Министерство образования и науки Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА

кафедра «Прикладная механика» (РК-5)

Домашнее задание №5

по дисциплине "Сопротивление материалов"

Вариант 14

Выполнил:

Студент группы РК5-32Б

Приёмко К.С.

Проверил:

Преподаватель **Крупнин А.Е.**

Москва,

2019

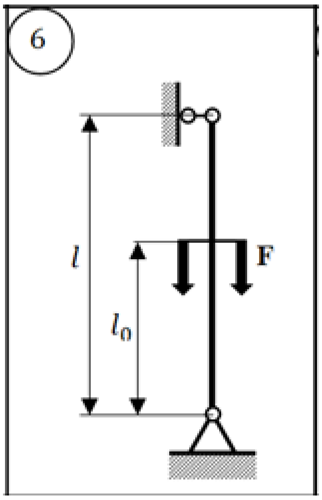
Определить критическую силу и коэффициент приведения длины стойки постоянного сечения.

а) Способом интегрирования дифференциальных уравнений изгиба.

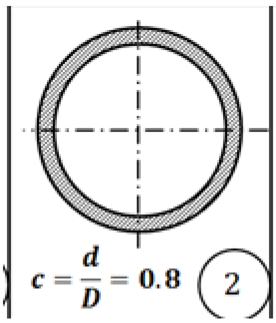
б) Энергетическим способом.

№Варианта	Схема	Сечение	Отношение
14	6	2	2

1. Схема закрепления и нагружения стойки

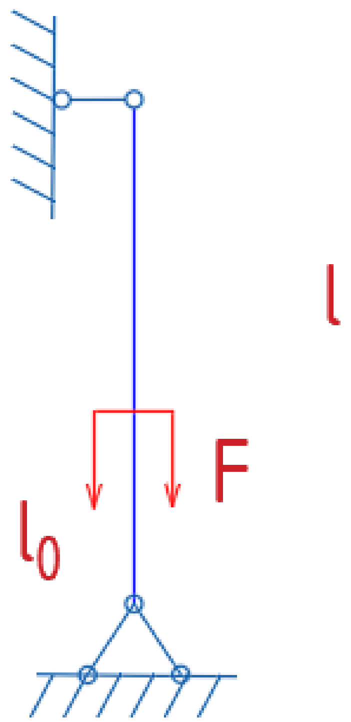


2. Поперечное сечение стойки



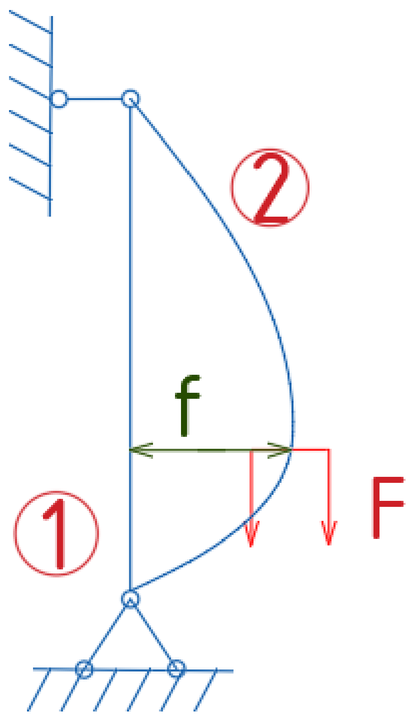
3. Отношение L_0/L = 0.4

1) $\mathcal{Y} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{12} = 0{,}15D^4;$

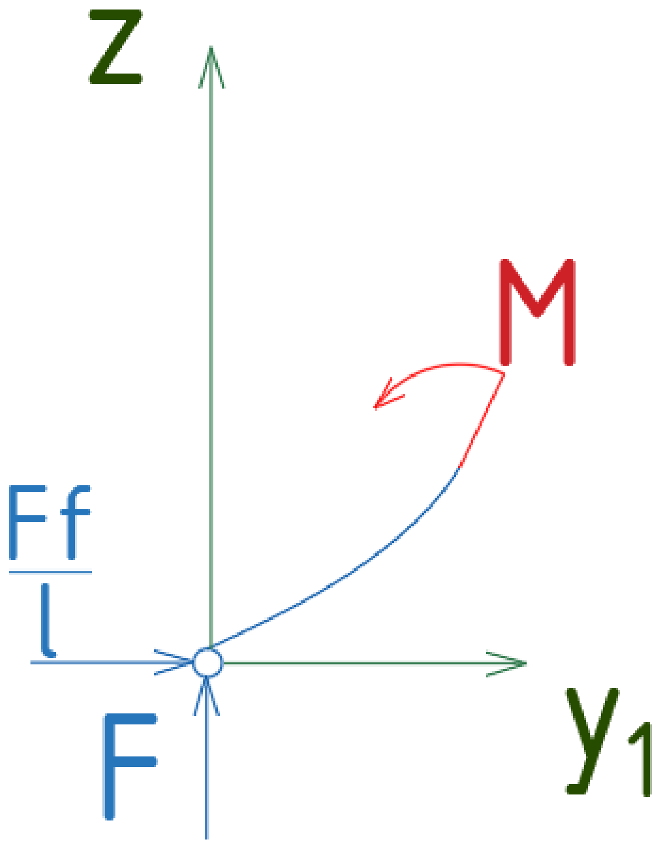


1. **Точный метод.**

   Отбросим связи, заменив их реакциями (реакции были найдены с помощью уравнений статики) и разделим стержень на участки 1 и 2.



Пусть $\alpha^2 = \frac{F}{E\mathcal{Y}}$



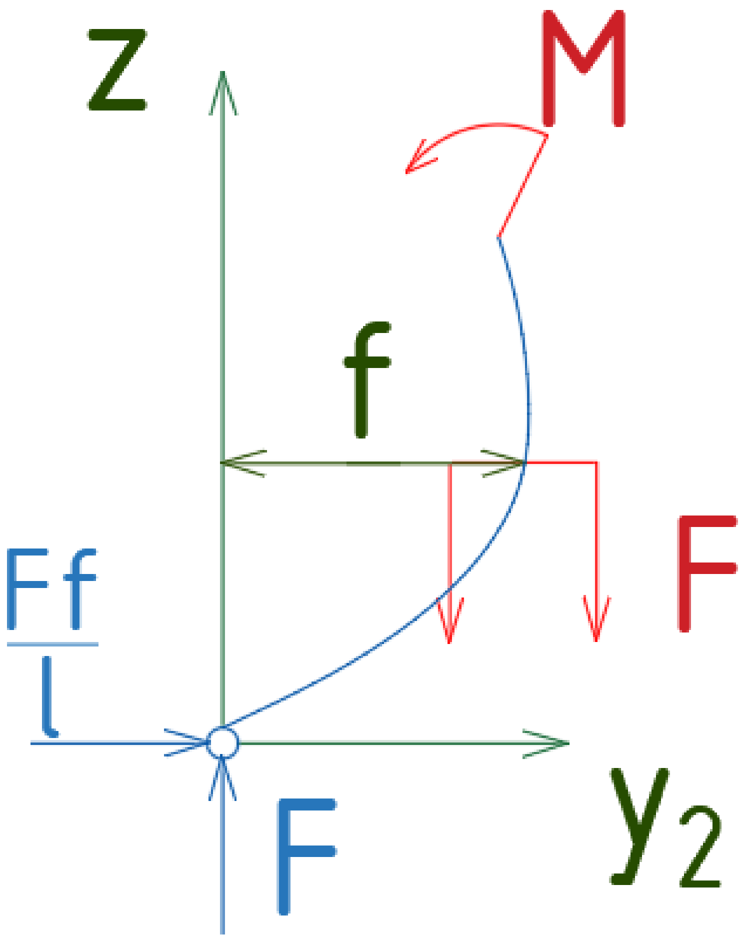
$\sum M = 0;$

$-E\mathcal{Y}y_1^{``} + \frac{Ff}{l}z - Fy_1 = 0;$

$y_1^{``} + \alpha^2 y_1 = \frac{\alpha^2 f}{l}z;$

$y_1 = \text{C1 Sin}[\alpha z] + \text{C2 Cos}[\alpha z] + \frac{f}{l}z;$

Имеет место вариант выбора осей для второго участка сверху (ось y_2 и z_2), тем не менее, для проверки уже полученных на лабораторной работе значений будем использовать оси y_1, y_2 и z (см рис.)



$\sum M = 0;$

$$-E\mathcal{Y}y_2'' + \frac{Ff}{l}z - Fy_2 - F(f - y_2) = 0$$

$$-E\mathcal{Y}y_2'' + \frac{Ff}{l}z - Ff = 0;$$

$$y_2'' = \frac{\alpha^2 f}{l}z - \alpha^2 f;$$

$$y_2 = \frac{\alpha^2 f}{l}\frac{z^3}{6} - \alpha^2 f\frac{z^2}{2} + C3z + C4;$$

Таким образом, получили систему уравнений с 5-ью неизвестными.

$$\begin{cases} y_1 = \ \mathrm{C1}\,\mathrm{Sin}[\alpha z] + \mathrm{C2}\,\mathrm{Cos}[\alpha z] + \dfrac{f}{l} z; \\ y_2 = \dfrac{\alpha^2 f}{l}\dfrac{z^3}{6} - \alpha^2 f \dfrac{z^2}{2} + C3z + C4; \end{cases}$$

Необходимо записать 5 граничных условий (ГУ)

$z = 0 : y_1 = 0;$

$z = l_0 : y_1 = f;$

$z = l_0 : y_2 = f;$

$z = l : y_2 = 0;$

$z = l_0 : y_1^{`} = y_2^{`};$

Подставляя ГУ в систему получим СЛОАУ, которую запишем в матричном виде.

[A][C] = 0;

Так как нас не интересует тривиальное решение (все константы нулевые), приравнивая определитель матрицы A к нулю, находим α (значение k по условию даны – 0,4)

$\alpha = 4.3274;$

Определяем критическую силу и коэф. приведения длины стойки:

$$F_{\text{крит}} = 4.3274^2 \frac{E\mathcal{Y}}{l^2} = \ 18.726 \frac{E\ (0{,}15\mathrm{D}^4)}{l^2} = \ 2.809 \frac{E\ \mathrm{D}^4}{l^2}\ ;$$

$$\mu = \frac{\pi}{\alpha} = 0.726;$$

2. Энергетический метод.

В качестве аппроксимирующей функции возьмём полином 4-ой степени

$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4;$

ГУ примут вид:

$z = 0: v = 0;$

$z = 0: v^{``} = 0;$

$z = l: v = 0;$

$z = l: v^{``} = 0;$

Воспользуемся формулой Тимошенко:

$$F_{\text{крит}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l E\mathcal{Y}(v^{``}(z))^2 dz}{\frac{1}{2}\int_0^{l0} v^{`}(z) dz};$$

Получим

$F_{\text{крит}} = 20.008 \frac{E\ (0{,}15\mathrm{D}^4)}{l^2} = 3 \frac{E\ \mathrm{D}^4}{l^2};$

$\mu = \frac{\pi}{\alpha} = 0.702;$

Погрешность составила 6,8%.

3. Листинг

```
ClearAll["Global`*"]
y1[s_, C1_, C2_, C3_, C4_, f_] := C1 Sin[a s]+C2 Cos[a s]+f s;
 y2[s_, C1_, C2_,C3_,C4_,f_] := a^2 f  s^3/6 - a^2 f  s^2/2 + C3 s + C4;
y1der [s_, C1_, C2_, C3_, C4_, f_] := D[y1[s, C1, C2, C3, C4, f],s];
y2der[s_, C1_, C2_, C3_, C4_, f_] := D[y2[s, C1, C2, C3, C4, f],s];
a11 = ∂C1 y1[0, C1, C2, C3, C4, f]
a12 = ∂C2 y1[0, C1, C2, C3, C4, f]
a13 = ∂C3 y1[0, C1, C2, C3, C4, f]
a14 = ∂C4 y1[0, C1, C2, C3, C4, f]
a15 = ∂f y1[0, C1, C2, C3, C4, f]
a21 = ∂C1 (y1[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a22 = ∂C2 (y1[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a23 = ∂C3 (y1[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a24 = ∂C4 (y1[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a25 = ∂f (y1[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a31 = ∂C1 (y2[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a32 = ∂C2 (y2[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a33 = ∂C3 (y2[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a34 = ∂C4 (y2[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a35 = ∂f (y2[k, C1, C2, C3, C4, f] - f)
a41 = ∂C1 (y1der[k, C1, C2, C3, C4, f] - y2der[k, C1, C2, C3, C4, f])
a42 = ∂C2 (y1der[k, C1, C2, C3, C4, f] - y2der[k, C1, C2, C3, C4, f])
a43 = ∂C3 (y1der[k, C1, C2, C3, C4, f] - y2der[k, C1, C2, C3, C4, f])
a44 = ∂C4 (y1der[k, C1, C2, C3, C4, f] - y2der[k, C1, C2, C3, C4, f])
a45 = ∂f (y1der[k, C1, C2, C3, C4, f] - y2der[k, C1, C2, C3, C4, f])
a51 = ∂C1 y2[1, C1, C2, C3, C4, f]
a52 = ∂C2 y2[1, C1, C2, C3, C4, f]
a53 = ∂C3 y2[1, C1, C2, C3, C4, f]
a54 = ∂C4 y2[1, C1, C2, C3, C4, f]
a55 = ∂f y2[1, C1, C2, C3, C4, f]

A = ({
   {a11, a12, a13, a14, a15},
   {a21, a22, a23, a24, a25},
   {a31, a32, a33, a34, a35},
   {a41, a42, a43, a44, a45},
   {a51, a52, a53, a54, a55}
  })
MatrixForm[A]
det[a_,k_]=Det[A]
Manipulate[{Plot[det[a,k],{a,0,10}],FindRoot[det[a,k]==0,{a,5}]},{k,0,1}]
```

ClearAll["Global`*"]
l1 := 0.4l;
v[z_] = a0 + a1 z + a2 z^2 +a3 z^3 + a4 z^4
CONSTS =Solve[{v[0]==0,v''[0]==0,v[l]==0,v''[l]==0},{a0,a1,a2,a3}]//First
v[z_] = v[z]/. CONSTS
crP=(1/2 $\int_0^{l} EI\,(v''[z])^2\,dz$)/(1/2 $\int_0^{l1} (v'[z])^2\,dz$)
μ=π/$\sqrt{crP\,\frac{l^2}{EI}}$