Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА

кафедра «Прикладная механика» (РК-5)

Домашнее задание №3

по дисциплине “Строительная механика”

«Расчёт дисков»

Вариант 25.

Выполнил:

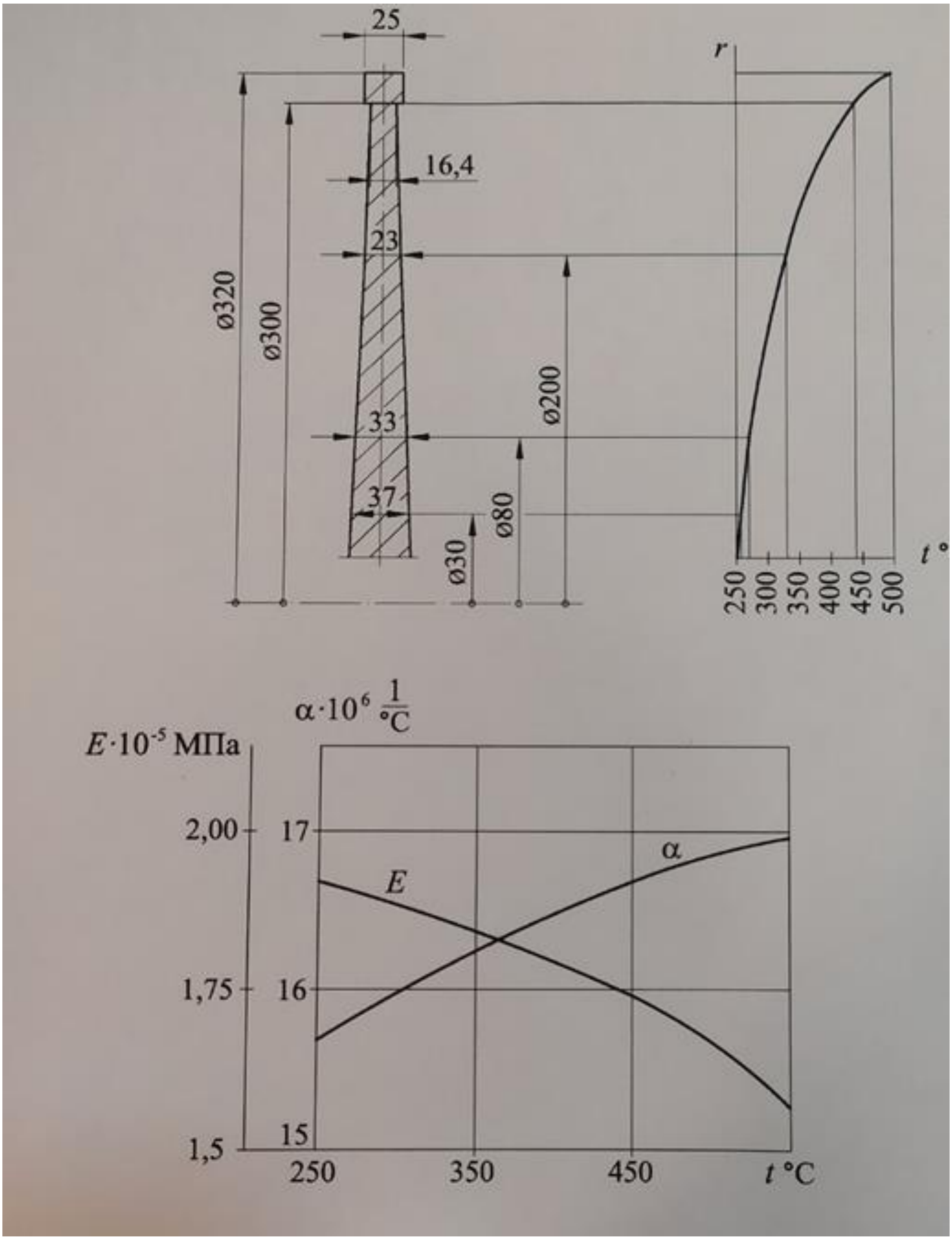
Студент группы РК5-52Б

Приёмко К.С.

Проверил:
Преподаватель
Мясников В.Ю.

Москва,
2019

Условие



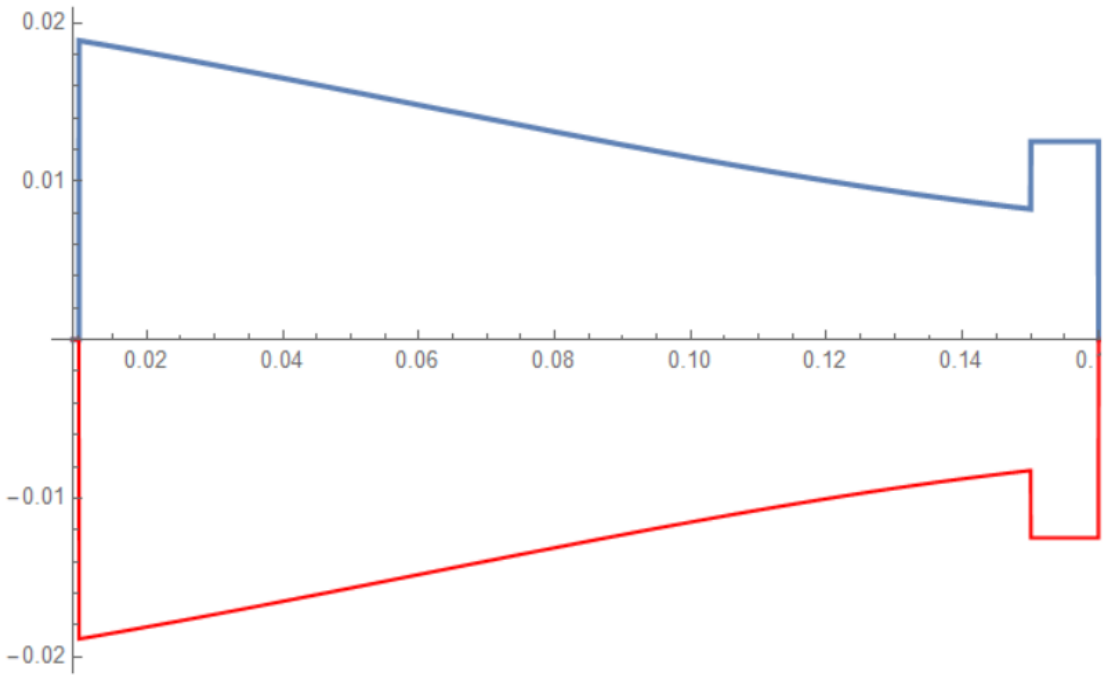
Вариант 25

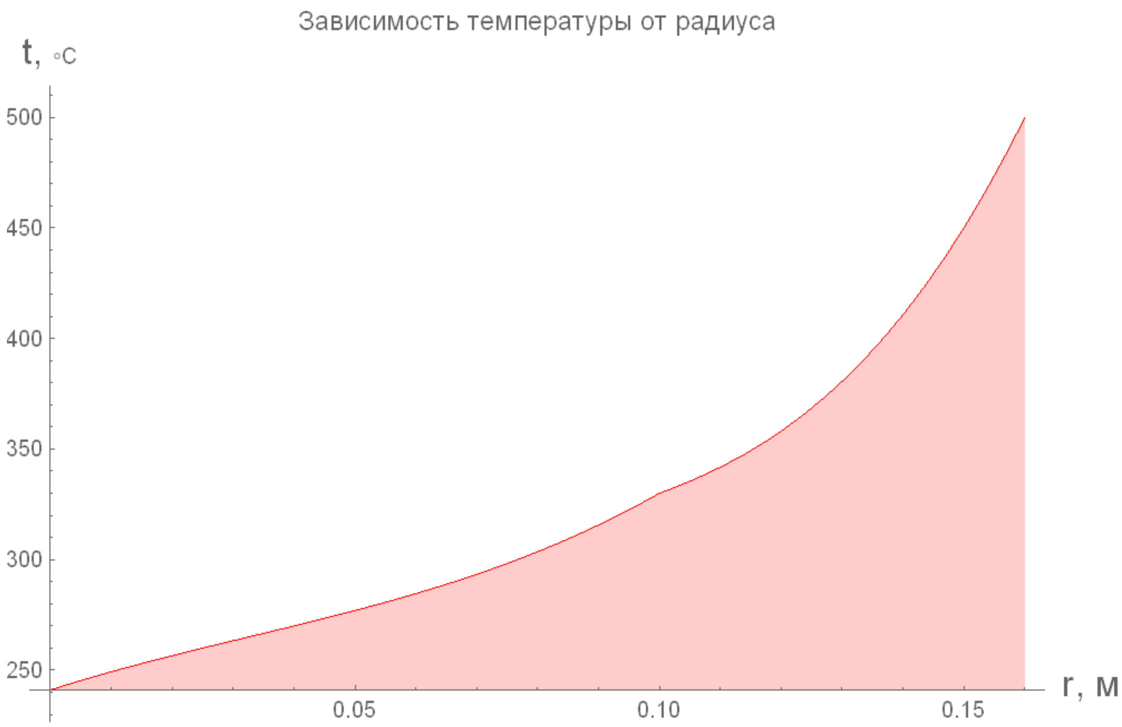
Определить температурные напряжения в диске газовой турбины.

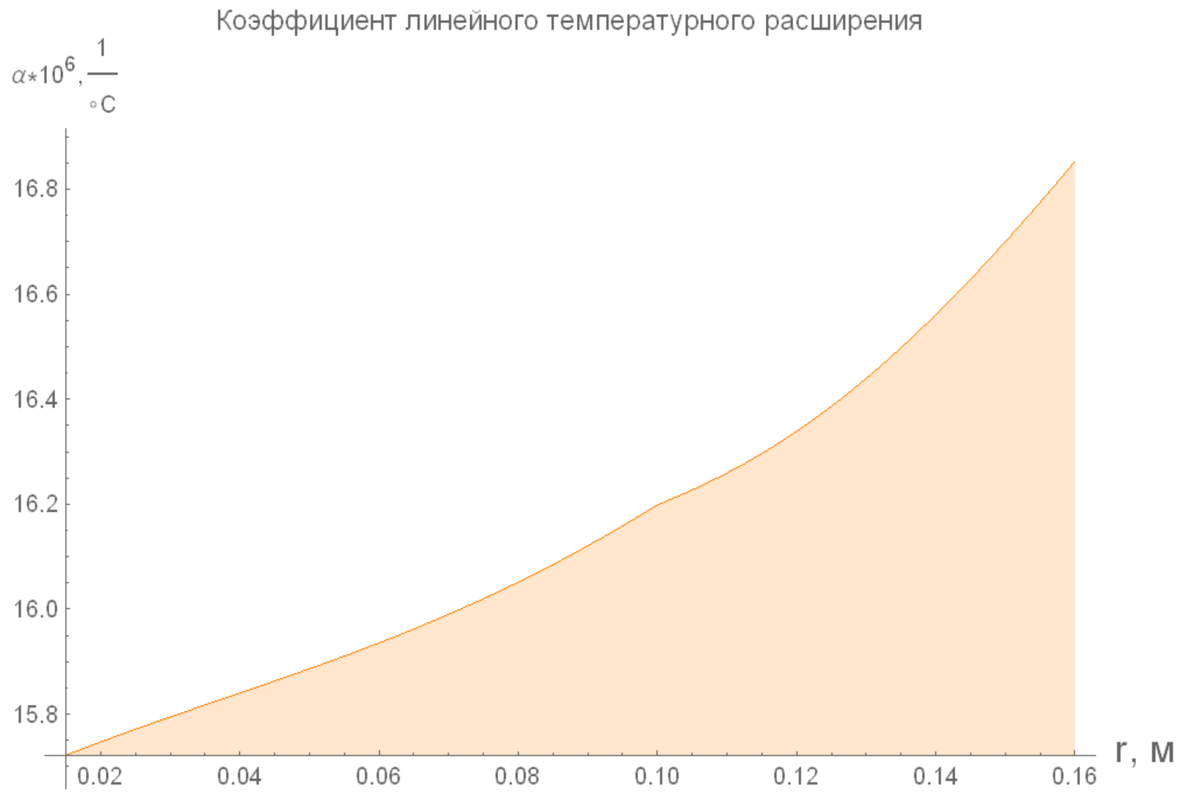
$\mu = 0.3$

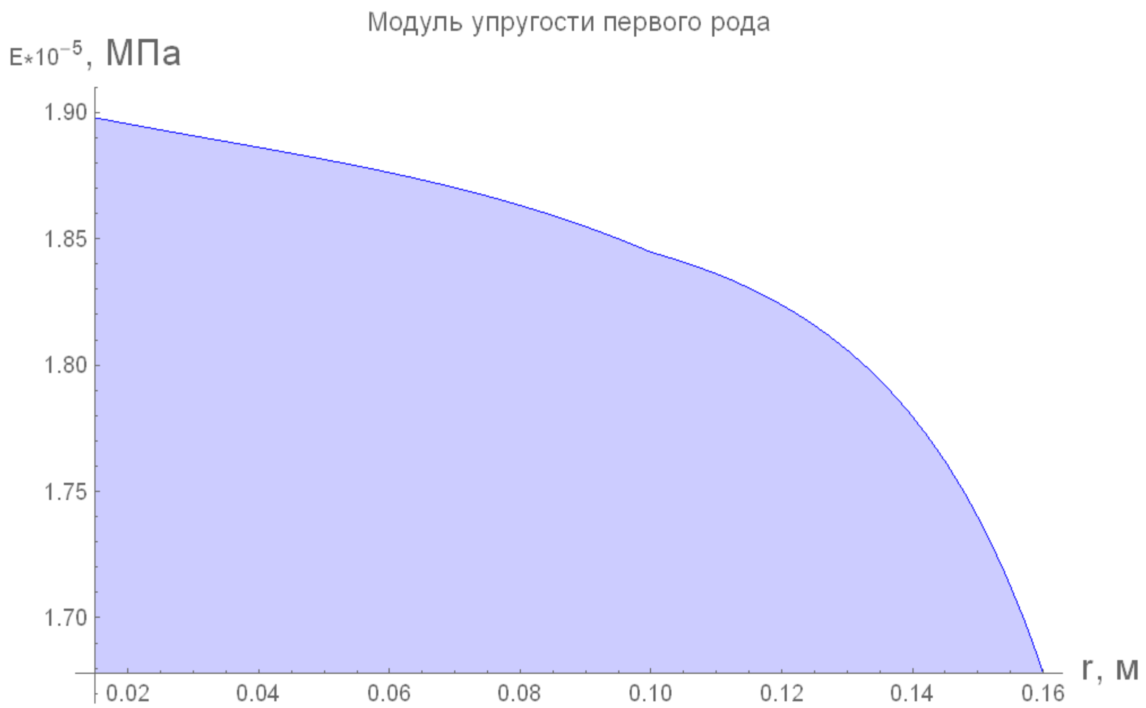
Решение задачи

Для решения задачи сначала необходимо получить все зависимости (графики которых приведены ниже)






Коэффициент линейного температурного расширения
α*10^6, 1/°C
16.8
16.6
16.4
16.2
16.0
15.8
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
r, м


Модуль упругости первого рода
E*10^-5, МПа
1.90
1.85
1.80
1.75
1.70
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
r, м

Система двух дифференциальных уравнений первого порядка для радиального перемещения u и интенсивности нагрузки в радиальном направлении T1 имеет вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = -\frac{1+\mu}{r}\cdot\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{1-\mu^2}{Ehr}\cdot T_1 + \frac{1+\mu}{r}\cdot\alpha t;$$

$$\frac{dT_1}{dr} = \frac{Eh}{r}\cdot\left(\frac{u}{r}\right) - \frac{1-\mu}{r}\cdot T_1 - \frac{Eh}{r}\cdot\alpha t - \rho\omega^2 hr;$$

Где u, T1, E, μ, h – функции, зависящие от радиуса.

В матричном виде:

$$\frac{d}{dr}\overline{y} = F\overline{y} + \overline{g}$$

Вектор состояния: $\overline{y} = \begin{Bmatrix} \frac{u}{r} \\ T_1 \end{Bmatrix}$

$$F = \begin{bmatrix} -\dfrac{1+\mu}{r} & \dfrac{1-\mu^2}{Ehr} \\ \dfrac{Eh}{r} & -\dfrac{1-\mu}{r} \end{bmatrix}$$

$$\overline{g} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1+\mu}{r} \\ -\dfrac{Eh}{r} \end{Bmatrix}\alpha t$$

Систему уравнений возможно решить численным интегрированием, таким образом находят функции u и T1, следовательно, задача определения НДС диска решена, так как интенсивности в радиальном направлении и интенсивность в окружном направлении связаны соотношением:

$$T_2 = \mu T_1 + Eh\left(\frac{u}{r} - \alpha t\right);$$

Знаяфункции интенсивности силы в радиальном и окружном направлении, можем найти соответствующие функции напряжений:

$\sigma_1 = T_1/h$

$\sigma_2 = T_2/h$

Решение имеет вид:

$$\bar{y} = C1 \cdot \bar{y}1\,(r) + C2 \cdot \bar{y}2\,(r) + \bar{y}0\,(r)$$

Где $\bar{y}1\,(r)$, $\bar{y}1\,(r)$ – линейно независимые решение однородной системы; $\bar{y}0\,(r)$ – частное решение неоднородной системы;

Решение системы будет удовлетворять двум граничным условиям - на внешнем и внутреннем контурах.

Известно, что при числовом решении краевой задачи нет необходимости строить полный набор решений. Число нужных решений возможно сократить, если заранее выполнить граничные условия в начале интервала интегрирования, для того чтобы это сделать необходимо определенным образом задать начальные значения векторов решений однородной и неоднородной системы, чтобы граничные условия на внутреннем контуре выполнялись автоматически. Тогда решение системы примет вид:

$$\bar{y} = C \cdot \bar{y}1\,(r) + \bar{y}0\,(r);$$

$\bar{y}1\,(r)$ – частное решение однородной системы;

$\bar{y}0\,(r)$ – частное решение неоднородной системы;

Константу находят из граничного условия на внешнем контуре

Граничные условия накладываются на усилие T_1 или на перемещение u. Значение T_1 известно и на внутреннем, и на наружном контуре и равно нулю.

Для решения используется метод начальных параметров.

$$\overline{y}(r) = C_1 \cdot \overline{y}_1(r) + \overline{y}_0(r)$$

C_1 – постоянная интегрирования; $\overline{y}_1(r)$ – частное решение однородного уравнения: $\frac{d}{dr}\overline{y}_1 = F\overline{y}_1$;

$\overline{y}_0(r)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Зададим начальные значения вектора решений:

$$\overline{y}_1(r_1) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{y}_0(r_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Граничное условие на внешнем контуре:

$$C_1 \cdot \overline{y}_{21}(r_2) + \overline{y}_{20}(r_2) = 0$$

В результате численного интегрирования получили константу

$$C_1 = 5.299 * 10^{-3}$$

Подставим константу и определим $u, T_1, T_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_e$:

$$u(r) = C_1 \cdot u_1(r) + u_0(r)$$

$$T_1(r) = C_1 \cdot T_{11}(r) + T_{10}(r)$$

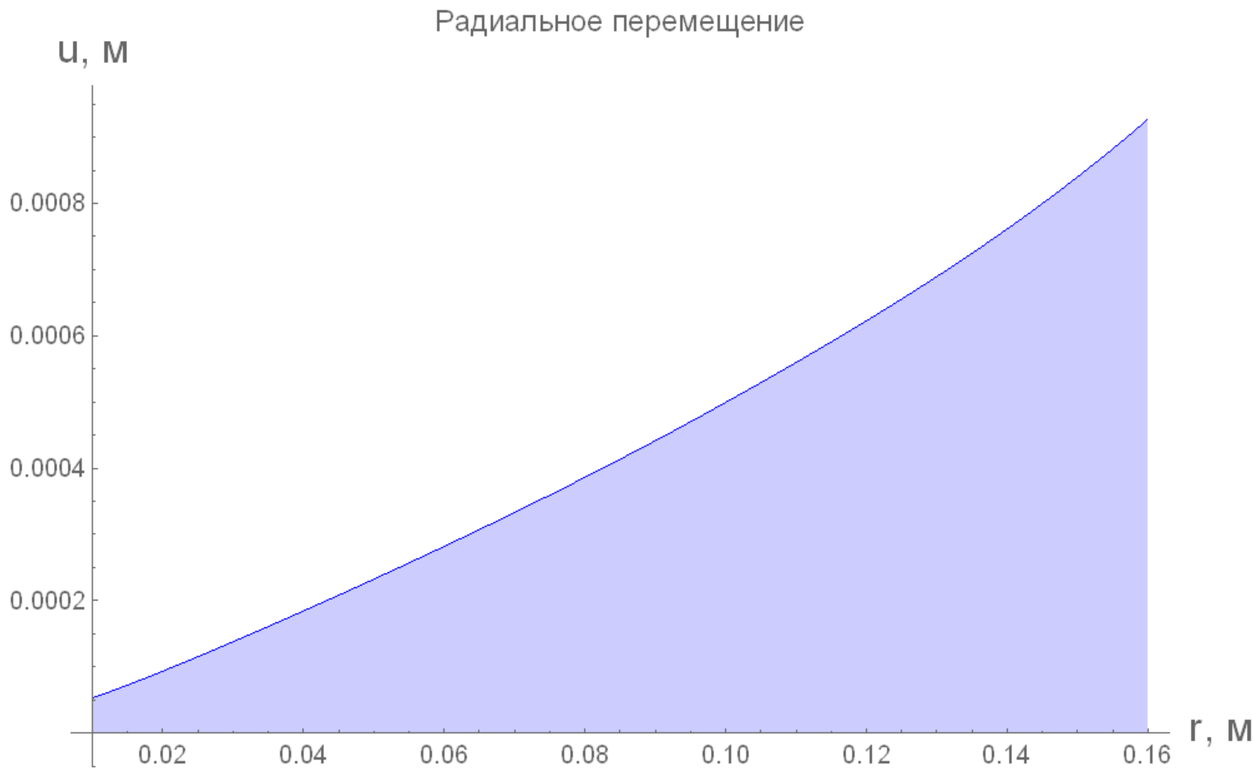
$$T_2(r) = \mu \cdot T_1(r) + E(r) \cdot h(r) \cdot \left(\frac{u(r)}{r} - \alpha(r) \cdot t(r) \right)$$

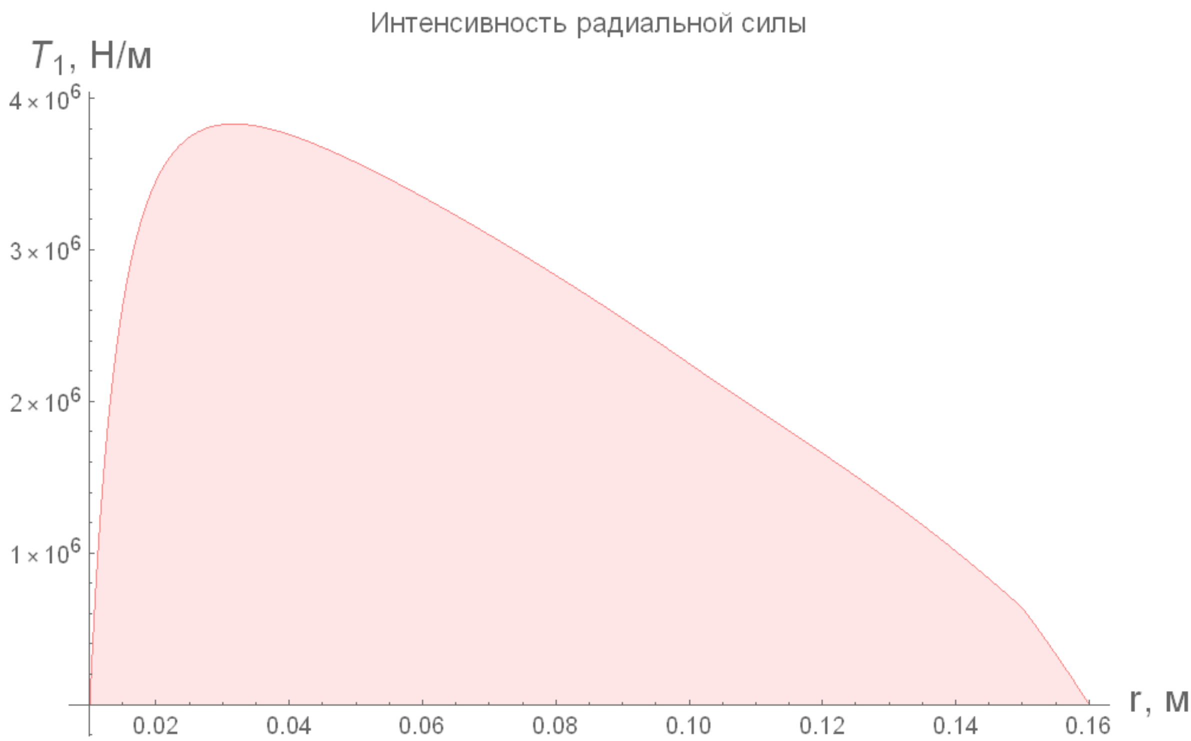
$$\sigma_1(r) = \frac{T_1(r)}{h(r)}$$

$$\sigma_2(r) = \frac{T_2(r)}{h(r)}$$

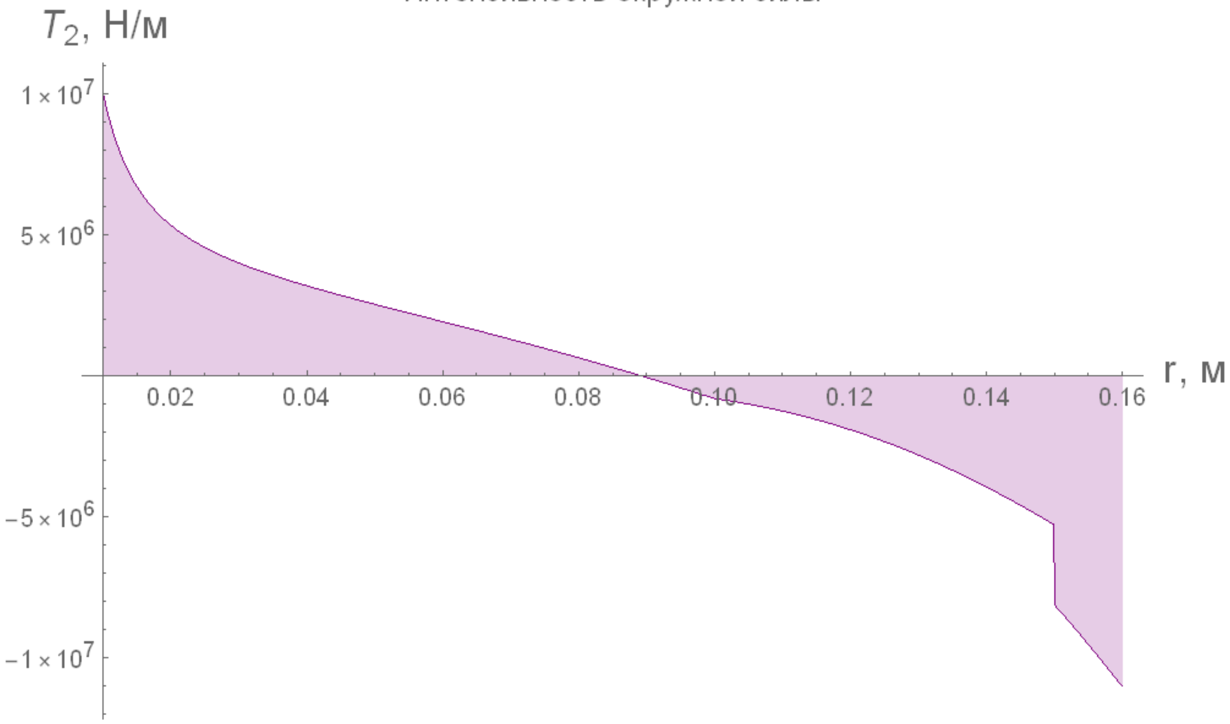
$$\sigma_e(r) = \sqrt{\sigma_1(r)^2 + \sigma_2(r)^2 - \sigma_1(r) \cdot \sigma_2(r)}$$

Получим эпюры:

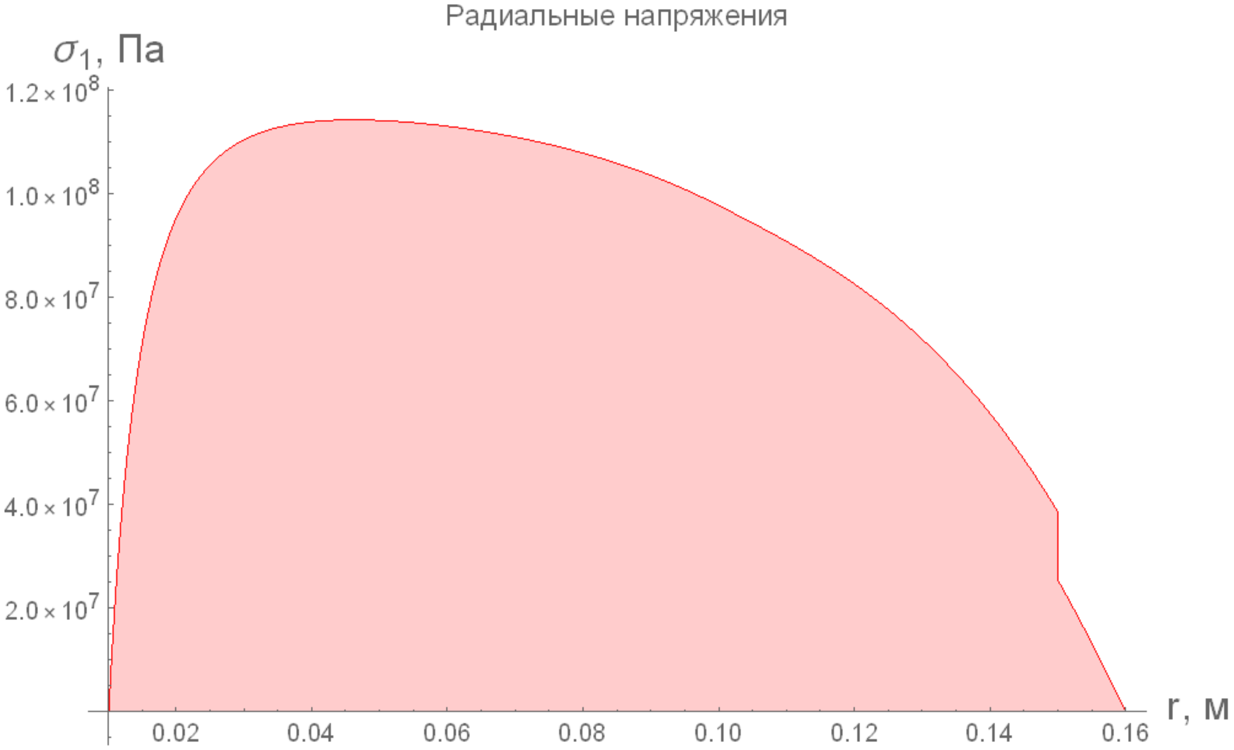

Радиальное перемещение
u, м
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
r, м
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16

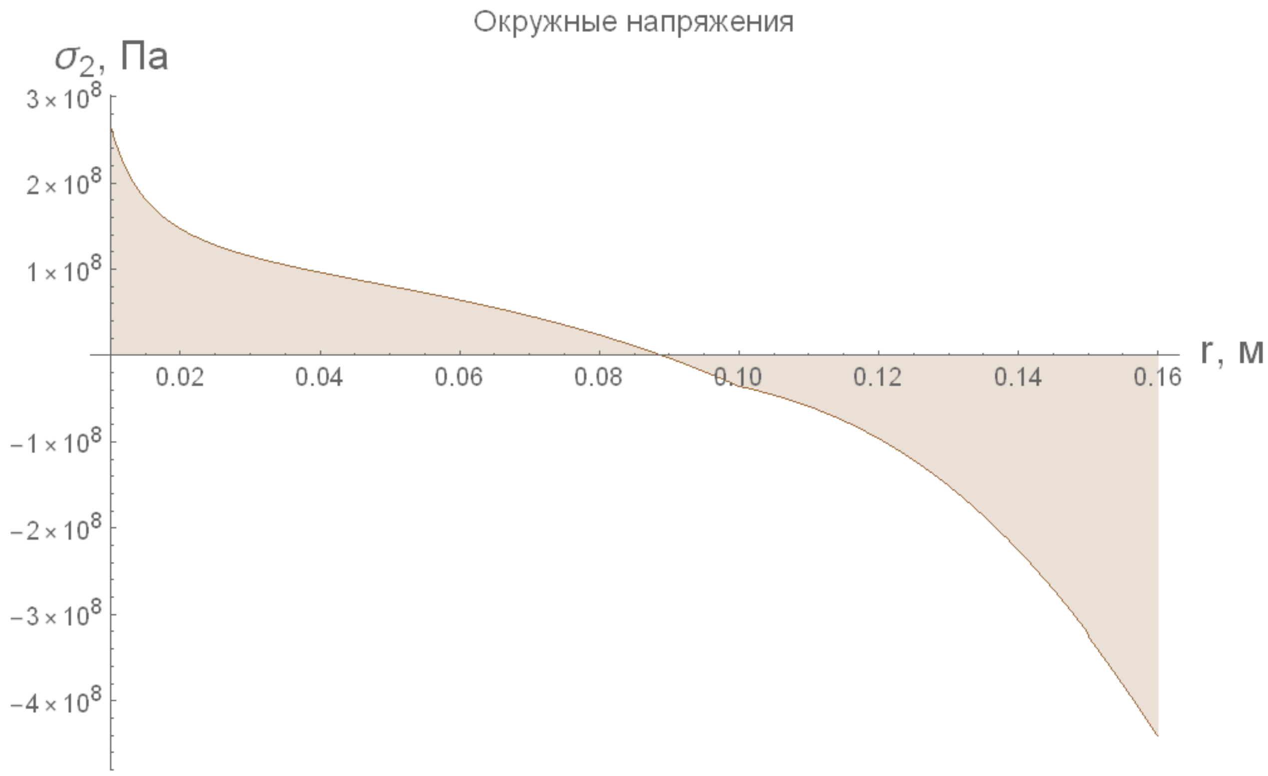

Интенсивность радиальной силы
T_1, Н/м
4×10^6
3×10^6
2×10^6
1×10^6
r, м
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16

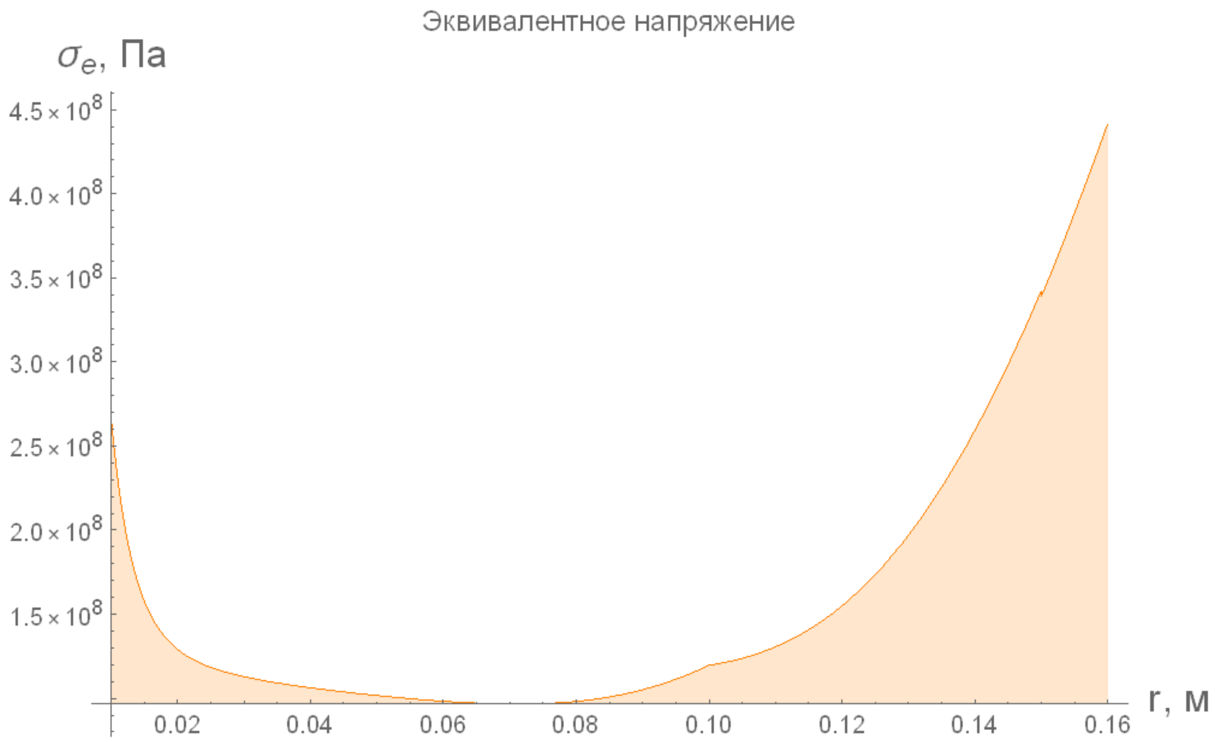
Интенсивность окружной силы



Радиальные напряжения




Окружные напряжения
σ_2, Па
3×10^8
2×10^8
1×10^8
-1×10^8
-2×10^8
-3×10^8
-4×10^8
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
r, м


Эквивалентное напряжение
σ_e, Па
4.5×10^8
4.0×10^8
3.5×10^8
3.0×10^8
2.5×10^8
2.0×10^8
1.5×10^8
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
r, м

Проверка:

В температурной задаче эпюра окружных сил T_2 должна быть уравновешенной.

$$\int_{r1}^{r2} T_2\, dr = 0$$

$$S^* = \int_{r1}^{r_*} T_2\, dr = 229417.88663860149$$

$$S_* = \int_{r_*}^{r2} T_2\, dr = -229417.896125624$$

$$\frac{||S^*| - |S_*||}{|S^*|} * 100\% = 4{,}13526 \times 10^{-6}\%$$

Процентное соотношение между величинами составило менее 1%

r	u[r]	T1[r]	T2[r]	σ1[r]	σ2[r]	σ_e[r]
0.011	0.0000583706	0.	9.86869×10^{6}	0.	2.62469×10^{8}	2.62469×10^{8}
0.015	0.0000735	2.21752×10^{6}	7.1425×10^{6}	5.99329×10^{7}	1.93041×10^{8}	1.71135×10^{8}
0.019	0.0000899707	3.10041×10^{6}	5.80886×10^{6}	8.52057×10^{7}	1.5964×10^{8}	1.38357×10^{8}
0.023	0.000107183	3.49616×10^{6}	4.99895×10^{6}	9.77602×10^{7}	1.39782×10^{8}	1.24221×10^{8}
0.027	0.000124891	3.67471×10^{6}	4.43212×10^{6}	1.04612×10^{8}	1.26174×10^{8}	1.16895×10^{8}
0.031	0.000142975	3.74317×10^{6}	3.99446×10^{6}	1.08556×10^{8}	1.15843×10^{8}	1.12377×10^{8}
0.035	0.000161371	3.75063×10^{6}	3.6319×10^{6}	1.10875×10^{8}	1.07365×10^{8}	1.09162×10^{8}
0.039	0.000180044	3.72192×10^{6}	3.31557×10^{6}	1.1222×10^{8}	9.99679×10^{7}	1.06623×10^{8}
0.043	0.000198974	3.67059×10^{6}	3.02854×10^{6}	1.12945×10^{8}	9.31893×10^{7}	1.04478×10^{8}
0.047	0.00021815	3.60442×10^{6}	2.76011×10^{6}	1.13253×10^{8}	8.67241×10^{7}	1.02594×10^{8}
0.051	0.000237571	3.52806×10^{6}	2.50304×10^{6}	1.13261×10^{8}	8.03548×10^{7}	1.00915×10^{8}
0.055	0.000257237	3.44437×10^{6}	2.25224×10^{6}	1.13039×10^{8}	7.39147×10^{7}	9.94278×10^{7}
0.059	0.000277155	3.35512×10^{6}	2.00392×10^{6}	1.12626×10^{8}	6.72681×10^{7}	9.81499×10^{7}
0.063	0.000297335	3.26145×10^{6}	1.75524×10^{6}	1.12042×10^{8}	6.02989×10^{7}	9.71258×10^{7}
0.067	0.000317787	3.16404×10^{6}	1.50401×10^{6}	1.11297×10^{8}	5.29044×10^{7}	9.64251×10^{7}
0.071	0.000338529	3.06335×10^{6}	1.24851×10^{6}	1.10389×10^{8}	4.49904×10^{7}	9.61423×10^{7}
0.075	0.000359576	2.95962×10^{6}	987421.	1.0931×10^{8}	3.64692×10^{7}	9.63963×10^{7}
0.079	0.000380948	2.85301×10^{6}	719738.	1.0805×10^{8}	2.7258×10^{7}	9.73268×10^{7}
0.083	0.000402668	2.74361×10^{6}	444705.	1.06592×10^{8}	1.72773×10^{7}	9.90897×10^{7}
0.087	0.000424759	2.63144×10^{6}	161789.	1.04919×10^{8}	6.45076×10^{6}	1.01847×10^{8}
0.091	0.000447248	2.51652×10^{6}	−129360.	1.0301×10^{8}	-5.29518×10^{6}	1.05757×10^{8}
0.095	0.000470163	2.39883×10^{6}	−428934.	1.00842×10^{8}	-1.80316×10^{7}	1.10963×10^{8}
0.099	0.000493534	2.27838×10^{6}	−736988.	9.8392×10^{7}	-3.18268×10^{7}	1.17582×10^{8}
0.103	0.000517332	2.15702×10^{6}	−927839.	9.57154×10^{7}	-4.11718×10^{7}	1.21644×10^{8}
0.107	0.000541452	2.03848×10^{6}	-1.10549×10^{6}	9.29629×10^{7}	-5.04149×10^{7}	1.25978×10^{8}
0.111	0.000565942	1.92148×10^{6}	-1.31674×10^{6}	9.00681×10^{7}	-6.17213×10^{7}	1.32215×10^{8}
0.115	0.000590865	1.80467×10^{6}	-1.56335×10^{6}	8.69539×10^{7}	-7.53266×10^{7}	1.40659×10^{8}
0.12	0.00061629	1.6868×10^{6}	-1.84662×10^{6}	8.35426×10^{7}	-9.1458×10^{7}	1.51607×10^{8}
0.124	0.000642295	1.56678×10^{6}	-2.16743×10^{6}	7.97559×10^{7}	-1.10332×10^{8}	1.65329×10^{8}
0.128	0.000668962	1.44361×10^{6}	-2.52626×10^{6}	7.55156×10^{7}	-1.32149×10^{8}	1.82058×10^{8}
0.132	0.000696384	1.31643×10^{6}	-2.92316×10^{6}	7.07441×10^{7}	-1.57088×10^{8}	2.01977×10^{8}
0.136	0.000724659	1.18447×10^{6}	-3.35777×10^{6}	6.53657×10^{7}	-1.853×10^{8}	2.25214×10^{8}
0.14	0.000753894	1.04706×10^{6}	-3.82924×10^{6}	5.93074×10^{7}	-2.16895×10^{8}	2.51842×10^{8}
0.144	0.0007842	903651.	-4.3362×10^{6}	5.25013×10^{7}	-2.5193×10^{8}	2.81872×10^{8}
0.148	0.000815699	753791.	-4.87657×10^{6}	4.48864×10^{7}	-2.90388×10^{8}	3.15237×10^{8}
0.152	0.000848449	577974.	-8.40558×10^{6}	2.3119×10^{7}	-3.36223×10^{8}	3.48358×10^{8}
0.156	0.000882439	331683.	-9.53773×10^{6}	1.32673×10^{7}	-3.81509×10^{8}	3.88313×10^{8}
0.16	0.000918018	0.	-1.07337×10^{7}	0.	-4.29346×10^{8}	4.30722×10^{8}

Листинг

In[1]:=

```
h2 := 0.0125;
μ = 0.3;
tInit = Interpolation[{{0.015, 253}, {0.04, 270}, {0.1, 330}, {0.15, 450}, {0.16, 500}}];
root = FindRoot[t[x] == 250, {x, 0.01}]
t = Interpolation[{{0.011, 250}, {0.015, 253}, {0.04, 270}, {0.1, 330}, {0.15, 450}, {0.16, 500}}];
r1 := 0.011
r2 := 0.16
hInter = Interpolation[{{0.015, 0.0185}, {0.04, 0.0165}, {0.1, 0.0115}, {0.151, 0.0082}}];
Plot[hInter[x], {x, 0.015, 0.16}];
hH[r_] = Piecewise[{{hInter[r], 0.01 ≤ r ≤ 0.15}, {0.0125, 0.15 < r ≤ 0.16}}];
H[r_] = 2 hH[r];
Plot[{hH[r], -hH[r]}, {r, r1 - 0.001, r2 + 0.001} , PlotStyle → {Thickness[.005], Red}, Exclusions → None, ImageSize → 500]
```

In[57]:=

```
alphaTemp = Interpolation[{{250, 15.7 * 10^-6 }, {350, 16.3*10^-6}, {450, 16.7* 10^-6}, {550, 16.99*10^-6}}];
Plot[t[x], {x, 0, 0.16}, Filling → Axis, AxesLabel → { Style["r, м"], Style["t, ∘C"]}, PlotLabel → "Зависимость температуры от радиуса" ,
 PlotStyle → {Thickness[.001], Red}, Exclusions → None, ImageSize → 500]
ETemp = Interpolation[{{250, 1.9* 10^11}, {350, 1.83* 10^11}, {450, 1.74* 10^11}, {550, 1.6* 10^11}}];
alpha[r_] = alphaTemp[t[r]];
EMod [r_] = ETemp[t[r]];
Plot[EMod[r] * 10^-11, {r, 0.015, 0.16}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["E*10^-5, МПа"]}, PlotLabel → "Модуль упругости первого рода" ,
 PlotStyle → {Thickness[.001], Blue}, Exclusions → None, ImageSize → 500]
Plot[alpha[r] * 10^6, {r, 0.015, 0.16}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["α*10^6, 1/∘C"]}, PlotLabel → "Коэффициент линейного температурного расширения" ,
 PlotStyle → {Thickness[.001], Orange}, Exclusions → None, ImageSize → 500]
```

In[64]:=

```
solut2 = NDSolve[{D[u[r]/r, r] == -((1 + μ)/r) u[r]/r + ((1 - μ^2) / (EMod[r] H[r] r)) T1[r], D[T1[r], r] == (1/r EMod[r] H[r]) u[r]/r - ((1 - μ)/r) T1[r] , u[r1]/r1 == 1, T1[r1] == 0},
 {u, T1}, {r, r1, r2}, Method → "ExplicitRungeKutta", MaxStepSize → 0.0001]

solut1 = NDSolve[{D[u[r]/r, r] == -((1 + μ)/r) u[r]/r + (1 - μ^2)/(EMod[r] H[r] r) T1[r] + (1 + μ)/r alpha[r] t[r], D[T1[r], r] == (EMod[r] H[r]/r) u[r]/r - ((1 - μ)/r) T1[r] - EMod[r] H[r]/r alpha[
 u[r1]/r1 == 0, T1[r1] == 0}, {u, T1}, {r, r1, r2}, Method → "ExplicitRungeKutta", MaxStepSize → 0.0001]
```

```
In[66]:=
u1[r_] = u[r] /. solut2[[1]];
u0[r_] = u[r] /. solut1[[1]];
T11[r_] = T1[r] /. solut2[[1]];
T10[r_] = T1[r] /. solut1[[1]];
const1 = Solve[C1 T11[r2] + T10[r2] == 0, C1]
         решить уравнения

Out[70]= {{C1 → 0.00529912}}

In[71]:=
c1 := C1 /. const1[[1]];
u[r_] = c1 u1[r] + u0[r];
T1[r_] = c1 T11[r] + T10[r];
T2[r_] = μ T1[r] + EMod[r] H[r] (u[r]/r - alpha[r] t[r]);
σ1[r_] = T1[r]/H[r];
σ2[r_] = T2[r]/H[r];
σe[r_] = Sqrt[(σ1[r]^2 + σ2[r]^2 - σ1[r] * σ2[r])];

Grid[
таблица
 {{Plot[u[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["u, м"]}, PlotLabel → "Радиальное перемещение", PlotStyle → {Thickness[.001], Blue},
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика  стиль графика  толщина  синий
   Exclusions → None, ImageSize → 500]},
   ни о…  размер изображения
  {Plot[T1[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["T1, Н/м"]}, PlotLabel → "Интенсивность радиальной силы",
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика
   PlotStyle → {Thickness[.001], Pink}, Exclusions → None, ImageSize → 500]},
   толщина  розо…  исключить из…  ни о…  размер изображения
  {Plot[T2[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["T2, Н/м"]}, PlotLabel → "Интенсивность окружной силы",
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика
   PlotStyle → {Thickness[.001], Purple}, Exclusions → None, ImageSize → 500]},
   толщина  фиолет…  исключить из…  ни о…  размер изображения
  {Plot[σ1[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["σ1, Па"]}, PlotLabel → "Радиальные напряжения", PlotStyle → {Thickness[.001], Red},
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика  стиль графика  толщина  красный
   Exclusions → None, ImageSize → 500]},
   ни о…  размер изображения
  {Plot[σ2[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["σ2, Па"]}, PlotLabel → "Окружные напряжения", PlotStyle → {Thickness[.001], Brown},
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика  стиль графика  толщина  коричневый
   Exclusions → None, ImageSize → 500]},
   исключить из…  ни о…  размер изображения
  {Plot[σe[r], {r, r1, r2}, Filling → Axis, AxesLabel → {Style["r, м"], Style["σe, Па"]}, PlotLabel → "Эквивалентное напряжение", PlotStyle → {Thickness[.001], Orange},
   график функции  заливка  ось  обозначения …  стиль  стиль  пометка графика  стиль графика  толщина  оранжевый
   Exclusions → None, ImageSize → 500]}}, Frame → True]
   исключить из…  ни о…  размер изображения  рамка  истина

In[103]:= FindRoot[T2[r] == 0, {r, 0.09}]
          найти корень

Out[103]= {r → 0.0890061}

In[104]:= BeginIntT2 = Integrate[T2[r], {r, 0.0101, 0.089006129845228`}] // N
                       интегрировать                                     чи
          EndIntT2 = Integrate[T2[r], {r, 0.089006129845228`, 0.16}] // N
                     интегрировать                                  числен

Out[104]= 229418.

Out[105]= -229418.

In[106]:= PrecisionT2 = Abs[Abs[BeginIntT2] - Abs[EndIntT2]] / Abs[BeginIntT2] * 100
                        а…  абсолютное значение  абсолютное знач…  абсолютное значение

Out[106]= 4.13526×10^-6
```

In[159]:=

```
Grid[Table[{r, u[r], T1[r], T2[r], σ1[r], σ2[r], σe[r]}, {r, r1 - 0.0001, r2 + 0.001, 0.003}], Frame → All,
|таб··· |таблица значений                                                                    |рамка  |всё
 Background → {{LightGreen, LightBlue , LightPink, LightPurple, LightRed, LightBrown, LightOrange}, None}]
 |фон          |светло-зелё··· |светло-синий |светло-роз··· |светло-фиоле··· |светло-кр··· |светло-кори··· |светло-оранже··· |ни одного/с
ReplacePart[%157, 1 → Prepend[First[%157], {"r", "u[r]", "T1[r]", "T2[r]", "σ1[r]", "σ2[r]", "σe[r]"}]]
|заменить часть          |добавит··· |первый
```