujemy $a = -b$,

2^o gdy $a + b \in \{n, ..., 2n-2, \}$, wtedy $r_n (a + e) = a + b - n = 0$ i stąd otrzymujemy

$b = n - a$.

Jedyną liczbą należącą do zbioru G dla której jest spełniony warunek $a = -b$ z przypadku 1^o jest liczba 0. Zatem w tym przypadku $a = b = 0$ i stąd elementem przeciwnym do liczby 0 jest ta sama liczba 0. Z 2^o wynika natomiast, że jeśli liczba $a \neq 0$, to element do niej przeciwny b ma postać $b = n - a$.