Laboratorium 11

Sebastian Soczawa, Piotr Kuchta

Zadanie 1

Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharak- teryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum glo- balne na zbiorze R^2

$$f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$$
$$f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$
$$f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x-y-1)$$
$$f_4(x,y) = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$$

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = 2y - 4x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -4$$

$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}$ Istnieje tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dla punktu (0,0) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (0,0) jest punktem siodłowym.

Sprawdzamy teraz czy funkcja jest ograniczona. Dla

$$x = 1$$

Granica wynosi:

$$\lim_{y \to \infty} (1 - 4y + y^2) = \infty$$

Natomiast dla

$$x = y$$

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 4x^2) = -\infty$$

Wobec tego funkcja nie posiada maksimów ani minimów.

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = 4y^3 - 4x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -4$$

$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$ Istnieją trzy rozwiązania

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Dla punktu (0,0) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (0,0) jest punktem siodłowym.

Dla punktu (1,1) oraz (-1,-1) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkty (1,1) oraz (-1,-1) są minimami lokalnym.

Wartość funkcjji w tych punktach to:

$$f(-1,-1) = f(1,1) = -2$$

Jest to dolne ograniczenie funkcji. Wobec tego minimum globalne ma wartość -2.

Sprawdzamy teraz czy funkcja jest ograniczona. Dla

$$x = 0$$

Granica wynosi:

$$\lim_{y\to\infty} y^4 = \infty$$

Więc nie ma maksimum globalnego.

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = -6x^2 - 12xy + 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6 - 12y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -12x + 12y + 6$$

$\begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ -6x^2 + 12xy + 6x = 0 \end{cases}$ Istnieją cztery rozwiązania

$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Dla punktu (-1,-1) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (0,0) jest punktem maksimum lokalnym.

Dla punktu (0,1) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (0,1) jest minimum lokalnym.

Dla punktu (0,0) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (0,0) jest siodłem.

Dla punktu (1,0) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (1,0) jest minimum lokalnym.

Sprawdzamy teraz czy funkcja jest ograniczona. Dla

$$y = 0$$

Granica wynosi:

$$\lim_{x\to\infty} (2x^3 - 3x^2) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2) = -\infty$$

Więc nie ma maksimum ani minimum globalnego.

(4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-y)^3 + 2x - 2$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = -3(x-y)^3 - 2y + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(x-y)^2 + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12(x-y)^2 - 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -12(x-y)^2$$

$\begin{cases} 4(x-y)^3 + 2x - 2 = 0 \\ -4(x-y)^3 - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ Istnieje jedno rozwiązanie

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Dla punktu (1,1) macierz Hessego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że punkt (1,1) jest siodłem.

Sprawdzamy teraz czy funkcja jest ograniczona. Dla

$$y = 0$$

Granica wynosi:

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 + x^2 - 2x) = \infty$$

Więc nie ma maksimum globalnego.

$$y = x + 1$$

Granica wynosi:

$$\lim_{x\to-\infty} (2x + 1) = -\infty$$

Więc nie ma minimum globalnego.

Wnioski

Obliczenie tych rozwiązań analitycznie zajęło dość dużo czasu. Prawdopodobnie lepiej byłoby obliczyć punkty krytyczne numerycznie.

Zadanie 2

Napisz program znajdujący minimum funkcji Rosenbrocka

$$f(x) = 100(x_2 \ - \ x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

implementując następujące metody optymalizacji:

• metodę największego spadku (ang. steepest descent)

• metodę Newtona

Przetestuj obie metody z następującymi punktami startowymi:

$$x_0 = [-1 \quad 1]^T$$
$$x_0 = [0 \quad 1]^T$$
$$x_0 = [2 \quad 1]^T$$

Każdą metodę wykonaj przez 10 iteracji i porównaj wyniki z wynikami otrzyma- nymi dla pozostałych punktów startowych.

Definiujemy potrzebne funkcje.

In [ ]:
```
from scipy.optimize import minimize
import numpy as np
```

In [ ]:
```
def rosenbrock(x):
    return 100*(x[1]-x[0]*x[0])**2+(1-x[0])**2

def jac(x):
    return np.array([-400*x[0]*(x[1]-x[0]**2)-2*(1-x[0]),200*(x[1]-x[0]**

def hess(x):
    return np.array([[1200*x[0]**2-400*x[1]+2,-400*x[0]], [-400*x[0], 200

def to_min(a,x,g):
    return rosenbrock(x-a*g)
```

Najpierw przetestujemy metodę największego spadku dla wszystkich punktów startowych

In [ ]:
```
def steepest(grad,start,iter=10):
    current = start
    a = [1]
    for i in range(iter):
        grad_val = grad(current)
        res = minimize(to_min,a,args=(current,grad_val),bounds=[(0,float(
        a = res.x
        current = current - a*grad_val
    return current
```

In [ ]:
```
x0 = np.array([-1.0, 1.0])
x1 = np.array([0.0, 1.0])
x2 = np.array([2.0, 1.0])
res0 = steepest(jac,x0)
res1 = steepest(jac,x1)
res2 = steepest(jac,x2)
print(res0)
print(res1)
print(res2)
```

```
[-0.97447894  0.9496085 ]
[0.29613946 0.07561249]
[-1.49655953  2.24439258]
```

Jak się okazuje metoda największego spadku przybliżyła nas tylko nieznacznie do rozwiązania. Może być to spowodowane niewielką liczbą iteracji oraz faktem że funkcja rosenbrocka jest dość mocno wypłaszczona w badanym obszarze.

Przetestujemy teraz czy ta metoda przy większej liczbie iteracji da nam lepsze wyniki.

In [ ]:
```
res0 = steepest(jac,x0,2000)
print(res0)
```

```
[0.9930211  0.98607436]
```

Teraz przetestujemy metodę Newtona.

In [ ]:
```
def newton(x,jac,hes,iter=10):
    for i in range(iter):
        j = jac(x)
        h = hes(x)
        add = -np.linalg.inv(h)@j
        x += add
    return x
```

In [ ]:
```
x0 = np.array([-1.0, 1.0])
x1 = np.array([0.0, 1.0])
x2 = np.array([2.0, 1.0])
res1 = newton(x0,jac,hess)
res2 = newton(x1,jac,hess)
res3 = newton(x2,jac,hess)
print(res1)
print(res2)
print(res3)
```

```
[1. 1.]
[1. 1.]
[1. 1.]
```

Jak można zauważyć, w niewielkiej odległości od minimum metoda Newtona radzi sobie znacznie lepiej od metody największego spadku.

Wnioski

Na podstawie poprzednich wywołań funkcji możemy wysnuć wniosek, że metoda największego spadku nadaje się bardziej do zbliżania się do minimum, niż wyznaczania dokładnej jego wartości. W niewielkiej odległości od minimum lepszym rozwiązaniem będzie użycie metody Newtona. Należy jednak być ostrożnym ponieważ metoda może być niestabilna.