

TP Méthodes Numériques

Modélisation d'une corde de guitare et du tympan

FRANÇOIS GAUTHIER POFINET KEDA

May 4, 2016

Introduction

Au cours de ce projet, nous avons analysés mathématiquement l'émission d'une note par une corde de guitare, et créés sa modélisation visuelle et sonore à partir de nos calculs.

Nous avons ensuite étudiés mathématiquement et modélisés la réception de cette note par la membrane du tympan.

Partie I : Modélisation et simulation d'une corde de guitare

Question 1. Partant de l'équation de la corde qui est la suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

avec $\gamma = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la vitesse de propagation de l'onde.

On cherche une solution de la forme $u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$, avec comme conditions limites $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

En injectant u dans l'équation (1) on trouve cette équation :

$$-\omega^2 U(x) \cos(\omega t) = \gamma^2 U''(x) \cos(\omega t)$$

on peut faire des simplifications par $\cos(\omega t)$ car l'équation doit être satisfaite à tout t d'où :

$$U''(x) = -\frac{\omega^2}{\gamma^2} U(x)$$

En résolvant l'équation différentielle ci-dessus à l'aide de son équation caractéristique on obtient:

$$U(x) = A \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{\gamma} x\right)$$

or $u(0, t) = U(0) = A = 0$ d'où $U(x) = B \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}x\right)$. La condition initiale $u(L, t) = 0$ nous donne $U(L) = B \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}L\right) = 0$. Cela implique $\frac{\omega L}{\gamma} = n\pi$. Pour un n fixé on pose $\omega_n = \frac{n\pi\gamma}{L}$ et $B = B_n$.

Ainsi la solution de l'équation différentielle pour un n fixé est :

$$U_n(x) = B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

L'équation (1) étant linéaire, en appliquant le principe de superposition on a :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right)$$

et donc :

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

Exprimons B_n en fonction de u . Pour cela calculons l'intégrale de u à l'instant 0 multiplié par $\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$:

$$\int_0^L u(x, 0) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

or les formules trigonométriques nous indiquent que :

$$\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)}{2},$$

en posant $a = \frac{n\pi}{L}$ et $b = \frac{k\pi}{L}$. Qui s'annule en l'intégrant lorsque $k \neq n$ et vaut $\frac{L}{2}$ quand $k = n$. En intégrant terme par terme les éléments de la somme on a donc :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

Analyse qualitative. La fréquence fondamentale étant :

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Le son devient plus grave quand L augmente car f_1 diminue. Ce qui est conforme à la réalité : en effet on resserre une corde de guitare pour la rendre plus aiguë.

Soit f'_1 la fréquence correspondant à $\frac{L}{2}$ on a :

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

Donc $f'_1 = 2f_1$. On en déduit que la fréquence croît proportionnellement à la longueur.

Question 2. En effectuant un développement limité de u à l'ordre 2 au point x on a :

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t) = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + O(h^4)$$

d'où par approximation on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2}$$

Donc si N est suffisamment grand on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) = \frac{u_{l+1}^n + u_{l-1}^n - 2u_l^n}{h^2}$$

On fait de même pour t . Par ailleurs,

$$u(x+2h, t) + u(x-2h, t) - 4(u(x+h, t) + u(x-h, t)) + 6u(x, t) \approx h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)$$

D'où l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l, t_k) = \frac{u_{l+2}^n + u_{l-2}^n - 4(u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) + 6u_l^n}{h^4}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_l, t_k) = \frac{\dot{u}_{l+1}^k + \dot{u}_{l-1}^k - 2\dot{u}_l^k}{h^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_l, t_k) = \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1}}{2kh^2}$$

La corde étant régie par l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (2)$$

On a de manière équivalente l'équation :

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

En remplaçant les terme et en identifiant les coefficients on trouve bien

$$a_1 u_{l-1}^{n+1} + a_2 u_l^{n+1} + a_1 u_{l+1}^{n+1} \quad (3)$$

$$+ b_1 u_{l-2}^n + b_2 u_{l-1}^n + b_3 u_l^n + b_2 u_{l+1}^n + b_1 u_{l+2}^n \quad (4)$$

$$+ c_1 u_{l-1}^{n-1} + c_2 u_l^{n-1} + c_1 u_{l+1}^{n-1} \quad (5)$$

$$= 0 \quad (6)$$

avec :

$$a_1 = -\frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_1 = \frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2}$$

$$b_1 = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4}$$

Question 3. Dans les cas des points centraux on retrouve l'équation précédente.

Dans les cas où les points sont situés à l'extrémité de la corde on a : $u_0 = 0$ et $u_N = 0$, il n'y a donc pas de problème.

Dans les cas où les points sont adjacents aux points limites on a :

$$a_1 u_0^{n+1} + a_2 u_1^{n+1} + a_1 u_2^{n+1} \quad (7)$$

$$+ b_2 u_0^n + b_2 u_2^n + (b_3'' - b_1'') u_1^n + b_1 u_3^n \quad (8)$$

$$+ c_1 u_0^{n-1} + c_2 u_1^{n-1} + c_1 u_2^{n-1} \quad (9)$$

$$= 0 \quad (10)$$

$$(11)$$

On trouve un u_1^n en trop, il faut donc bien prendre $u_{-1} = -u_1$ et ajouter $b_1 u_{-1}^n$. On fait de même pour u_{N+1} .

C'est l'utilité du $-b_1$ dans la matrice. Le système est donc équivalent à :

$$\overline{\mathbf{A}} \mathbf{u}^{n+1} + \overline{\mathbf{B}} \mathbf{u}^n + \overline{\mathbf{C}} \mathbf{u}^{n-1} = 0$$

Question 4. En remplaçant les a_i par leurs expressions on a :

$$\begin{cases} a_1 = -\left(\frac{\sigma_1 k}{h^2}\right) \\ a_2 = (1 + \sigma_0 k) + 2\left(\frac{\sigma_1 k}{h^2}\right) \end{cases}$$

D'où l'égalité : $\mathbf{A} = (1 + \sigma_0 k)\mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx}$ après identification des termes.

Pour le calcul de \mathbf{D}_{xxxx} on trouve :

$$\mathbf{D}_{xxxx} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \\ b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4} \\ b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} \end{cases}$$

or :

$$b_3 - b_1 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} - \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{5\kappa^2 k^2}{h^4}$$

D'où l'égalité :

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx}$$

Pour la troisième égalité on pose :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\sigma_1 k}{h^2} \\ c_2 = 2 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} = 2(1 - \sigma_0 k) - 2\frac{\sigma_1 k}{h^2} \end{cases}$$

d'où l'égalité $\mathbf{C} = (1 - \sigma_0 k)\mathbf{I} + \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx}$ en se basant sur le même principe que précédemment.

Question 5. En injectant $\tilde{u}(x, t) = e^{st+j\beta x}$ dans l'EDP (2) on a l'équation suivante :

$$s^2 e^{st+j\beta x} = -\gamma^2 \beta^2 e^{st+j\beta x} - \kappa^2 \beta^4 e^{st+j\beta x} - 2\sigma_0 s e^{st+j\beta x} - 2\sigma_1 s \beta^2 e^{st+j\beta x}$$

qui donne l'équation caractéristique suivante :

$$s^2 + 2(\beta^2 \sigma_1 + \sigma_0)s + \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 = 0$$

Pour avoir un discriminant négatif il faut σ_1 et σ_0 petits devant κ et γ (ce qui est le cas ici). Dans ce cas :

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= \frac{-2(\beta^2 \sigma_1 + \sigma_0) \pm j \sqrt{4(\beta^2 \sigma_1 + \sigma_0)^2 - 4(\gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4)}}{2} \\ &= -\sigma_0 - \sigma_1 \beta^2 \pm j \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 - (\beta^2 \sigma_1 + \sigma_0)^2} \end{aligned}$$

Lorsque σ_0 et σ_1 sont négligeables on a :

$$\omega^2 = \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4$$

On pose $X = \beta^2$ ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \kappa^2 X^2 + \gamma^2 X + \omega^2 = 0 \\ \Delta = \gamma^2 + 4\kappa^2 \omega^2 \\ X = \frac{-\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\kappa^2} \end{cases}$$

X ne pouvant être négatif on en déduit ($\beta^2 = \xi$):

$$\xi(\omega) = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa^2 \omega^2}}{2\kappa^2}$$

On a alors :

$$\sigma(\omega) = -\sigma_0 - \sigma_1 \xi(\omega)$$

Calculons les constante σ_0 et σ_1 . On pose :

$$T_{60}(\omega) = -\frac{6 \ln 10}{\sigma(\omega)}$$

en remplaçant $\sigma(\omega)$ par son expression on a :

$$T_{60}(\omega) = \frac{6 \ln 10}{\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega)}$$

Soit $\omega_1 < \omega_2$ deux fréquences données on a :

$$\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_1) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)} \quad (12)$$

$$\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_2) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)} \quad (13)$$

L'équation (13) nous donne :

$$\sigma_1 = \left(\frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)} - \sigma_0 \right) \frac{1}{\xi(\omega_2)}$$

On injecte (13) dans (12) et on a :

$$\sigma_0 + \frac{\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2)} \left(\frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)} - \sigma_0 \right) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)}$$

Ce qui donne :

$$\sigma_0 \left(1 - \frac{\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2)} \right) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2)} \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)}$$

$$\sigma_0 \frac{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2)} = 6 \ln 10 \left(\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2)} \left(\frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right) \right)$$

On a alors :

$$\sigma_0 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} \right)$$

partant de (12) on a :

$$\sigma_0 = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)} - \sigma_1 \xi(\omega_1)$$

On injecte (13) dans (12) et on a :

$$\frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)} - \sigma_1 \xi(\omega_1) + \sigma_1 \xi(\omega_2) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)}$$

$$\sigma_1 (\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)) = \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_2)} - \frac{6 \ln 10}{T_{60}(\omega_1)}$$

d'où :

$$\sigma_1 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right)$$

Question 6. Vous trouverez dans les documents fournis le fichier contenant le code scilab permettant de calculer le profil de la corde.

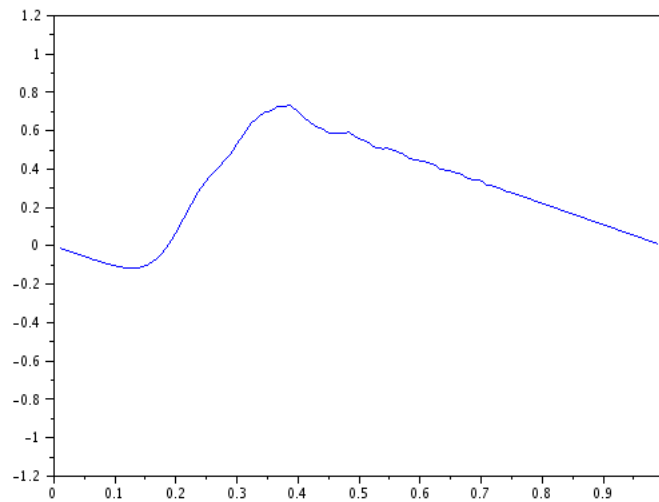


Figure 1: Profil de la corde.

La figure ci-dessous représente les vibrations enregistrées aux positions des micros rp . On pourra remarquer que les figures bleu et rouge sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, ce paraît normale car les deux points où sont enregistrés les vibrations sont symétriques par rapport au milieu de la corde.

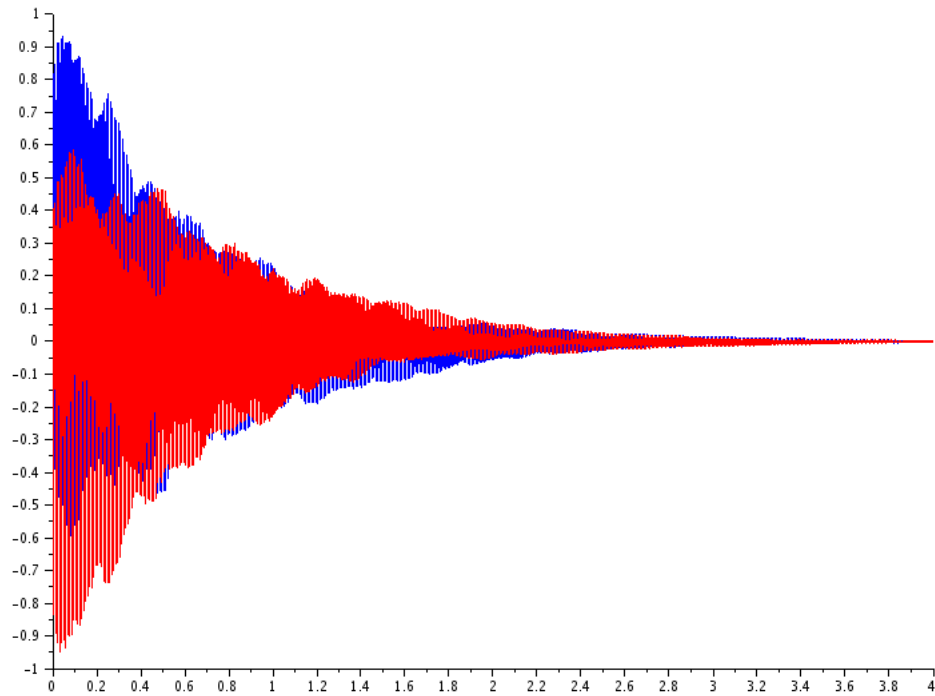


Figure 2: Vibration de la corde au point p_1 , en bleu. Et en rouge on a la vibration au point p_2 .

Question 7. Pour cette question on a effectué les transformées de de Fourier via la commande *fftshift*. Sur le graphique, l'axe des abscisse est la discrétisation du temps. On détermine que le pic maximal de spectre est atteint au alentour de 2.1 par contre nous n'avons pas pu déduire de ce résultat la fréquence fondamentale.

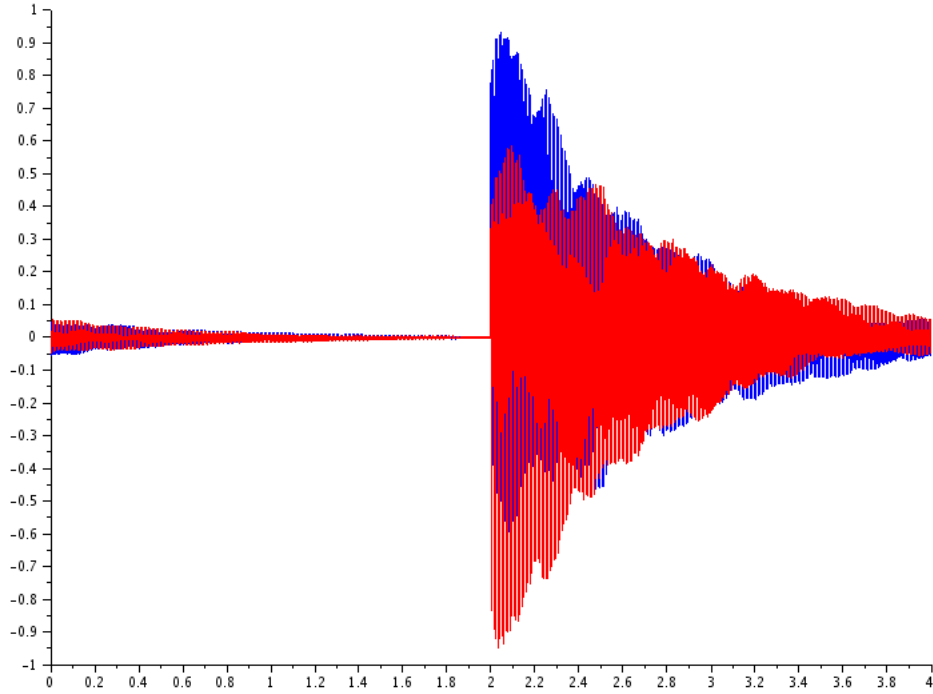


Figure 3: Transformé de Fourier de out_1 en bleu et out_2 en rouge.

Partie II : Modélisation de la membrane tympanique

Question 8. Dans cette question on va transformer le Laplacien, pour l'exprimer en coordonnées cylindrique. On part donc de l'expression :

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

or on a :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

et donc en effectuant la dérivée seconde de w par rapport à x on a :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

Calcul du terme $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} \right)$$

Calcul du terme $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} \right)$$

D'où en additionnant les deux terme on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

De manière analogue on effectue les calculs pour la variable y et on a alors :

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) (a) \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) (b) \\ &+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right) (c) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial y} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right) (d) \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right) (e)$$

On calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

On a également :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin(\theta)}{r} \right) = \frac{\sin(\theta)}{r^2} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos(\theta)}{r} \right) = -\frac{\cos(\theta)}{r^2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta} \cos(\theta) = -\sin(\theta) \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial y} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) = \cos(\theta) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) = 1 \\ (b) = \frac{1}{r^2} \\ (c) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \\ (d) = \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} = 0 \\ (e) = \frac{\sin^2(\theta)}{r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} = \frac{1}{r} \end{array} \right.$$

En injectant les valeurs de (a), (b), (c), (d), et (e) dans le Laplacien cartésien on a donc :

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

Ainsi :

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

ce qui donne :

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

or on a :

$$\begin{cases} \eta = \frac{r}{a} \Rightarrow r = a\eta \\ \partial r = a \partial \eta \\ \partial^2 r = a^2 \partial \eta^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{a^2 \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{a^2 \rho}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

on a aussi :

$$\begin{cases} \tau = \frac{ct}{a} \\ \partial \tau^2 = \frac{c^2 \partial t^2}{a^2} = \frac{T}{\rho a^2} \partial t^2 \end{cases}$$

Après adimensionnement l'équation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \eta \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \tau > 0 \\ w(1, \theta, \tau) = 0 \\ w(\eta, \theta, 0) = w_0(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) \\ \frac{\partial w(\eta, \theta, 0)}{\partial \tau} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Question 9. Partant de l'équation (14) on effectue le développement suivant en utilisant la formule de Taylor :

$$w(r, \theta, t + d\tau) = w(r, \theta, t) + d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w(\xi_+)}{\partial \tau^3}$$

$$w(r, \theta, t - d\tau) = w(r, \theta, t) - d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w(\xi_-)}{\partial \tau^3}$$

$$w(r, \theta, t + d\tau) + w(r, \theta, t - d\tau) = 2w(r, \theta, t) + d\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + O(d\tau^3)$$

On approxime la dérivée seconde de w par rapport au temps au point $(\eta_i, \theta_i, nd\tau)$ par :

$$w_{ij}^{n+1} + w_{ij}^{n-1} \approx 2w_{ij}^n + d\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}$$

On a alors :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \approx \frac{w_{ij}^{n+1} + w_{ij}^{n-1} - 2w_{ij}^n}{d\tau^2}$$

De même on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \approx \frac{w_{i+1,j}^n + w_{i-1,j}^n - 2w_{ij}^n}{d\eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \approx \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j-1}^n - 2w_{ij}^n}{d\theta^2} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \approx \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2d\eta} \end{array} \right.$$

On remplace le η de l'équation (14) par des η_i et les dérivées par leurs approximations et on a :

$$\frac{w_{ij}^{n+1} - 2w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{d\theta^2} + \frac{1}{id\eta} \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2d\eta} \quad (15)$$

Question 10. La condition $w(1, \theta, \tau) = 0$ donne :

$$w_{N_\eta,j}^n = 0$$

La condition $w(\eta, \theta, 0) = w_0(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta))$ donne :

$$w_{ij}^0 = w_0(\eta_i \cos(\theta_j), \eta_i \sin(\theta_j))$$

On effectue le développement limité de w par rapport à t pour exprimer la condition dérivée nul à l'instant initial :

$$w(\eta, \theta, t + d\tau) = w(\eta, \theta, t) + d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\xi_+)$$

ce qui donne :

$$w(\eta, \theta, t + d\tau) - w(\eta, \theta, t) = d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + O(d\tau^2)$$

donc : $w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n = d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau}$, d'où :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{d\tau}}$$

Et donc la condition : $\frac{\partial w}{\partial \tau}(\eta, \theta, 0) = 0$ donne :

$$\frac{w_{i,j}^1 - w_{i,j}^0}{d\tau} = 0$$

donc :

$$\boxed{w_{i,j}^1 = w_{i,j}^0}$$

la condition $w(0, \theta, \tau) = w^0$ donne :

$$\boxed{w_{0,j}^n = w^0}$$

Question 11. On part de l'équation différentielle avec le Laplacien écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \Delta w = T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

En normalisant on trouve :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Avec $x = \eta \cos(\theta)$ $y = \eta \sin(\theta)$. On a par ailleurs :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \approx \frac{w(x, y, t + d\tau) + w(x, y, t - d\tau) - 2w(x, y, t)}{d\tau^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{w(x + dx, y, t) + w(x - dx, y, t) - 2w(x, y, t)}{dx^2} \end{cases}$$

En prenant $dx = dy = d\eta$ on a :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{2,1}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,5}^n}{d\eta^2}$$

De même pour y on a :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{2,3}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,7}^n}{d\eta^2}$$

En additionnant les deux expressions ci-dessus on a la première equation. Pour la deuxième, on fait une rotation de $d\theta$. On additionne ensuite les deux equations et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{w_{1,1}^{n+1} - 2w_{1,1}^n + w_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} &= \frac{w_{2,1}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,5}^n + w_{2,3}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,7}^n}{2d\eta^2} \\ &+ \frac{w_{2,2}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,6}^n + w_{2,4}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,8}^n}{2d\eta^2} \end{aligned}$$

En regroupant les termes deux par deux on a :

$$\frac{w_{1,1}^{n+1} - 2w_{1,1}^n + w_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{1}{2d\eta^2} \sum_{j=1}^8 w_{2,j}^n - w_{1,1}^n$$

$$\frac{w_{1,1}^{n+1} - 2w_{1,1}^n + w_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 w_{2,j}^n - w_{1,1}^n \right)$$

On a donc :

$$\frac{w_{1,1}^{n+1} - 2w_{1,1}^n + w_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} w_{2,j}^n - w_{1,1}^n \right)$$

Ce résultat peu être généraliser car pour $N_\theta > 8$ on refait la démonstration de la même manière.

Question 12. Pour trouver la condition de stabilité du schéma on prend $W_{p_{i,j}}^n$ comme solution de l'équation. On a (pour simplifier les notations on va écrire $w_{i,j}^n$ à la place de $W_{p_{i,j}}^n$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i,j}^n = w_{i,j}^{n+1} e^{I\alpha_3 d\tau} \\ w_{i,j}^{n-1} = w_{i,j}^{n+1} e^{2I\alpha_3 d\tau} \\ w_{i+1,j}^n = w_{i,j}^n e^{I\alpha_1 d\eta} \\ w_{i-1,j}^n = w_{i,j}^n e^{-I\alpha_1 d\eta} \\ w_{i,j+1}^n = w_{i,j}^n e^{I\alpha_2 d\tau} \\ w_{i,j-1}^n = w_{i,j}^n e^{-I\alpha_2 d\tau} \end{array} \right.$$

En remplaçant les expressions des $w_{i,j}^n$ dans l'équation (15) on a :

$$w_{i,j}^{n+1} = K w_{i,j}^n$$

Avec :

$$K = \frac{d\tau^2}{1 - 2e^{I\alpha_3 d\tau} + e^{2\alpha_3 d\tau}} \left(\frac{e^{I\alpha_1 d\eta} - 2 + e^{-I\alpha_1 d\eta}}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2} \frac{e^{I\alpha_2 d\theta} - 2 + e^{-I\alpha_2 d\theta}}{d\theta^2} + \frac{1}{\eta_i} \frac{e^{I\alpha_1 d\eta} + e^{-I\alpha_1 d\eta}}{2d\eta} \right)$$

On a donc :

$$\sup_{(\eta,\theta)} |K| \leq \sup_{(\eta,\theta)} \left(\frac{4d\tau^2}{|1 - 2e^{I\alpha_3 d\tau} + e^{2\alpha_3 d\tau}|} \left(\frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2 d\theta^2} + \frac{1}{4\eta_i d\eta} \right) \right)$$

Nous pensons que la borne sup est même atteinte, car on est sur un compact. Ainsi une condition de stabilité est donc donnée par :

$$\frac{4d\tau^2}{|1 - 2e^{I\alpha_3 d\tau} + e^{2\alpha_3 d\tau}|} \left(\frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2 d\theta^2} + \frac{1}{4\eta_i d\eta} \right) \leq 1$$

Ce qui donne en majorant le dénominateur :

$$4d\tau^2 \left(\frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2 d\theta^2} + \frac{1}{4\eta_i d\eta} \right) \leq |1 - 2e^{I\alpha_3 d\tau} + e^{2\alpha_3 d\tau}| \leq 4$$

Donc :

$$\frac{1}{d\tau^2} \geq \left(\frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2 d\theta^2} + \frac{1}{4\eta_i d\eta} \right) \geq \left(\frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2 d\theta^2} \right)$$

D'où la condition de stabilité :

$$d\tau \leq \frac{\eta d\eta d\theta}{\sqrt{(d\eta^2 + (\eta d\theta)^2)}}$$

Question 13. Le développement de Taylor à l'ordre 3 en temps donne :

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3} + \frac{d\tau^4}{4!} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4}(\xi_+)$$

$$w_{i,j}^{n-1} = w_{i,j}^n - d\tau \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3} + \frac{d\tau^4}{4!} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4}(\xi_-)$$

D'où :

$$w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1} = d\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + O(d\tau^4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{d\tau^2} = O(d\tau^2) = o(d\tau^2)$$

La dernière égalité est obtenu grâce à la continuité. Le schéma est donc d'ordre 2 en temps. De même pour η et θ on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{d\eta^2} = o(d\eta^2) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{d\theta^2} = o(d\theta^2) \end{cases}$$

On a donc $E_t = o(d\tau, d\eta, d\theta)$ ce qui donne :

$$\lim_{(d\tau, d\eta, d\theta) \rightarrow 0} E_t = 0.$$

Question 14. Dans cette question on cherche w de la forme : $w(\eta, \theta, \tau) = F(\eta, \theta) \cos(\omega\tau)$. On effectue les dérivées partielles qui nous donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -\omega^2 F(\eta, \theta) \cos(\omega \tau) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}(\eta, \theta) \cos(\omega \tau) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\eta, \theta) \cos(\omega \tau) \end{array} \right.$$

L'équation vérifiée par F est donc :

$$-\omega^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

La condition limite $F(1, 0) = 0$ nous permet d'écrire :

$$F(\eta, \theta) = \sum_n F_n(\eta) \cos(n\theta)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}(\eta, \theta) = \sum_n F_n'' \cos(n\theta) \\ \frac{\partial F}{\partial \eta}(\eta, \theta) = \sum_n F_n' \cos(n\theta) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\eta, \theta) = -\sum_n n^2 F_n \cos(n\theta) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\sum_n \left(\frac{\partial^2 F_n}{\omega^2 d\eta^2} + \frac{1}{\omega \eta} \frac{dF_n}{d\eta} + \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2 \eta^2} \right) F_n \right) \cos(n\theta) = 0$$

En posant $\alpha = \omega \eta$ on abouti à l'équation suivante :

$$\sum_k \left(\frac{d^2 F_k}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dF_k}{d\alpha} + \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2} \right) F_k \right) \cos(k\theta) = 0$$

On pose :

$$g(\theta) = \sum_k \left(\frac{d^2 F_k}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dF_k}{d\alpha} + \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2} \right) F_k \right) \cos(k\theta)$$

Pour déterminer les equations vérifiées par le F_n , on calcul :

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta = 0$$

En faisant le même raisonnement que celui de la **Question 1** on aboutit à :

$$\frac{d^2 F_n}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dF_n}{d\alpha} + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) F_n = 0$$

Question 15. Vous trouverez dans les documents fournis un fichier contenant les codes **scilab** permettant de créer l'animation représentant les vibrations de la membrane à différents instants.

Question 16. Visuellement on peut constater que les solutions analytiques et numériques on un même comportement.

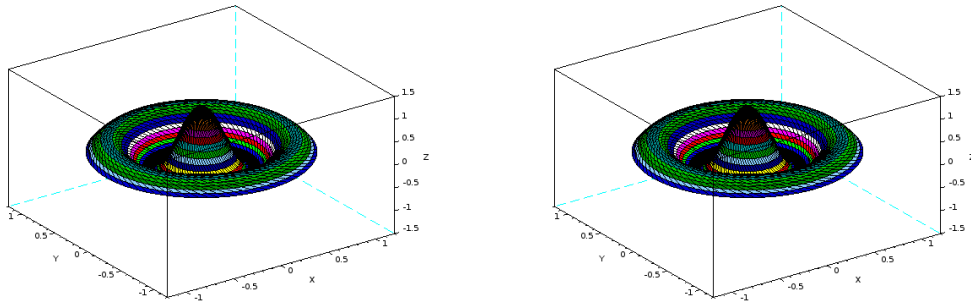


Figure 4: Ces deux images représentent la membrane à l'état initial. A gauche on a le résultat numérique et à droite on a le résultat analytique

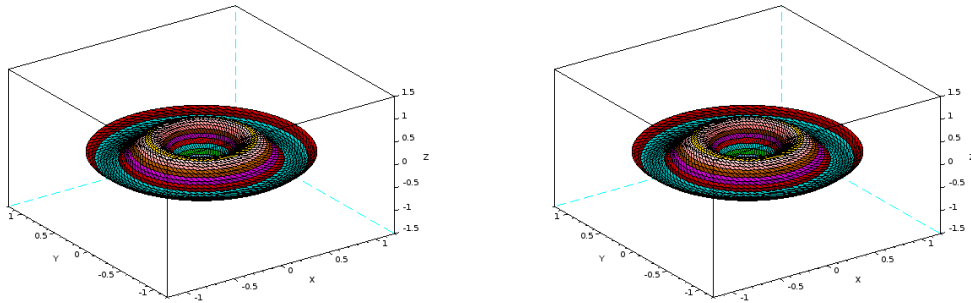


Figure 5: Ces deux images représentent la membrane à un instant différent l'instant initial. A gauche on a le résultat numérique et à droite on a le résultat analytique

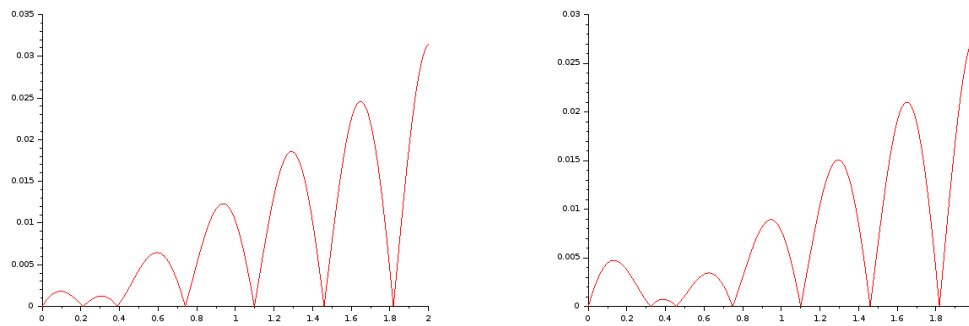


Figure 6: A gauche on a l'erreur relative pour $CFL = 0.50$ et à droite pour $CFL = 0.90$

Quand CFL tend vers 1 on remarque que l'erreur relative en $\eta = 0$ croît de manière significatif aux instant initiaux. Par contre les erreurs sont presque identique quand t grandi.

Question 17. Notre animation sous **scilab** nous donne les images ci-dessous.

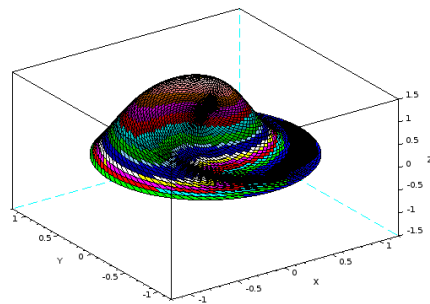


Figure 7: La membrane à l'état initial

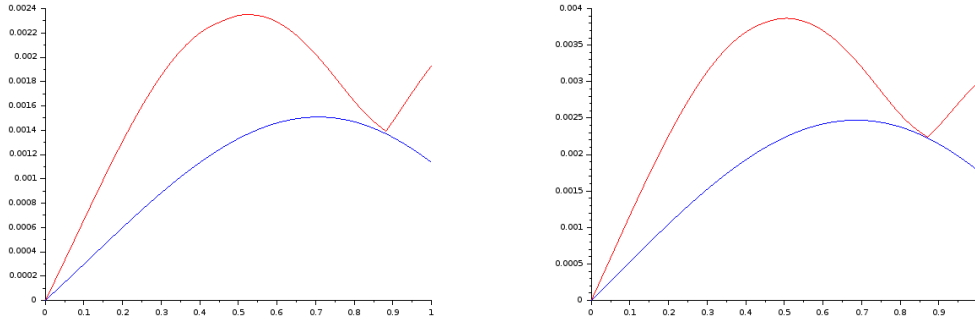


Figure 8: À gauche on a l'erreur relative pour $CFL = 0.50$ et à droite pour $CFL = 0.90$. En rouge on a l'erreur relative globale et en bleu on a l'erreur relative au point $\eta = 0$.

On constate que l'erreur relative globale croît quand CFL croît.

Question 18. Dans les questions précédentes on a vu que les erreurs relatives en $\eta = 0$ croît lorsque CFL tend vers 1. Cette croissance est peut être du à la discrétisation du terme en θ

Question 19. Les figures suivantes représentent les erreurs relative et globales pour trois grilles différentes.

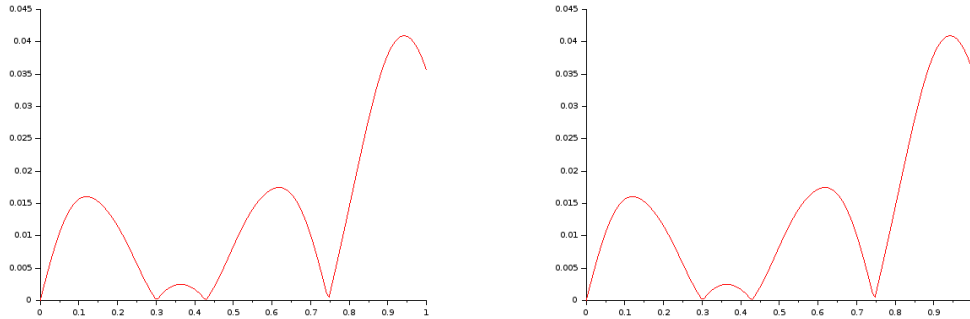


Figure 9: À gauche on a l'erreur relative et à droite on a l'erreur globale pour $(N_\theta = 40, N_\eta = 20)$.

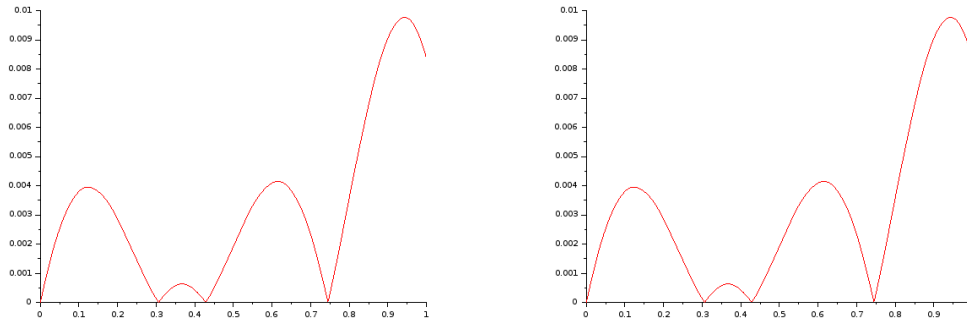


Figure 10: A gauche on a l'erreur relative et à droite on a l'erreur globale pour ($N_\theta = 80$, $N_\eta = 40$).

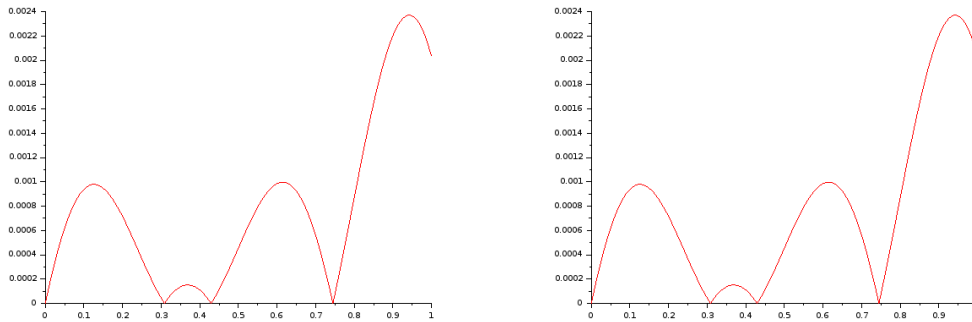


Figure 11: A gauche on a l'erreur relative et à droite on a l'erreur globale pour ($N_\theta = 160$, $N_\eta = 80$).

On constate que globalement l'erreur diminue quand on augmente la taille de la grille.

Question 20. En comparant nos images aux animations sur internet on conclut que le comportement de nos codes est satisfaisant. Voici une image représentant le mode $(1, 1)$.

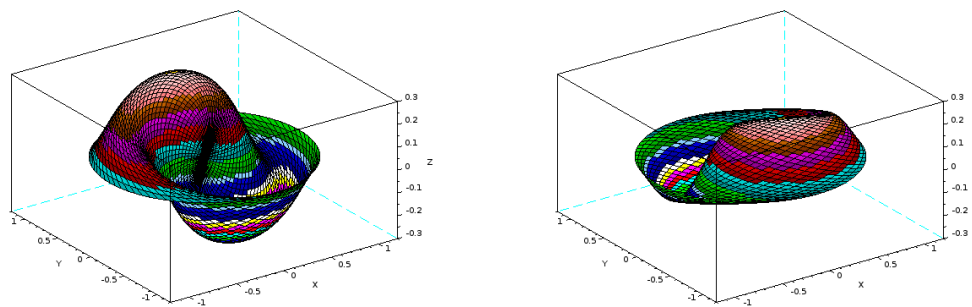


Figure 12: Membrane à deux instants différents.

Conclusion

Les animations faites à partir de nos calculs correspondent à la réalité physique du phénomène, nous avons donc réussi à modéliser la réception du son.