6. Pochodna funkcji (cz.2)

Twierdzenie

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie a, to jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie

(Rolle'a)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie

(Lagrange'a)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b). Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$

- $f'(x) = 0$, to f jest stała na (a, b),
- $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na (a, b),
- $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na (a, b),
- $f'(x) \geqslant 0$, to f jest niemalejąca na (a, b),
- $f'(x) \leqslant 0$, to f jest nierosnąca na (a, b).

Twierdzenie

(Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum)
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w punkcie w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

Punkt x_0, dla którego zachodzi warunek $f'(x_0) = 0$ nazywamy punktem stacjonarnym lub krytycznym funkcji f.

Funkcja może mieć ekstermum lokalne w punkcie, w którym nie jest różniczkowalna.

Twierdzenie

(warunek dostateczny istnienia ekstremum).

Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna na pewnym przedziale (a, b) oraz $x_0 \in (a, b)$.

Jeśli w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 pochodna funkcji f jest dodatnia, zaś w pewnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu - ujemna, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Jeśli w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 pochodna funkcji f jest ujemna, zaś w pewnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu - dodatnia, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $(a, b), x_0 \in (a, b)$ oraz istnieje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

to granicę tę nazywamy **pochodną drugiego rzędu (drugą pochodną)** funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$.

Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów.

Powiemy, że funkcja ciągła f na przedziale (a, b) jest **wypukła w punkcie** $x_0 \in (a, b)$, jeśli wykres tej funkcji (w pewnym otoczeniu punktu x_0) znajduje się ponad styczną do wykresu wyznaczoną w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Funkcję nazwiemy **wklęsłą w punkcie** x_0, jeśli jej wykres znajduje się pod taką styczną.

Mówimy, że funkcja jest **wypukła (wklęsła) na przedziale** (a, b) jeśli jest wypukła (wklęsła) w każdym punkcie tego przedziału.

Jeśli funkcja f jest wypukła na lewo od punktu x_0, zaś wklęsła na prawo od tego punktu (albo odwrotnie), to mówimy, że f ma w x_0 **punkt przegięcia**.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) i druga pochodna f'' jest dodatnia w każym punkcie tego przedziału, to f jest wypukła na przedziale (a, b).

Jeśli druga pochodna jest ujemna w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja f jest na przedziale (a, b) wklęsła.

Twierdzenie

(warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)
Jeśli funkcja f ma w x_0 punkt przegięcia i jest w tym punkcie dwukrotnie różniczkowalna, to $f''(x_0) = 0$.

Twierdzenie

(warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia)
Jeśli funkcja f jest w otoczeniu punktu x_0 dwukrotnie różniczkowalna, $f''(x_0) = 0$ oraz druga pochodna zmienia znak w punkcie x_0, to funkcja f ma w x_0 punkt przegięcia.

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest w otoczeniu punktu x_0 n-krotnie różniczkowalna, wszystkie kolejne pochodne funkcji f do rzędu $n-1$ są równe zero oraz $f^{(n)} \neq 0$, to f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne lub punkt przegięcia, przy czym jest to:

a) punkt przegięcia, jeśli n jest nieparzyste,

b) ekstremum lokalne, jeśli n jest parzyste (minimum, gdy $f^{(n)} > 0$, a maksimum gdy $f^{(n)} < 0$).