

ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019
1η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέρος Α

Κωδικοποίηση Huffman

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι να μελετηθεί η μέθοδος κωδικοποίησης διακριτών πηγών που βασίζεται στον κώδικα Huffman. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω της μελέτης σχετικής βιβλιογραφίας, αλλά και μέσω της υλοποίησης ενός συστήματος κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης μιας πηγής χαρακτήρων κειμένου. Η απόδοση του συστήματος θα εξεταστεί ως προς τη δυνατότητα συμπίεσης τόσο «τεχνητών» πηγών (τυχαία παραγόμενοι χαρακτήρες) όσο και πραγματικών πηγών (αρχείου Αγγλικών λέξεων) στο υπολογιστικό περιβάλλον MATLAB.

Στο πλαίσιο της πρώτης εργαστηριακής άσκησης καλείστε να συντάξετε μια τεχνική αναφορά η οποία να παρουσιάζει τα κυριότερα σημεία της θεωρίας κωδικοποίησης πηγής και ιδιαίτερα του κώδικα Huffman και επιπλέον να περιλαμβάνει τα εξής:

- Υλοποίηση τριών συναρτήσεων στο περιβάλλον του MATLAB των οποίων οι αντίστοιχες λειτουργίες θα είναι: **(α)** ο υπολογισμός των κωδικών λέξεων της κωδικοποίησης Huffman χρησιμοποιώντας ένα αλφάβητο εισόδου καθώς και τις αντίστοιχες πιθανότητες (συνάρτηση `huffmandict`), **(β)** η συμπίεση/κωδικοποίηση μιας ακολουθίας από σύμβολα σε δυαδικά ψηφία (συνάρτηση `huffmanenco`) και **(γ)** η αποσυμπίεση/αποκωδικοποίηση μιας δυαδικής ακολουθίας σε σύμβολα (συνάρτηση `huffmandeco`). Επισημαίνεται πως δεν επιτρέπεται η χρήση των έτοιμων συναρτήσεων που παρέχει το MATLAB.
- Να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις που αναπτύξατε στο προηγούμενο ερώτημα και τις πιθανότητες των συμβόλων της πηγής A, για να κωδικοποιήσετε τόσο την πηγή A (δημιουργήστε 10.000 τυχαίους χαρακτήρες)

όσο και την πηγή B. Να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της αποκωδικοποίησης και να σχολιάσετε το μήκος της κωδικοποίησης για κάθε πηγή.

- Να κωδικοποιήσετε την πηγή B, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά πιθανότητες συμβόλων τις οποίες θα εκτιμήσετε από το αρχείο kwords.txt το οποίο σας δίνεται. Σχολιάστε το μήκος της κωδικοποίησης που προκύπτει αυτή τη φορά.
- Να θεωρήσετε τη δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής A, να υπολογίσετε τις πιθανότητες εμφάνισης κάθε ζεύγους από χαρακτήρες και να κωδικοποιήσετε 5.000 ζεύγη χαρακτήρων της πηγής A. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τη θεωρία και με τα αποτελέσματα του παραπάνω ερωτήματος.
- Να κωδικοποιήσετε την πηγή B, τόσο με τις πιθανότητες των ζευγών χαρακτήρων του προηγούμενου ερωτήματος, όσο και με πιθανότητες για ζεύγη χαρακτήρων τις οποίες θα εκτιμήσετε από το ίδιο το αρχείο. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Πηγές

Για να αξιολογήσουμε τη δυνατότητα συμπίεσης/κωδικοποίησης των τεχνικών που θα μελετήσουμε στο πλαίσιο της παρούσας άσκησης, θεωρούμε τις ακόλουθες πηγές:

Πηγή A: Η πηγή A θεωρούμε πως είναι μια τεχνητή πηγή, και πιο συγκεκριμένα μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη που παράγει πεζούς χαρακτήρες του Αγγλικού αλφάβητου με βάση συγκεκριμένες πιθανότητες. Για τις πιθανότητες της πηγής μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τιμές που δίνονται σε αυτό το σύνδεσμο. Στο MATLAB, μπορείτε εύκολα να δημιουργήσετε μια τυχαία πηγή χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `randsrc`.

Πηγή B: Η πηγή B είναι ένα αρχείο το οποίο δίνεται και το οποίο περιέχει 3.857 Αγγλικές λέξεις οι οποίες ξεκινούν από το χαρακτήρα `k`.

Μέρος Β

Κωδικοποίηση

Διακριτής Πηγής με τη μέθοδο DPCM

1.Εισαγωγή

Η κωδικοποίηση **DPCM** (**Differential Pulse Code Modulation**) μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της κωδικοποίησης Δέλτα όπου το σήμα που κβαντίζεται και αποστέλλεται στο δέκτη είναι η διαφορά ανάμεσα στο τρέχον δείγμα (της χρονικής στιγμής n) και σε μία γραμμική πρόβλεψή του. Δηλαδή, στην κωδικοποίηση DPCM, υπολογίζουμε, σε κάθε χρονική στιγμή, μια πρόβλεψη για την τιμή του τρέχοντος δείγματος με βάση τις τιμές προηγούμενων δειγμάτων τα οποία έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια υπολογίζουμε το λάθος της πρόβλεψης αυτής. Το σήμα σφάλματος πρόβλεψης στη συνέχεια κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα δυαδικά ψηφία ανά δείγμα.

2.Κωδικοποίηση DPCM

Ο κωδικοποιητής και ο αποκωδικοποιητής ενός συστήματος DPCM παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Προκειμένου να κωδικοποιήσουμε την τιμή του τρέχοντος δείγματος υπολογίζουμε αρχικά μια πρόβλεψη για την τιμή του βασισμένοι σε κωδικοποιημένες τιμές προηγούμενων δειγμάτων. Η πρόβλεψη του σήματος $x(n)$ συμβολίζεται ως $y'(n)$. Στο Σχήμα παρατηρούμε μια διάταξη μνήμης (τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη) η οποία κρατάει αποθηκευμένες τις ανακατασκευασμένες τιμές των προηγούμενων δειγμάτων με βάση τις οποίες θα υπολογιστεί η πρόβλεψη της τιμής του τρέχοντος δείγματος. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά του σήματος σφάλματος $y(n) = x(n) - y'(n)$ έτσι ώστε αυτό να παρουσιάζει μικρή δυναμική περιοχή και να μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από μικρό αριθμό δυαδικών ψηφίων. Η διαδικασία της κβάντισης του σήματος σφάλματος $y(n)$ οδηγεί στο σήμα $\hat{y}(n)$ το οποίο και αποστέλλεται στο δέκτη.

Στο δέκτη, το σήμα $\hat{y}(n)$ συνδυάζεται με το σήμα $y'(n)$ (την πρόβλεψη του $x(n)$). Δεδομένου ότι οι προηγούμενα ανακατασκευασμένες τιμές καθώς και η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιεί ο πομπός είναι γνωστές στο δέκτη, συνεπάγεται ότι ο

πομπός και ο δέκτης είναι σε θέση να υπολογίσουν ακριβώς τις ίδιες τιμές για την πρόβλεψη $y'(n)$. Όπως και στην περίπτωση της κωδικοποίησης Δέλτα, έτσι και εδώ ο πομπός συμπεριλαμβάνει ως τμήμα του τη διάταξη του δέκτη η οποία υπολογίζει την ανακατασκευή $\hat{x}(n)$. Τις τιμές αυτές χρησιμοποιεί ο πομπός για να υπολογίσει την πρόβλεψη, και όχι τις πραγματικές τιμές $x(n)$, με σκοπό να μιμηθεί πλήρως τη διάταξη του δέκτη η οποία φυσικά δεν γνωρίζει τις πραγματικές τιμές. Χρησιμοποιώντας τις ανακατασκευασμένες τιμές για τον υπολογισμό της πρόβλεψης και στη συνέχεια του σφάλματος πρόβλεψης, εξασφαλίζουμε (όπως στην περίπτωση της κωδικοποίησης δέλτα) πως δεν έχουμε συσσώρευση του σφάλματος κβάντισης.

Στην απλή περίπτωση, όπου βασιζόμαστε μόνο στην πρόβλεψη του προηγούμενου δείγματος, οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος **DPCM** του Σχήματος 1 είναι οι ακόλουθες:

$$y(n) = x(n) - y'(n)$$

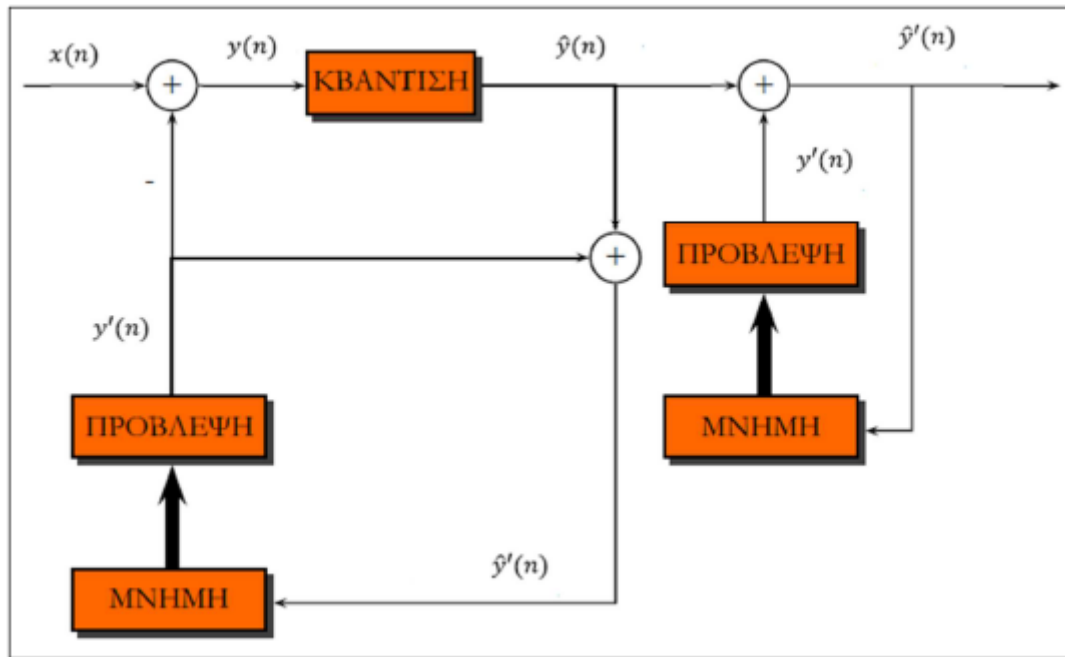
$$\hat{y}(n) = Q(y(n))$$

$$y'(n) = \hat{y}(n) + y'(n)$$

Όπου $y'(n) = y'(n-1)$ στην περίπτωση χρήσης ενός προηγούμενου δείγματος και $Q(\cdot)$ είναι η συνάρτηση εισόδου-εξόδου του βαθμωτού κβαντιστή (ομοιόμορφου) που χρησιμοποιείται. Από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε για το σφάλμα κβάντισης την έκφραση:

$$y_Q(n) = \hat{x}(n) - x(n) = \hat{y}(n) - y(n)$$

Παρατηρούμε πως αν στις παραπάνω εξισώσεις θέσουμε $y'(n) = 0$ δηλαδή ένα σύστημα DPCM το οποίο δεν χρησιμοποιεί πρόβλεψη, τότε το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα απλό σύστημα κωδικοποίησης PCM.



Σχήμα 1.

3. Υπολογισμός του Φίλτρου Πρόβλεψης

Σε ένα γενικό σύστημα DPCM, η πρόβλεψη του δείγματος $x(n)$ δίνεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός p προηγούμενων τιμών $\hat{y}'(n-i)$ οι οποίες έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια έχουν ανακατασκευαστεί, δηλαδή:

$$y'(n) = \sum_{i=1}^p a_i \hat{y}'(n-i)$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_i με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανάμεσα στο εκάστοτε τρέχον δείγμα εισόδου και την πρόβλεψή του:

$$MSE = E[e^2(n)] = E \left[x(n) - \sum_{i=1}^p a_i \hat{y}'(n-i) \right]^2$$

Το παραπάνω κριτήριο ωστόσο, είναι δύσκολο να ελαχιστοποιηθεί αφού το MSE εξαρτάται από τους συντελεστές αλλά και από τον κβαντιστή που χρησιμοποιούμε. Επομένως, αποτελεί ένα μη-γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Για να ξεφύγουμε από αυτή τη δυσκολία, αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση την ποσότητα $\hat{y}'(n-i)$ με το $x(n-i)$ θεωρώντας πως, αφού το δεύτερο αποτελεί την κβαντισμένη εκδοχή του πρώτου, δεν κάνουμε μεγάλο σφάλμα.

Έτσι, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned}
 \widehat{MSE} &= E[e^2(n)] = E \left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right)^2 \right] \\
 \widehat{MSE} &= E \left[(x(n))^2 - 2x(n) \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \left(\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right)^2 \right] \\
 &= E \left[(x(n))^2 \right] - 2E \left[x(n) \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right] + E \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \right)^2 \right] \\
 &= E \left[(x(n))^2 \right] - 2 \sum_{k=1}^p a_i E[x(n)x(n-i)] + E \left[\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \sum_{j=1}^p a_j x(n-j) \right] \\
 &= E \left[(x(n))^2 \right] - 2 \sum_{k=1}^p a_i E[x(n)x(n-i)] + E \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j x(n-i) x(n-j) \right] \\
 &= E \left[(x(n))^2 \right] - 2 \sum_{k=1}^p a_i E[x(n)x(n-i)] + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j E[x(n-i)x(n-j)] \\
 &= R_x(0) - 2 \sum_{k=1}^p a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j R_x(i-j)
 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση του σφάλματος ως προς καθένα από τους συντελεστές a_i του φίλτρου πρόβλεψης και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές του φίλτρου, δηλαδή,

$$\frac{\partial \widehat{MSE}}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^p a_i R_x(i-j) = R_x(i), 1 \leq i, j \leq p$$

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad \text{ή} \quad \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$$

R: ο πίνακας αυτοσυσχέτισης διάστασης $\mathbf{p} \times \mathbf{p}$ του οποίου το (i, j) στοιχείο είναι το $R_x(i-j)$

r: διάνυσμα αυτοσυσχέτισης διάστασης $\mathbf{p} \times 1$ με στοιχείο i το $R_x(i)$

\mathbf{a} : διάνυσμα διάστασης $p \times 1$ με τους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης

R_x : η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$. Λύνοντας το παραπάνω σύνολο εξισώσεων **Yule-Walker**, βρίσκουμε τους βέλτιστους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης.

Επιπρόσθετα, για να αντιστοιχεί αυτό το στάσιμο σημείο στο ελάχιστο της συνάρτησης αρκεί ο πίνακας \mathbf{R} να είναι θετικά ορισμένος.

Οι στοχαστικές ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση μπορούν να εκτιμηθούν στατιστικά για μια ακολουθία εισόδου $x(n)$ διαστάσεων $1 \times N$ με βάση τις σχέσεις:

$$\hat{R}_x(i) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n)x(n-i), \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\hat{R}_x(i-j) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n-j)x(n-i), \quad 1 \leq i, j \leq p$$

Ο υπολογισμός του φίλτρου πρόβλεψης γίνεται στον πομπό, και στη συνέχεια οι συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης κβαντίζονται και αποστέλλονται στο δέκτη. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε πως και ο πομπός θα πρέπει να χρησιμοποιεί τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών του φίλτρου πρόβλεψης έτσι ώστε πομπός και δέκτης να λειτουργούν σε συμφωνία. Για να υπολογίσετε τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών, χρησιμοποιείτε τον ομοιόμορφο κβαντιστή που θα κατασκευάσετε, θέτοντας $N = 8$ bits και δυναμική περιοχή $[-2 \ 2]$.

4. Ομοιόμορφος Κβαντιστής

Επιπλέον, καλείστε να υλοποιήσετε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή N δυαδικών ψηφίων, δηλαδή 2^N επιπέδων ο οποίος θα κβαντίσει το σφάλμα πρόβλεψης το οποίο έχει μικρότερη δυναμική περιοχή σε σχέση με το σήμα εισόδου. Ο κβαντιστής συγκεκριμένα θα κβαντίζει κάθε δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ξεχωριστά και θα υλοποιηθεί ως συνάρτηση της Matlab.

$$\hat{y}(n) = \text{my_quantizer}(y(n), N, \text{min_value}, \text{max_value})$$

$y(n)$: το τρέχον δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ως είσοδος του κβαντιστή

N : ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων που θα χρησιμοποιηθούν

max_value : η μέγιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης

min_value : η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης

$\hat{y}(n)$: το κβαντισμένο δείγμα του τρέχοντος δείγματος του σφάλματος πρόβλεψης

Τα επίπεδα κβάντισης αναπαρίστανται με τους ακεραίους $1, 2, \dots, 2^N$ όπου το μεγαλύτερο θετικό

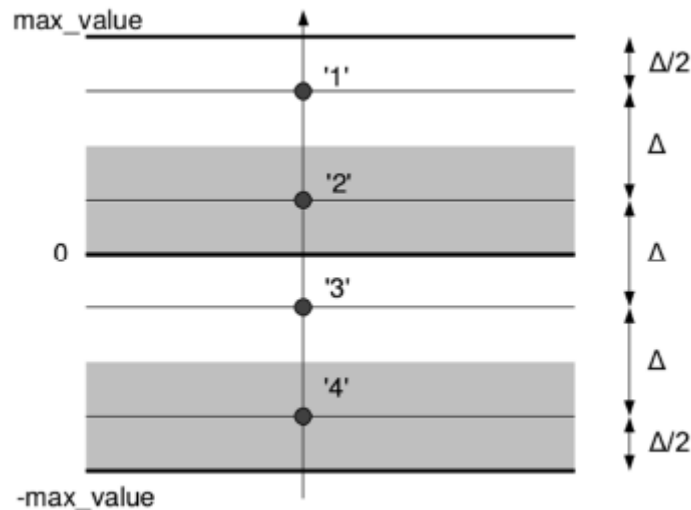
επίπεδο κβάντισης αντιστοιχεί στον ακέραιο 1. Οι ακέραιοι αυτοί μπορούν να αναπαρασταθούν δυαδικά με N δυαδικά ψηφία.

centers : διάνυσμα με τα κέντρα των περιοχών κβάντισης

Ειδικότερα, ο κβαντιστής θα πρέπει να περιορίζει τη δυναμική περιοχή του σφάλματος πρόβλεψης στις τιμές $[\text{min_value} : \text{max_value}]$, θέτοντας τα δείγματα που βρίσκονται εκτός δυναμικής περιοχής στην αντίστοιχη ακραία αποδεκτή τιμή. Στη συνέχεια, ο κβαντιστής υπολογίζει το βήμα κβαντισμού Δ , τα κέντρα της κάθε περιοχής, υπολογίζει σε ποια περιοχή ανήκει το δείγμα εισόδου, και βγάζει ως έξοδο το κωδικοποιημένο δείγμα $\hat{y}(n)$ ¹. Το δείγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί ως δείκτης στο διάνυσμα centers για να πάρουμε το κβαντισμένο δείγμα ως $\text{centers}(\hat{y}(n))$.

Ένα παράδειγμα των περιοχών κβάντισης για $N = 2$ bits φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

¹ Το κωδικοποιημένο δείγμα στην έξοδο του κβαντιστή θα παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 2^N , όσες είναι και οι περιοχές κβάντισης. Η κβαντισμένη έκδοση του δείγματος εξόδου θα λαμβάνει την τιμή του κέντρου κβάντισης της περιοχής στην οποία ανήκει το τρέχον δείγμα εισόδου.



Σχήμα 2.

5. Πηγή Εισόδου

Η πηγή που καλείστε να κωδικοποιήσετε/αποκωδικοποιήσετε είναι ένα σήμα 10.000 δειγμάτων. Τα δείγματα της πηγής με την οποία θα πειραματιστείτε παρουσιάζουν ικανοποιητική προβλεψιμότητα, δηλαδή ένα τρέχον δείγμα του μπορεί να προβλεφθεί (με τη στατιστική έννοια) με μικρό σφάλμα πρόβλεψης συνδυάζοντας προηγούμενες τιμές του ιδίου σήματος. Τα δείγματα της πηγής με την οποία θα πειραματιστείτε βρίσκονται αποθηκευμένα στο αρχείο με όνομα `source.mat`. Για να ανακτήσετε τα δεδομένα εισόδου αρκεί να πληκτρολογήσετε:

```
>> load source.mat
```

Ερωτήματα – Μέρος Β

Στα πειράματα που θα εκτελέσετε, η δυναμική περιοχή του κβαντιστή να είναι μεταξύ των τιμών

$max_value = 3.5$, $min_value = -3.5$.

1. Να υλοποιήσετε το παραπάνω σύστημα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης *DPCM*.
2. Επιλέξτε δύο τιμές του $p \geq 4$ και για $N = 1, 2, 3$ bits σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα το αρχικό σήμα και το σφάλμα πρόβλεψης y . Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Τί παρατηρείτε;
3. Αξιολογήστε την απόδοσή του με γράφημα που να δείχνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης ως προς το N και για διάφορες τιμές του p . Συγκεκριμένα για

πλήθος δυαδικών ψηφίων $N = 1,2,3\text{bits}$ τα οποία χρησιμοποιεί ο ομοιόμορφος κβαντιστής για την κωδικοποίηση του σήματος πρόβλεψης και για τάξη προβλέπτη $p = 4:1:8$. Επιπλέον, για κάθε p καταγράψτε στην αναφορά σας και σχολιάστε τις τιμές των συντελεστών του προβλέπτη.

4. Για $N = 1,2,3\text{ bits}$ να απεικονίσετε το αρχικό και το ανακατασκευασμένο σήμα στο δέκτη για $p = 4 \text{ \& } 8$ και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα της ανακατασκευής σε σχέση με τα bits κβάντισης.

Σημείωση: Η διαδικασία εισόδου είναι κατασκευασμένη από μία Auto Regressive διαδικασία τάξης 4 για αυτό και η ελάχιστη τιμή της τάξης του προβλέπτη είναι 4. Αυτή είναι μικρότερη τιμή p ώστε να έχουμε να μπορούμε να εκτιμήσουμε καλά την τιμή ενός δείγματος από προβλέψεις προηγούμενων δειγμάτων.

Γενικές Πληροφορίες

- Η παρούσα άσκηση είναι ατομική και υποχρεωτική. Ο βαθμός στην άσκηση θα αντιστοιχεί στο 20% της τελικής βαθμολογίας (το υπόλοιπο 80% θα δίνεται από την τελική εξέταση).
- Η προθεσμία παράδοσης της άσκησης είναι η 7/1/2019.
- Οι απαντήσεις (αναφορές) θα πρέπει να υποβληθούν υποχρεωτικά μέσω του e-class (ενότητα «Εργασίες»). Επίσης, οι αναφορές θα πρέπει να παραδοθούν και εκτυπωμένες στη θυρίδα του μαθήματος (ΠΡΟΚΑΤ). Στο τέλος της αναφοράς, παραθέστε τον κώδικα που υλοποιήσατε. Το αρχείο της αναφοράς θα πρέπει να είναι σε μορφή pdf και να έχει ως όνομα τον αριθμό μητρώου σας. Για παράδειγμα αν η άσκηση έχει γίνει από τον φοιτητή με ΑΜ 1234 θα πρέπει το αρχείο να έχει όνομα 1234.pdf.
- Για να ανεβάσετε μια άσκηση θα πρέπει πρώτα να έχετε εγγραφεί στο μάθημα. Αν δεν είστε εγγεγραμμένοι στο μάθημα το σύστημα δεν θα σας αφήσει να ανεβάσετε την άσκηση. Η εγγραφή γίνεται από τις επιλογές που διατίθενται στο e-class.

- Τυχόν απορίες σχετικές με την άσκηση θα λύνονται μέσω του forum του μαθήματος. Επίσης, απορίες θα λύνονται και στο χώρο του Εργαστηρίου Σημάτων και Τηλεπικοινωνιών.