8. Całka oznaczona

Definicje i oznaczenia

Definicja

Podziałem przedziału $[a, b]$ na n części, gdzie $n \in \mathbb{N}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{P} := \{x_0, x_1, ...x_n\},$$

przy czym $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$.

Oznaczenia:
$\triangle x_k := x_k - x_{k-1}$ - długość k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $k \in \{1, ..., n\}$;
$\delta(\mathcal{P}) = max\{\triangle x_k, k \in \{1, ..., n\}\}$-średnica podziału $\mathcal{P}$;
$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$-punkt pośredni k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$, gdzie $k \in \{1, ..., n\}$.

Definicja

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim x_k^*, $k \in \{1, ..., n\}$, nazywamy liczbę

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{n=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x_k.$$

Definicje i oznaczenia

Definicja

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{n=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x_k,$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału przedziału $[a, b]$, ani od sposobu wyboru punktów pośrednich x_k^*.

Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)dx := 0$$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Funkcję, dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a, b]$, nazywamy funkcją całkowalną (w sensie Riemannana) na $[a, b]$.

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Niech f będzie ciągłą i nieujemną funkcją na $[a, b]$. Figurę D ograniczoną przedziałem $[a, b]$, wykresem funkcji f i odcinkami prostych $x = a$, $x = b$ nazywamy trapezem krzywoliniowym

$$D := \{(x, y) : x \in [a, b] \wedge y \in [0, f(x)]\}.$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej:

$$\int_a^b f(x)dx = \mid D \mid,$$

gdzie $\mid D \mid$ oznacza pole trapezu krzywoloniowego D.

Jeśli f jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $f(x) \leqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = - \mid D \mid .$$

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

Funkcja całkowalna na przedziale domkniętym jest ograniczona na tym przedziale.

Uwaga: Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Twierdzenie

Funkcja ograniczona na przedziale domkniętym i mająca w nim skończoną liczbę punktów nieciągłości jest całkowalna na tym przedziale.

Uwaga: Funkcja całkowalna na $[a, b]$ może mieć nieskończenie wiele punktów nieciągłości.

Twierdzenie Newtona-Leibinza - podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na $[a, b]$.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie

Jeśli funkcje f i g są całkowalne na $[a, b]$, to

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenia o całkach oznaczonych

Twierdzenie

(o całkowaniu przez części)
Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na $[a, b]$, to

$$\int_a^b (f(x)g'(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie

(o całkowaniu przez podstawienie)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$ oraz $g(\alpha) = a$ i $g(\beta) = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Twierdzenia o całkach oznaczonych

Twierdzenie

Zmiana wartości funkcji w skończonej liczbie punktów przedziału nie wpływa ani na całkowalność funkcji w tym przedziale, ani na wartość całki (jeżeli ta funkcja była całkowalna).

Twierdzenie

(o addytywności całki względem przedziału całkowania)
Jeżeli f jest całkowalna na $[a, b]$ i $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie

(monotoniczność całki) Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na $[a, b]$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$