Лабораторная работа 03. Циклы. Индивидуальные задания

Вариант 1 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.

Образец: для n = 5

```
1----
12---
123--
1234-
12345
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла

S = cos(1) + cos(1+2) + cos(1+2+3) + ... + cos(1+2+...+n)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 \cos(x + x^3)dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \mathrm{arcsch}\,x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = -\ln\left|\frac{2}{x}\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^6}{6} + \ldots$$

для $-1 < x < 0$

5. Ввести n целых чисел. Число n запросить у пользователя

Вычислить и вывести

а) сумму чисел, заканчивающихся на 22

б) порядковые номера чисел, кратных 5

в) сумму чисел, начинающихся на 7

Вариант 2 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.

Образец: для n = 5

```
1----
21---
321--
4321-
54321
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла

S = $\sin^2$ (1) + $\sin^2$ (1+2) + $\sin^2$ (1+2+3) + ... + $\sin^2$ (1+2+...+n)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 e^{\sin x}dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \operatorname{arctgx} = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots\right]$$

5. Ввести n целых чисел. Число n запросить у пользователя Вычислить и вывести
а) сумму чисел, заканчивающихся на 22
б) порядковые номера чисел, кратных 5
в) сумму чисел, начинающихся на 44

Вариант 3 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5
```
5----
45---
345--
2345-
12345
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
S = cos(2) + cos(2+4) + cos(2+4+6) + ... + cos(2+4+6+...+2n)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 e^{\cos x}dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

5. Ввести n целых чисел. Число n запросить у пользователя Вычислить и вывести
а) сумму четных чисел
б) произведение чисел, начинающихся на 3
в) порядковые номера чисел, заканчивающихся на 55

Вариант 4 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5
```
12345
-1234
--123
---12
----1
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
S = sin(1) + sin(1+4) + sin(1+4+9) + ... + sin(1+4+...+n^2)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_1^2 \ln(x + x^2)dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) порядковые номера чисел, заканчивающихся на 2
б) произведение чисел, кратных 10 и 3
в) общее количество чисел, начинающихся на 22

Вариант 5 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5

```
12345
1234-
123--
12---
1----
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
S = sin(1) + sin(1+2) + sin(1+2+3) + ... + sin(1+2+...+n)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_1^2 x \sin x^{-3} dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = (1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot x^3 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{4!} \cdot x^4 + \ldots$$ для любого действительного *m* и $|x| < 1$

5. Ввести n целых чисел. Вычислить и вывести
а) произведение чисел, заканчивающихся на 1 или 9
б) количество чисел, начинающихся на 22
в) произведение чисел, начинающихся на 10

Вариант 6 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5

```
----5
---45
--345
-2345
12345
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
S = $\cos^2(1) + \cos^2(1+2) + \cos^2(1+2+3) + \ldots + \cos^2(1+2+\ldots+n)$
n считать известным.

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+X}} = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}X^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}X^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}X^4 - \ldots,$$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) сумму чисел, заканчивающихся на 3 и 4
б) произведение чисел, делящихся на 5 но не делящихся на 3
в) количество чисел, начинающихся на 1

Вариант 7 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5
```
----1
---12
--123
-1234
12345
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
S = sin(1) + sin(1+3) + sin(1+3+5) + ... + sin(1+3+5+...+(2n+1))

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

1. Вычислить приближенное значение функции $\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$S = 1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}X^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}X^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}X^8 + \ldots,$$

5. Ввести n целых чисел. Вычислить и вывести
а) сумму чисел, заканчивающихся на 12
б) произведение чисел, кратных трем
в) порядковые номера чисел, начинающихся на 7

Вариант 8 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5
```
54321
4321-
321--
21---
```

```
1----
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя один циклический оператор

$$S = 1 + \frac{1}{\sin(1)} + \frac{1}{\sin(1)+\sin(2)} + \frac{1}{\sin(1)+\sin(2)+\sin(3)} + \ldots + \frac{1}{\sin(1)+\sin(2)+\ldots+\sin(n)}$$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 \cos(\cos x)dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \mathrm{arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln\frac{2}{x} + \frac{1\cdot x^2}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2\cdot 4\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6} - \ldots$$

для $0 < x < 1$

5. Ввести n целых чисел. Вычислить и вывести
а) сумму чисел, начинающихся на 100
б) количество чисел, делящихся на 7 без остатка
в) порядковые номера чисел начинающихся на 11

Вариант 9 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5

```
54321
-4321
--321
---21
----1
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя не более одного цикла
$S = \cos(1) + \cos(1+4) + \cos(1+4+9) + \ldots + \cos(1+4+\ldots+n^2)$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_1^2 \cos(x\sqrt{x})dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \mathrm{arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots$$

для $|x| > 1$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) сумму четных чисел
б) произведение чисел, состоящих из двух цифр
в) порядковые номера чисел начинающихся на 2

Вариант 10 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5

```
12345
2345-
345--
45---
5----
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя один циклический оператор

$$S = \frac{1}{\cos(1)} + \frac{1}{\cos(1)+\cos(2)} + \frac{1}{\cos(1)+\cos(2)+\cos(3)} + \ldots + \frac{1}{\cos(1)+\cos(2)+\ldots+\cos(n)}$$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x+x^2)dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln(2x) + \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots$$

для $x > 1$

5. Ввести n целых чисел. Вычислить и вывести
а) порядковые номера чисел, заканчивающихся на 9 или 8
б) общее количество чисел, кратных 6
в) сумму чисел, начинающихся на 3

Вариант 11 (массивы не использовать)
1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.
Образец: для n = 5

```
----1
---21
--321
-4321
54321
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя один циклический оператор

$$S = \frac{1}{\sin(2)} + \frac{1}{\sin(2)+\sin(4)} + \frac{1}{\sin(2)+\sin(4)+\sin(6)} + \ldots + \frac{1}{\sin(2)+\sin(4)+\ldots+\sin(2n)}$$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^2}dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -\ln|2x| - \frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \ldots$$

для $x < -1$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) количество чисел кратных 5
б) сумму чисел, начинающихся на 7

в) произведение чисел из трех цифр

Вариант 12 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.

Образец: для n = 5

```
54321
5432-
543--
54---
5----
```

2. Дано целое число n. Вычислить, используя один циклический оператор

$$S = 1 + \frac{1}{\cos(1)} + \frac{1}{\cos(1)+\cos(3)} + \frac{1}{\cos(1)+\cos(3)+\cos(5)} + \ldots + \frac{1}{\cos(1)+\cos(3)+\ldots+\cos(2n+1)}$$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^{\pi/2} \sqrt{3-\sin x}\,dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

для $|x| \le 1$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести

а) сумму чисел, заканчивающихся на 1

б) порядковые номера чисел, кратных 9

в) произведение чисел, начинающихся на 2 и 3

Вариант 13 (массивы не использовать)

1. Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.

Образец: для n = 5

```
5----
54---
543--
5432-
54321
```

2. Дано целое число n. Вычислить сумму (функции pow для возведения в степень не использовать)

$$z = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{20}}{20!} = 1 + \sum_{i=1}^{10} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \arcsin x = arctg(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

для $|x| < 1$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) сумму чисел, заканчивающихся на 7
б) количество чисел, кратных 8
в) произведение чисел, начинающихся на 13

Вариант 14 (массивы не использовать)

1 . Написать программу, выводящую на консоль n строк, заполненных символами по схеме, приведенной в образце.

Образец: для n = 5

```
12345
-2345
--345
---45
----5
```

2. Дано целое число n. Вычислить
P = cos(7)+cos(14)+cos(21)+cos(28)+ ... +cos(7n)

3. Написать программу вычисления интеграла $\int_4^{10} \frac{x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже 10^{-2}.

4. Вычислить приближенное значение функции с точностью *eps*. Использовать формулу разложения функции в ряд. Проверить результат, используя подходящие функции класса Math.

$$y = \ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3\cdot(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5\cdot(x+1)^5} + \ldots\right] \qquad \text{для } x > 0$$

5. Ввести n целых чисел (массивы не использовать). Вычислить и вывести
а) сумму чисел, заканчивающихся на 15
б) количество чисел, кратных 3 и 5
в) произведение чисел, начинающихся на 3

Справочный материал

Метод прямоугольников http://www.cleverstudents.ru/integral/method_of_rectangles.html

Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница не всегда возможно. Многие подынтегральные функции не имеют первообразных в виде элементарных функций, поэтому мы во многих случаях не можем найти точное значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. С другой стороны, точное значение не всегда и нужно. На практике нам часто достаточно знать приближенное значение определенного интеграла с некоторой заданной степенью точности (например, с точностью до одной тысячной). В этих случаях нам на помощь приходят методы численного интегрирования, такие как метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона (парабол) и т.п.

В этой статье подробно разберем **метод прямоугольников** для приближенного вычисления определенного интеграла.

Сначала остановимся на сути этого метода численного интегрирования, выведем формулу прямоугольников и получим формулу для оценки абсолютной погрешности метода. Далее по такой же схеме рассмотрим модификации метода прямоугольников, такие как метод правых прямоугольников и метод левых прямоугольников. В заключении рассмотрим подробное решение характерных примеров и задач с необходимыми пояснениями.

Суть метода прямоугольников.

Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b]. Нам требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Обратимся к понятию определенного интеграла. Разобьем отрезок [a;b] на n частей $[x_{i-1}; x_i], \quad i=1,2,\ldots,n$ точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i], \quad i=1,2,\ldots,n$ выберем точку ξ_i. Так как по определению определенный интеграл есть предел интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка разбиения $\lambda=\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}(x_i-x_{i-1})\to 0$, то любая из интегральных сумм является приближенным значением интеграла $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$.

Суть метода прямоугольников заключается в том, что в качестве приближенного значения определенного интеграла берут интегральную сумму (далее мы покажем, какую именно интегральную сумму берут в методе прямоугольников).

Метод средних прямоугольников.

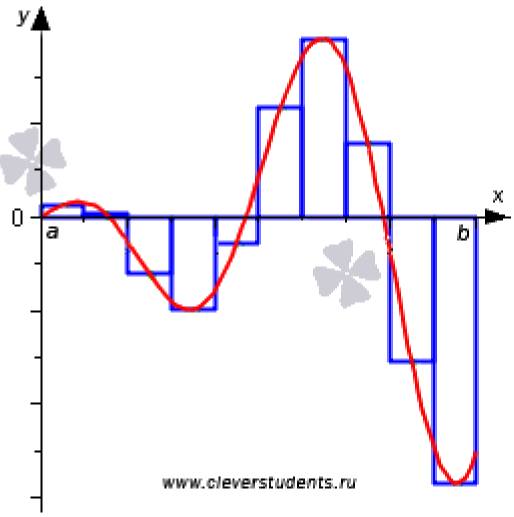
Формула метода средних прямоугольников.

Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на РАВНЫЕ части длины h точками $a=x_0, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h,\ldots,x_{n-1}=x_0+(n-1)h, x_n=x_0+nh=b$ (то есть $h=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}, \quad i=1,2,\ldots,n$) и в качестве точек ξ_i выбрать СЕРЕДИНЫ элементарных отрезков

$\left[x_{i-1}; x_i\right], \quad i=1,2,\ldots,n$ (то есть $\xi_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}, \quad i=1,2,\ldots,n$), то приближенное равенство $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$ можно записать в виде $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)}$. Это и есть **формула метода прямоугольников**. Ее еще называют формулой средних прямоугольников из-за способа выбора точек ξ_i.

$h = \frac{b-a}{n}$ называют **шагом разбиения отрезка** [a;b].

Приведем графическую иллюстрацию метода средних прямоугольников.

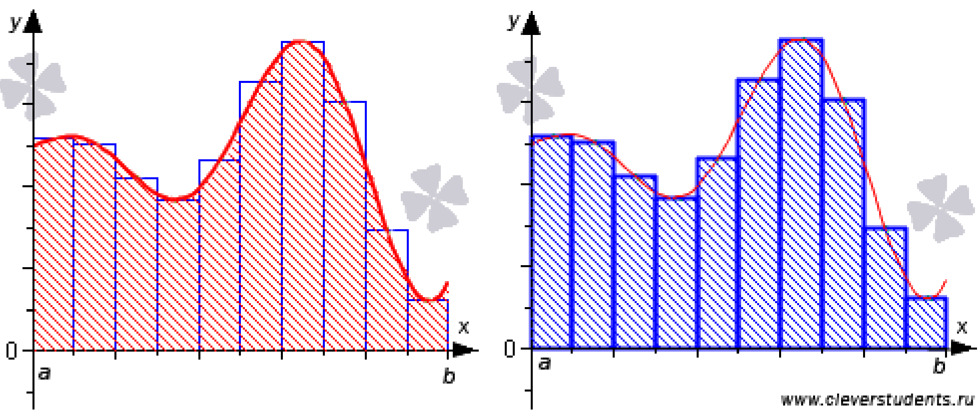


Из чертежа видно, что подынтегральная функция y=f(x) приближается кусочной ступенчатой функцией

$$y = \begin{cases} f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), & x \in \left[x_0; x_1\right) \\ f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), & x \in \left[x_1; x_2\right) \\ \ldots \\ f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right), & x \in \left[x_{n-1}; x_n\right] \end{cases}$$

на отрезке интегрирования.

С геометрической точки зрения для неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b] точное значение определенного интеграла представляет собой площадь криволинейной трапеции, а приближенное значение по методу прямоугольников – площадь ступенчатой фигуры.



Оценка абсолютной погрешности метода средних прямоугольников.

Перейдем к оценке абсолютной погрешности метода прямоугольников. Сначала оценим погрешность на элементарном интервале. Погрешность метода прямоугольников в целом будет равна сумме абсолютных погрешностей на каждом элементарном интервале.

На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i], \quad i=1,2,\dots,n$ имеем приближенное равенство $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot h = f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$. Абсолютную погрешность метода прямоугольников δ_i на i-ом отрезке вычисляем как разность между точным и приближенным значением определенного интеграла: $\delta_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$. Так как $f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$ есть некоторое число и $x_i - x_{i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx$, то выражение $f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$ в силу четвертого свойства определенного интеграла можно записать как $f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)dx$. Тогда абсолютная погрешность формулы прямоугольников на i-ом элементарном отрезке будет иметь следующий вид

$$\delta_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x) - f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)dx$$

Если считать, что функция y = f(x) имеет в точке $\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$ и некоторой ее окрестности производные до второго порядка включительно, то функцию y = f(x) можно разложить в *ряд Тейлора* по степеням $\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right) + f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right) +$$
$$+ f''(\varepsilon_i)\cdot\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$f(x) - f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right) = f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right) +$$
$$+ f''(\varepsilon_i)\cdot\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2}$$

По свойствам определенного интеграла равенства можно интегрировать почленно:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)dx+$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}f''(\varepsilon_i)\cdot\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2}dx=$$

$$=f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left.\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2}\right|_{x_{i-1}}^{x_i}+f''(\varepsilon_i)\cdot\left.\frac{\left(x-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^3}{6}\right|_{x_{i-1}}^{x_i}=$$

$$=f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\left(x_i-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2}-\frac{\left(x_{i-1}-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2}\right)+$$

$$+f''(\varepsilon_i)\cdot\left(\frac{\left(x_i-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^3}{6}-\frac{\left(x_{i-1}-\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)^3}{6}\right)=$$

$$=f'\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\frac{h^2}{8}-\frac{h^2}{8}\right)+f''(\varepsilon_i)\cdot\left(\frac{h^3}{48}+\frac{h^3}{48}\right)=\frac{f''(\varepsilon_i)\cdot h^3}{24}$$

где $\varepsilon_i\in[x_{i-1};x_i]$.

Таким образом, $\delta_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)dx=\frac{f''(\varepsilon_i)\cdot h^3}{24}$ и $|\delta_i|\le\max\limits_{x\in[x_{i-1};\,x_i]}|f''(x)|\cdot\frac{h^3}{24}$.

Абсолютная погрешность формулы прямоугольников на отрезке [a; b] равна сумме погрешностей на каждом элементарном интервале, поэтому

$\delta_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)\right)dx$ и $\boxed{|\delta_n|\le\max\limits_{x\in[a;\,b]}|f''(x)|\cdot\frac{n\cdot h^3}{24}=\max\limits_{x\in[a;\,b]}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2}}$.

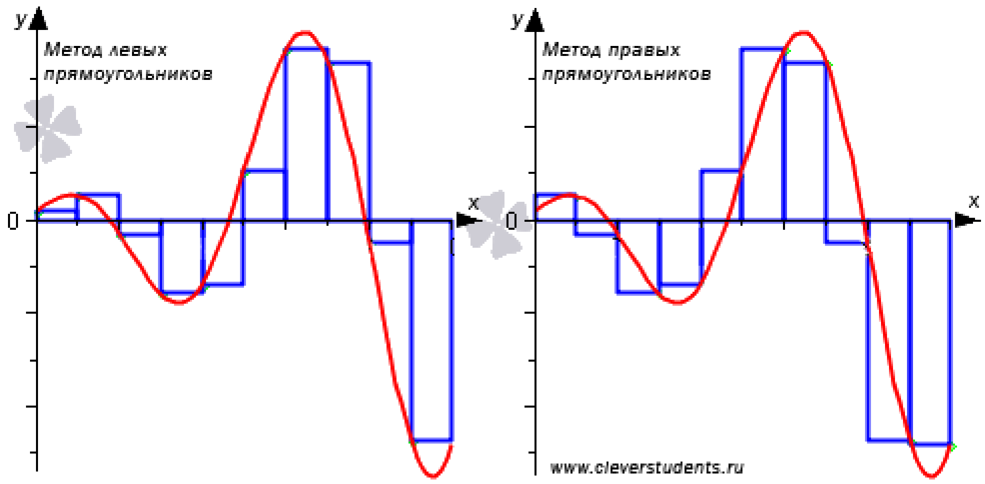
Полученное неравенство представляет собой **оценку абсолютной погрешности метода прямоугольников**.

Метод левых прямоугольников и метод правых прямоугольников.

Перейдем к модификациям метода прямоугольников.

$\boxed{\int_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)}$ - это **формула метода левых прямоугольников**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$ - это **формула метода правых прямоугольников**.



Отличие от метода средних прямоугольников заключается в выборе точек ξ_i не в середине, а на левой и правой границах элементарных отрезков соответственно.

Абсолютная погрешность методов левых и правых прямоугольников оценивается как

$$|\delta_n| \le \max_{x\in[a\,;\,b]} |f'(x)| \cdot \frac{h^2 \cdot n}{2} = \max_{x\in[a\,;\,b]} |f'(x)| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Примеры применения метода прямоугольников при приближенном вычислении определенных интегралов.

Перейдем к решению примеров, в которых требуется вычислить приближенное значение определенного интеграла методом прямоугольников.

В основном, встречаются два типа задач. В первом случае задается количество интервалов, на которые разбивается отрезок интегрирования. Во втором случае задается допустимая абсолютная погрешность.

Формулировки задач примерно следующие:

- вычислить приближенно определенный интеграл методом прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на n частей;
- Методом прямоугольников найти приближенное значение определенного интеграла с точностью до одной сотой (одной тысячной и т.п.).

Разберем каждый случай.

Сразу оговоримся, что в примерах подынтегральные функции будем брать такие, чтобы можно было найти их первообразные. В этом случае мы сможем вычислить точное значение определенного интеграла и сравнить его с приближенным значением, полученным по методу прямоугольников.

Пример.

Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{x^2 \sin x}{10} dx$ методом прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение.

В нашем примере a = 4, b = 9, n = 10, $f(x)=\frac{x^2\sin x}{10}$.

Внимательно посмотрим на формулу прямоугольников $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)}$.

Чтобы ее применить, нам нужно вычислить шаг h и значения функции $f(x)=\frac{x^2\sin x}{10}$ в точках $\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right),\quad i=1,2,\ldots,10$.

Вычислим шаг: $h=\frac{b-a}{n}=\frac{9-4}{10}=0.5$.

Так как $x_{i-1}=a+(i-1)\cdot h,\quad i=1,\ldots,10$, то $\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)=a+(i-1)\cdot h+\frac{h}{2}=a+(i-0.5)\cdot h,\quad i=1,\ldots,10$.

Для i = 1 имеем $x_{i-1}+\frac{h}{2}=x_0+\frac{h}{2}=a+(i-0.5)\cdot h=4+(1-0.5)\cdot 0.5=4.25$. Находим соответствующее значение функции $f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)=f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=f(4.25)=\frac{(4.25)^2\sin(4.25)}{10}\approx -1.616574$.

Для i = 2 имеем $x_{i-1}+\frac{h}{2}=x_1+\frac{h}{2}=a+(i-0.5)\cdot h=4+(2-0.5)\cdot 0.5=4.75$. Находим соответствующее значение функции $f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)=f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)=f(4.75)=\frac{(4.75)^2\sin(4.75)}{10}\approx -2.254654$.

И так продолжаем вычисления до i = 10.

Для удобства представим результаты в виде таблицы.

i	1	2	3	4	5
$x_{i-1}+\frac{h}{2}$	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25
$f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$	-1.616574	-2.254654	-2.367438	-1.680497	- 0.129606

i	6	7	8	9	10
$x_{i-1}+\frac{h}{2}$	6.75	7.25	7.75	8.25	8.75
$f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$	2.050513	4.326318	5.973808	6.279474	4.783042

Подставляем полученные значения в формулу прямоугольников:

$$\int_4^9 \frac{x^2 \sin x}{10} dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -1.616574 - 2.254654 - 2.367438 - 1.680497 - 0.129606 + \\ + 2.050513 + 4.326318 + 5.973808 + 6.279474 + 4.783042 \end{pmatrix} =$$

$$= 7.682193$$

Значение исходного определенного интеграла можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_4^9 \frac{x^2 \sin x}{10} dx = \left(-\frac{1}{10} x^2 \cos x + \frac{1}{5} x \sin x + \frac{1}{5} \cos x\right)\Bigg|_4^9 =$$

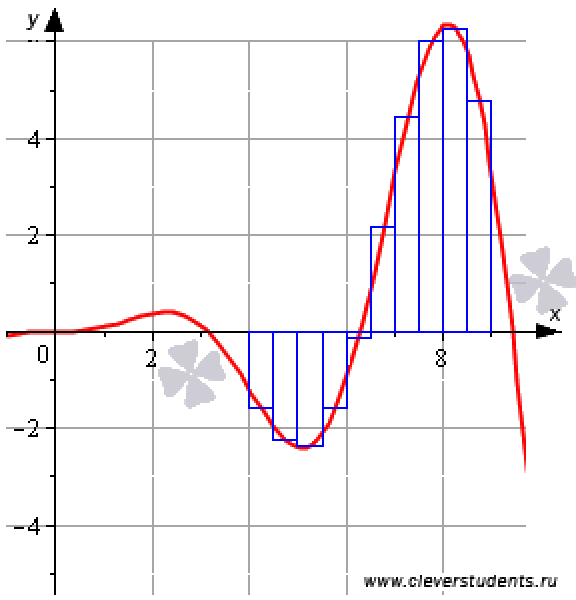
$$= \frac{7}{5} \cos 4 - \frac{4}{5} \sin 4 - \frac{79}{10} \cos 9 + \frac{9}{5} \sin 9 \approx 7.630083$$

.

Первообразная $-\frac{1}{10} x^2 \cos x + \frac{1}{5} x \sin x + \frac{1}{5} \cos x$ подынтегральной функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$ была найдена интегрированием по частям.

Как видите, точное значение определенного интеграла отличается от значения, полученного по методу прямоугольников для n = 10, менее чем на шесть сотых долей единицы.

Графическая иллюстрация.



Пример.

Вычислите приближенное значение определенного интеграла $\int_1^2 (-0.03x^3 + 0.26x - 0.26) dx$ методами левых и правых прямоугольников с точностью до одной сотой.

Решение.

По условию имеем a = 1, b = 2, $f(x) = -0.03x^3 + 0.26x - 0.26$.

Чтобы применить формулы правых и левых прямоугольников нам необходимо знать шаг h, а чтобы вычислить шаг h необходимо знать на какое число отрезков n разбивать отрезок интегрирования. Так как в условии задачи нам указана точность вычисления 0.01, то число n мы можем найти из оценки абсолютной погрешности методов левых и правых прямоугольников.

Нам известно, что $\left|\delta_n\right| \le \max\limits_{x\in[a\,;\,b]}\left|f'(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}$. Следовательно, если найти n, для которого будет выполняться неравенство $\max\limits_{x\in[a\,;\,b]}\left|f'(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \le 0.01$, то будет достигнута требуемая степень точности.

Найдем $\max\limits_{x\in[1\,;\,2]}\left|f'(x)\right|$ - наибольшее значение модуля первой производной подынтегральной функции $f(x) = -0.03x^3 + 0.26x - 0.26$ на отрезке [1; 2]. В нашем примере это сделать достаточно просто.

$$f'(x) = \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)' = -0.09x^2 + 0.26$$

Графиком функции производной подынтегральной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, на отрезке [1; 2] ее график монотонно убывает. Поэтому достаточно вычислить модули значения производной на концах отрезка и выбрать наибольшее:

$$\left|f'(1)\right| = \left|-0.09\cdot 1^2 + 0.26\right| = 0.17$$

$$\left|f'(2)\right| = \left|-0.09\cdot 2^2 + 0.26\right| = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{x\in[1\,;\,2]}\left|f'(x)\right| = 0.17$$

В примерах со сложными подынтегральными функциями Вам может потребоваться теория раздела [наибольшее и наименьшее значение функции].

Таким образом:

$$\max\limits_{x\in[a\,;\,b]}\left|f'(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \le 0.01 \quad \Leftrightarrow$$

$$0.17\cdot\frac{(2-1)^2}{2n} \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0.085}{n} \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 8.5$$

Число n не может быть дробным (так как n – натуральное число – количество отрезков разбиения интервала интегрирования). Поэтому, для достижения точности 0.01 по методу правых или левых прямоугольников, мы можем брать любое n = 9, 10, 11, … Для удобства расчетов возьмем n = 10.

Формула левых прямоугольников имеет вид $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\cdot\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$, а правых прямоугольников $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}$. Для их применения нам требуется найти h и $f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$ для n = 10.

Итак, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$

Точки разбиения отрезка [a; b] определяются как $x_i = a + i\cdot h, \quad i = 0, 1, \ldots, n$.

Для i = 0 имеем $x_i = x_0 = a + i \cdot h = 1 + 0 \cdot 0.1 = 1$ и
$f(x_i) = f(x_0) = f(1) = -0.03 \cdot 1^3 + 0.26 \cdot 1 - 0.26 = -0.03$.

Для i = 1 имеем $x_i = x_1 = a + i \cdot h = 1 + 1 \cdot 0.1 = 1.1$ и
$f(x_i) = f(x_1) = f(1.1) = -0.03 \cdot (1.1)^3 + 0.26 \cdot (1.1) - 0.26 = -0.01393$.

И так далее до i = 10.

Полученные результаты удобно представлять в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x_i)$	-0.03	-0.01393	0.00016	0.01209	0.02168	0.02875

i	6	7	8	9	10
x_i	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x_i)$	0.03312	0.03461	0.03304	0.02823	0.02

Подставляем в формулу левых прямоугольников:

$$\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) =$$

$$= 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.03 - 0.01393 + 0.00016 + 0.01209 + 0.02168 + \\ +0.02875 + 0.03312 + 0.03461 + 0.03304 + 0.02823 \end{pmatrix} =$$

$$= 0.014775$$

Подставляем в формулу правых прямоугольников:

$$\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) =$$

$$= 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.01393 + 0.00016 + 0.01209 + 0.02168 + 0.02875 + \\ +0.03312 + 0.03461 + 0.03304 + 0.02823 + 0.02 \end{pmatrix} =$$

$$= 0.019775$$

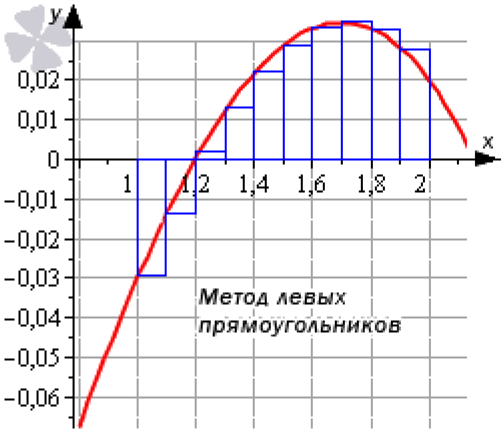
Вычислим точное значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница:

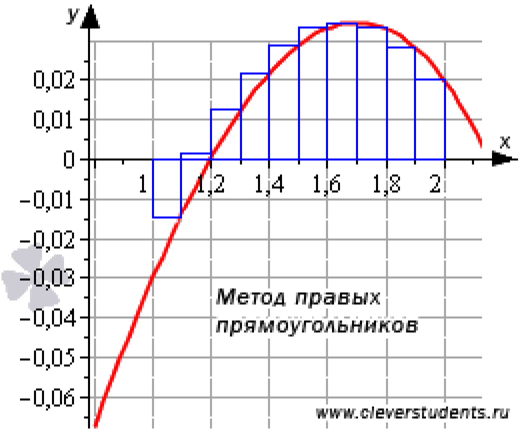
$$\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx =$$

$$= \left(\frac{-0.03x^4}{4} + 0.13x^2 - 0.26x\right)\Bigg|_1^2 = 0.0175$$

Очевидно, точность в одну сотую соблюдена.

Графическая иллюстрация.





Замечание.

Во многих случаях нахождение наибольшего значения модуля первой производной (или второй производной для метода средних прямоугольников) подынтегральной функции на отрезке интегрирования является очень трудоемкой процедурой.

Поэтому можно действовать без использования неравенства для оценки абсолютной погрешности методов численного интегрирования. Хотя оценки предпочтительнее.

Для методов правых и левых прямоугольников можно использовать следующую схему.

Берем произвольное n (например, n = 5) и вычисляем приближенное значение интеграла. Далее удваиваем количество отрезков разбиения интервала интегрирования, то есть, берем n = 10, и вновь вычисляем приближенное значение определенного интеграла. Находим разность полученных приближенных значений для n = 5 и n = 10. Если абсолютная величина этой разности не превышает требуемой точности, то в качестве приближенного значения определенного интеграла берем значение при n = 10, предварительно округлив его до порядка точности. Если же абсолютная величина разности превышает требуемую точность, то вновь удваиваем n и сравниваем приближенные значения интегралов для n = 10 и n = 20. И так продолжаем до достижения требуемой точности.

Для метода средних прямоугольников действуем аналогично, но на каждом шаге вычисляем треть модуля разности полученных приближенных значений интеграла для n и 2n. Этот способ называют правилом Рунге.

Вычислим определенный интеграл из предыдущего примера с точностью до одной тысячной по методу левых прямоугольников.

Не будем подробно останавливаться на вычислениях.

Для n = 5 имеем $\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx \approx 0.0116$, для n = 10 имеем $\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx \approx 0.014775$.

Так как $\left|0.0116 - 0.014775\right| = 0.003175 > 0.001$, тогда берем n = 20. В этом случае $\int_1^2 \left(-0.03x^3 + 0.26x - 0.26\right)dx \approx 0.01619375$.

Так как $\left|0.014775-0.01619375\right|=0.00141875>0.001$, тогда берем n = 40. В этом случае $\int_1^2\left(-0.03x^3+0.26x-0.26\right)dx\approx 0.01686093$.

Так как $\left|0.01619375-0.01686093\right|=0.00066718<0.001$, то, округлив 0.01686093 до тысячных, утверждаем, что значение определенного интеграла $\int_1^2\left(-0.03x^3+0.26x-0.26\right)dx$ равно 0.017 с абсолютной погрешностью 0.001.

В заключении остановимся на погрешности методов левых, правых и средних прямоугольников более детально.

Из оценок абсолютных погрешностей видно, что метод средних прямоугольников даст большую точность, чем методы левых и правых прямоугольников для заданного n. В то же время, объем вычислений одинаков, так что использование метода средних прямоугольников предпочтительнее.

Если говорить о непрерывных подынтегральных функциях, то при бесконечном увеличении числа точек разбиения отрезка интегрирования приближенное значение определенного интеграла теоретически стремиться к точному. Использование методов численного интегрирования подразумевает использование вычислительной техники. Поэтому следует иметь в виду, что при больших n начинает накапливаться вычислительная погрешность.

Еще заметим, если Вам требуется вычислить определенный интеграл с некоторой точностью, то промежуточные вычисления проводите с более высокой точностью. Например, Вам требуется вычислить определенный интеграл с точностью до одной сотой, тогда промежуточные вычисления проводите с точностью как минимум до 0.0001.

Подведем итог.

При вычислении определенного интеграла методом прямоугольников (методом средних прямоугольников) пользуемся формулой $\boxed{\int_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)}$ и оцениваем абсолютную погрешность как $\boxed{\left|\delta_n\right|\le\max_{x\in[a;\,b]}\left|f''(x)\right|\cdot\frac{n\cdot h^3}{24}=\max_{x\in[a;\,b]}\left|f''(x)\right|\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2}}$.

Для метода левых и правых прямоугольников пользуемся формулами $\boxed{\int_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$ и $\boxed{\int_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$ соответственно. Абсолютную погрешность оцениваем как $\boxed{\left|\delta_n\right|\le\max_{x\in[a\,;\,b]}\left|f'(x)\right|\cdot\frac{h^2\cdot n}{2}=\max_{x\in[a\,;\,b]}\left|f'(x)\right|\cdot\frac{(b-a)^2}{2n}}$.