Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА
кафедра «Прикладная механика» (РК-5)

Домашнее задание №1
по дисциплине “Сопротивление материалов”

«Определение деформированного состояния на поверхности образца»

Вариант.15

<u>Выполнил:</u>
Студент группы РК5-32Б
Приёмко К.С.

<u>Проверил:</u>
Преподаватель **Крупнин А.Е.**

Москва,
2018

Содержание:

Условие:

1. Определить главные деформации и главные направления деформаций для заданной розеточной схемы по показаниям тензодатчиков №1, №2, №3;

2. Восстановить показания тензодатчика №4 - ε_ψ ;

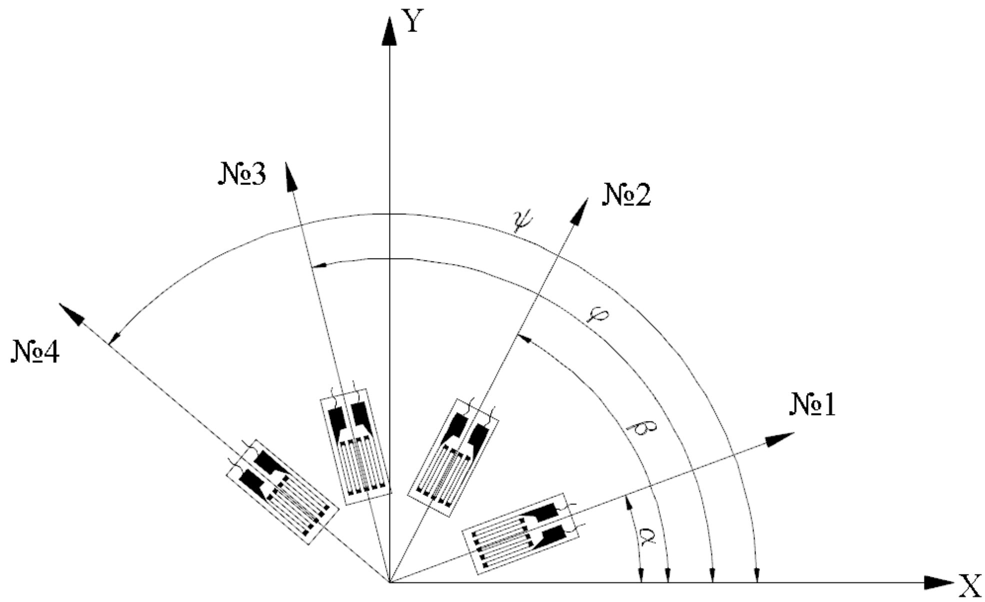
3. Определить максимальную сдвиговую деформацию $\gamma_{\max}$;

4. Проверить полученные результаты с помощью круговой диаграммы;

5. Определить главные напряжения;

6. Определить деформацию по толщине исследуемого образца ε_z ;

7. Определить объемную деформацию e ;



Тип розеточной схемы:	Угол α	Угол β	Угол φ	Угол ψ
5	**0^0**	**120^0**	**240^0**	**-90^0**

Вариант	ε_α	ε_β	ε_φ	Тип розетки
15	**-0.9**	**0.4**	**-0.3**	**5**

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа ;

Коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$.

Методы решения

1. Определить главные деформации и главные направления деформаций для заданной розеточной схемы по показаниям тензодатчиков №1, №2, №3.

Для двумерного случая деформация в произвольном направлении определяется формулой

$$\varepsilon_\nu = \left[\nu\right]^T T_\varepsilon \left[\nu\right];$$

После упрощений имеем

$$\varepsilon_\nu = \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + \gamma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha;$$

Запишем систему уравнений для 3 тензодатчиков

$$\begin{cases} \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + \gamma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_x \cos^2\beta + \varepsilon_y \sin^2\beta + \gamma_{xy}\cos\beta\sin\beta = \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy}\cos\varphi\sin\varphi = \varepsilon_\gamma \end{cases}$$

Перепишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\beta & \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix}$$

Решаем матричное уравнение

$$A * X = B;$$

$$X = A^{-1} * B;$$

Используя формулу для главных деформаций, находим искомые значения

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2}{4} + \frac{\gamma_{xy}{}^2}{4}}$$

Для определения направлений главных деформаций воспользуемся формулой

$$tg 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

2) Восстановить показания тензодатчика №4 - ε_ψ .

Применим ранее написанную формулу для линейной деформации в произвольном направлении для тензодатчик №4

$$\varepsilon_\psi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\psi + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\psi$$

3)Определить максимальную сдвиговую деформацию $\gamma_{\max}$.

Воспользуемся формулой для максимальной сдвиговой деформации.

$$\gamma_{\max} = \left|\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right|$$

4) Проверить полученные результаты с помощью круговой диаграммы.

Круговая диаграмма деформаций Мора устанавливает связь между линейными и сдвиговыми деформациями.

$$\left(\varepsilon_\nu - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{\nu\tau}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2$$

Для проверки найдём значения угловых (сдвиговых деформаций) для всех тензодатчиков, также проверим значения найденных величин, сопоставлением с графиком окружности (диаграммой Мора)

$$\gamma_\alpha = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\alpha + \gamma_{xy}\cos 2\alpha;$$

$$\gamma_\beta = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\beta + \gamma_{xy}\cos 2\beta;$$

$$\gamma_\varphi = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos 2\varphi;$$

$$\gamma_\psi = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\psi + \gamma_{xy}\cos 2\psi;$$

5) Определить главные напряжения.

В случае плоско напряжённого состояния (ПНС) имеем

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{E}}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2\right];$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{E}}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1\right];$$

6) Определить деформацию по толщине исследуемого образца ε_z.

Воспользуемся формулой для вычисления деформации по толщине:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y);$$

7) Определить объемную деформацию e.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

Ответы:

1)
$$\varepsilon_x = \text{-}0.9000;$$
$$\varepsilon_y = 0.3667; \quad \varepsilon_1 = 0.4846;$$
$$\gamma_{xy} = \text{-}0.8083; \quad \varepsilon_2 = \text{-}1.0180;$$

$$\alpha = 18^\circ;$$

2) $\varepsilon_\psi = 0.3667;$

3) $\gamma_{\max} = 1.5026;$

$$\sigma_1 = 3.9393\text{e+04Па}$$

5) $\sigma_2 = \text{-}1.9177\text{e+05Па}$

6) $\varepsilon_z = 0.2286;$

7) $e = \text{-}0.3048;$

$$\varepsilon_\alpha = \text{-}0.90;\ \frac{\gamma_\alpha}{2} = \text{-}0.41;\ \text{A}\ (\varepsilon_\alpha, \frac{\gamma_\alpha}{2});$$

$$\varepsilon_\beta = 0.40;\ \frac{\gamma_\beta}{2} = \text{-}0.35;\ \text{B}\ (\varepsilon_\beta, \frac{\gamma_\beta}{2});$$

$$\varepsilon_\varphi = \text{-}0.30;\ \frac{\gamma_\varphi}{2} = 0.75;\ \text{C}\ (\varepsilon_\varphi, \frac{\gamma_\varphi}{2});$$

$$\varepsilon_\psi = 0.37;\ \frac{\gamma_\psi}{2} = 0.41;\ \text{D}\ (\varepsilon_\psi, \frac{\gamma_\psi}{2});$$

$$\varepsilon_x = \text{-}0.90;\ \frac{\gamma_{xy}}{2} = \text{-}0.41;\ \text{E}\ (\varepsilon_x, \frac{\gamma_{xy}}{2});$$

$$\varepsilon_y = 0.37;\ \frac{\gamma_{xy}}{2} = \text{-}0.41;\ \text{F}\ (\varepsilon_y, \frac{\gamma_{xy}}{2});$$

$$\varepsilon_1 = 0.4846;\ G(\varepsilon_1, 0);$$

$$\varepsilon_2 = \text{-}1.0180;\ \text{H}\ (\varepsilon_2, 0);$$

$$\gamma_{\max} = 1.5026;\ \text{I}\ (0, \gamma_{\max});$$

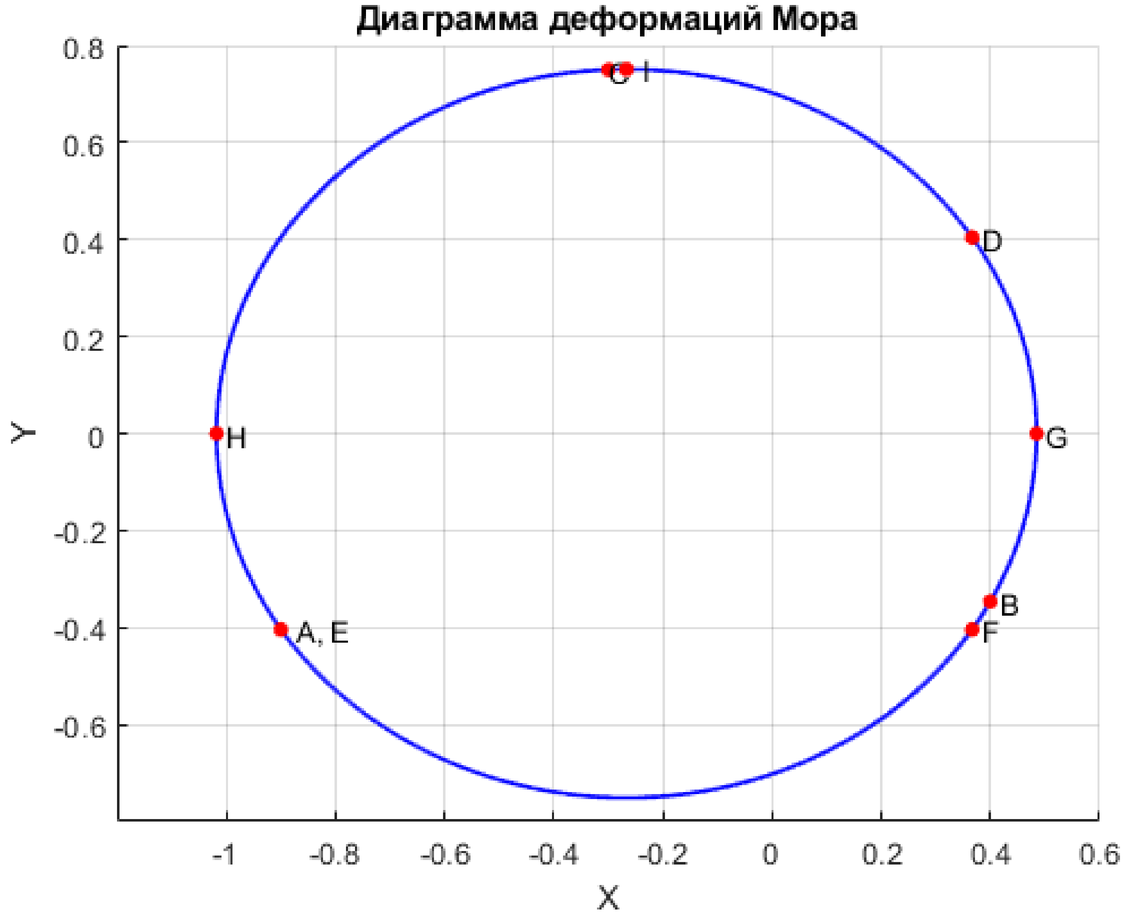
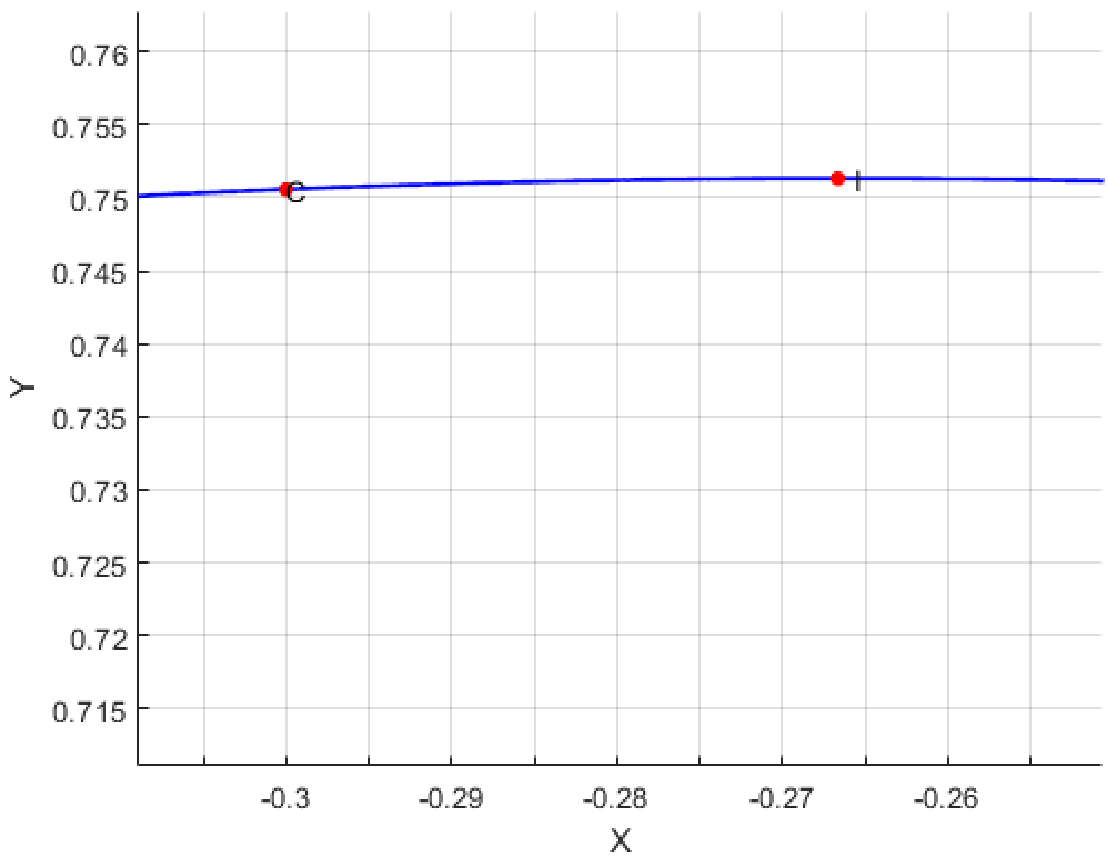


Диаграмма деформаций Мора
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
Y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
X
C
I
D
H
G
B
A, E
F


0.76
0.755
0.75
0.745
0.74
0.735
0.73
0.725
0.72
0.715
Y
-0.3
-0.29
-0.28
-0.27
-0.26
X
C
I

Вывод

В ходе выполнения домашнего задания №1, был изучен и применён на практике способ определения деформированного состояния на поверхности образца. С помощью тензодатчиков удалось определить главные деформации и главные направления деформаций, восстановить показания тензодатчика, определить максимальную угловую деформацию, главные напряжения, деформацию по толщине образца и объёмную деформацию, также смогли убедиться в корректности полученных данных с помощью круговой диаграммы Мора.

Материалы

1. Лекции Данилова В. Л.

2. Семинары Крупнина А. Е.

Листинг:

```
a = [1 0 0 ; 1/4 3/4 -sqrt(3)/4 ; 1/4 3/4 sqrt(3)/4]
b = [-0.9 ; 0.4 ; -0.3]
x = inv(a)*b

x1 = x(1)
x2 = x(2)
x3 = x(3)

e1 = (x1+x2)/2 + sqrt(((x1-x2)^2)/4 + (x3^2)/4)
e2 = (x1+x2)/2 - sqrt(((x1-x2)^2)/4 + (x3^2)/4)

eps_psi = (x1 + x2)/2 + (x1 - x2)*cos(-pi)/2+x3/2*sin(-pi)
 ymax = abs(e1-e2)

R = (e1-e2)/2
x_0 = (e1+e2)/2
i_1 = -0.9
 i_2 = 0.4
 i_3 = -0.3
 i_4 = eps_psi
j_1 = ((x2-x1)*sin(0) + x3 * cos(0))/2
j_2 = ((x2-x1)*sin(4*pi/3) + x3 * cos(4*pi/3))/2
j_3 = ((x2-x1)*sin(8*pi/3) + x3 * cos(8*pi/3))/2
j_4 = ((x2-x1)*sin(-pi) + x3 * cos(-pi))/2

grid on;
hold on;
x_ = e2:0.000001:e1;
y_2=-(R.^2-(x_-x_0).^2).^0.5;
y_1=(R.^2-(x_-x_0).^2).^0.5;
plot(x_,y_1 , 'b.','MarkerSize', 1);
plot(x_,y_2,'b.','MarkerSize', 1);
```

```
plot(i_1 , j_1,'r.','MarkerSize', 17); text (i_1 , j_1, "  A,");
plot(i_2 , j_2,'r.','MarkerSize', 17);text (i_2 , j_2, ' B');
plot(i_3 , j_3,'r.','MarkerSize', 17);text (i_3 , j_3, "C   ");
plot(i_4 , j_4,'r.','MarkerSize', 17);text (i_4 , j_4, ' D');
plot(x1,x3/2,'r.','MarkerSize', 17);text (x1,x3/2, "      E");
plot(x2,x3/2,'r.','MarkerSize', 17);text (x2,x3/2, ' F');
plot(e1,0,'r.','MarkerSize', 17);text (e1,0, ' G');
plot(e2,0,'r.','MarkerSize', 17);text (e2,0, ' H');
plot(x_0,ymax/2,'r.','MarkerSize', 17);text (x_0,ymax/2, "  I");

const =2*10^5/(1-0.3^2)
sig_1 = const*(e1 + 0.3*e2)
 sig_2 = const*(e2 + 0.3*e1)

con = - 0.3 / (1 - 0.3)
eps_z = con * (x1 + x2)

e_7_1=x1+x2 + eps_z
angel = atan(x3/(x1-x2))/2

a =

    1.0000         0         0
    0.2500    0.7500   -0.4330
    0.2500    0.7500    0.4330


b =

   -0.9000
    0.4000
   -0.3000
```

x =

```
  -0.9000
   0.3667
  -0.8083
```

x1 =

```
  -0.9000
```

x2 =

```
   0.3667
```

x3 =

```
  -0.8083
```

e1 =

```
   0.4846
```

e2 =

```
  -1.0180
```

eps_psi =

```
    0.3667


ymax =

    1.5026


R =

    0.7513


x_0 =

   -0.2667


i_1 =

   -0.9000


i_2 =

    0.4000


i_3 =

   -0.3000


i_4 =
```

0.3667

j_1 =

-0.4041

j_2 =

-0.3464

j_3 =

0.7506

j_4 =

0.4041

const =

2.1978e+05

sig_1 =

3.9393e+04

sig_2 =

-1.9177e+05

con =

-0.4286

eps_z =

0.2286

e_7_1 =

-0.3048

angel =

0.2840