(1)二项树 Bk 的高度为__k__，任一结点的最大度为__k__，结点数为__2^k__。
(2)插入排序算法在最坏情况、平均情况和最好情况下的时间复杂度分别为__n^2__，__n^2__，__n__。
(3)三个算法的时间分别为 T1(n)=10logn^3，T2(n)=50n，T3(n)=10log3^n，请用渐进界限和渐进上界和渐进下界符号表示他们的渐进关系，T1(n)__O__T2(n)，T2(n)__Θ__T3(n)，T3(n)__w__T1(n)。
(4)包含 8 个内部结点的红黑树中，最多可以有__4__个红色结点，最少可以有__1__个红色结点。
(5)装配线调度算法 Fastest_Way 的时间复杂度为__O(n)__，最优二叉查找树算法 Optimal_BST 的时间复杂度为__O(n^3)__。
(6)在 Push_Relabel 算法中饱和 Push 操作次数的上界是__2ve__，Relabel 操作次数的上界是__4v^2(v+e)__。
(7)在二叉堆，二项堆和 Fibonaci 堆上完成插入一个结点操作的时间分别为__logn__，__logn__，__1__。
(8)Huffman 编码算法 Huffman 采用的算法设计方法是__贪心__，矩阵链乘算法 Matrix_Chain_Order 采用的算法设计方法是__DP__。

1. 简述应用动态规划方法进行算法设计的基本步骤。

构造最优子结构：描述最优解

重叠子问题

2. 请用 Master 方法求 T(n)=9T(n/3) + nlgn 的解。

logb(a) = 2

n^2 > nlogn nlogn 渐进小于n^2

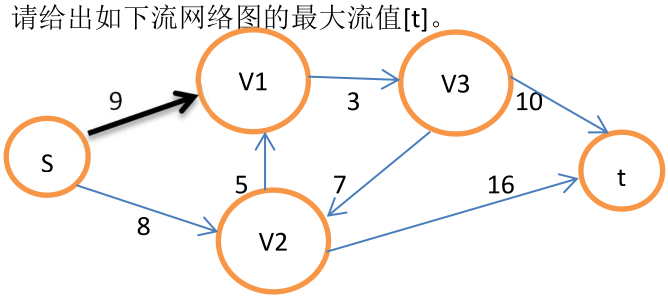
T(n) = O(n^2)

3. 假设动态表的扩张和收缩策略为：a=1 时插入一个元素表扩张一倍，a=1/2 时删除一个元素表缩小一半，如果势函数定义为 Q(T)=2num[T] + size[T]，请用该势函数分析第一次操作的平摊时间。

4. 请画出在包含 14 个结点的二项堆上完成一次删一任一结点(Binomial-Heap-Delete)操作后的报表。

11

5. 请给出如下流网络图的最大流值[t]。



6. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Si	0	5	8	6	1	2	9	2	3	4
fi	6	10	9	8	3	5	13	11	4	7

假设有 n 个人需排队等候处理事务，已知每个人需要处理的时间为 ti，(0<i<=n)，请给出一种最优排队次序，使所有人排队等候的总时间最小，要求：

1. 给出你的贪心选择策略
2. 证明贪心选择的正确性
3. 写出解此问题的贪心算法

一 填空题

1 活动选择算法的时间复杂度是___O(n)___，矩阵链乘法的时间复杂度是___O(n^3)___

2 二项堆中有 18 个结点，删除其中的最小结点，则堆中还存在几棵树___3___

3 红黑树的黑高度是 3，那么树中最多有___31___内部结点，最多有___10___个红色结点

4 装配线调度算法的时间复杂度是___O(n)___，快速排序采用的算法设计方法是___分治___

5 在最大流中，用 FORD--FULKERSON 方法求最大流的时间复杂度是___O(Ef*)___,采用 Edmonds-Karp 算法的时间复杂度是___O(VE^2)___

6 快速排序的平均时间复杂度是___nlogn___;选择排序的时间复杂度是___n^2___.

7 三个算法的时间复杂度分别为 $T_1(n)=5e^n$，$T_2(n)=2n$，$T_3(n)=10\ln\ln n$，请用 θ，O，Ω 表示他们的递进关系：T1（n）=___W___T2（n）,T2（n）=___W___T3（n），T3（n）=___W___T1（n）

8 二叉堆、二项堆、斐波那契堆完成一次合并堆操作的时间分别是多少___n___，___lgn___，___1___。

9 判断题：红黑树是一颗平衡的二叉搜索树，且红黑内结点数最大比为 2:1___T___

10 判断题：斐波那契额堆不要求树为二项树，但堆中数的根节点必须从小到大排列，且 Min[H]指向堆中最小结点。___F___

选用基本数据结构，需要添加那些元素，如何维护元素，如何操作

二 综合题

1 简述数据结构的扩张方法和步骤

2 请用 Master 方法 T（n）=5T(n/3)+lgn 的解 log3(5) > 1 T(n) = O(n^log3(5))

3 假设动态表表志允许插入操作，且当 a=1 时，将表扩张为原来的 2 倍，请用势函数方法分析第 i 次操作的平摊时间

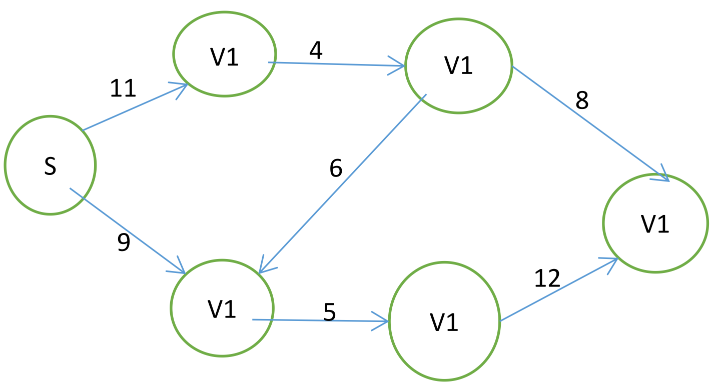
4 下面是冒泡程序的伪代码，请用传统时间方法分析其最好时间和最坏时间

```
BUBBLESORT（A）
for  i ⟵ 1 to length[A]
     do for j ⟵ length[A]downto i + 1
          do if A [ j ] <A [ j-1 ]
               then exchange A[ J ] ⟷A[ j-1 ]
```

最好：O(n)

最坏：1+2+3……+n = O(n^2)

5 请分别用最小割的方法和 FORD-FULKERSON 方法求出小面流网络图的最大流|f|



9

6 请用矩阵链问题算法，求出下列矩阵最优的计算方法

矩阵	A1	A2	A3	A4
规模	2*2	2*1	1*3	3*2

14

三 算法设计题

一个小孩买了价值少于 1 元的糖，并将 1 元的钱交给售货员，售货员希望用书目最少的硬币找给小孩，假设提供了数目不限的面值为 5 角，2 角和 1 角的硬币，请给出一种最优找钱方案，是给币的总个数最少，要求：

1）给出你的贪心选择策略

2）证明贪心选择的正确性

3）写出解决此问题的贪心算法

一 填空

1 装配线调度算法的时间复杂度是 n^3，最长公共子序列的时间复杂度是 mn

2 二项树 BK，左边第 3 个孩子有 2 个孩子，问 B_{K-1} 有 4 个结点

3 红黑树的有 15 个结点，则红黑树的高度至多有 5

4 最优二叉搜索树问题采用的算法设计方法是 DP，归并排序采用的算法设计是 分治

5 在最大流中，用 FORD--FULKERSON 与 Edmonds-Karp 算法的区别是 BFS

6 快速排序的最好时间复杂度，平均时间复杂度，最差时间复杂度分别是 nlogn，nlogn，n^2。

7 三个算法的时间复杂度分别为 $T_1(n)=5e^n$，$T_2(n)=2n$，$T_3(n)=10\ln\ln n$，请用 θ，O，Ω 表示他们的递进关系：T1（n）= W T2（n）,T2（n）= W T3（n），T3（n）= O T1（n）

8 二叉堆，二项堆，斐波那契堆完成一次减值操作的时间分别是多少 logn，logn，1。

9 判断题：二项堆中的树必须为二项树，其度必须以递增序排列，且不唯一。 T

10 判断题：斐波那契堆是最小堆序的有限树的集合，从任何一棵树的根节点出发能找到任何一颗其他的树。 T

二 综合题

1 简述分治法的设计步骤

分解子问题

子问题可以分别求解

问题的解有子问题的解求得

2 请用 Master 方法求 T（n）=2T（n/3）+ n 的解

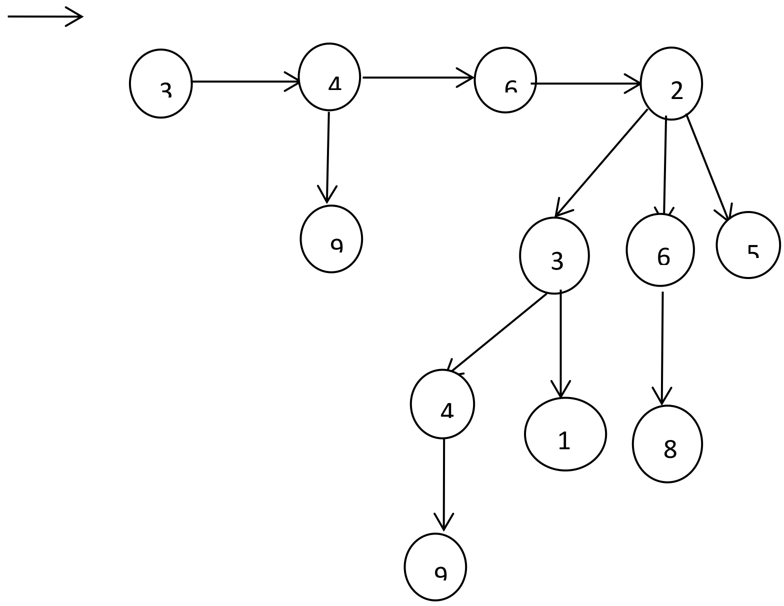
log3(2) < 1

2*n/3< cn c == 1> 0多项式大于

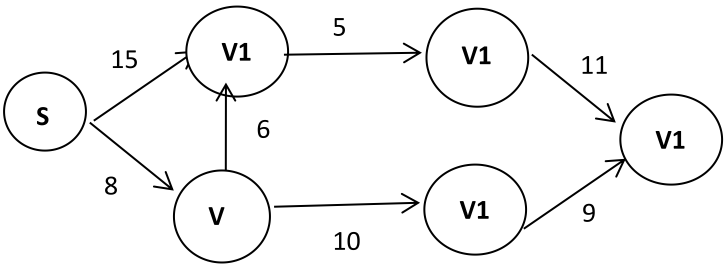
直接求得T(n) = O(n)

3 假设动态表志允许插入操作，且当 a=1 时，将表扩张为原来的 2 倍，请用势函数方法分析第 i 次操作的平摊时间

4 请给出下面二项堆删除节点 6 的所有过程



5 请分别用最小割的方法和 FORD—FULKERSON 的方法求出最小面流网络图的最大流[f]。



13

6 请用最长公共子序列问题算法，求出 L1=<A,B,C,B,D,A,C>，L2=<B,D,A,B,D,C>的 LCS。

三 算法设计题

设有 n 个正整数，分别为 a1,a2......an，将它们连接一排，组成一个最大的多为整数，例如：
n=3 时，3 个整数 13,312,343，连成的最大整数位 34331213
又如：n=4 是，4 个整数 7,13,4,246，连成的最大整数位 7424613
请给出一种最优的数字顺序，使连成的整数最大，要求：
1）给出你的贪心选择策略
2）证明贪心选择的正确性
3）写出解决此问题的贪心算法

姓　名:____________　学　号:____________

所在班级:____________　得　分:____________

注意：试卷须交回，否则无分。

一．判断题（请直接在试卷上作答，是√，非×，每小题2分，共20分）

1. Huffman 算法是采用动态规划方法设计的。
2. 归并排序算法在最坏情况下的时间均为 $O(n^2)$。
3. 两个算法的时间分别为 $T_1(n)=10n^2$，$T_2(n)=32^n$，则他们的渐进时间关系为 $T_1(n)=\Omega(T_2(n))$。
4. 在快速排序算法中，如果输入数据均相同时时间复杂度为 $O(n\lg n)$。
5. 应用动态规划方法的前提是问题必须存在最优子结构和重叠子问题。
6. 二项树 B_k 包含的结点数恰好为 2^k 个。
7. 设 $M=(S,I)$ 为一个胚，若 $B\in I$，则 B 的子集 $A\in I$。
8. 算法 Fastest-Way 的时间复杂度为 $O(n^2)$。
9. Fabonacci 堆的根表头指针总是指向关键字最小的根结点。
10. 在二项堆上完成一次插入操作的时间为 $O(\lg n)$。

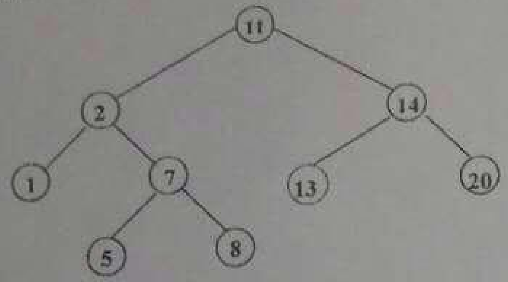
二．综合题（共60分，每小题10分）

1. 用 Master 方法求 $T(n)=3T(n/3)+\lg n$ 的解。
2. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_i	0	4	3	8	1	5	5	6	8
f_i	6	8	5	12	4	9	7	10	11

3. 请用势函数方法分析红黑树插入和删除算法的平摊时间。势函数定义为 $\Phi(T)=k\sum_{i=1}^{n}\lg i$，其中 n 表示红黑树的结点数，k>0 为一常数，红黑树的初态为空树。

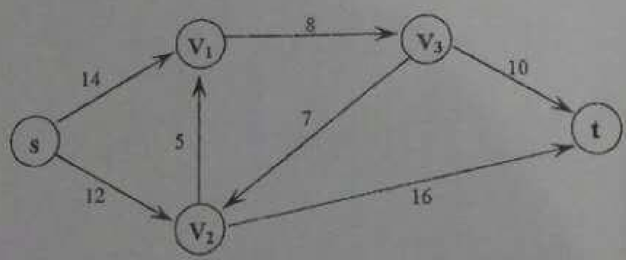
4. 请把如下二叉查找树标识为一棵红黑树（树的形状和结点的位置不变，只需标识每个结点的颜色）。要求：1) 包含最少的红结点；2) 包含最多的红结点。



5. 阅读如下算法并计算该算法的时间复杂度。

```
fact(n)
  if n<0 then return -1
  if (n==0) or (n==1) then return 1
  else return n*fact(n-1)
```

6. 对如下的流网络图，用 Ford-Fulkser 方法计算最大流值。



三. 算法设计题（20 分）

假设有P个处理器(处理能力均相同)可以运行n个任务$j_1,j_2,\ldots,j_n$，任务对应的运行时间为$t_1,t_2,\ldots,t_n$，同时假设n为P的整数倍。请安排一种调度使得每个任务平均完成时间(包括等待时间)最短并输出该平均完成时间。要求：

1. 描述你的贪心选择策略
2. 编写基于此贪心选择的贪心算法求出每个任务最短的平均完成时间
3. 若 P=3,n=9 时，9 个任务对应的运行时间分别为：3，5，6，10，11，14，15，18，20，请按照你安排的调度计算任务平均完成的时间。

在一个加权胚M=(S，I)中，下述说法错误的是 A 。

(a) 设A∈I，若对于∀B∈I，有A⊄B，则A是M的最大独立子集

(b) M的最大独立子集必是最优子集　　(c)加权胚的贪心算法即是求胚的一个最优子集

(d) 胚中独立集的子集必定也是独立的

一、填空题（请直接在试卷上作答，每空1分，共20分）

1. 平摊分析中采用的三种分析方法分别为(1) 聚集法 、(2) 记帐法 、(3) 势能法 。

2. 快速排序算法在最坏情况、平均情况和最好情况下的时间复杂度分别为(4) $O(n^2)$ 、(5) $O(n\lg n)$ 、(6) $O(n\lg n)$ 。

3. 三个算法的时间分别为 $T_1(n)=10\lg n^2$，$T_2(n)=50\sqrt{n}$，$T_3(n)=n^2\lg 3$，请按渐进时间从低到高排列为(7) $T_1(n)$ 、(8) $T_2(n)$ 、(9) $T_3(n)$ 。

4. 包含n个结点的红黑树高度最多为(10) $2\lg(n+1)$ ，二叉查找树的高度最多为(11) n 。

5. 在Haffman编码算法中队列Q的管理若分别采用二叉堆、二项堆和Fibonacci堆，则算法时间分别为(12) $O(\lg n)$ 、(13) $O(\lg n)$ 、(14) $O(1)$ 。

6. 在红黑树中插入一个结点的时间为(15) $O(\lg n)$ ，而在二叉查找树中插入一个结点的时间为(16) $O(\lg n)$ 。

7. 二项堆的根表采用(17) 单向循环 链表链接所有树根结点，而Fibonacci堆则采用(18) 双向循环 链表链接所有树根结点。

8. 活动选择问题算法Recursive-Activity-Selector采用的算法设计方法是(19) 贪心算法 ，最长公共子序列算法LCS-Length采用的算法设计方法是(20) 动态规划算法 。

3. 假设对动态表的操作均为删除操作，表收缩的策略为α=½时，删除一个元素表收缩一半。势函数定义为Φ[T]=size[T]−num[T]，请用此势函数分析第i次操作的平摊代价。

三、算法设计题（每题15分，共30分）

1. 对以上第二大题中第4小题用动态规划方法求解此问题。

要求：① 写出最优解值的递归式　　（5分）

　　　② 写出求此最优解值的动态规划算法（10分）

2. 给定n件物品及一个背包，物品i的重量为 w_i，其价值为 v_i，背包可装载物品的总重量为W。求在不超过背包总重量W的前提下，如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品总价值最大，考虑物品是可以拆分的，即该问题是一个零头背包(fractional knapsack)问题。

要求：① 写出解此问题的贪心选择策略（5分）

　　　② 编写求此问题的贪心算法　　（10分）

中国科学技术大学软件学院

《算法设计与分析》期末考试试题

一、选择题

1. 要使得递归方程 T(n)=3/2T(2n/b)+lgn 的解是 O(n)，常数 a 必须为__A__.
   A.3 B.2 C.2/3 D.3/2
2. 下列各式中错误的而是__D__.
   A.30n=O(n^2) B.200n=o(n^2) C.0.01n^2=Ω(n^2) D.2n^2=ω(n^2)
3. 下列各式中解为 O(nlgn)的是__B__.
   A.T(n)=9T(n/3+20)+n B.T(n)=2T(2n/4)+n
   C.T(n)=4T(n/4)+nlgn D.T(n)=5T(n/4)+nlgn
4. 在下列各种数据结构中，查找操作效率较低的是__A__.
   A. 二叉堆 B.二叉排序树 C.B-树 D.红黑树
5. 就时间复杂性而言，作为优先队列性能最好的数据结构是__C__.
   A. 二叉堆 B.二项堆 C.Fib 堆 D.FIFO 队列
6. 设 i1 和 i2 是两个区间对象，他们相交的充要条件是__D__.
   A. low[i1]>high[i2] B. low[i2]>high[i1]
   C.(low[i1]<=high[i2])or(low[i2]<=high[i1]) D.(low[i1]<=high[i2])and(low[i2]<=high[i1])
7. 关于红黑树，下述说法错误的是__?__.
   A. 红黑树是平衡的二叉树 B.红黑树是二叉搜索树
   C. 红黑树的高度为 O(lgn) D. 红黑树插入和删除过程至多有 2 个旋转操作
8. 设 x 是一棵顺序统计树中的一个结点，下列说法错误的是__D__。
   A. 在 OSSelec 和 OSRank 两个操作中，可有效维护 size；
   B. 在以 x 为根的树中，x 的秩是 size[left[x]+1]；
   C. 若 size[NUL[T]]=0，则 size[x]=size[left[x]]+size[right[x]]+1；
   D. 若 x 是 p[x]的右孩子，在 p[x]为根的子树中，x 的秩是 size[left[x]]+size[left[p[x]]]+1
9. 关于动态规划，下列说法错误的是__B__。
   A. 使用动态规划的两要素是“最优子结构”和“重叠子问题”
   B. 在使用“cut-and-paste”技术证明最优子结构时，要求子问题之间是相互关联的
   C. 若子问题空间大小为多项式阶，则动态规划的时间一般也是多项式的
   D. 一般情况下，动态规划和其记忆型递归的变种算法的渐进时间相同

二、填空题

1. 二项树B_k的高度为_______，任一结点的最大度为________，结点数为________。
2. 插入排序算法在最坏、平均和最好情况下的时间复杂度分别为_______________。
3. 三个算法的时间分别为T_1(n)=10logn^3，T_2(n)=50n，T_3(n)=logn^3，请用Θ, O, Ω表示它们的渐进关系：T_1(n)=_____ T_2(n); T_2(n)=______ T_3(n); T_3(n)=_______ T_1(n)。
4. 包含 8 个内部结点的红黑树中，最多可有__个红色结点，最少可有__个红色结点。
5. 装配线调度算法 Faster_Way 的时间复杂度为________;最优二叉查找树算法 Optimal_BST 的时间复杂度为___________。
6. 在 Push-Relabel 算法中饱和 Push 操作次数的上界是_______；Relabel 操作次数的上界是___________。
7. 在二叉堆、二项堆和 Fibonacci 堆上完成插入一个结点操作的时间分别为__logn,logn,1__。
8. Huffman 编码算法 Huffman 采用的算法设计方法是__贪心__；矩阵链乘算法

Matrix_Chain_Order 采用的算法设计方法是___dp_______.

9. 平摊分析中采用的三种分析方法分别为___聚合_____,___记账_______,_______势能__。

三、综合题

1. 简述分治法的适用条件。

2. 请用 Master 方法求 $T(n)=3T(n/3)+n$ 的解。

nlogn

3. 假设动态表的扩张和收缩策略为：$\alpha=1$ 时插入一个元素表扩张一倍，$\alpha=1/2$ 时删除一个元素表缩小一半。如果势函数定义为$\Phi(T)=2num[T]-size[T]$。请用该势函数分析第一次操作的平摊时间。

3　3　-1　　2n(i-1) - 2

4. 请画出在包含 14 个结点的二项堆上完成一次删任一结点(Binomial-Heap-Delet)操作后的根表。

5. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

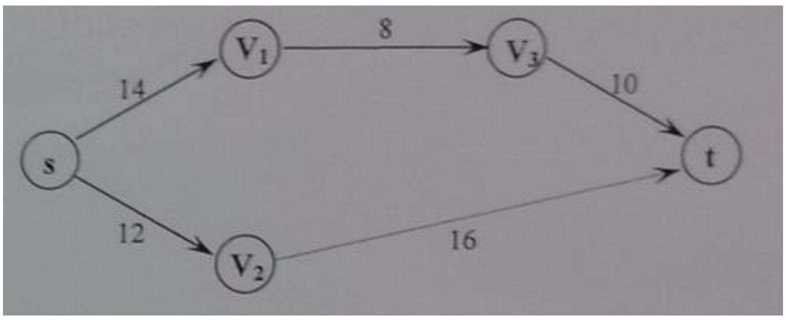
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Si	0	5	8	6	1	2	9	2	3	4
fi	6	10	9	8	3	5	13	11	4	7

6. 请写出以下算法的时间函数 T(n)的表达式。

```
Eval(n)
    If (n==0) then return 1
    Else sum = 0
        For i =0 to n-1 Do
            Sum = sum + Eval(i)
Return   sum
```

2^n

7. 写出以下流网络的最小截(S,T)及容量值 C(S,T)。



20

20

四、算法设计题

1. 给定 n 件物品及一个背包，物品 i 的重量为w_i，其价值为V_i，背包可装载物品的总重量为 W。求在不超过背包总重量 W 的前提下，如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品总价值最大，考虑物品是可拆分的，即该问题是一个零头背包问题。
   要求：(1). 写出解此问题的贪心选择策略；
   (2). 编写求此问题的贪心算法。

2. 写出一个有效算法在区间树中，查找给定区间 i 重叠且有最小起点的区间，并给出算法的时间复杂度。

3. 假设有 n 个人需排队等候处理事务，已知每个人需要处理的时间为 ti，(0<i<=n)，请给出一种最优排队次序，使所有人排队等候的总时间最小。
   要求：(1). 给出你的贪心选择策略；
   (2). 证明贪心选择的正确性；
   (3). 写出解此问题的贪心算法。

4. 用LCS的动态规划方法计算X={B,D,B,C,A,B,A}与Y={A,B,C,B,D,A,B,A}的最大公共子序列。

5. 贪心算法中求单位任务调度(注意节制时间有相同情况)。

五、证明题

1. 利用调和级数证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\ln\left(\sqrt{n}\right)+O(1)$。

2. 请给出$T(n)=2T(\llcorner\frac{n}{2})+n$的渐进上界，并用数学归纳法证明之。

六、简答题

1. 在一棵有 n 个关键字、高度为 h 的红黑树中，根的高度至少是多少？至多是多少？

2. 在一个加权 M=(S,I)中，M 的最优子集一定是最大独立子集吗？为什么？

3. 设二项堆 H 中有 11 个结点，请问 H 由哪几棵二项树构成？画出这些二项树。

   2+8 = 10　　　　3

4. Fib 堆中是哪一个操作合并度数相同的根，其原因是什么？

   提取最小值时