

Metody sztucznej inteligencji w mechanice płynów

MSI2 - prezentacja wprowadzająca

Kornel Mrozowski

Wydział Matematyki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

April 2021

Spis treści

1 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

2 Wykorzystywane metody i ich zastosowanie

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

Spis treści

1 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu
- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

Specyfika mechaniki płynów

a



b



c



Spis treści

1 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu
- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

Równania ruchu

Postać różniczkowa (dla stałej objętości skończonej)

Równanie ciągłości:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

Równania Naviera-Stokesa (czyli równania pędu):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \mathbf{f}_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \mathbf{f}_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \mathbf{f}_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right)$$

Równanie energii przepływu lepkiego:

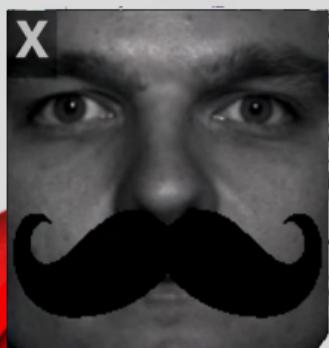
$$\begin{aligned} \rho \frac{D(e + \frac{1}{2} V^2)}{Dt} &= \mu \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \mu v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\mu v \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \mu w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu u \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu v \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu w \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right] \end{aligned}$$

Spis treści

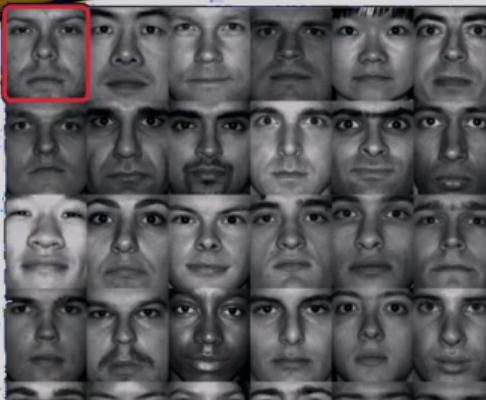
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

2 Wykorzystywane metody i ich zastosowanie

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

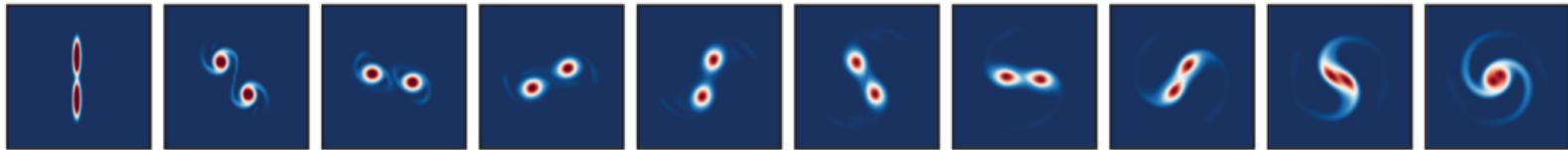


≡

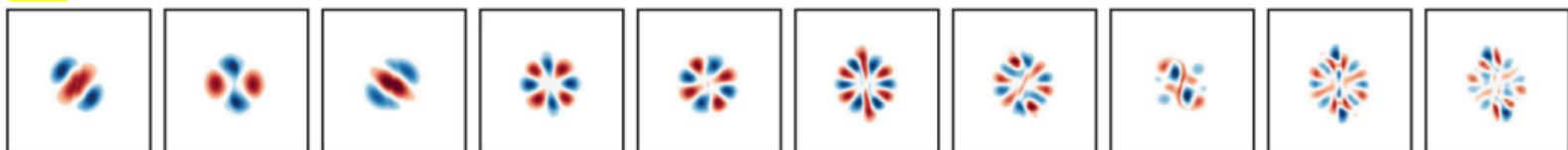


Wektory i wartości własne

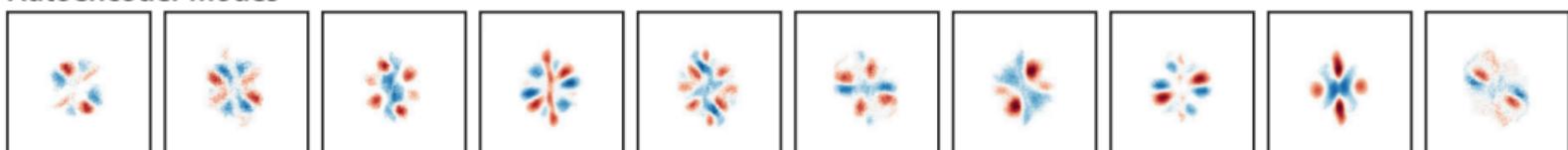
Flow snapshots



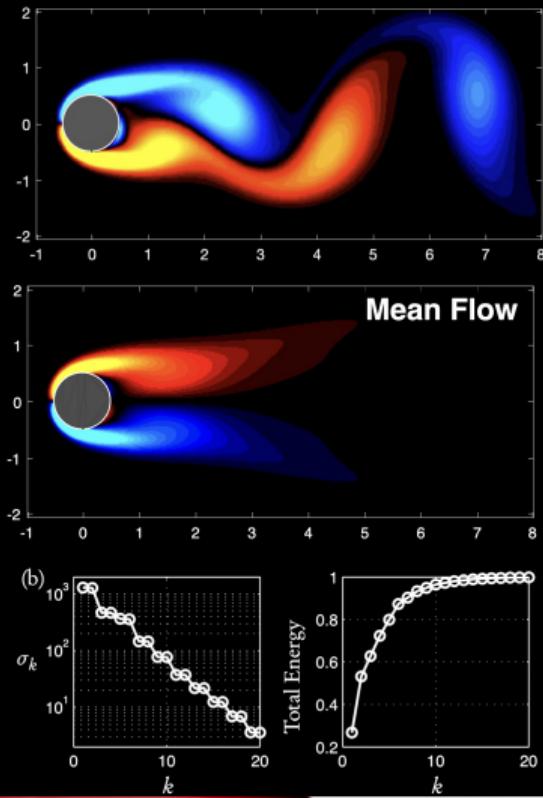
POD modes



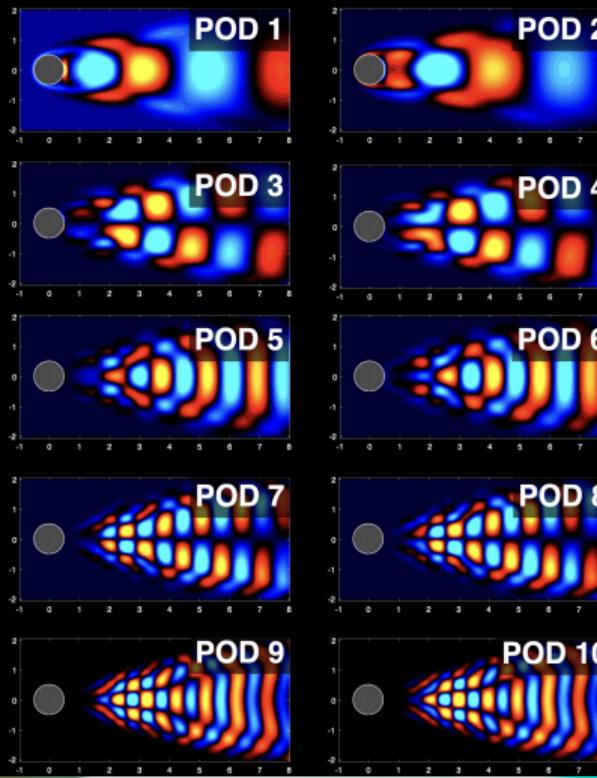
Autoencoder modes



POD/PCA



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^r \varphi_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k(t)$$



Spis treści

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

2 Wykorzystywane metody i ich zastosowanie

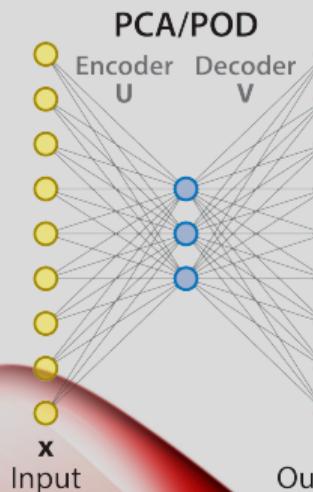
- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

Principal Component Analisis and Proper Orthogonal Decomposition

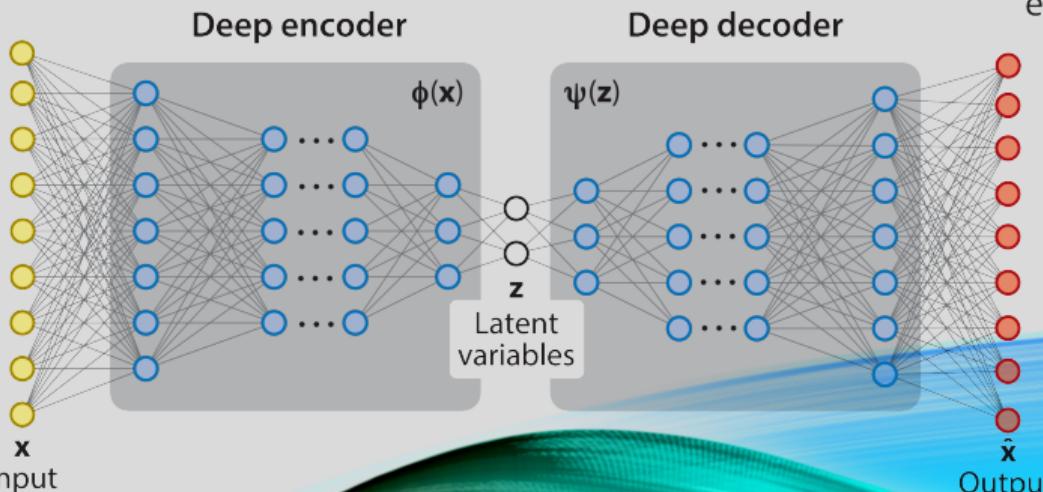
Sposób na otrzymanie wartości i wektorów własnych:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \quad \mathbf{S} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})^T \quad \mathbf{S}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

Shallow autoencoder



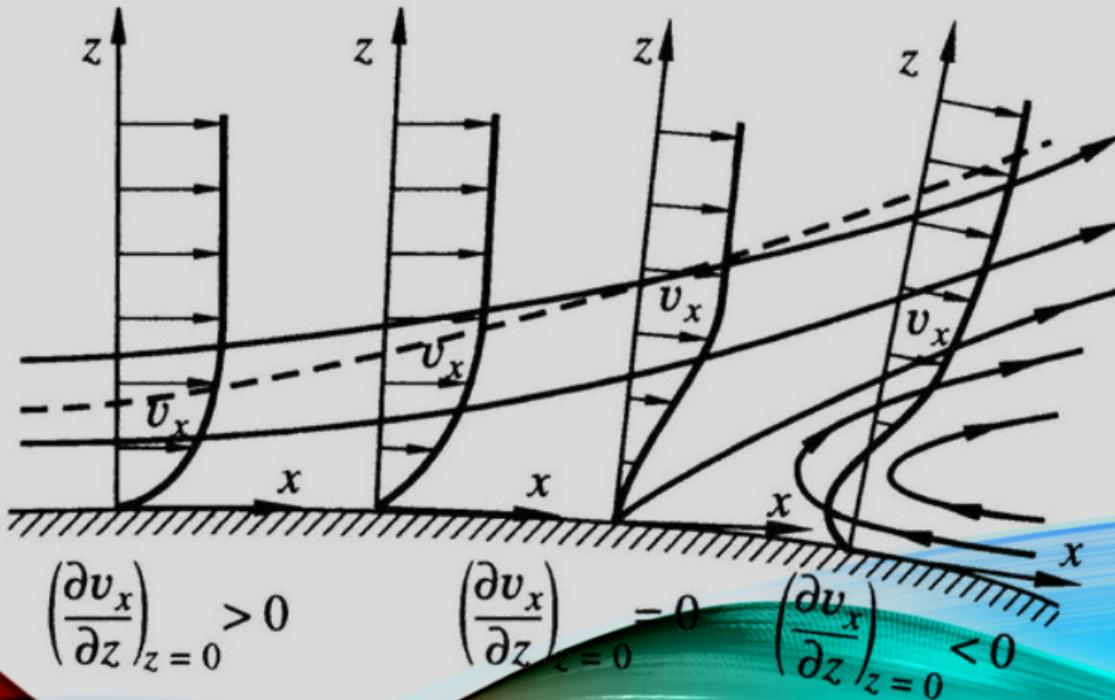
Deep autoencoders



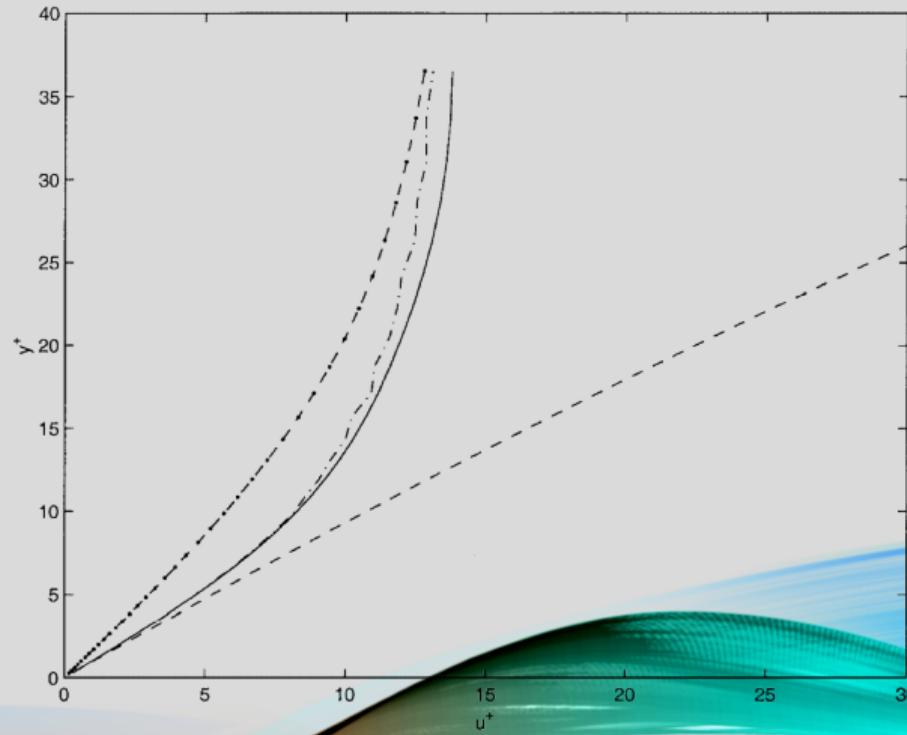
Retain $M < D$ eigenvectors

Oderwanie warstwy przyściennej w kanale rozszerzającym się

oś kanału



Profil warstwy przyściennej obliczony autoenkoderem



Spis treści

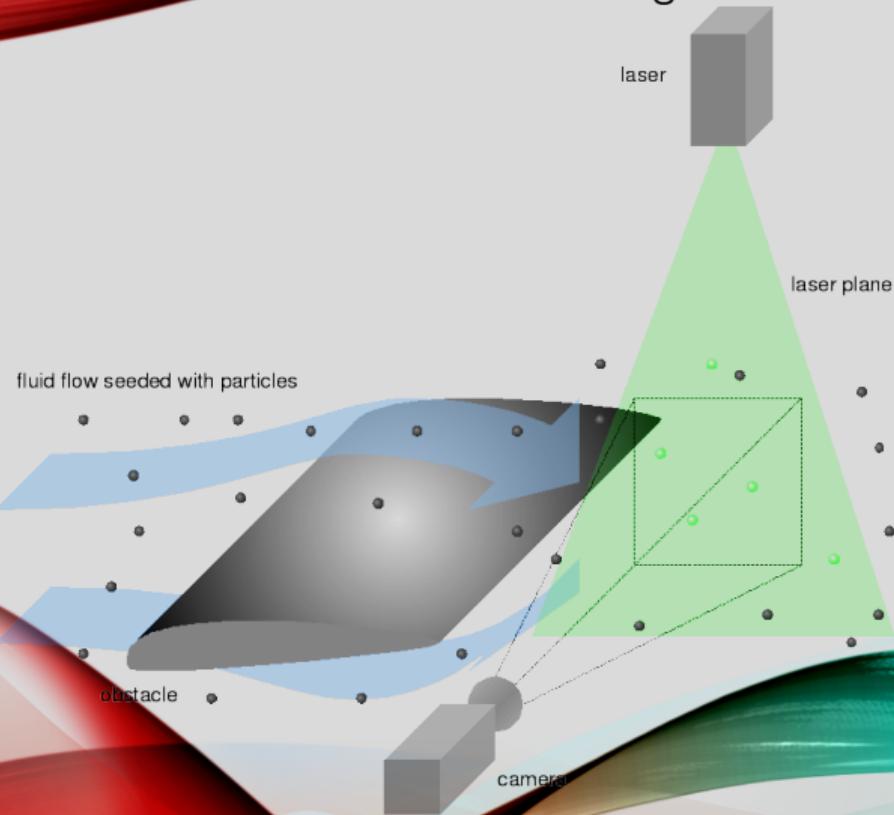
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

2 Wykorzystywane metody i ich zastosowanie

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

Robust POD/PCA

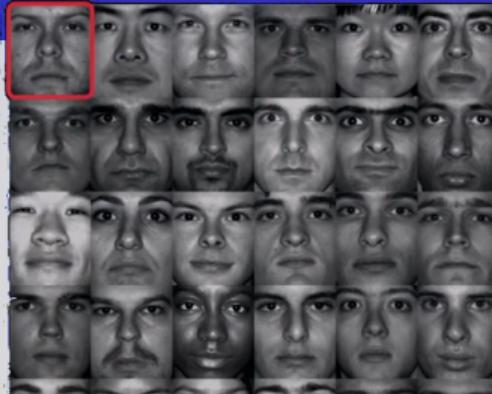
Particle Image Velosimetry



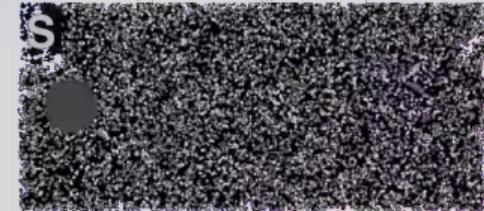
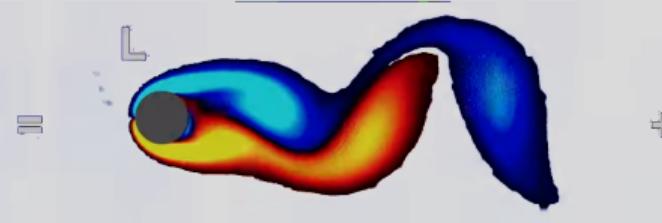
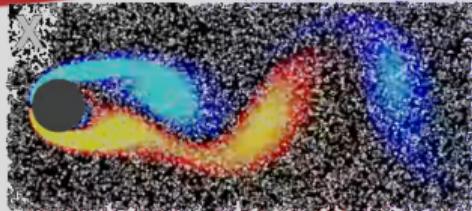
Robust POD/PCA



⋮



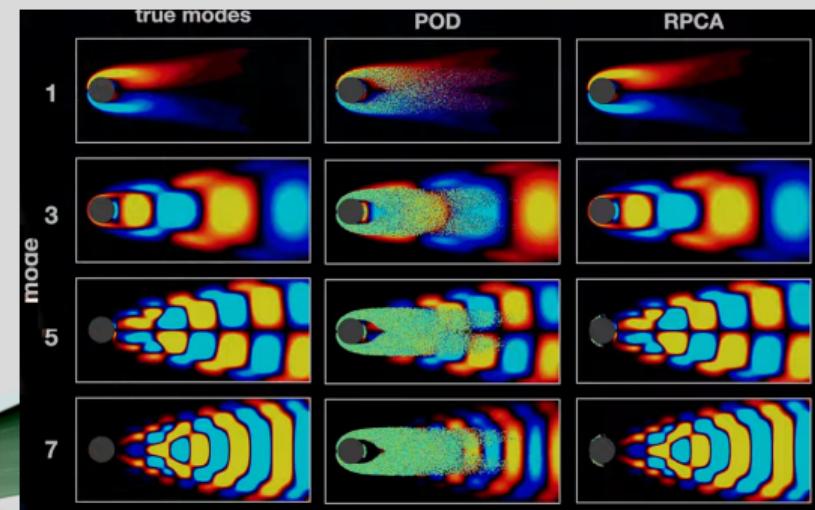
Robust POD/PCA



$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \|S\|_0 \quad \text{subject to } L + S = X$$

Convex Relaxation

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda_0 \|S\|_1 \quad \text{subject to } L + S = X$$





DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

References I

- 📄 Leonardo da'Vinci *Flow.*
- 📄 Steven L. Brunton, Bernd R. Noack, and Petros Koumoutsakos *Machine Learning for Fluid Mechanics.*