Sprawozdanie z ćwiczenia 5

Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

Konrad Pękala

1. Wstęp

W tym ćwiczeniu miałem za zadanie wyznaczyć pierwiastki równania f(x) = 0 dla zadanej funkcji f metodą Newtona i siecznych i porównać otrzymane wyniki. Drugim zadaniem było rozwiązać wskazany układ równań metodą Newtona

Kryteria stopu:

1. Nr. 1: $\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| < \rho$
2. Nr. 2: $\left|f(x^{i})\right| < \rho$

1.1 Użyte programy/biblioteki:

1. Jupyter Notebook
2. Python 3
3. NumPy, Matplotlib

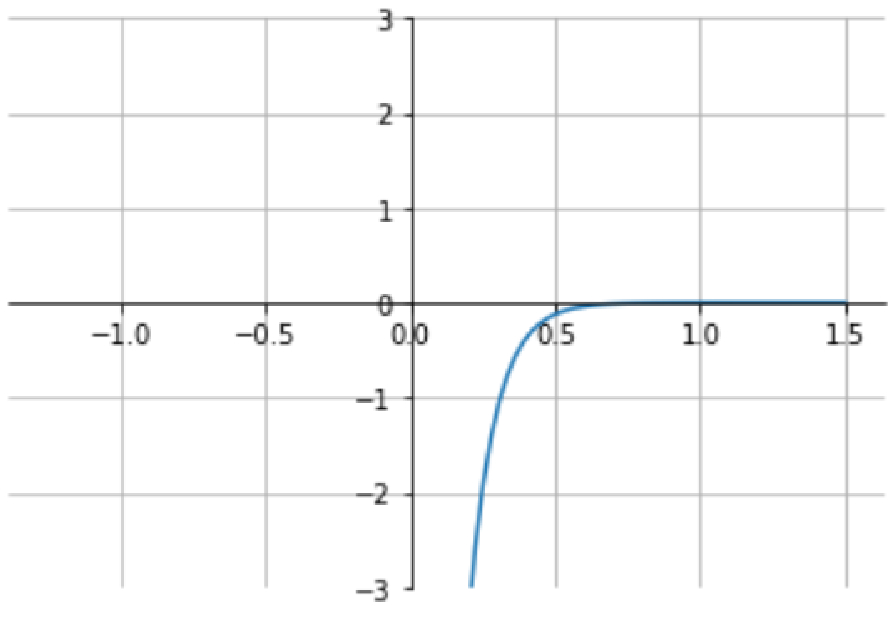
2. Rozwiązywanie równań

Słownik:

<u>przepełnienie</u> – Overflow error, będzie zdarzał się czasami gdy program będzie chciał obliczyć wartość funkcji dla x < 0, ponieważ funkcja ta drastycznie zmiejsza swoją wartość dążąc do zera z prawej strony

2.1 Zadana funkcja f

$$f(x) = 30xe^{-30} - 30e^{-11x} + \frac{1}{330}, x \in \{-1.25, 1.5\}$$



Rysunek 1. Wykres funkcji f

2.2 Metoda Newtona

Opis

Rozwiązań będziemy szukać za pomocą wzoru: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wykonanie ćwiczenia

Dla metody Newtona wybrałem punkty startowe rozpoczynając od wartości końców przedziału, zmniejszając je o 0.1 w kolejnych eksperymentach numerycznych. Następnie dla każdego punktu startowego obliczyłem rozwiązanie równania. Jeśli punkt startowy był za daleko od oczekiwanego, to następny punkt w algorytmie był często poza przedziałem, gdzie funkcja miała wartości zbyt duże dla typu float, co powodowało przepełnienie. Wykonałem eksperyment dla ε = {1.0e-6. 1.0e-4. 1.0e-2}.

Jak się okazało wyniki były identyczne niezależnie od wybranego ε.

Wyniki eksperymentu dla ε = 10^{-6}:

Dla kryterium stopu nr.1

Punkt startowy	**Wynik**	**Iteracje**
1.5	Brak rozwiązania (przepełnienie)	1
1.4	Brak rozwiązania (przepełnienie)	1
1.3	Brak rozwiązania (przepełnienie)	1
1.2	Brak rozwiązania (przepełnienie)	1
1.1	$x = 0.83639$	20
1.0	$x = 0.83639$	9
0.9	$x = 0.83639$	5
0.8	$x = 0.83639$	4
0.7	$x = 0.83639$	6
0.6	$x = 0.83639$	7
0.5	$x = 0.83639$	8
0.4	$x = 0.83639$	9
0.3	$x = 0.83639$	10
0.2	$x = 0.83639$	12

Dla kryterium stopu nr.2

Przedział	**Wynik**	**Iteracje**
1.5	Brak rozwiązania	1
1.4	Brak rozwiązania	1
1.3	Brak rozwiązania	1
1.2	Brak rozwiązania	1
1.1	x_o =0.836379	18
1.0	x_o =0.836382	7
0.9	x_o =0.83639	4
0.8	x_o =0.83639	3
0.7	x_o =0.836371	4
0.6	x_o =0.83639	6
0.5	x_o =0.83639	7

0.4	x_o =0.83639	8
0.3	x_o = 0.836389	9
0.2	x_o =0.836389	10

Wnioski

1. Nie ma pewności że ta metoda w ogóle zadziała. Najlepiej jest wybrać przedział który kończy się w miarę blisko przewidywanego rozwiązania.
2. Kryterium stopu nr.1 zazwyczaj potrzebowało więcej iteracji, jednak jest to tylko różnica o stałą równą ok. 2

2.3 Metoda siecznych

Opis

Rozwiązań będziemy szukać za pomocą wzoru: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

Wykonanie ćwiczenia

Dla metody siecznych wybierałem punkty startowe rozpoczynając od wartości końców przedziału. W zależności od eksperymentu zmieniałem tylko punkt początkowy albo punkt końcowy o 0.1. Wykonałem eksperyment dla ε = {1.0e-6. 1.0e-4. 1.0e-2}.

W tej metodzie wyniki były identyczne niezależnie od wybranego ε.

Wyniki eksperymentu dla ε = 10^{-6}:

Dla kryterium stopu nr.1:

Przedział	**Wynik**	**Iteracje**
[-1.25, 1.5]	1.5	1
[-1.25, 1.4]	1.5	1
[-1.25, 1.3]	1.5	1
[-1.25, 1.2]	1.5	1
[-1.25, 1.1]	1.5	1
[-1.25, 1.0]	1.5	1
[-1.25, 0.9]	1.5	1
[-1.25, 0.8]	1.5	1
[-1.25, 0.7]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.6]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.5]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.4]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.3]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.2]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.1]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, 0.0]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, -0.1]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3

[-1.25, -0.2]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, -0.3]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, -0.4]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	3
[-1.25, -0.5]	1.210149	4
[-1.25, -0.6]	1.050364	6
[-1.25, -0.7]	Brak rozwiązania (przepełnienie)	5
[-1.25, -0.8]	1.5	3
[-1.25, -0.9]	1.5	3
[-1.25, -1.0]	1.5	3
[-1.25, -1.1]	1.5	3

Przedział	**Wynik**	**Iteracje**
[-1.25, 1.5]	1.5	1
[-1.15, 1.5]	1.4	1
[-1.05, 1.5]	1.3	1
[-0.95, 1.5]	1.2	1
[-0.85, 1.5]	1.1	1
[-0.75, 1.5]	1.0	1
[-0.65, 1.5]	0.9	1
[-0.55, 1.5]	0.8	1
[-0.45, 1.5]	0.7	1
[-0.35, 1.5]	0.6	1
[-0.25, 1.5]	0.5	1
[-0.15, 1.5]	0.4	1
[-0.05, 1.5]	0.3	1
[0.05, 1.5]	0.2	1
[0.15, 1.5]	0.1	1
[0.25, 1.5]	0.83639	20
[0.35, 1.5]	0.83639	21
[0.45, 1.5]	0.83639	23
[0.55, 1.5]	0.83639	25
[0.65, 1.5]	0.83639	26
[0.75, 1.5]	0.83639	28
[0.85, 1.5]	0.83639	29
[0.95, 1.5]	0.83639	31
[1.05, 1.5]	0.83639	32
[1.15, 1.5]	0.83639	34
[1.25, 1.5]	0.83639	36
[1.35, 1.5]	0.83639	37

Dla kryterium stopu nr.2:

Przedział	**Wynik**	**Iteracje**
[-1.25, 1.5]	Brak x_o	3
[-1.25, 1.4]	Brak x_o	4
[-1.25, 1.3]	Brak x_o	4
[-1.25, 1.2]	Brak x_o	4

[-1.25, 1.1]	Brak x_o	100
[-1.25, 1.0]	0.836391	13
[-1.25, 0.9]	0.836391	6
[-1.25, 0.8]	0.83639	5
[-1.25, 0.7]	0.836389	7
[-1.25, 0.6]	0.83639	9
[-1.25, 0.5]	0.836383	10
[-1.25, 0.4]	0.836389	12
[-1.25, 0.3]	0.836372	13
[-1.25, 0.2]	0.836388	15
[-1.25, 0.1]	0.83639	17
[-1.25, 0.0]	0.836384	18
[-1.25, -0.1]	0.836389	20
[-1.25, -0.2]	0.836377	21
[-1.25, -0.3]	0.836388	23
[-1.25, -0.4]	0.836361	24
[-1.25, -0.5]	0.836386	26
[-1.25, -0.6]	0.83639	28
[-1.25, -0.7]	0.836381	29
[-1.25, -0.8]	0.836389	31
[-1.25, -0.9]	0.836374	32
[-1.25, -1.0]	0.836389	34
[-1.25, -1.1]	0.836381	35

Przedział	**Wynik**	**Iteracje**
[-1.25, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-1.15, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-1.05, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.95, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.85, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.75, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.65, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.55, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.45, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.35, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.25, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.15, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[-0.05, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.05, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.15, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.25, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.35, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.45, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.55, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.65, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[0.75, 1.5]	0.8363744	4
[0.85, 1.5]	Brak rozwiązania	55
[0.95, 1.5]	Brak rozwiązania	5
[1.05, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[1.15, 1.5]	Brak rozwiązania	3

[1.25, 1.5]	Brak rozwiązania	3
[1.35, 1.5]	Brak rozwiązania	3

Wnioski

1. Ta metoda też najlepiej sobie radzi gdy prawy punkt znajduje się blisko oczekiwanego rozwiązania
2. Zaletą tej metody jest brak konieczności wyznaczania pochodnej funkcji
3. Jak się okazało eksperyment ze zmianą lewego punktu powoduje w 99% błąd przepełnienia
4. Dla kryterium stopu nr.1 algorytm często kończył za wcześnie działania, powodem było zagęszczenie szukania rozwiązania w bardzo małych odstępach miedzy iteracjami

3. Rozwiązywanie układów równań metodą Newtona

3.1 Układ równań

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

3.2 Wykonanie ćwiczenia

Pierwszym problemem po zaimplementowaniu algorytmu Newtona był wybór wektorów początkowych. Nie będąc w stanie określić które wektory będą prowadzić do właściwych rozwiązań, postanowiłem wybierać je losowo.

Wykonałem eksperyment dla ε = {1.0e-6. 1.0e-4. 1.0e-2}.

Oczekiwane rozwiązania (rzeczywiste):

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \\ w = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0.953156 \\ v = -0.428689 \\ w = -0.0922802 \end{cases}$$

Eksperyment

Wyniki (pokazuje tylko unikalne rozwiązania):

Wyniki eksperymentu dla ε = 10^{-2}*:*

Wektor początkowy	Wynik	Liczba iteracji
(1.066337, 0.932330, -0.01464)	[0.951022, -0.440888, -0.096439]	6
(0.660161, -0.58775, -0.77987)	[0.999999, -1.000003, -1.0]	4
(-1.96537, -0.163769, -1.844938)	[1.000005, -1.000096, -1.000176]	96

Wyniki eksperymentu dla ε = 10^{-4}:

Wektor początkowy	Wynik	Liczba iteracji
(1.066337, 0.932330, -0.01464)	[1.0, 0.005184, -1e-06]	9
(-1.446403, 0.547860, -1.86366)	[1.0, -1.0, -1.0]	28
(1.15568, -1.275523, 0.1629537)	[0.953151,-0.428719,-0.09229]	6

Wyniki eksperymentu dla ε = 10^{-6}:

Wektor początkowy	Wynik	Liczba iteracji
(-0.0481898, -1.404979, 0.47546)	[0.953156, -0.42869, -0.09228]	82
(-0.27216, -1.930054, -1.823566)	[1.0, -1.0, -1.0]	28
(0.5957588, 0.9935484, -0.0810441)	[1.0, 0.000775, -0.0]	70

Wnioski:

1. Program potrafił znaleźć wszystkie oczekiwane rozwiązania
2. Rozwiązania są znacznie dokładniejsze dla mniejszego epsilona, dla ε = 10^{-6} wynik jest praktycznie bezbłędny