laboratorium5

April 13, 2023

1 Laboratorium 5

Piotr Kuchta, Sebastian Soczawa

Zadanie 1: Aproksymacja średniokwadratowa punktowa populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale [1900,1980] wielomianami stopnia m dla 0 m 6.

Na początku importujemy potrzebne biblioteki

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Implementujemy funkcję odpowiedzialna za tworzenie macierzy jednomianów.

[ ]:
```
def polynomial_matrix(x_values,pow):
    m = len(x_values)
    n = pow + 1
    matrix = np.empty(shape=(m,n))
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            matrix[i][j] = x_values[i]**j
    return matrix
```

Implementujemy funkcje pomocnicze obliczające wartość wielomianu, oraz błąd

[ ]:
```
def horner(x,c):
    result = 0
    for i in range(len(c)-1,-1,-1):
        result = (result*x) + c[i]
    return result

def sqdiff(real,calculated):
    sum = 0
    for yr,yc in zip(real,calculated):
        sum += (yr-yc)**2
    return sum
```

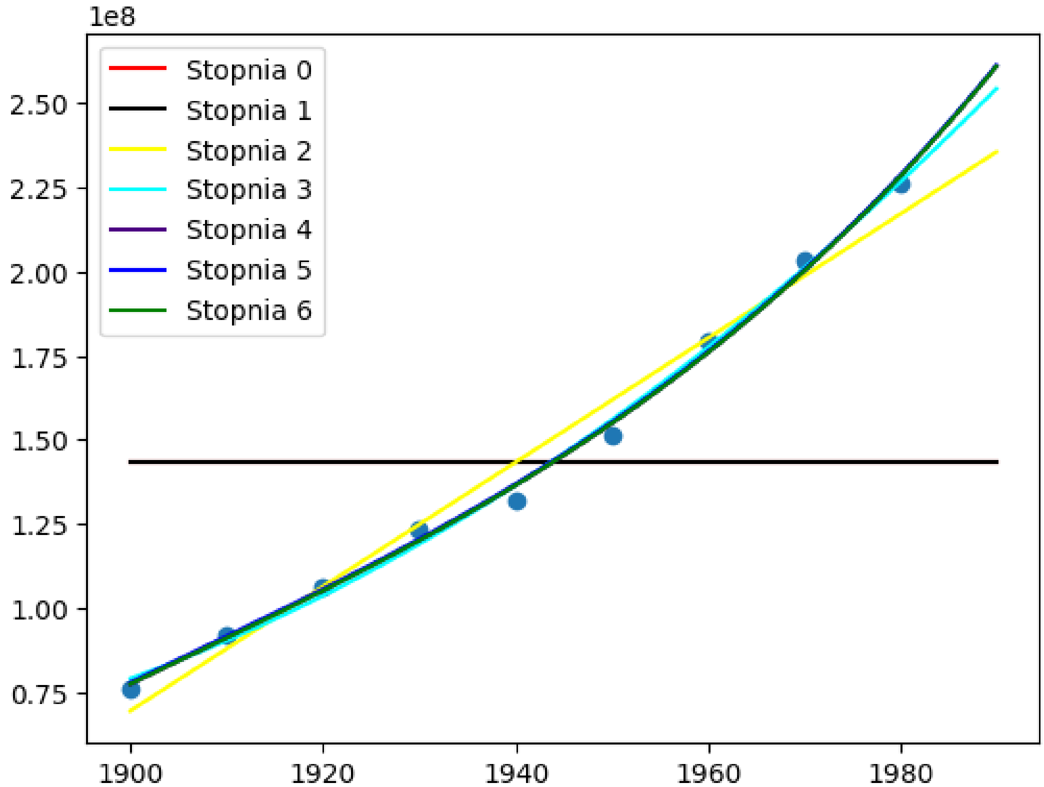
Definiujemy podstawowe dane i zmienne niezbędne do obliczeń.

[ ]:
```
real = 248709873
years = np.array([1900,1910,1920,1930,1940,1950,1960,1970,1980])
pop = 
 ↪[76212168,92228496,106021537,123202624,132164569,151325798,179323175,203302031,226542199]
n = len(years)
m = 7
coeff = []
x_space = np.arange(1900, 1990, 0.1)
AICcs = np.empty(shape=m)
errors = np.empty(shape=m)
color = ["red","black","yellow","aqua","indigo","blue","green"]
```

W pętli tworzymy macierz jednomianów, a następnie obliczamy współczynniki wielomianów aproksymujących. Na końcu obliczamy wartości tych wielomianów w odpowiednich punktach, kryterium informacyjne Akaikego oraz błąd względny dla każdego wielomianu. Rysujemy wielomiany na jednym wykresie

[ ]:
```
for i in range(0,m):
    k = i+1
    p_matrix = polynomial_matrix(years,i)
    coeff.append(np.linalg.lstsq(p_matrix,pop,rcond=-1)[0])
    y_vals = [horner(x,coeff[i-1]) for x in years]
    y_space = [horner(x,coeff[i-1]) for x in x_space]
    AICcs[i] = 2*k+n*np.log(sqdiff(pop,y_vals)/n)+2*k*(k+1)/(n-k-1)
    errors[i] = abs(real-horner(1990,coeff[i-1]))/real
    plt.plot(x_space,y_space,label="Stopnia "+str(i),color=color[i])
plt.scatter(years,pop)
plt.legend()
```

[ ]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f67d1da1510>
```



Wypisujemy wartości kryterium informacyjngeo Akaikego oraz wartości błędów względnych.

[ ]:
```
print("Kryterium informacyjne Akaikego: ",AICcs)
print("Błędy: ",errors)
```

```
Kryterium informacyjne Akaikego:  [321.01097505 324.43954648 293.85647812
286.6533739  296.8804017
 321.14100467 392.99271593]
Błędy:  [0.42354851 0.42354851 0.05187476 0.02413685 0.05118131 0.05252973
 0.05127757]
```

1.1 Wnioski

Jak możemy zauważyć najmniejsza wartość kryterium Akaiekego występuje dla wielomianu o stopniu 2. Ten wielomian ma również najmniejszy błąd względny. Wynika z tego, że wyższy stopień wielomianu niekoniecznie sprawia że wyniki są dokładniejsze

2 Zadanie 2

Wykonaj aproksymację średniokwadratową ciągłą funkcji f(x) =$\sqrt{x}$ w przedziale [0,2] wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianówCzebyszewa.

Do importów z zadania pierwszego dołączamy funkcję liczącą całki oraz bibliotekę mpmath

[ ]:
```
import scipy.integrate as integrate
import mpmath as mp
```

Definiujemy funkcję, którą będziemy aproksymować

[ ]:
```
def f(x):
    return mp.sqrt(x)
```

Do liczenia współczynników wielomianu Czebyszewa posłużymy się poniższą funkcją wagową:

[ ]:
```
def w(t):
    return 1/(mp.sqrt(1-(t**2)))
```

Korzystając z wzoru:

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}$$

definiujemy funkcję, która transformuje argumenty na na przedział [-1, 1]

[ ]:
```
def transform_range(x):
    return x-1
```

Korzystając z wykładu definiujemy 3 funkcje bazowe - wielomiany Czebyszewa

[ ]:
```
base_functions = [lambda x: 1, lambda x: transform_range(x), lambda x:␣
 ↪2*transform_range(x)**2 -1]
```

Korzystając ze wzoru:

$$c_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}$$

Obliczamy kolejne współczynniki wielomianu

[ ]:
```
c = np.zeros(3)

for i in range(3):
    c[i] = integrate.quad(lambda x: w(transform_range(x))*(lambda x :␣
 ↪f(x)*base_functions[i](x))(x), 0, 2)[0]\
        /integrate.quad(lambda x: w(transform_range(x))*(lambda x :␣
 ↪base_functions[i](x)*base_functions[i](x))(x), 0, 2)[0]
    print("c[", i, "] = ", c[i], sep="")
```

```
c[0] = 0.9003163161571979
c[1] = 0.6002108774379749
c[2] = -0.12004217548755203
```

Poniższa funkcja służy do obliczania wartości wielomianu, gdy znamy już jego współczynniki i funkcje bazowe

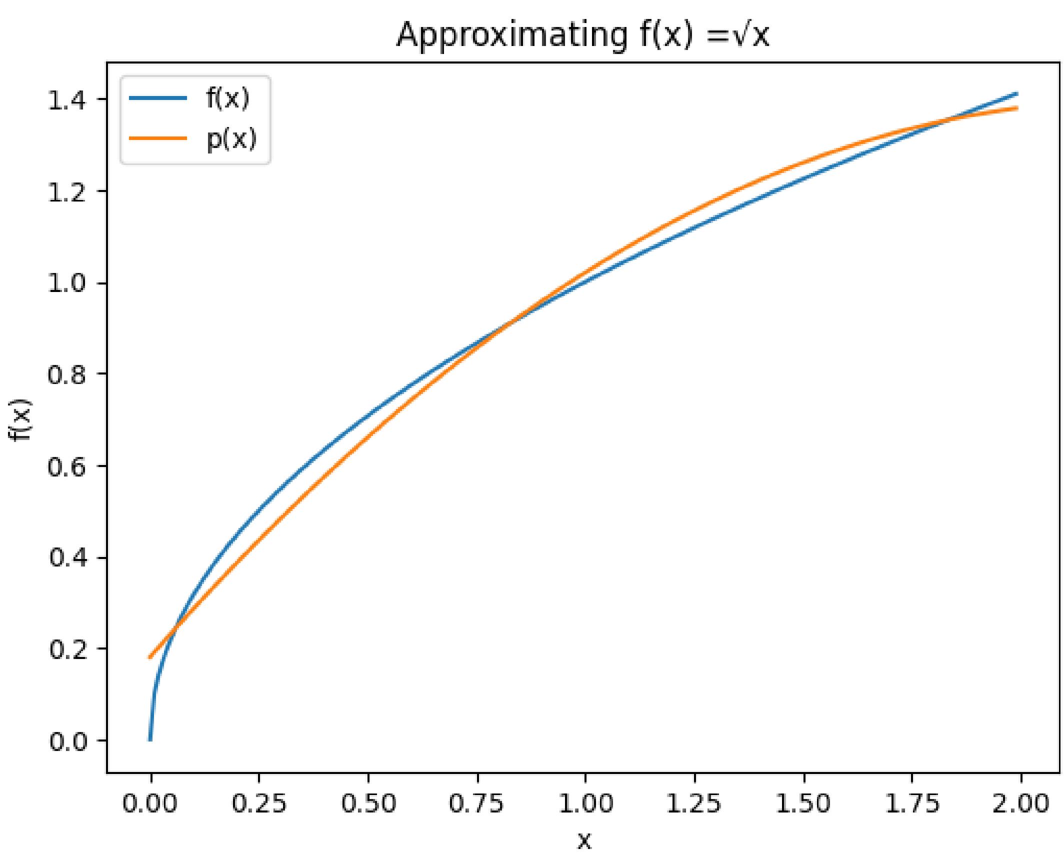
$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

```
[ ]: def polynomial_value(x, c):
         sol = 0.0
         for i in range(2, -1, -1):
             sol += c[i]*base_functions[i](x)
         return sol
```

Na koniec liczymy wartości wielomianu odstępach co 0.01 i rysujemy wykres, porównując z funkcją właściwą

```
[ ]: x_space = np.arange(0, 2, 0.01)
     y_space = [polynomial_value(x, c) for x in x_space]
     y_real = [f(x) for x in x_space]
     plt.xlabel('x')
     plt.ylabel('f(x)')
     plt.title(label="Approximating f(x) =√x")
     plt.plot(x_space, y_real, label="f(x)")
     plt.plot(x_space, y_space, label="p(x)")
     plt.legend()
     plt.show
```

```
[ ]: <function matplotlib.pyplot.show(close=None, block=None)>
```



2.1 Wnioski

Wyniki aproksymacji w podanym przedziale są akceptowalne, jednak nie jest ona tak dokładna jak niektóre metody interpolacji. Korzystając z tego, że wielomiany czebyszewa są ortogonalne uniknęliśmy rozwiązywania długiego równania macierzowego, dodatkowo unikając błędów związanych ze złym uwarunkowaniem macierzy.

3 Bibliografia

1. Wykład
2. Materiały do zajęć
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials