

Metody sztucznej inteligencji w mechanice płynów

Temat prezentacji: Redukcja wymiarowości

Kornel Mrozowski

Wydział Matematyki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

April 2021

Spis treści

1 Wstęp do otrzymywania modeli z wektorów i wartości własnych

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

2 Redukcja wymiarowości

- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej

Spis treści

1 Wstęp do otrzymywania modeli z wektorów i wartości własnych

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej



≡



Metody sztucznej inteligencji w mechanice płynów

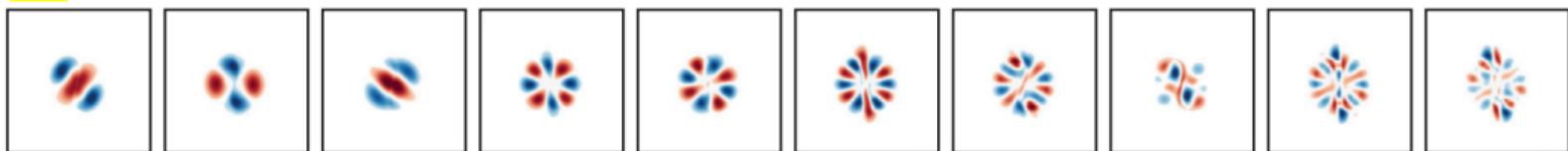


Wektory i wartości własne

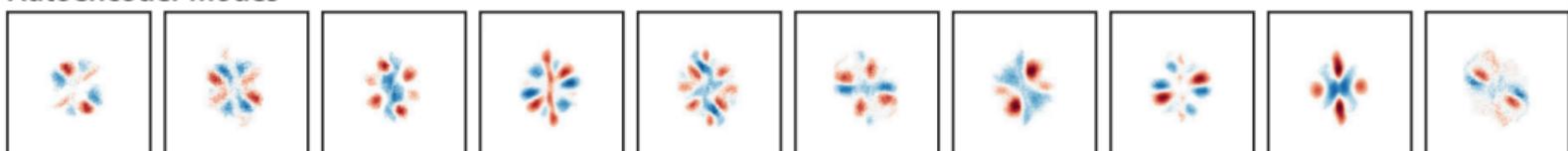
Flow snapshots



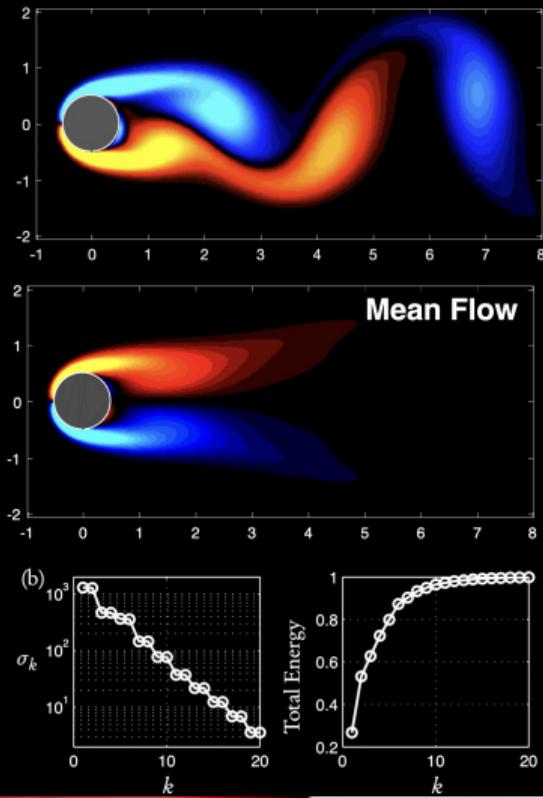
POD modes



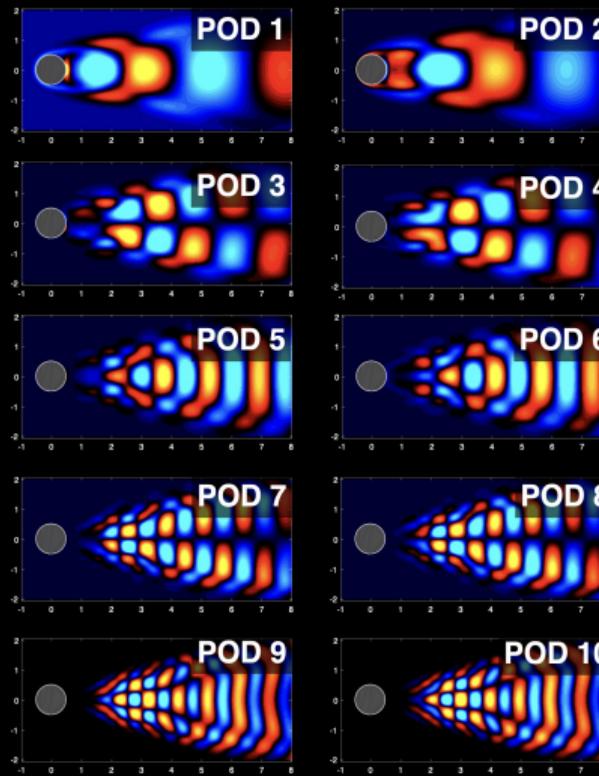
Autoencoder modes



POD/PCA



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^r \varphi_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k(t)$$



Spis treści

1 Wstęp do otrzymywania modeli z wektorów i wartości własnych

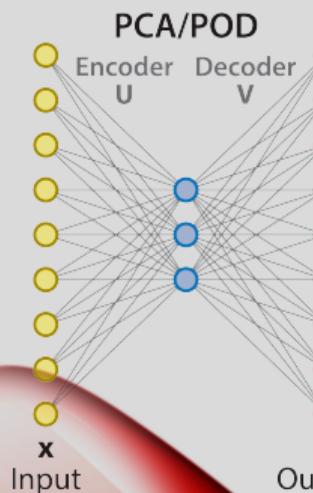
- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej

Principal Component Analisis and Proper Orthogonal Decomposition

Sposób na otrzymanie wartości i wektorów własnych:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \quad \mathbf{S} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})^T \quad \mathbf{S}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

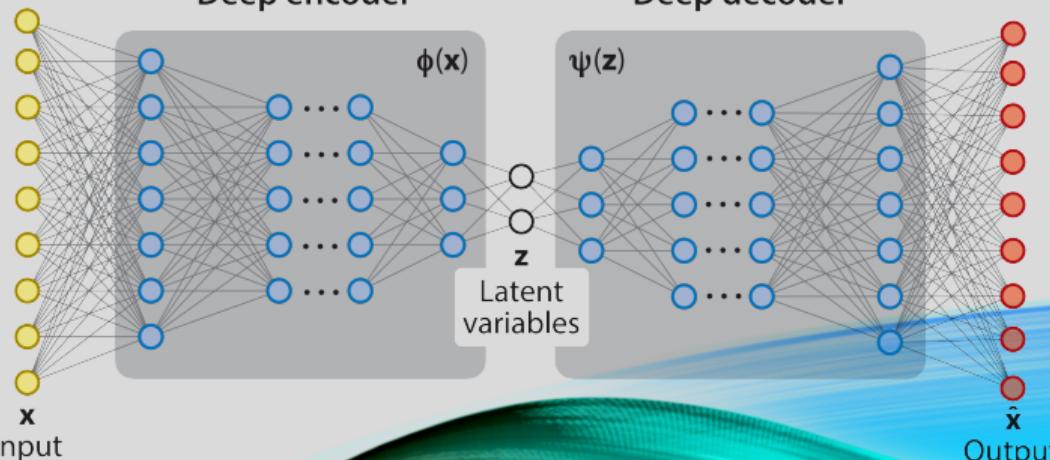
Shallow autoencoder



Deep autoencoders

Deep encoder

Deep decoder



Retain $M < D$ eigenvectors

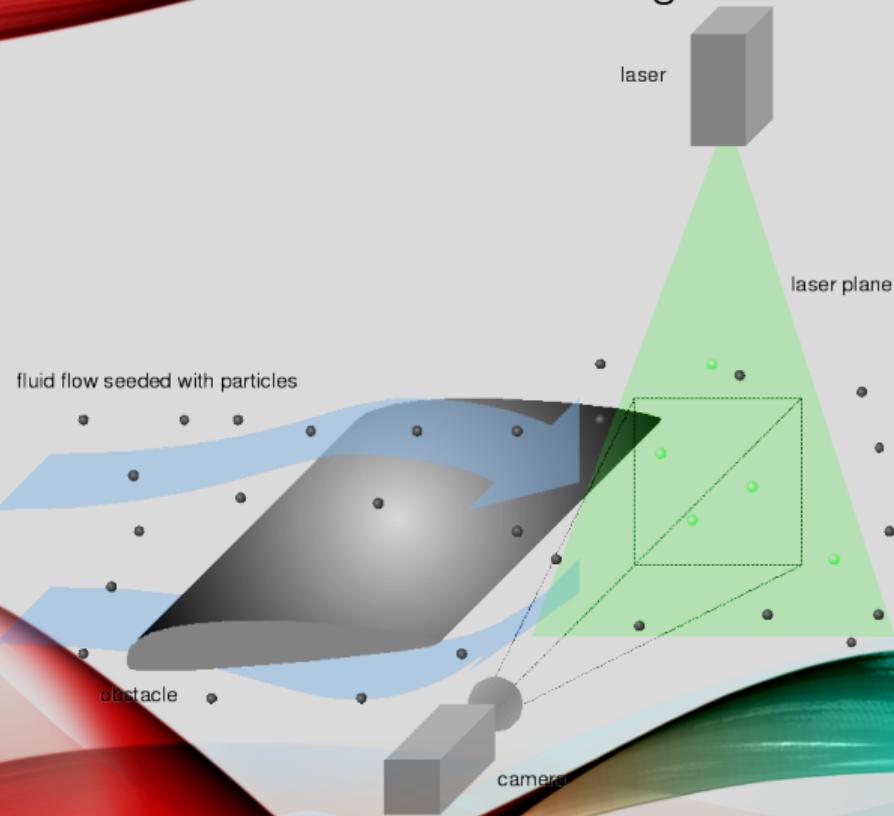
Spis treści

1 Wstęp do otrzymywania modeli z wektorów i wartości własnych

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA
- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej

Robust POD/PCA

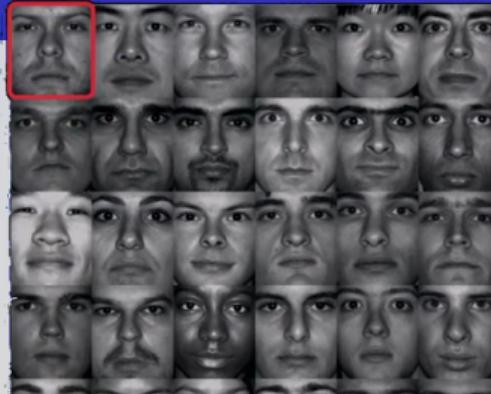
Particle Image Velosimetry



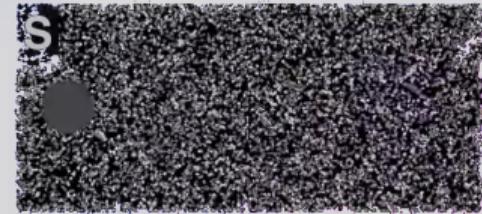
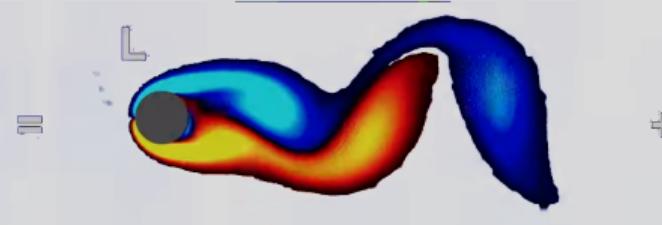
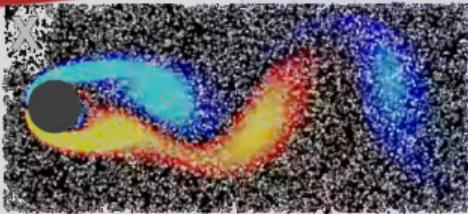
Robust POD/PCA



⋮



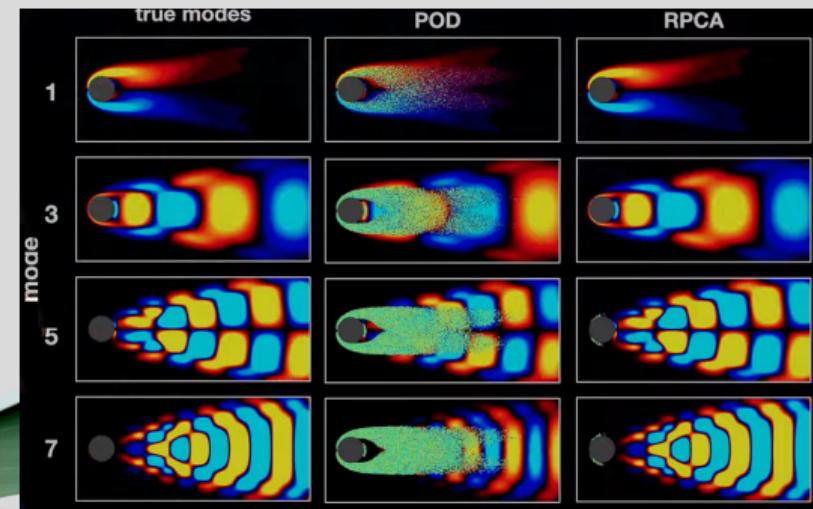
Robust POD/PCA



$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \|S\|_0 \quad \text{subject to} \quad L + S = X$$

Convex Relaxation

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda_0 \|S\|_1 \quad \text{subject to} \quad L + S = X$$



Spis treści

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

2 Redukcja wymiarowości

- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej

Matematyczny model fizyki

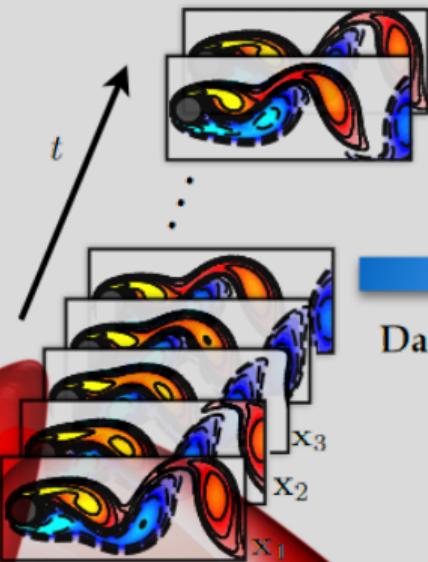
$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = L\mathbf{u}(t) + N(\mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{u}(t) \approx \Phi_r \mathbf{a}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \Phi_r^T L \Phi_r \mathbf{a}(t) + \Phi_r^T N(\Phi_r \mathbf{a}(t))$$

Algorytm Dynamic Mode Decomposition

Experiment



Collect Data

$$X = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-1} \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$
$$A = X' X^\dagger$$

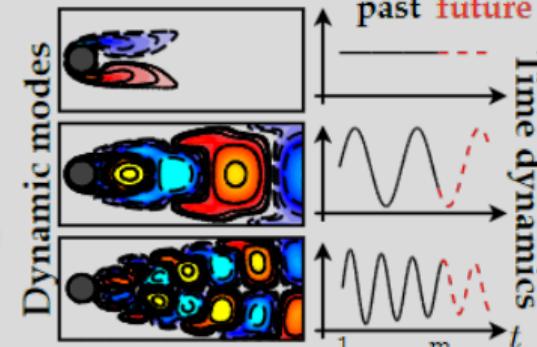
Data

$$X' = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_m \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

Regression

DMD

a) Diagnostics



b) Future state prediction



$$x_{k+1} = Ax_k$$

Algorytm Dynamic Mode Decomposition

svd 1. $\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$

* 2. $\mathbf{U}^*\mathbf{X}'\mathbf{V}\Sigma^{-1} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}}$

eig 3. $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W}\Lambda$

* 4. $\Phi = \mathbf{X}'\mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{W}$

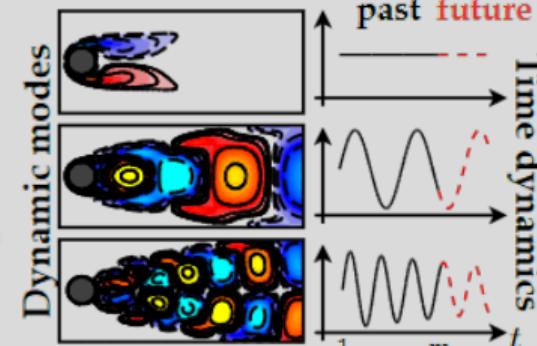


Data $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} & & & \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{bmatrix}$ Regression

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}^\dagger$$

DMD

a) Diagnostics



b) Future state prediction



$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$$

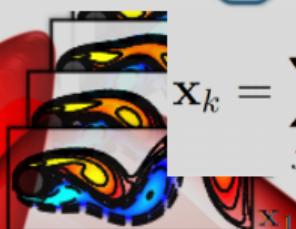
Algorytm Dynamic Mode Decomposition

svd 1. $\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$

* 2. $\mathbf{U}^*\mathbf{X}'\mathbf{V}\Sigma^{-1} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}}$

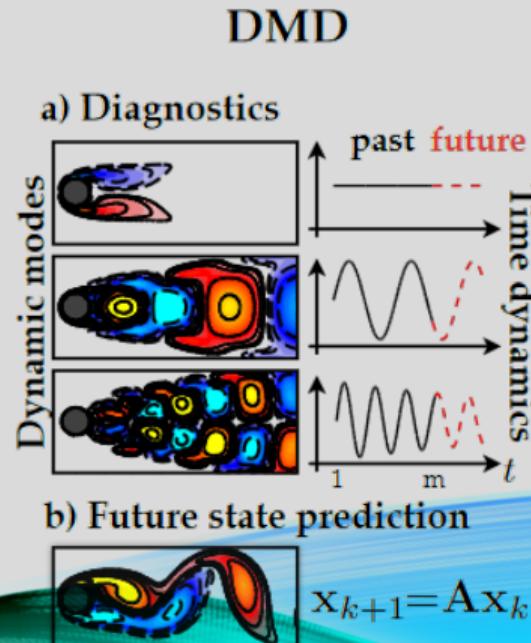
eig 3. $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W}\Lambda$

* 4. $\Phi = \mathbf{X}'\mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{W}$



$$\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^r \phi_j \lambda_j^{k-1} b_j = \Phi \Lambda^{k-1} \mathbf{b}^n$$

$\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}^\dagger$
Regression



Rozkład na wektory i wartości własne

Stany układu w kolejnych chwilach

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t'_1) & \mathbf{x}(t'_2) & \cdots & \mathbf{x}(t'_m) \end{bmatrix}$$

$$t'_k = t_k + \Delta t = t_{k+1}$$

Rozkład \mathbf{X} na macierze unitarną, wartości i wektorów własnych

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \mathbf{V}^*$$

Rozkład według wartości osobliwych

Stany układu w kolejnych chwilach

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t'_1) & \mathbf{x}(t'_2) & \cdots & \mathbf{x}(t'_m) \end{bmatrix}$$

$$t'_k = t_k + \Delta t = t_{k+1}$$

Rozkład \mathbf{X} na macierze unitarną, wartości i wektorów własnych

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}^* \end{bmatrix}$$

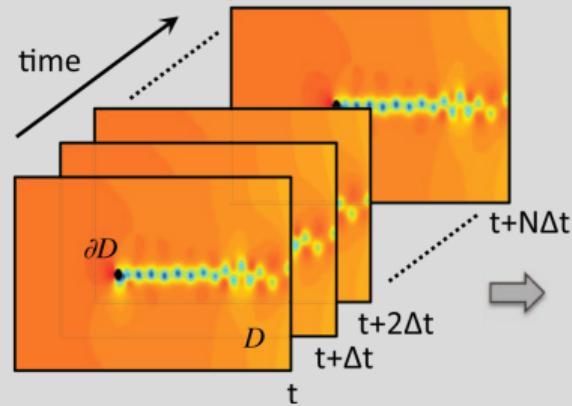
Biblioteka wektorów własnych

$$\mathbf{X}^\mu = \Psi \Sigma \mathbf{W}^* = \Psi_L \Psi_r^\mu$$

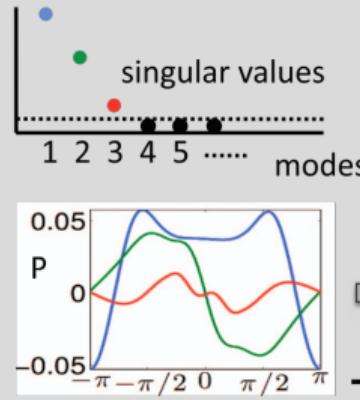
The diagram illustrates the decomposition of a matrix \mathbf{X}^μ into its singular value components. It shows three matrices: Ψ (a tall, narrow gray rectangle), Σ (a diagonal matrix with a dark gray vertical strip in the middle), and \mathbf{W}^* (a wide, tall gray rectangle). Below this, the matrix Ψ_L is shown as a wide gray rectangle, followed by a bracket indicating it is multiplied by Ψ_r^μ , which is represented by a tall, narrow gray rectangle.

Pipeline a,b,c: Reduced Order Modeling

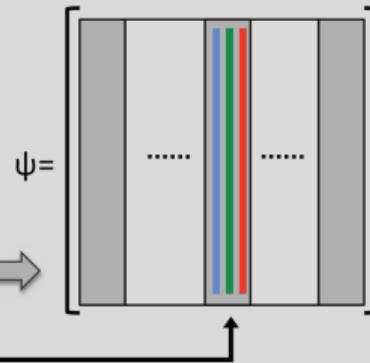
(a) Data sampling



(b) Dimensionality reduction (SVD)

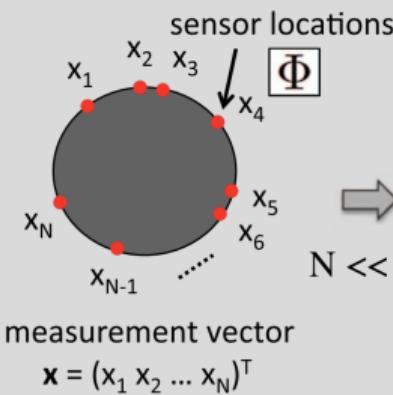


(c) Library



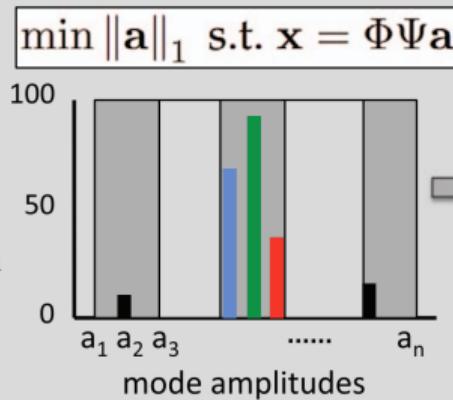
Pipeline d,e,f: Compressive sensing

(d) Sparse sensing

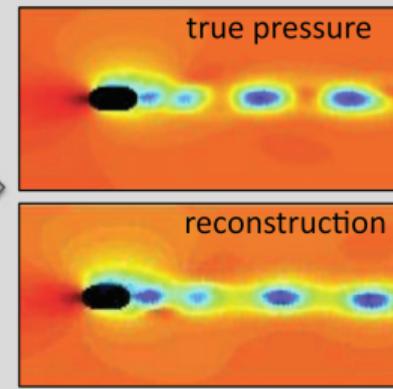


$$N \ll n$$

(e) Classify

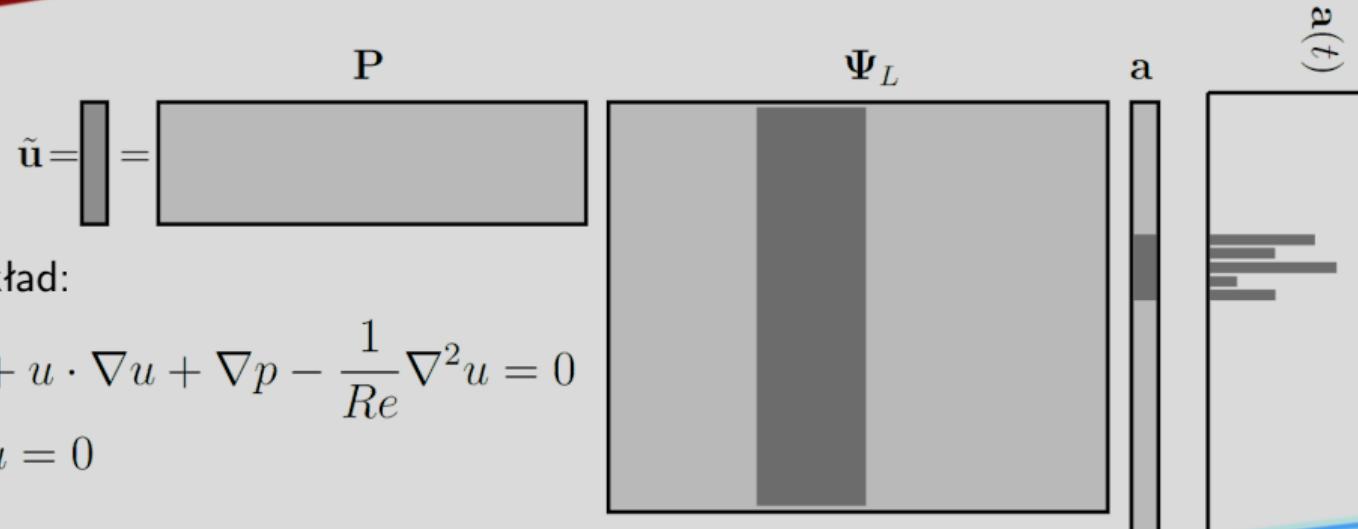


(f) Reconstruct



$$\tilde{x}_i = P x_i$$

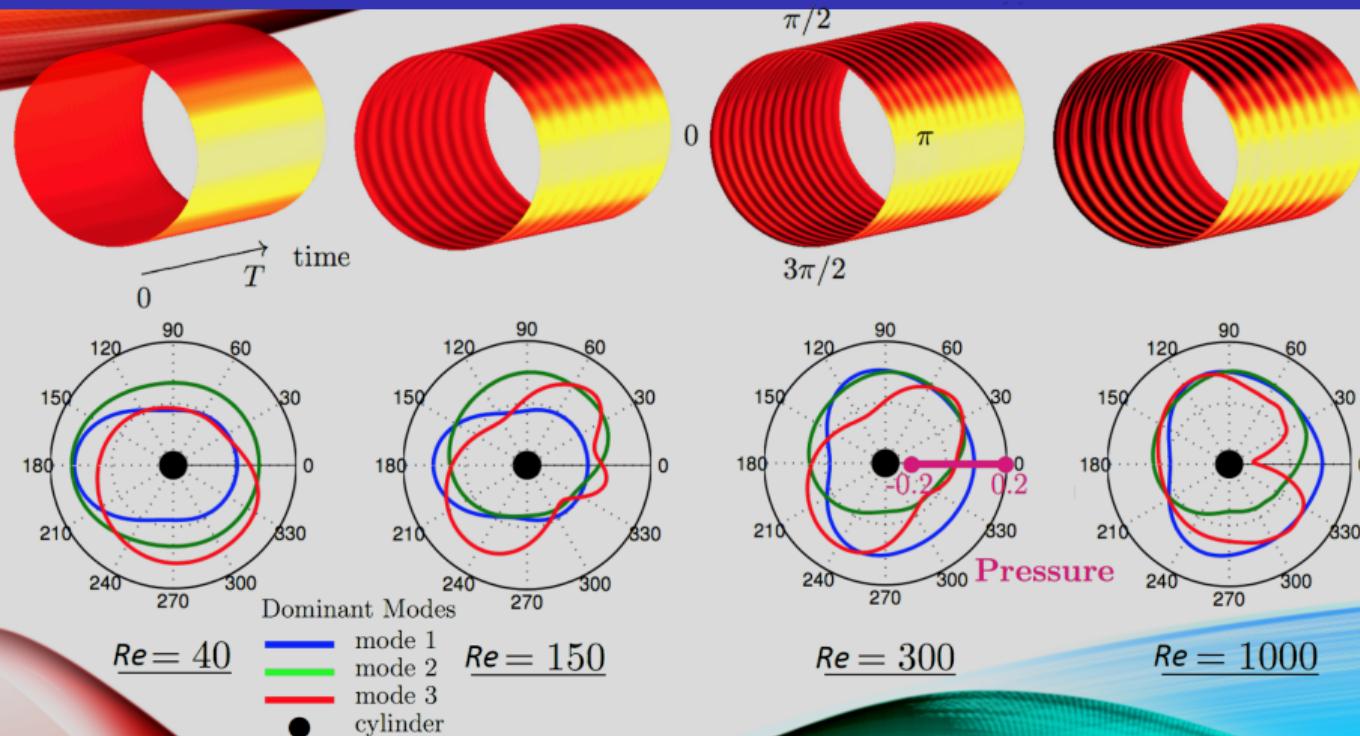
Klasyfikacja: wybieranie wektorów własnych z biblioteki



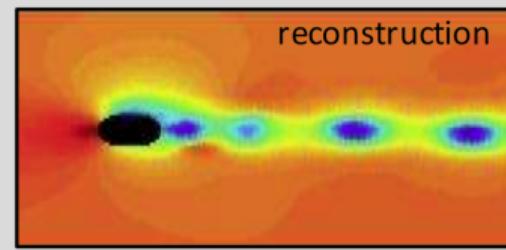
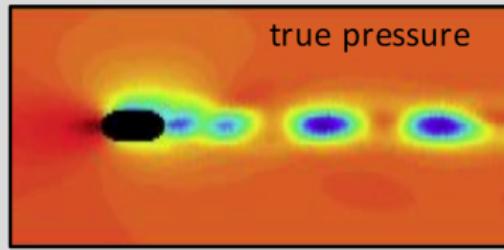
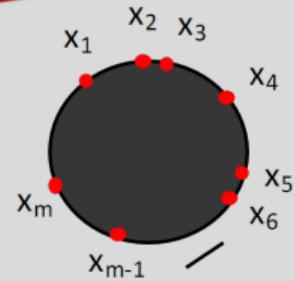
Przykład:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 u = 0$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

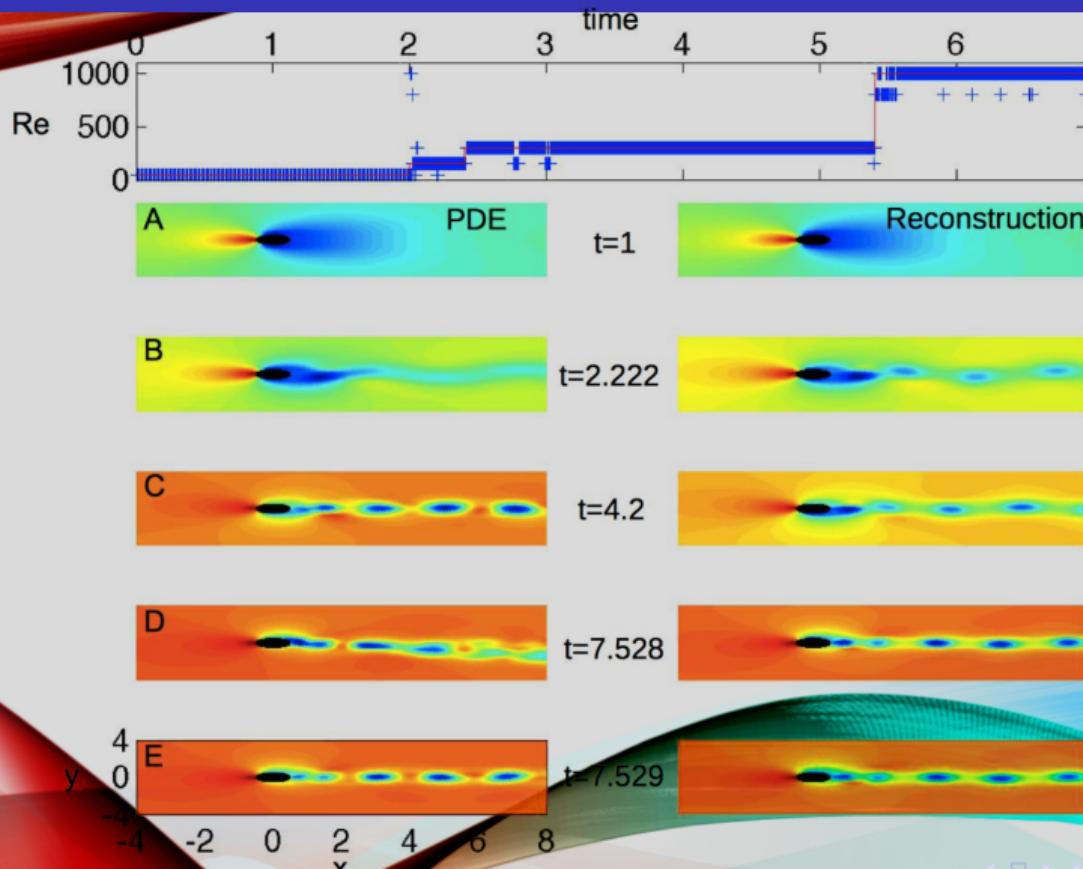
Rekonstrukcja: ciśnienie na powierzchni walca



Rekonstrukcja: ciśnienie wokół walca



Klasyfikacja liczby Reynoldsa przepływu zmiennego w czasie



Spis treści

- Wektory i wartości własne
- PCA and POD
- Robust POD/PCA

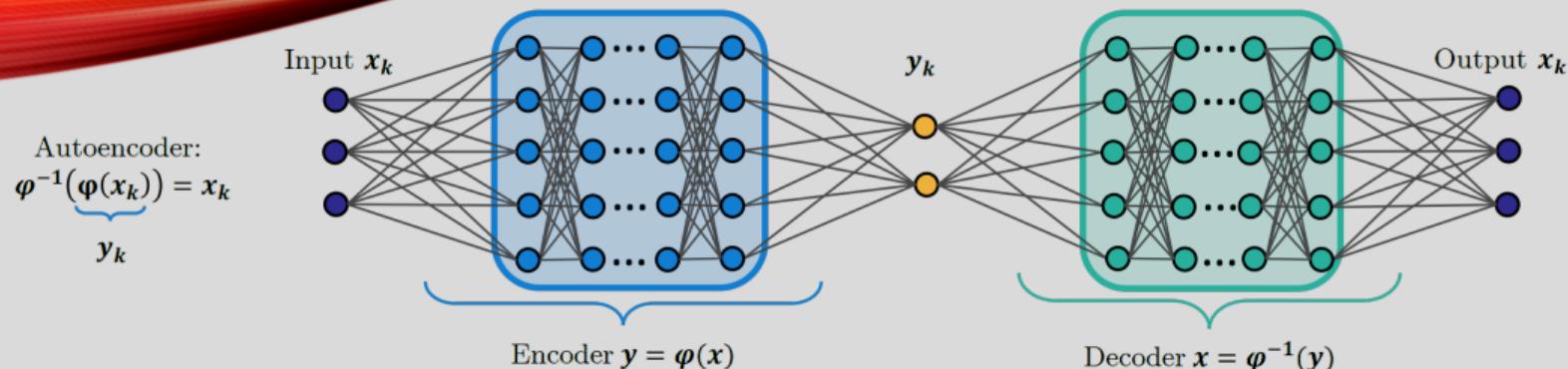
2 Redukcja wymiarowości

- Redukcja wymiarowości z użyciem Dynamic Mode Decomposition
- Redukcja wymiarowości z użyciem sieci neuronowej

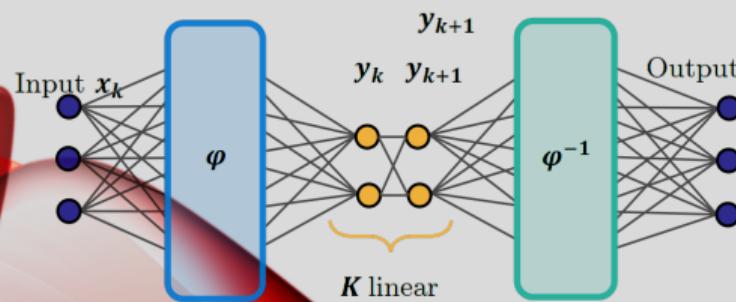
Deep Koopman auto-encoder

$$\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathcal{K}\varphi(\mathbf{x}_k) = \lambda\varphi(\mathbf{x}_k).$$

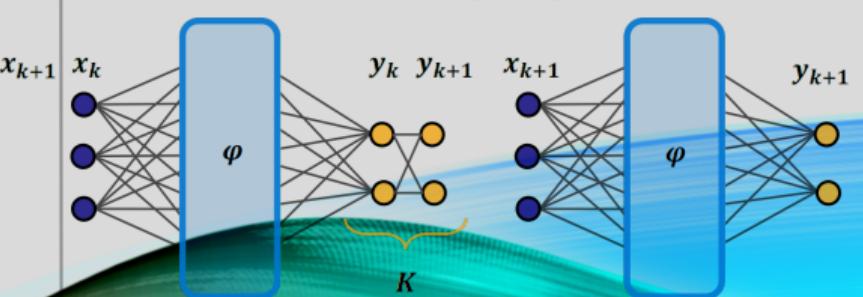
Deep Koopman auto-encoder



Prediction: $\varphi^{-1}(K\varphi(x_k)) = x_{k+1}$

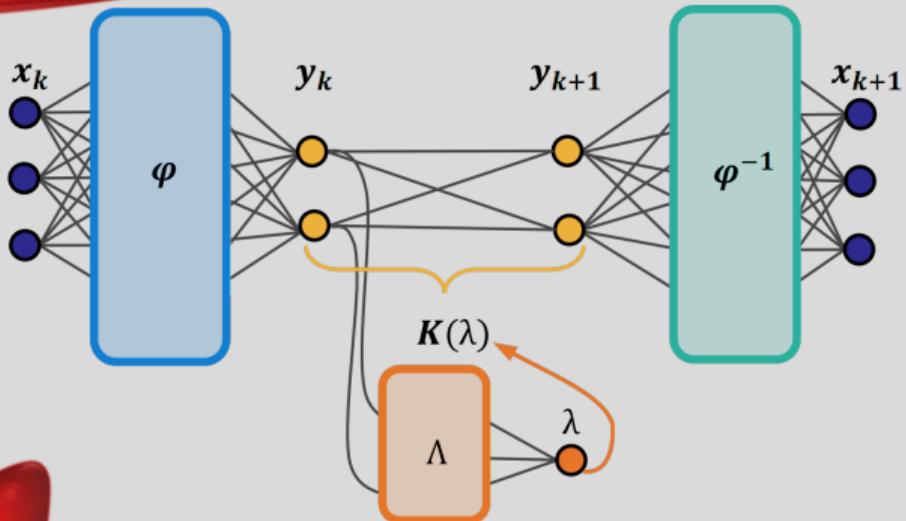


Linearity: $K\varphi(x_k) = \varphi(x_{k+1})$
Network outputs equivalent

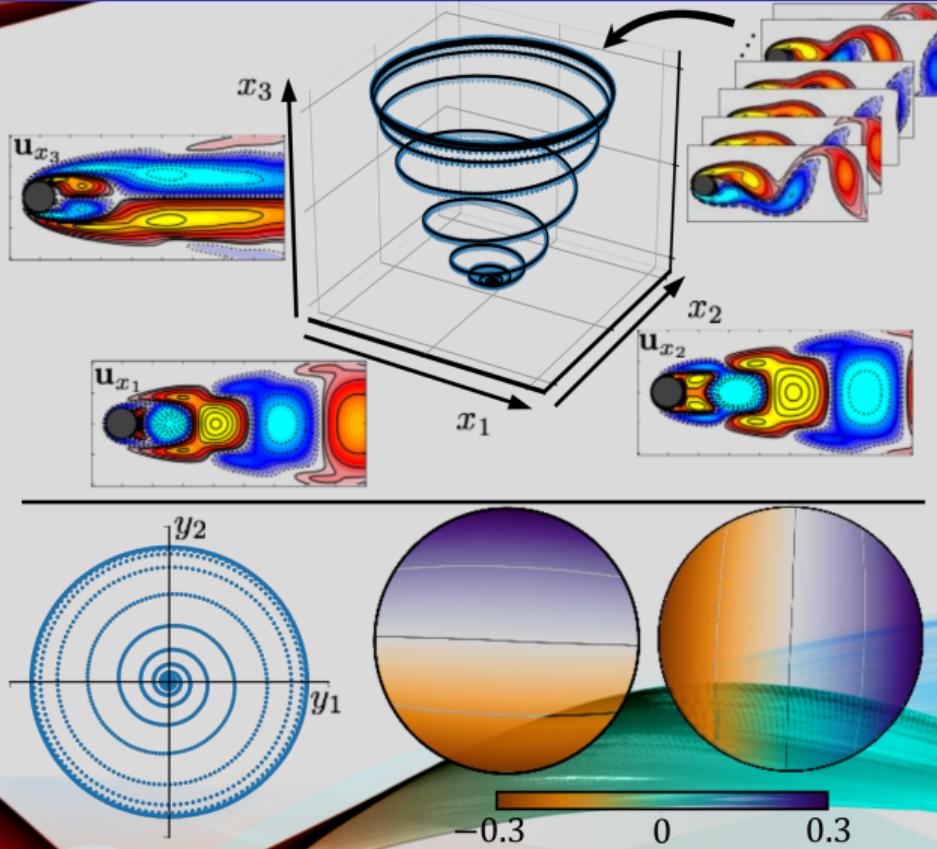


Operator Koopmana K oraz wartości własne: $\varphi(x_{k+1}) = K\varphi(x_k) = \lambda\varphi(x_k)$.

Deep Koopman autoencoder identifying continuous eigenvalue spectrum λ



Wyuczone funkcje własne operatora Koopmana





References I

- Steven L. Brunton, Bernd R. Noack, and Petros Koumoutsakos *Machine Learning for Fluid Mechanics.*
- Bethany Lusch, J. Nathan Kutz, Steven L. Brunton, *Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics.* *Nature Communications*, 9 (2018), p. 4950.
- Bethany Lusch, [github.com/BethanyL/DeepKoopman.](https://github.com/BethanyL/DeepKoopman)