Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по курсу «Моделирование»

Тема Программная реализация алгоритмов при решении задачи Коши для ОДУ

Студент Козлова И.В.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ____________

Преподаватель Градов В. М.

Москва — 2022 г.

1 Теоретические сведения

Тема

Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Цель работы

Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутта).

Исходные данные

ОДУ, у которого отсутствует аналитическое решение:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

На вход подается конечное значение x_max и шаг (в реализованном программе данные задаются константами).

Результаты

1. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале *[0, x_max]* и результаты расчета функции u(x) в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала x_max выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения u(x) до второго знака после запятой.

2. График функции в диапазоне *[-x_max, x_max]*.

1.1 Решение

Описание

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения с одной независимой переменной. Если независимых переменных больше, чем одна, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными.

Задача Коши

Общее решения ДУ n-го порядка зависит от констант общего решения. Для выделения частного решения требуется задать n условий.

В задаче Коши все дополнительные условия задаются в одной точке:

$$
\begin{cases} u'(x) = f(x,u) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \tag{1.2}
$$

Можно выделить три метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений в задаче Коши: аналитические, аналитические приближенные и численные.

Для решения данного ОДУ были использованы 3 алгоритма.

1.1.1 Метод Пикара

Имеем:

$$
u(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, u(t))\, dt \tag{1.3}
$$

Строим ряд функций:

$$
y^{(s)} = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y^{(s-1)}(t))\, dt, \qquad y^{(0)} = \eta \tag{1.4}
$$

Построим 4 приближения для уравнения (1.3):

$$
y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} \tag{1.5}
$$

$$
y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2)\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \tag{1.6}
$$

$$
y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2)\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \tag{1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
y^{(4)}(x) = 0 + \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)^2)\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \\
\frac{x^{15}}{59535} + \frac{2x^{15}}{93555} + \frac{2x^{19}}{3393495} + \frac{2x^{19}}{2488563} + \frac{2x^{23}}{86266215} + \\
\frac{x^{23}}{99411543} + \frac{2x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

В программе используется также 5 приближение. Его подсчеты приведены на листе бумаге, приложенному к отчету.

1.1.2 Метод Эйлера

$$y^{(n+1)}(x) = y^{(n)}(x) + h \cdot f(x_n, y^{(n)}) \tag{1.9}$$

Порядок точности: $O(h)$.

1.1.3 Метод Рунге-Кутта

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + h((1-\alpha)R_1 + \alpha R_2) \tag{1.10}$$

где $R1 = f(x_n, y^n)$, $R2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y^n + \frac{h}{2\alpha}R_1)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ или 1

Порядок точности: $O(h^2)$.

1.2 Результаты

Результаты представлены для начального значения *x = 0*, конечное значение *x_ max = 2*, шаг *step = 1e-4*.

Выводится часть результатов с шагом 0.05.

Позиция столбцов в таблице.

1. Значение X.
2. Метода Пикара:
   (a) Первое приближение;
   (b) Второе приближение;
   (c) третье приближение;
   (d) четверное приближение.
3. Метод Эйлера;
4. Метод Рунге-Кутты.

X	Picard 1	Picard 2	Picard 3	Picard 4	Picard 5	Euler (явный)	Runge 2
0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	4.1e-05	4.1e-05	4.1e-05	4.1e-05	4.1e-05	4.1e-05	4.1e-05
0.1	0.000332	0.000332	0.000332	0.000332	0.000332	0.000332	0.000332
0.15	0.001125	0.001125	0.001125	0.001125	0.001125	0.001124	0.001125
0.2	0.002667	0.002667	0.002667	0.002667	0.002667	0.002665	0.002667
0.25	0.005208	0.005209	0.005209	0.005209	0.005209	0.005206	0.005209
0.3	0.009	0.009003	0.009003	0.009003	0.009003	0.008999	0.009003
0.35	0.014292	0.014302	0.014302	0.014302	0.014302	0.014296	0.014302
0.4	0.021333	0.021359	0.021359	0.021359	0.021359	0.021351	0.021359
0.45	0.030375	0.030434	0.030434	0.030434	0.030434	0.030424	0.030434
0.5	0.041667	0.041791	0.041791	0.041791	0.041791	0.041778	0.041791
0.55	0.055458	0.0557	0.055701	0.055701	0.055701	0.055686	0.055701
0.6	0.072	0.072444	0.072448	0.072448	0.072448	0.072429	0.072448
0.65	0.091542	0.09232	0.092328	0.092328	0.092328	0.092306	0.092328
0.7	0.114333	0.115641	0.11566	0.11566	0.11566	0.115634	0.11566
0.75	0.140625	0.142744	0.142785	0.142785	0.142785	0.142755	0.142785
0.8	0.170667	0.173995	0.174079	0.17408	0.17408	0.174045	0.17408
0.85	0.204708	0.209797	0.209959	0.209963	0.209963	0.209923	0.209963
0.9	0.243	0.250592	0.250897	0.250906	0.250907	0.25086	0.250907
0.95	0.285792	0.296876	0.297431	0.297452	0.297453	0.297398	0.297453
1.0	0.333333	0.349206	0.350185	0.35023	0.350232	0.350169	0.350232
1.05	0.385875	0.40821	0.40989	0.409985	0.409989	0.409917	0.409989
1.1	0.443667	0.474599	0.477414	0.477606	0.477617	0.477533	0.477617
1.15	0.506958	0.549181	0.553793	0.554174	0.554199	0.554101	0.5542
1.2	0.576	0.632876	0.640282	0.641016	0.641073	0.64096	0.641077
1.25	0.651042	0.72673	0.738407	0.739786	0.739914	0.739786	0.739924
1.3	0.732333	0.831934	0.850035	0.852572	0.852852	0.852715	0.85288
1.35	0.820125	0.949842	0.977468	0.982048	0.982647	0.982517	0.982718
1.4	0.914667	1.08199	1.12356	1.13168	1.132935	1.132866	1.133113
1.45	1.016208	1.23012	1.291853	1.306024	1.308605	1.308735	1.309044
1.5	1.125	1.396205	1.486771	1.511146	1.516374	1.517052	1.517448
1.55	1.241292	1.58247	1.713849	1.755231	1.765682	1.767766	1.768285
1.6	1.365333	1.791421	1.980024	2.049464	2.070128	2.075721	2.076423
1.65	1.497375	2.025878	2.294012	2.409318	2.449824	2.464108	2.465096
1.7	1.637667	2.288998	2.666774	2.856462	2.935346	2.971335	2.972797
1.75	1.786458	2.584317	3.112102	3.421585	3.574558	3.666022	3.668337
1.8	1.944	2.915778	3.647363	4.148638	4.444681	4.684098	4.68813
1.85	2.110542	3.287772	4.294424	5.101211	5.674265	6.338385	6.346524
1.9	2.286333	3.705177	5.08081	6.372211	7.48424	9.545668	9.56699
1.95	2.471625	4.173398	6.041152	8.098595	10.266773	18.644851	18.747228
2.0	2.666667	4.698413	7.21899	10.483923	14.740763	270.068406	317.490147

Рисунок 1.1 – Результаты

1.3 Ответы на вопросы

Вопрос 1 Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара, т.е. для КАЖДОГО приближения указать свои границы применимости. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

Первое приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для первого и второго приближений до второго знака после запятой. Второе приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для второго и третьего приближений до второго знака после запятой. Третье приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для третьего и четвертого приближений до второго знака после запятой. Четвертое приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для четвертого и пятого приближений до второго знака после запятой.

На рисунке 1.2 представлены результаты для первого приближения.

X	Picard 1	Picard 2
0	0	0
0.05	4.1417e-05	4.1417e-05
0.1	0.000332334	0.000332336
0.15	0.001125	0.001125027
0.2	0.002666667	0.00266687
0.25	0.005208333	0.005209302
0.3	0.009	0.009003471
0.35	0.014291667	0.014301879
0.4	0.021333333	0.02135934
0.45	0.030375	0.030434313
0.5	0.041666667	0.041790675
0.55	0.055458333	0.05569999
0.6	0.072	0.072444343
0.65	0.091541667	0.092319798
0.7	0.114333333	0.115640544
0.75	0.140625	0.142743792
0.8	0.170666667	0.173995479
0.85	0.204708333	0.209796859
0.9	0.243	0.250592014
0.95	0.285791667	0.296876386
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Рисунок 1.2 – Первое приближение

На рисунке 1.3 представлены результаты для второго приближения.

X	Picard 2	Picard 3
0	0	0
0.05	4.1417e-05	4.1417e-05
0.1	0.000332336	0.000332336
0.15	0.001125027	0.001125027
0.2	0.00266687	0.00266687
0.25	0.005209302	0.005209302
0.3	0.009003471	0.009003473
0.35	0.014301879	0.014301889
0.4	0.02135934	0.02135938
0.45	0.030434313	0.03043446
0.5	0.041790675	0.041791145
0.55	0.05569999	0.055701332
0.6	0.072444343	0.072447841
0.65	0.092319798	0.092328243
0.7	0.115640544	0.115659646
0.75	0.142743792	0.142784647
0.8	0.173995479	0.174078706
0.85	0.209796859	0.20995931
0.9	0.250592014	0.250897359
0.95	0.296876386	0.297431354
1.0	0.349206349	0.350185147
1.05	0.408209927	0.409890195
1.1	0.474598684	0.47741355
1.15	0.549180871	0.553793153
1.2	0.632875886	0.640282423
1.25	0.726730104	0.738406665
1.3	0.831934154	0.850034516
1.35	0.949841682	0.977468469
1.4	1.081989689	1.123559598
1.45	1.23012049	1.291852895

Рисунок 1.3 – Второе приближение

На рисунке 1.4 представлены результаты для третьего приближения.

X	Picard 3	Picard 4
0	0	0
0.05	4.1417e-05	4.1417e-05
0.1	0.000332336	0.000332336
0.15	0.001125027	0.001125027
0.2	0.00266687	0.00266687
0.25	0.005209302	0.005209302
0.3	0.009003473	0.009003473
0.35	0.014301889	0.014301889
0.4	0.02135938	0.02135938
0.45	0.03043446	0.03043446
0.5	0.041791145	0.041791146
0.55	0.055701332	0.055701338
0.6	0.072447841	0.072447861
0.65	0.092328243	0.09232831
0.7	0.115659646	0.115659852
0.75	0.142784647	0.142785227
0.8	0.174078706	0.174080242
0.85	0.20995931	0.209963147
0.9	0.250897359	0.250906464
0.95	0.297431354	0.297452011
1.0	0.350185147	0.350230164
1.05	0.409890195	0.409984831
1.1	0.47741355	0.477606169
1.15	0.553793153	0.554173953
1.2	0.640282423	0.641015708
1.25	0.738406665	0.739785528
1.3	0.850034516	0.85257208
1.35	0.977468469	0.982048218
1.4	1.123559598	1.131680299
1.45	1.291852895	1.306023947
1.5	1.486771326	1.511145882
1.55	1.71384867	1.755231016
1.6	1.980023798	2.049463795
1.65	2.294012094	2.409318349

Рисунок 1.4 – Третье приближение

На рисунке 1.5 представлены результаты для четвертого приближения.

X	Picard 4	Picard 5
0	0	0
0.05	4.1417e-05	4.1417e-05
0.1	0.000332336	0.000332336
0.15	0.001125027	0.001125027
0.2	0.00266687	0.00266687
0.25	0.005209302	0.005209302
0.3	0.009003473	0.009003473
0.35	0.014301889	0.014301889
0.4	0.02135938	0.02135938
0.45	0.03043446	0.03043446
0.5	0.041791146	0.041791146
0.55	0.055701338	0.055701338
0.6	0.072447861	0.072447861
0.65	0.09232831	0.09232831
0.7	0.115659852	0.115659853
0.75	0.142785227	0.142785234
0.8	0.174080242	0.174080264
0.85	0.209963147	0.209963218
0.9	0.250906464	0.250906678
0.95	0.297452011	0.297452616
1.0	0.350230164	0.350231794
1.05	0.409984831	0.409989027
1.1	0.477606169	0.477616544
1.15	0.554173953	0.554198697
1.2	0.641015708	0.641072855
1.25	0.739785528	0.739913753
1.3	0.85257208	0.852852466
1.35	0.982048218	0.982647416
1.4	1.131680299	1.132935054
1.45	1.306023947	1.308605035
1.5	1.511145882	1.516373855
1.55	1.755231016	1.765681763

Рисунок 1.5 – Четвертое приближение

Вопрос 2 Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

Доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах можно посредством постепенного уменьшения шага. Если при уменьшении шага полученный результат изменится незначительно (относительно предыдущих изменений) или не изменился совсем, то полученный результат можно считать правильным.

Вопрос 3 Каково значение решения уравнения в точке x=2, т.е. привести значение u(2).

Ответ можно получить, опираясь на вопрос 2 (выше). Посредством уменьшения шага и анализом изменения полученного численным методом значения.

Для $10^{-}2$:

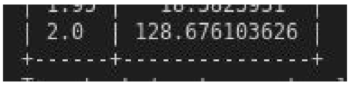
| 2.0 | 128.676103626 |

Рисунок 1.6

Для $10^{-}3$:

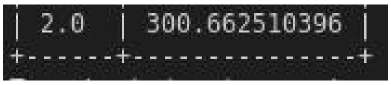
| 2.0 | 300.662510396 |

Рисунок 1.7

Разница с предыдущем составляет 171.9864

Для $10^{-}4$:

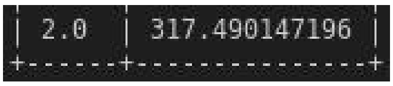
| 2.0 | 317.490147196 |

Рисунок 1.8

Разница с предыдущем составляет 16.8276

Для $10^{-}5$:

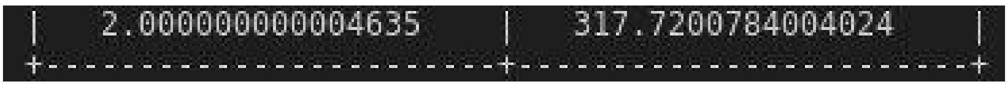
| 2.000000000004635 | 317.7200784004024 |

Рисунок 1.9

Разница с предыдущем составляет 0.2299

Для $10^{-}6$:

1.9999989999256516	317.62151634959963
1.9999999999256515	317.72243582380815

Рисунок 1.10

Разница с предыдущем составляет 0.0024

Таким образом: $u(2) = 317.72$

Вопрос 4 Дайте оценку точки разрыва решения уравнения.

Вопрос 5 Покажите, что метод Пикара сходится к точному аналитическому решению уравнения

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$