

Metody sztucznej inteligencji w mechanice płynów

Temat prezentacji: Redukcja wymiarowości

Kornel Mrozowski

Wydział Matematyki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

April 2021

Spis treści

1 W poprzedniej prezentacji...

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

2 Redukcja wymiarowości DMD

- Rozkład na wektory i wartości własne

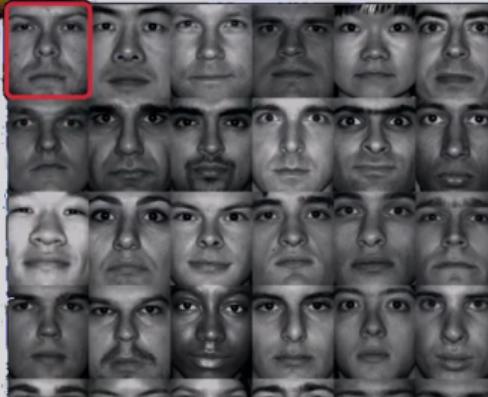
3 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Spis treści

1 W poprzedniej prezentacji...

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Rozkład na wektory i wartości własne
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

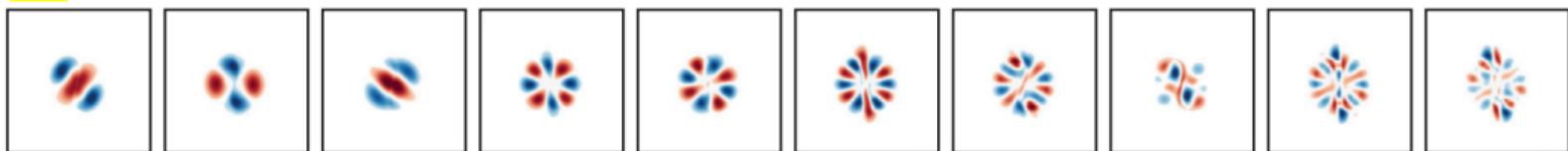


Wektory i wartości własne

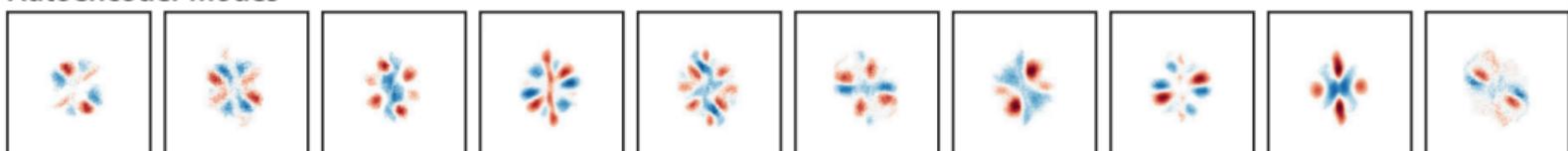
Flow snapshots



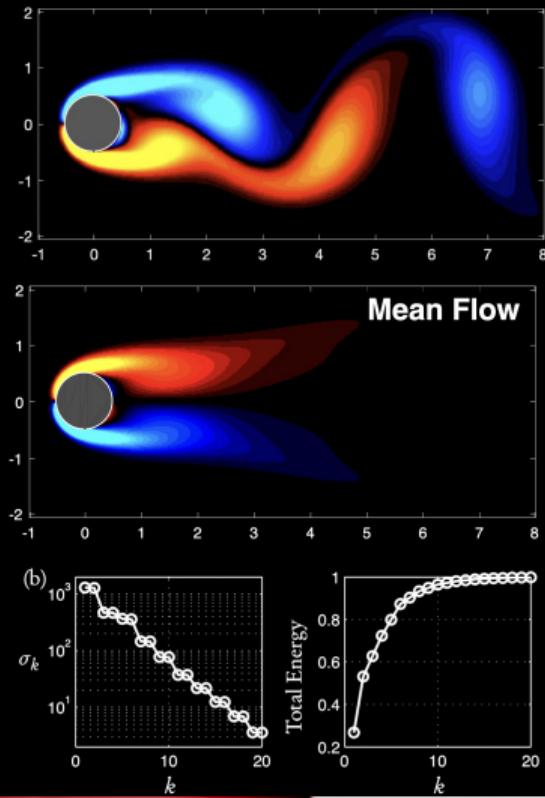
POD modes



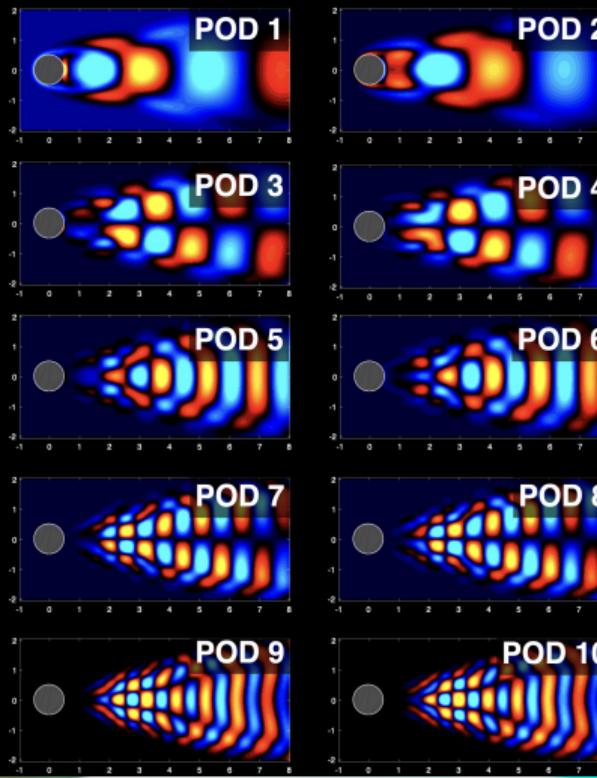
Autoencoder modes



POD/PCA



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^r \varphi_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k(t)$$



Spis treści

1 W poprzedniej prezentacji...

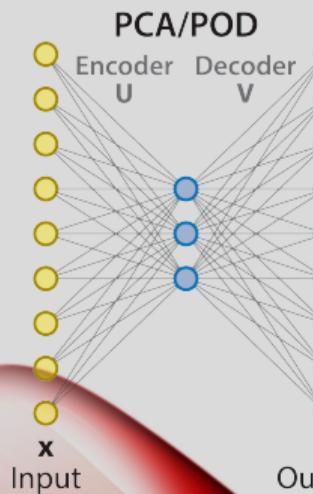
- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Rozkład na wektory i wartości własne
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Principal Component Analisis and Proper Orthogonal Decomposition

Sposób na otrzymanie wartości i wektorów własnych:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \quad \mathbf{S} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})^T \quad \mathbf{S}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

Shallow autoencoder

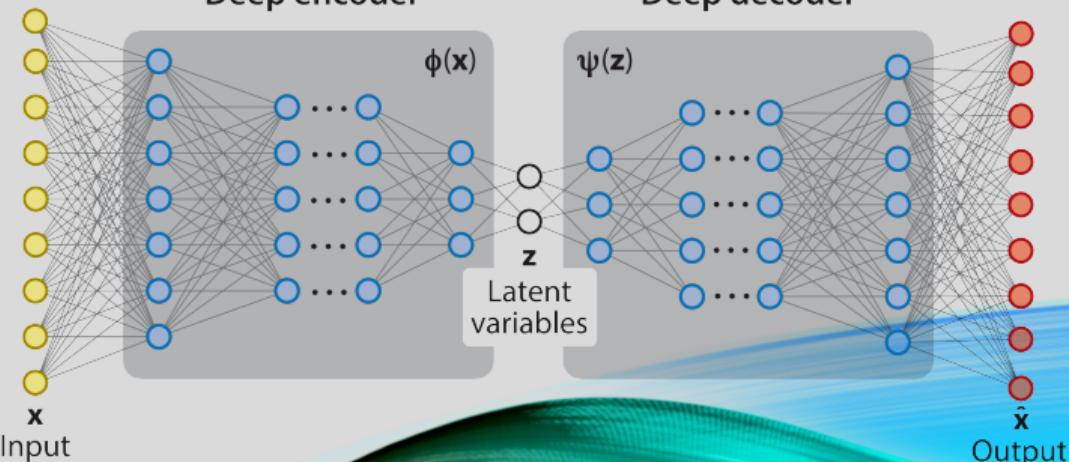


Deep autoencoders

Deep encoder

Deep decoder

Retain $M < D$ eigenvectors



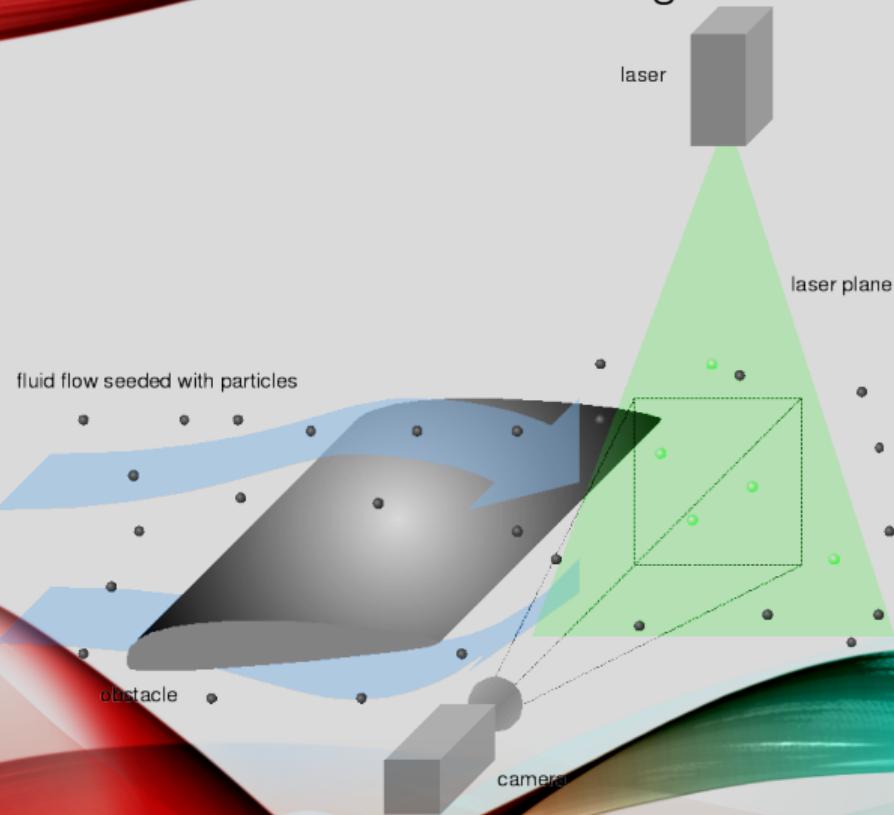
Spis treści

1 W poprzedniej prezentacji...

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Rozkład na wektory i wartości własne
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Robust POD/PCA

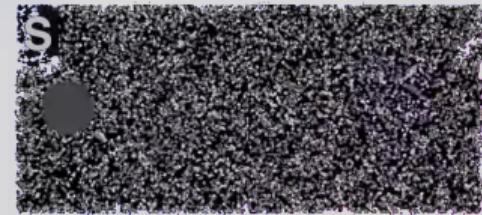
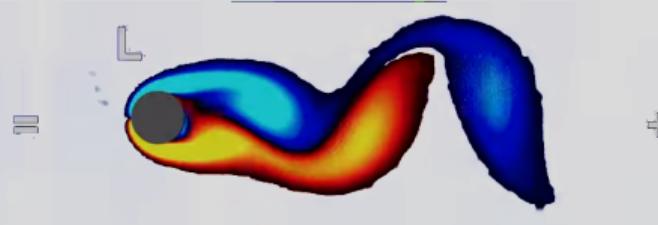
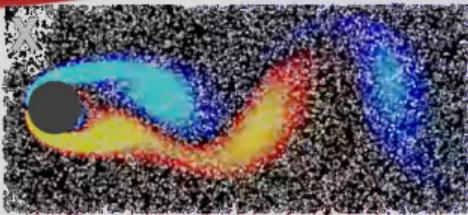
Particle Image Velosimetry



Robust POD/PCA



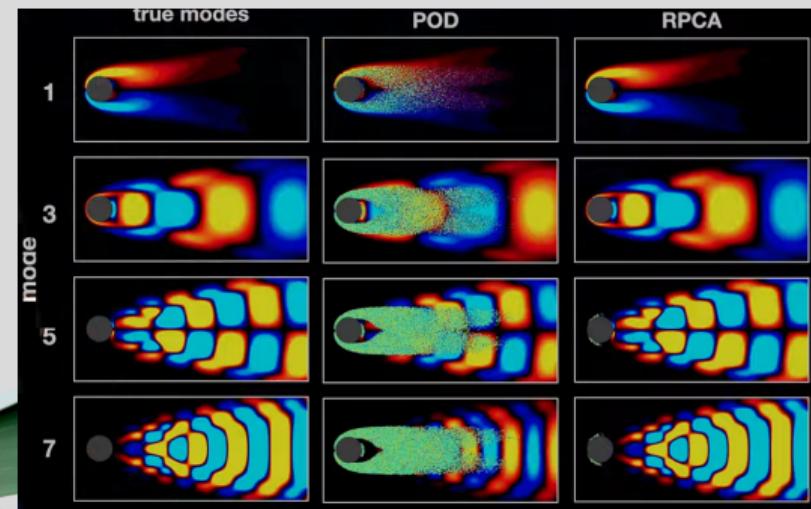
Robust POD/PCA



$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \|S\|_0 \quad \text{subject to} \quad L + S = X$$

Convex Relaxation

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda_0 \|S\|_1 \quad \text{subject to} \quad L + S = X$$



Spis treści

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

2 Redukcja wymiarowości DMD

- Rozkład na wektory i wartości własne
- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Rozkład na wektory i wartości własne

Stany układu w kolejnych chwilach

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t'_1) & \mathbf{x}(t'_2) & \cdots & \mathbf{x}(t'_m) \end{bmatrix}$$

$$t'_k = t_k + \Delta t = t_{k+1}$$

Rozkład X na macierze unitarną, wartości i wektorów własnych

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \mathbf{V}^*$$

Rozkład na wektory i wartości własne

Stany układu w kolejnych chwilach

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t'_1) & \mathbf{x}(t'_2) & \cdots & \mathbf{x}(t'_m) \end{bmatrix}$$

$$t'_k = t_k + \Delta t = t_{k+1}$$

Rozkład \mathbf{X} na macierze unitarną, wartości i wektorów własnych

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^* \end{bmatrix}$$

Spis treści

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Rozkład na wektory i wartości własne

3 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Specyfika mechaniki płynów

a



b



c



Spis treści

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Rozkład na wektory i wartości własne

3 Wprowadzenie

- Specyfika mechaniki płynów
- Równania ruchu

Równania ruchu

Postać różniczkowa (dla stałej objętości skończonej)

Równanie ciągłości:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

Równania Naviera-Stokesa (czyli równania pędu):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \mathbf{f}_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \mathbf{f}_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \mathbf{f}_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right)$$

Równanie energii przepływu lepkiego:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(e + \frac{1}{2} V^2)}{Dt} &= \mu \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \mu v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\mu v \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \mu w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu u \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu v \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu w \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right] \end{aligned}$$



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

References I

- 📄 Leonardo da'Vinci *Flow.*
- 📄 Steven L. Brunton, Bernd R. Noack, and Petros Koumoutsakos *Machine Learning for Fluid Mechanics.*