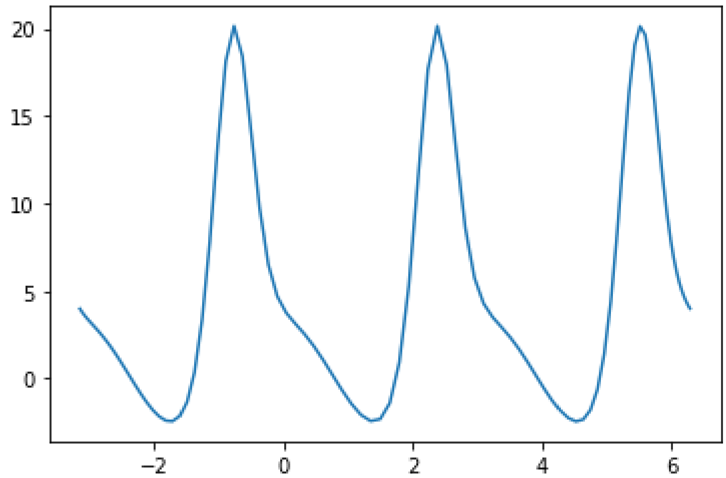
Sprawozdanie z ćwiczenia 4
Aproksymacja

Konrad Pękala

1. Wstęp

W tym ćwiczeniu miałem za zadanie zaimplementować algorytm aproksymacji średniokwadratowej funkcji f wielomianami algebraicznymi

$$f(x) = e^{-3\sin(2x)} + 3\cos(2x)\,, gdzie -\pi \leq x \leq 2\pi$$



Rysunek 1. Wykres funkcji f

Do obliczeń korzystałem z języka Python 3 oraz projektu Jupyter Notebook

Korzystałem ze standardowej precyzji typu float oferowanej przez język Python(odpowiednik typu double w języku C).

Oznaczenia używane w sprawozdaniu

N – Liczba węzłów aproksymacji

L – Liczba funkcji bazowych

Pomiar błędów obliczeniowych

1. średni_błąd $= \left(\frac{1}{100}\right) \sum_{i=1}^{100} abs(f(x_i) - f_a(x_i))$
2. maksymalny_błąd = $\max\left(abs(f(x_i) - f_a(x_i))\right)$

gdzie $f_a(x_i)$ - wartość funkcji aproksymującej w punkcie x_i

$f(x_i)$ - wartość funkcji f w punkcie x_i

x_i – i-ty punkt ze zbioru 100 punktów równomiernie rozłożonych na dziedzinie funkcji f

1.1 Metoda obliczeń

1.1.1 Aproksymacja wielomianowa

Aby znaleźć współczynniki funkcji aproksymującej, rozwiązałem układ normalny, który w postaci macierzowej można opisać wzorem $D^T DA = D^T f$, gdzie D – macierz funkcji bazowych, A – macierz współczynników, f – wektor wartości funkcji f. Aby rozwiązać ten układ użyłem funkcji inv, transpoze z modułu np.linalg

1.1.2 Aproksymacja trygonometryczna

Szukamy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j cos(jx) + b_j sin(jx))$$

Ze współczynnikami:

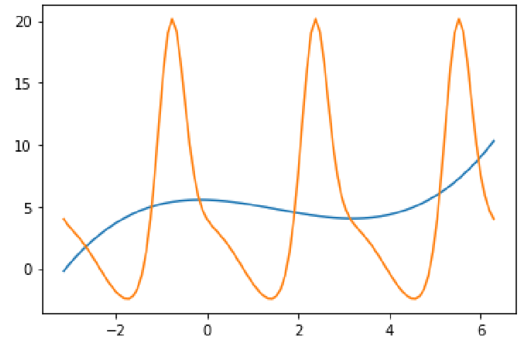
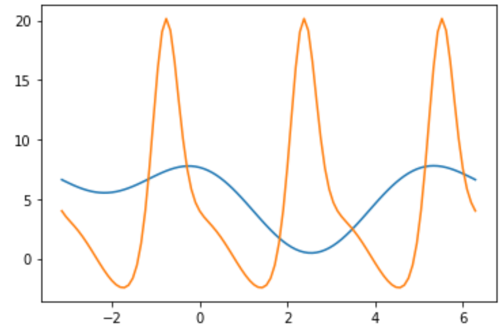
$$a_j = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)cos(jx_i) \qquad b_j = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)sin(jx_i)$$

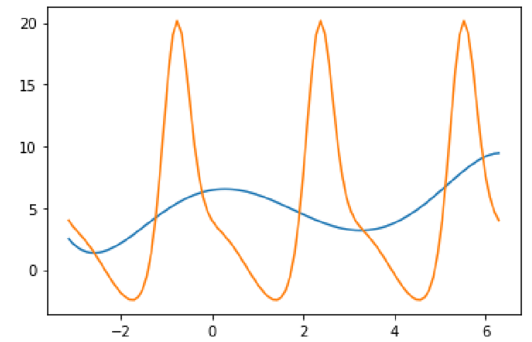
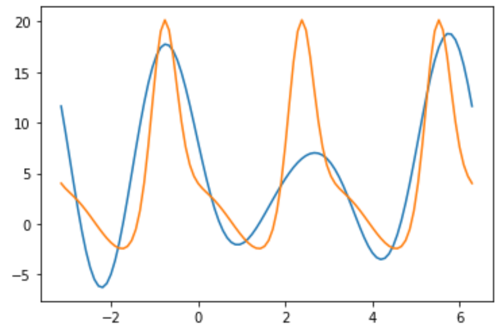
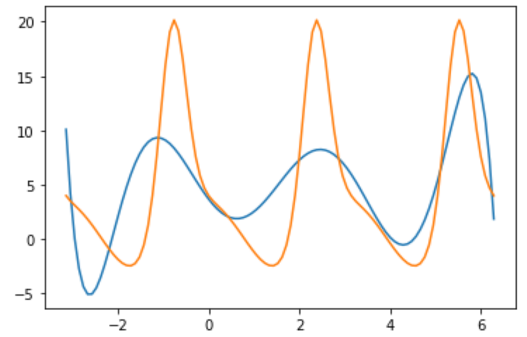
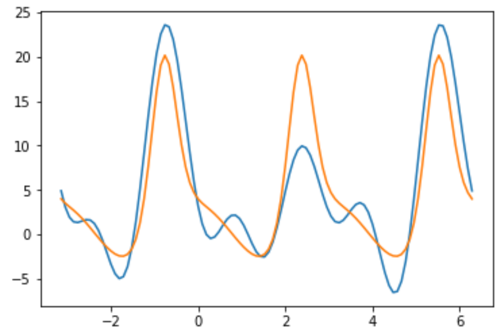
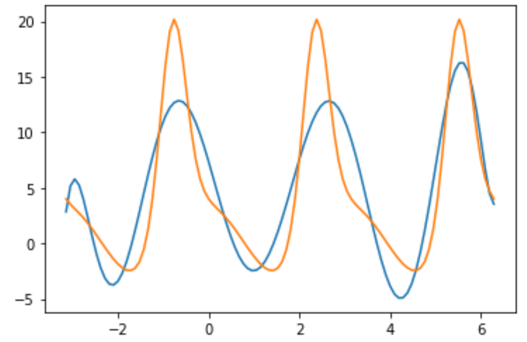
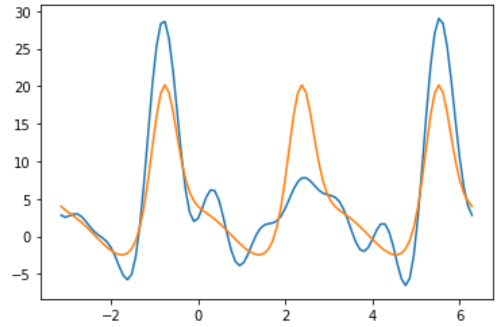
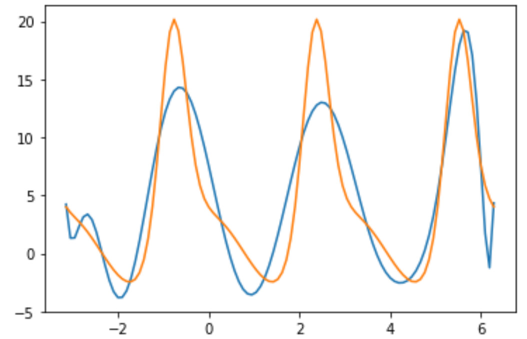
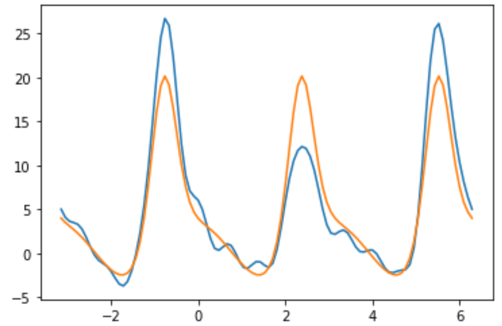
1.2 Wykonanie ćwiczenia

Po zaimplementowaniu dwóch metod aproksymacji przeszedłem do testowania dokładności przybliżenia funkcji f. Testowałem zależność błędu od L dla stałej liczby N oraz na odwrót: zależność błędu on N dla stałej liczby L.

2. Wizualizacja ciekawszych przypadków

Wizualizowana funkcja przybliżająca zawiera N = 20, dlatego zdecydowałem nie pokazywać węzłów aproksymacji.

Maksy malny stopień	**Wielomiany algebraiczne**	**Aproksymacja trygonometryczna**
3		

5		
7		
10		
15		

3. Porównanie wyników aproksymacji wielomianowej

3.1 Maksymalny błąd

Maksymalny stopień	N = 10	N = 15	N = 20	N = 30
3	15.349	15.6144	15.6833	15.82788
4	15.5335	15.6050	15.4156	15.52757
5	16.8599	16.4439	16.39615	16.3464
7	15.302	12.3689	11.9505	11.99586
10	X	12.426	8.324173	8.360513
15	X	X	61.418926	12.01940

3.2 Średni błąd

Maksymalny stopień	N = 10	N = 15	N = 20	N = 30
3	5.4455	5.3712	5.3856	5.38769555
4	5.4798	5.3267	5.3490	5.344455
5	5.28071	5.2068	5.23599	5.245863
7	4.7295	4.2418	4.12896	4.06769
10	X	3.402169	2.77014	2.71187
15	X	X	4.80013	2.48739

3.3 Wnioski

1. Dla stałej liczby węzłów im większa liczba funkcji bazowych tym przybliżenie jest dokładniejsze.

2. Dla takiej samej bazy funkcji liczba węzłów nie ma dużego znaczenia dla dokładności przybliżenia

3. Gdy liczba węzłów aproksymacji jest mniejsza od stopnia aproksymacji to funkcja aproksymująca nie spełnia swojej roli, błędy są znacznie za duże.

4. Porównanie wyników aproksymacji trygonometrycznej

4.1 Maksymalny błąd

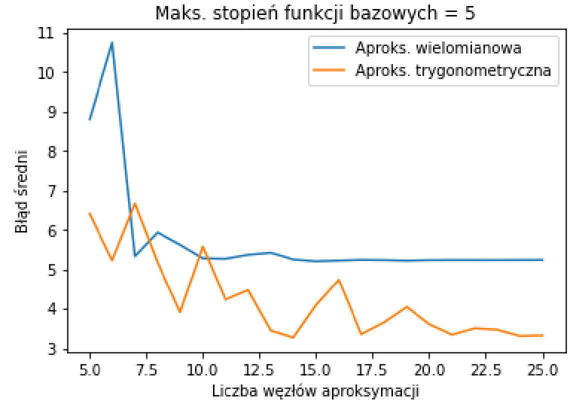
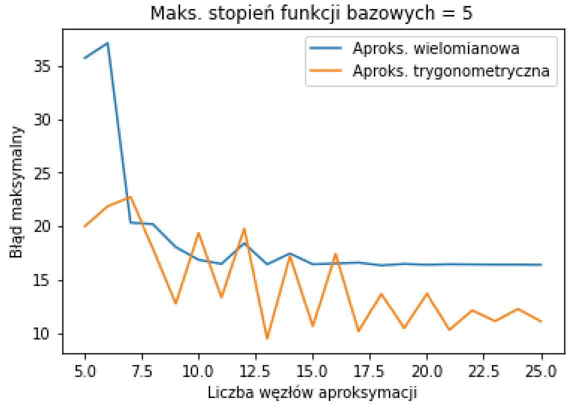
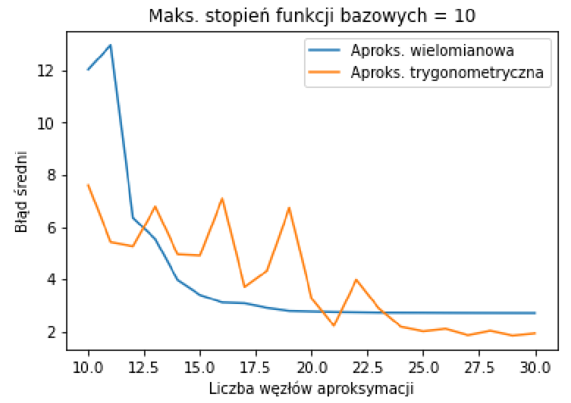
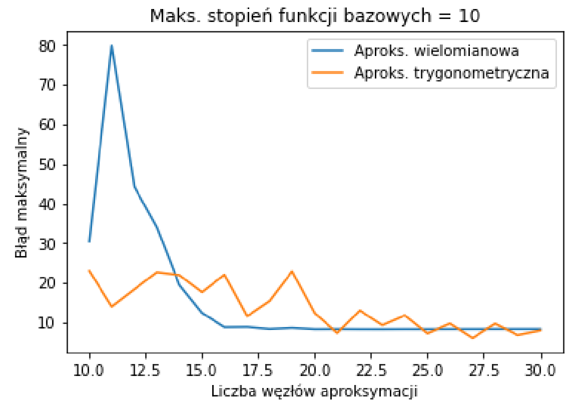
Maksymalny stopień	N = 10	N = 15	N = 20	N = 30
3	19.7489	17.6253	19.6323	18.9116
4	19.4634	9.2509	10.9519	10.2858
5	19.3679	10.6257	13.7163	11.8784
7	21.0917	10.7370	10.2047	8.3157
10	X	17.6565	12.3787	8.0043
15	X	X	23.9620	11.1544

4.2 Średni błąd

Maksymalny stopień	N = 10	N = 15	N = 20	N = 30
3	5.5659	6.233	6.0688	5.9922
4	5.5976	3.9792	3.4729	3.3651
5	5.5785	4.0954	3.6102	3.4075
7	5.8854	4.2031	2.8904	2.2543
10	X	4.9100	3.2712	1.9332
15	X	X	5.141	2.4284

5. Porównanie obu metod aproksymacji

Czas porównać obie metody. Do testów wybieram zawsze liczby węzłów większe od liczby funkcji bazowych. Np. dla liczby funkcji bazowej = 5 dobieram liczby węzłów w zakresie od 5 do 25.

<table>
<tr><th>Błąd średni</th><th>Błąd maksymalny</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

5.1 Wnioski

1. Błąd aproksymacji trygonometrycznej wacha się – raz jest lepiej a raz gorzej – ale ze zwiększająca się liczbą węzłów maleje. Błąd średni zmierza do zakresu (1,3). Błąd aproksymacji wielomianowej szybciej się stabilizuje, np. dla liczby funkcji bazowych = 10 stabilizacja błędu zachodzi dla N = 15.

2. Na wykresach dokładnie widać, że za mała liczba węzłów może powodować „katastrofę" obliczeniową.

3. Wyniki wyraźnie pokazały, że aby przybliżenie było dokładne to musi być spełniona zasada N >> L. Gdy ta zasada jest spełniona to widzimy że dla stałej liczby N błąd maleje wraz ze wzrostem liczby L