Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА

кафедра «Прикладная механика» (РК-5)

Домашнее задание №1

по дисциплине “Строительная механика”

«Изгиб балки на гибком основании»

Вариант 13.

Выполнил:

Студент группы РК5-52Б

Приёмко К.С.

Проверил:
Преподаватель
Мясников В.Ю.

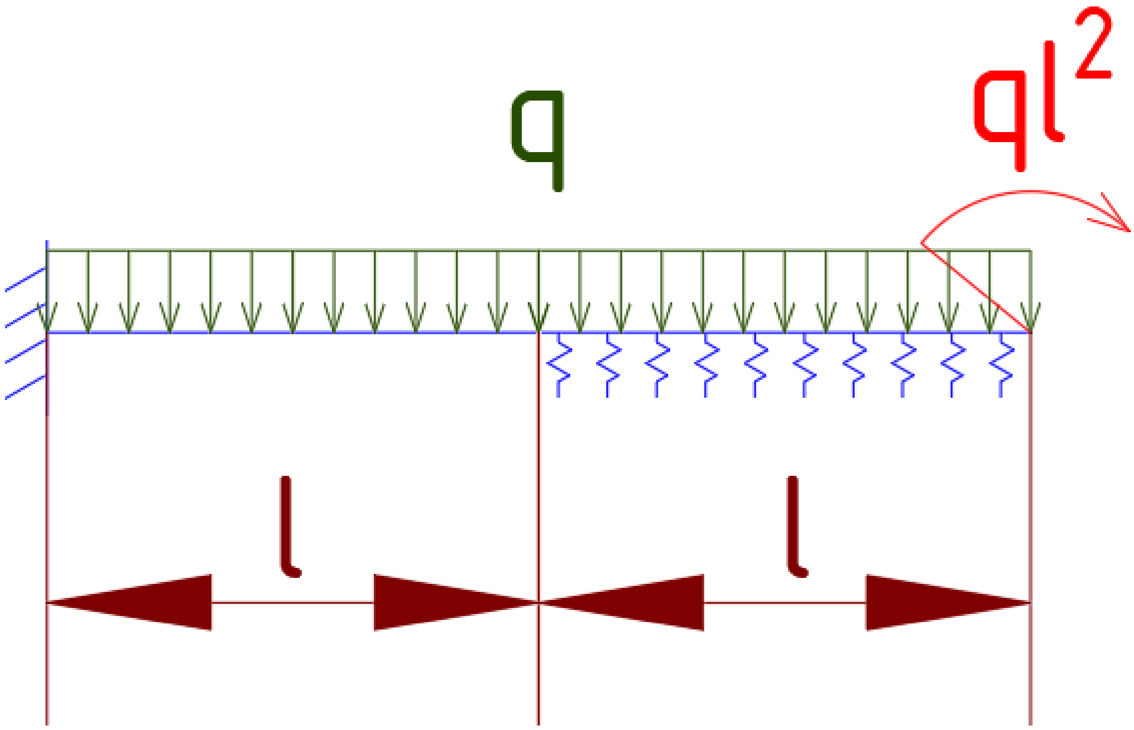
Москва,
2019

Условие

Построить эпюры прогибов и изгибающих моментов, углов поворота сечения и поперечных сил.

а) $\frac{kl^4}{EY} = 64;$

б) $\frac{kl^4}{EY} = 4 * 10^4;$



Пункт а

$$\frac{kl^4}{EY} = 64;$$

, где

k - коэффициент постели, характеризующий жёсткость упругого основания

EY – изгибная жёсткость балки

l – длина участка балки

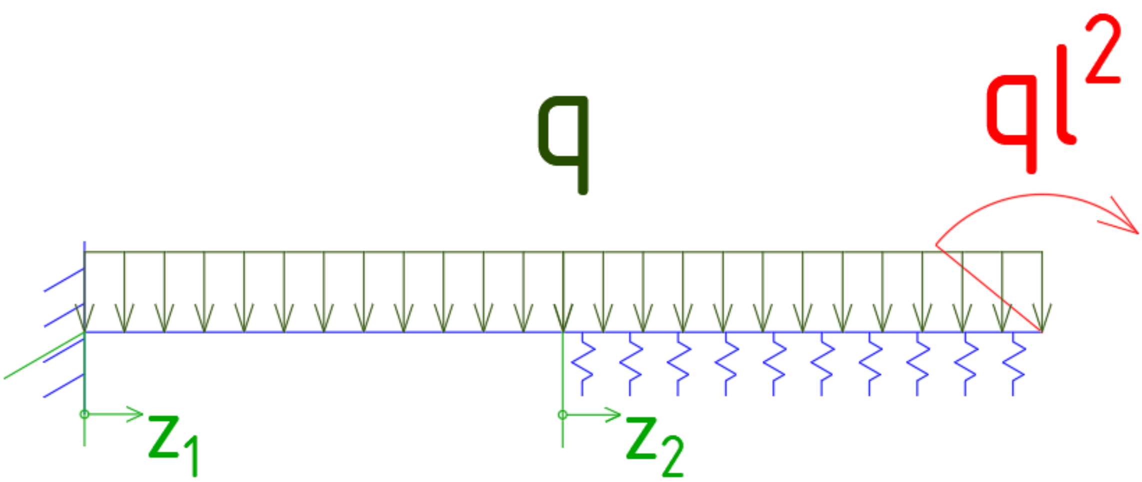
Известно, что $4\mathrm{m}^4 = \frac{k}{EY}$ имеем,

$$m = \frac{2}{l};$$

В итоге получаем:

$$\lambda = 2 < 3..4;$$

Следовательно, мы можем рассматривать консоль как короткую



Тогда разобьём балку на два участка, рассматривая её слева направо, а также введем локальные системы координат для каждого участка:

1) $0 < z_1 < l$
2) $0 < z_2 < l$

Будем вводить функцию прогибов для каждого из участков по отдельности (для первого – v_1, для второго – v_2).

Рассмотрим первый участок.

Функция прогибов на первом участке:

$$v_1(z_1) = \frac{1}{EY}\left[\frac{mz_1^2}{2} - \frac{rz_1^3}{6} + \frac{z_1^4}{24} + B_1 z_1 + B_2\right];$$

Принимая во внимание граничные условия на первом участке при z1 = 0, а также обезразмеривание, получаем

$$v_1(\xi_1) = \frac{ql^4}{EY}\left[\frac{\alpha\xi_1^2}{2} - \frac{\beta\xi_1^3}{6} + \frac{\xi_1^4}{24} + B_1^` z_1 + B_2^`\right]$$

Рассмотрим второй участок.

Решение дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании представим в виде суммы общего однородного, выраженного комбинацией функций Крылова, и частного неоднородного, обусловленного наличием распределенной нагрузки на этом участке

$$v_2^{\text{оо}} = \sum_{i=1}^{4} C_i K_i\,(\lambda\xi_2)$$

$$v_2^{\text{чн}} = \frac{q}{k}[1 - K_1(\lambda\xi_2)]$$

Итого, 8 неизвестных.

Определение констант:

$$v_1(0) = 0;$$

$$v_1'(0) = 0$$

$$v_1(1) = v_2(0)$$

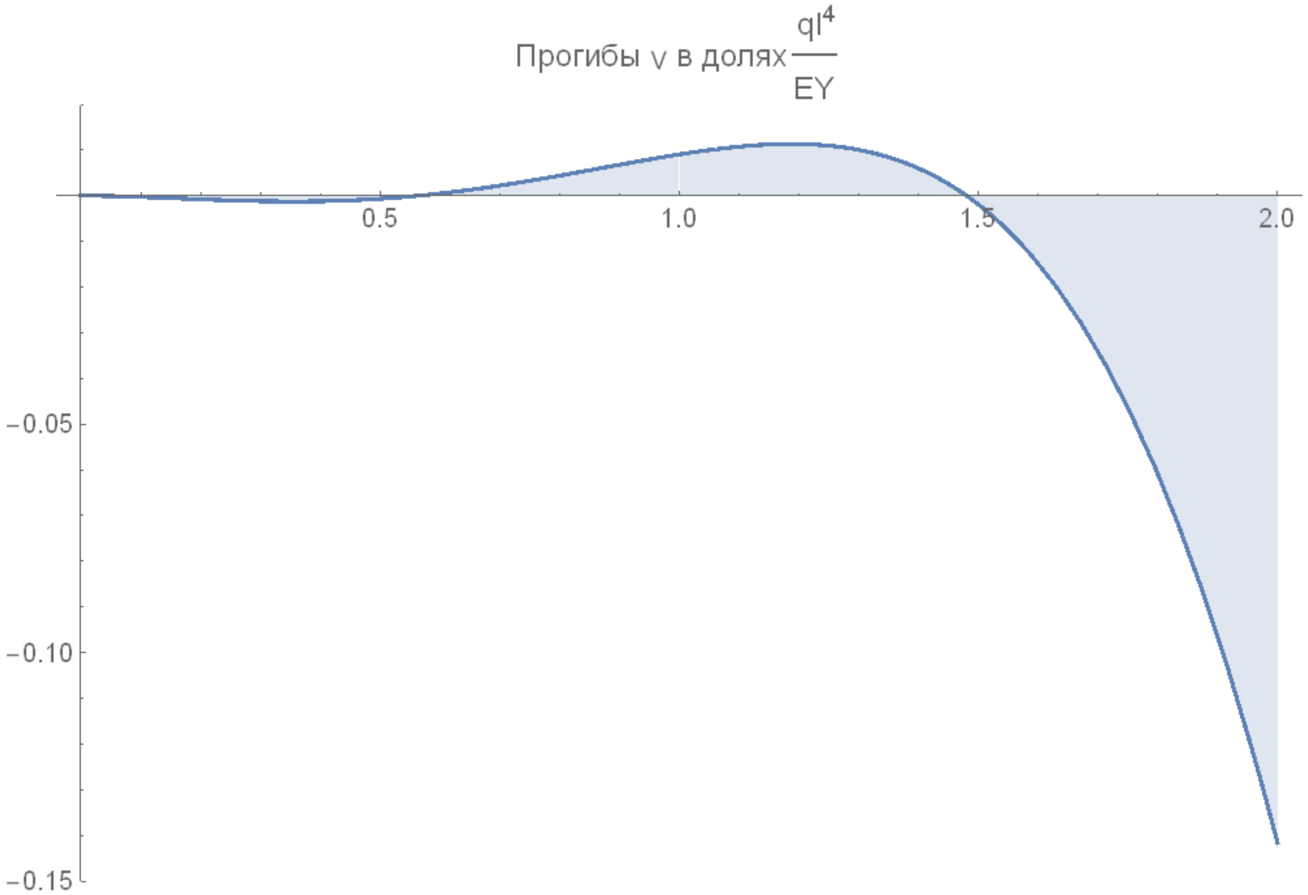
$$v_1'(1) = v_2'(0)$$

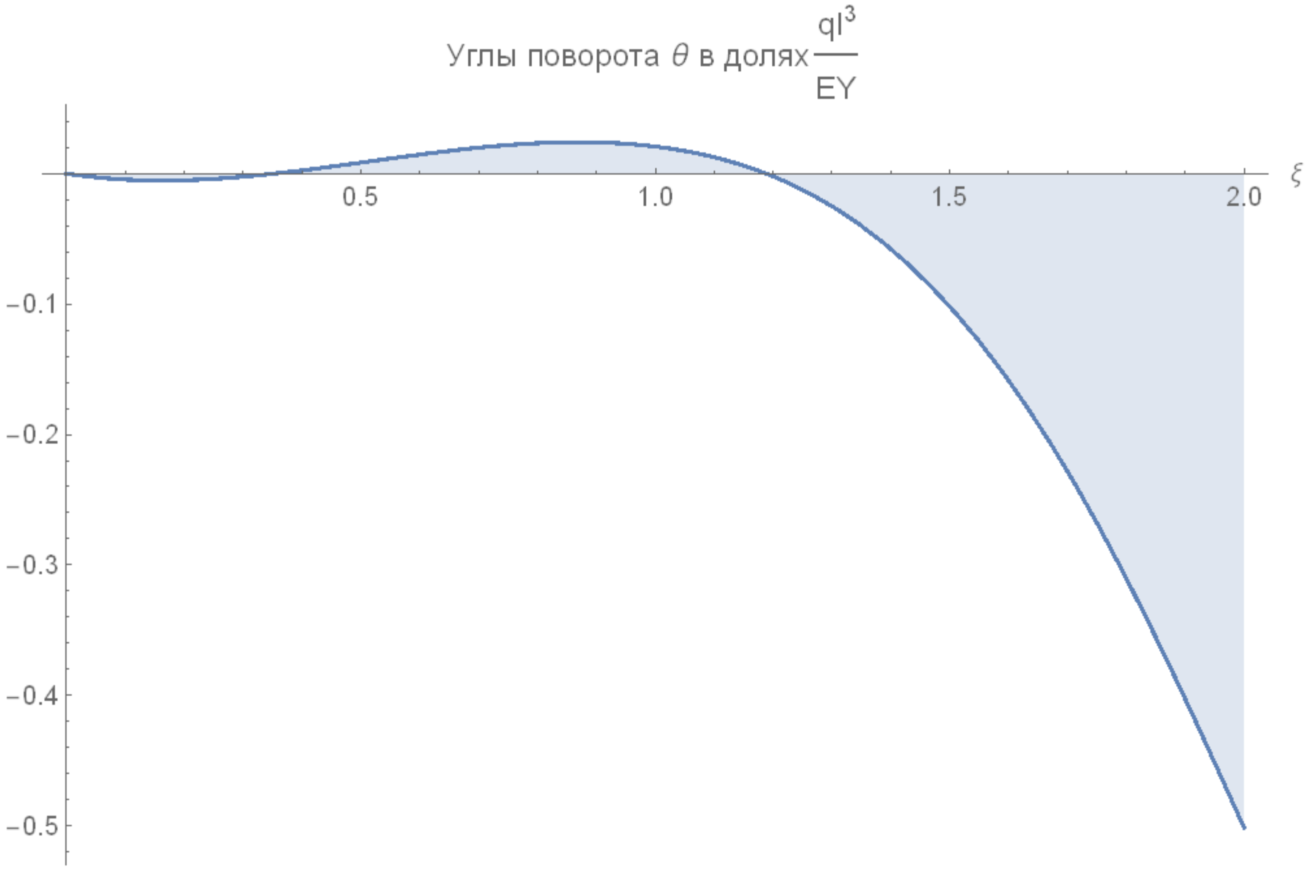
$$v_1''(1) = v_2''(0)$$

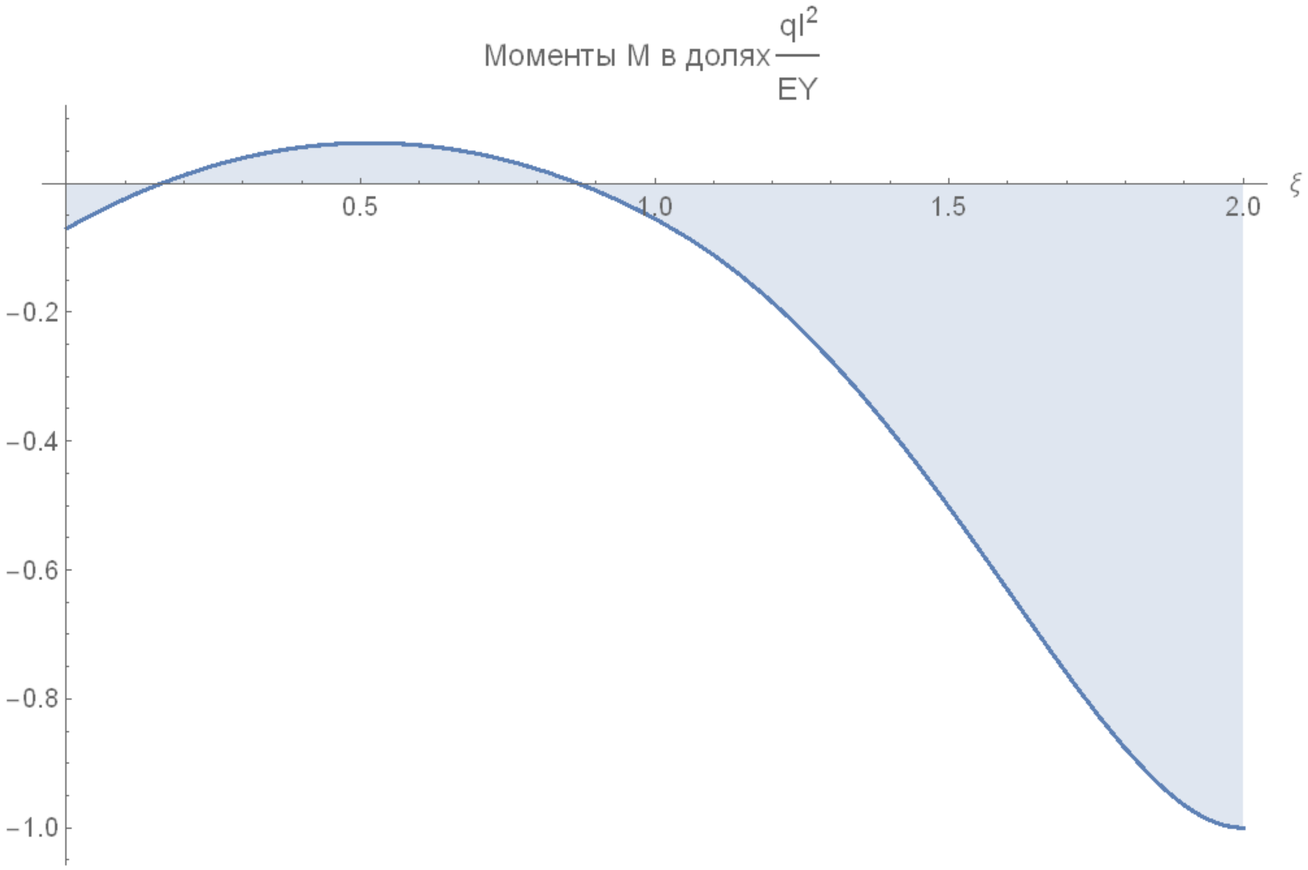
$$v_1'''(1) = v_2'''(0)$$

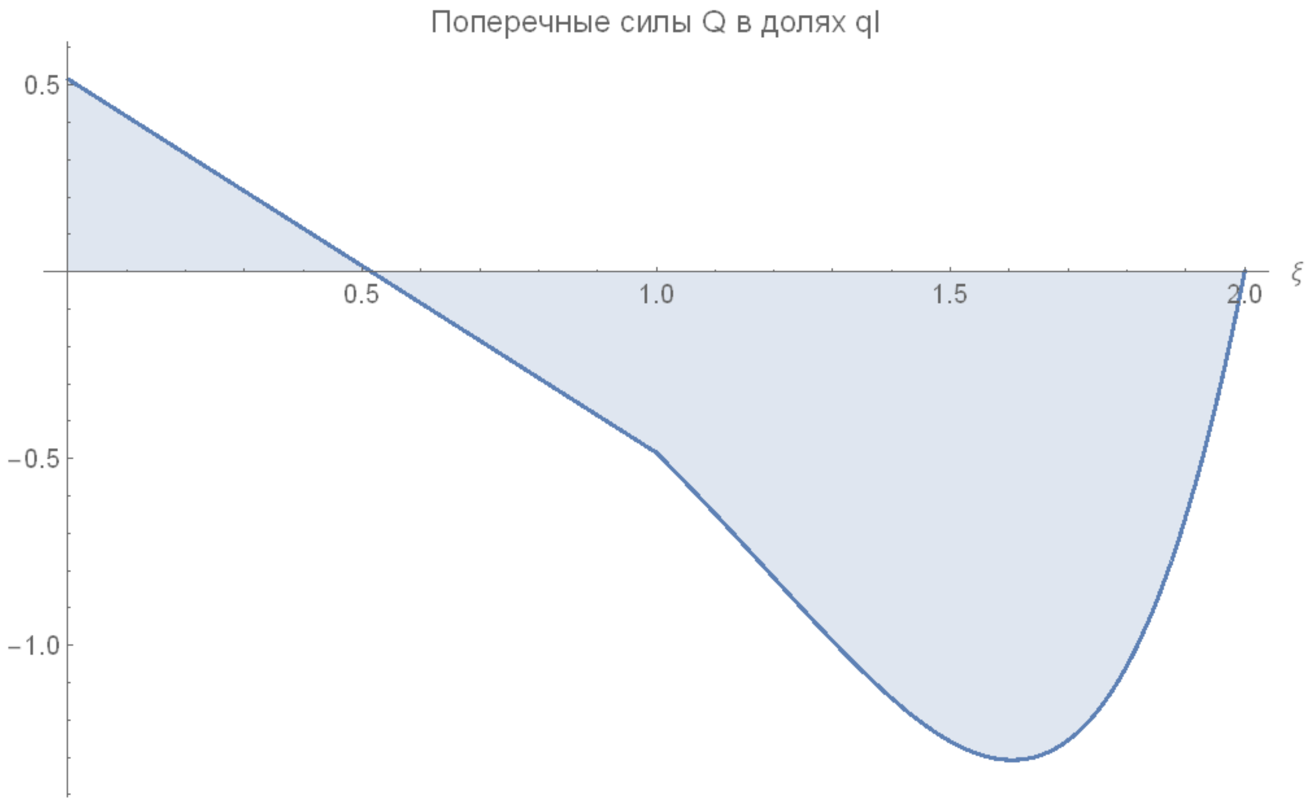
$$v_2''(1) = ql^2$$

$$v_2'''(1) = 0$$




Углы поворота θ в долях $\frac{ql^3}{EY}$
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5


Моменты M в долях $\frac{ql^2}{EY}$
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0


Поперечные силы Q в долях ql
0.5
−0.5
−1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ

Пункт б

$$\frac{kl^4}{EY} = 4 * 10^4;$$

$$m = \frac{10}{l};$$

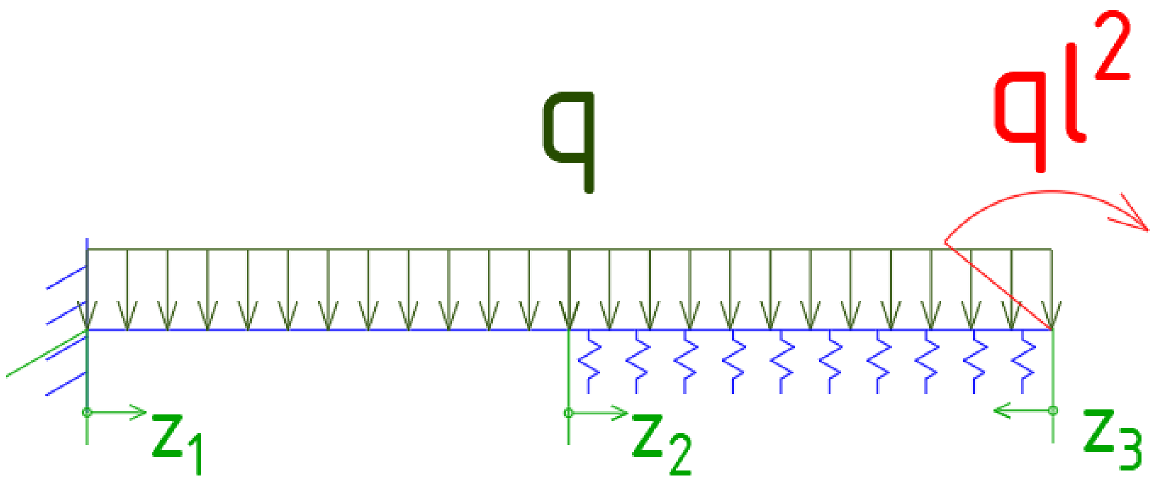
В итоге получаем:

$$\lambda = 10 > 3..4;$$

Следовательно, мы можем рассматривать участки балки как длинные. В данном случае для 2-го участка использовать функции Крылова не целесообразно (в силу резкого убывания внутренних силовых факторов)

Аналогично решению задачи под пунктом а получаем

$$\upsilon_1(\xi_1) = \frac{ql^4}{EY}\left[\frac{\alpha\xi_1^2}{2} - \frac{\beta\xi_1^3}{6} + \frac{\xi_1^4}{24} + B_1^{`}z_1 + B_2^{`}\right]$$



Решение дифференциального уравнения изгиба для второго третьего участков балки

$$\upsilon_2(\xi_2) = \frac{ql^4}{EY}(a\exp[-\lambda\xi_2]\cos[\lambda\xi_2 + \psi] + 0.25 * 10^{-4})$$

В силу нежелания решать трансцендентные уравнения, преобразуем уравнение к виду

$$\upsilon_2(\xi_2) = \frac{ql^4}{EY}(\exp[-\lambda\xi_2]\,(\mathrm{C1}\cos[\lambda\xi_2] - \mathrm{C2}\sin[\lambda\xi_2]) + 0.25 * 10^{-4})$$

где

$$\mathrm{C1} = \mathrm{a}\cos[\psi]$$

$$\mathrm{C2} = \mathrm{a}\, sin[\psi]$$

$$\upsilon_3(\xi_3) = \frac{ql^4}{EY}(\exp[-\lambda\xi_3]\,(\mathrm{C1}\cos[\lambda\xi_3] - \mathrm{C2}\sin[\lambda\xi_3]) + 0.25 * 10^{-4})$$

Итого, 6 неизвестных.

Определение констант:

$$\upsilon_1(0) = 0;$$

$$\upsilon_1'(0) = 0$$

$$\upsilon_1(1) = \upsilon_2(0)$$

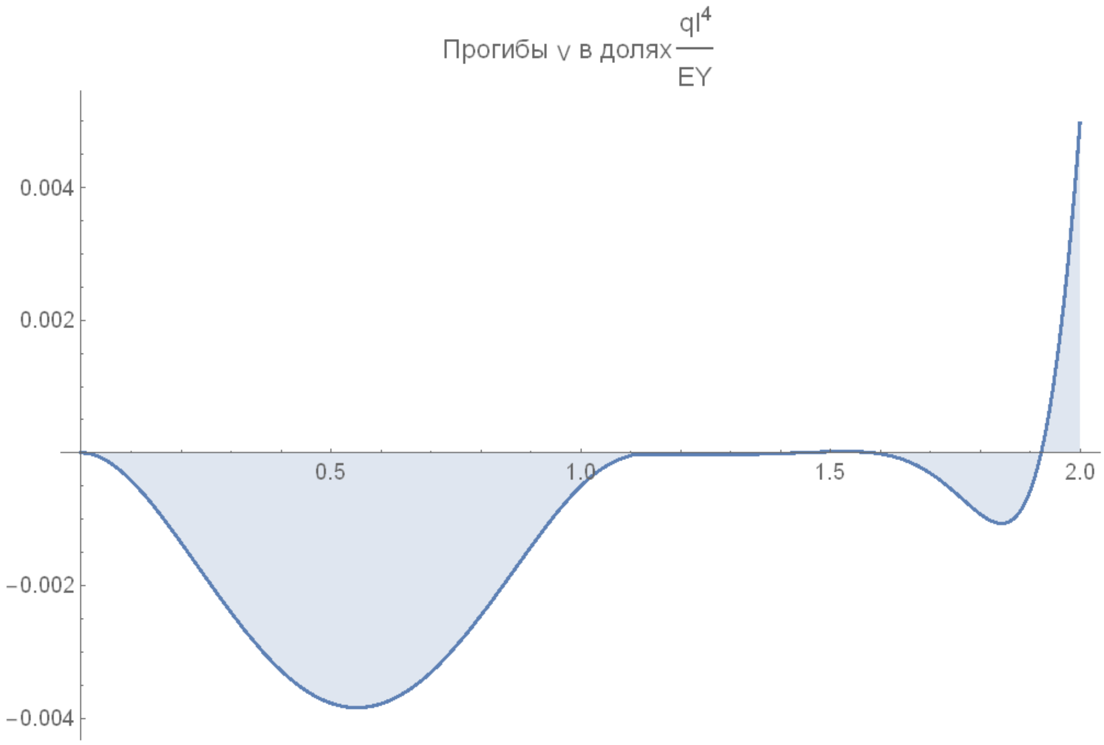
$$\upsilon_1'(1) = \upsilon_2'(0)$$

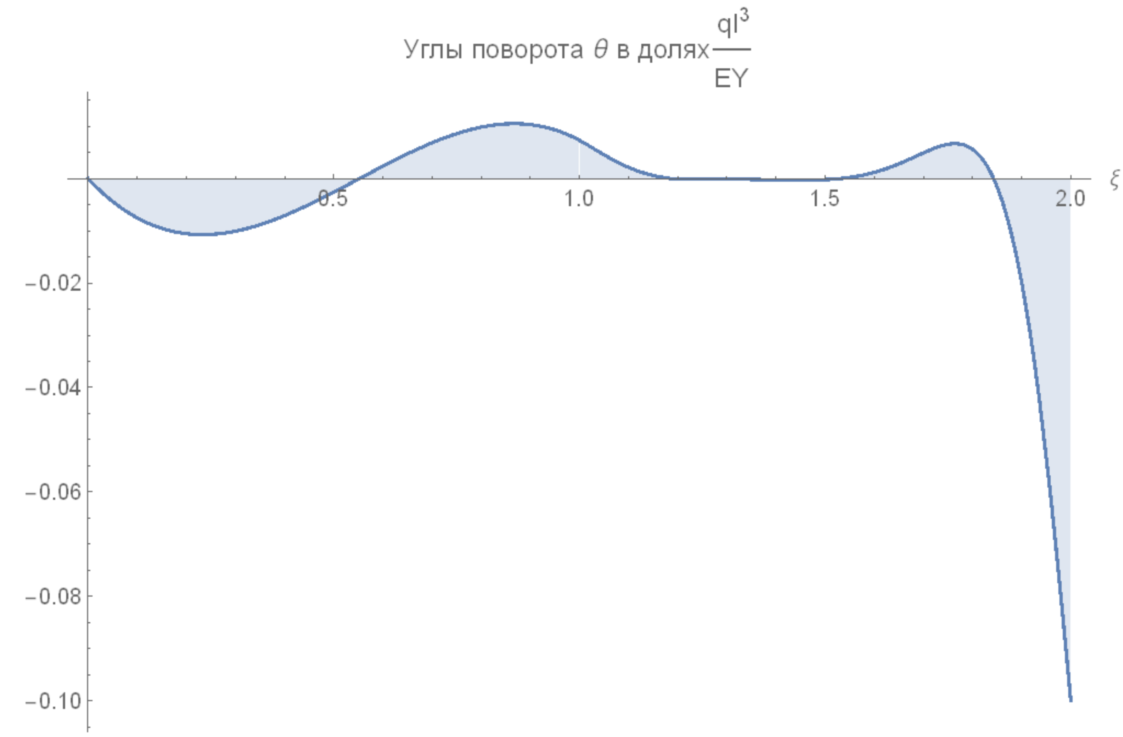
$$\upsilon_1''(1) = \upsilon_2''(0)$$

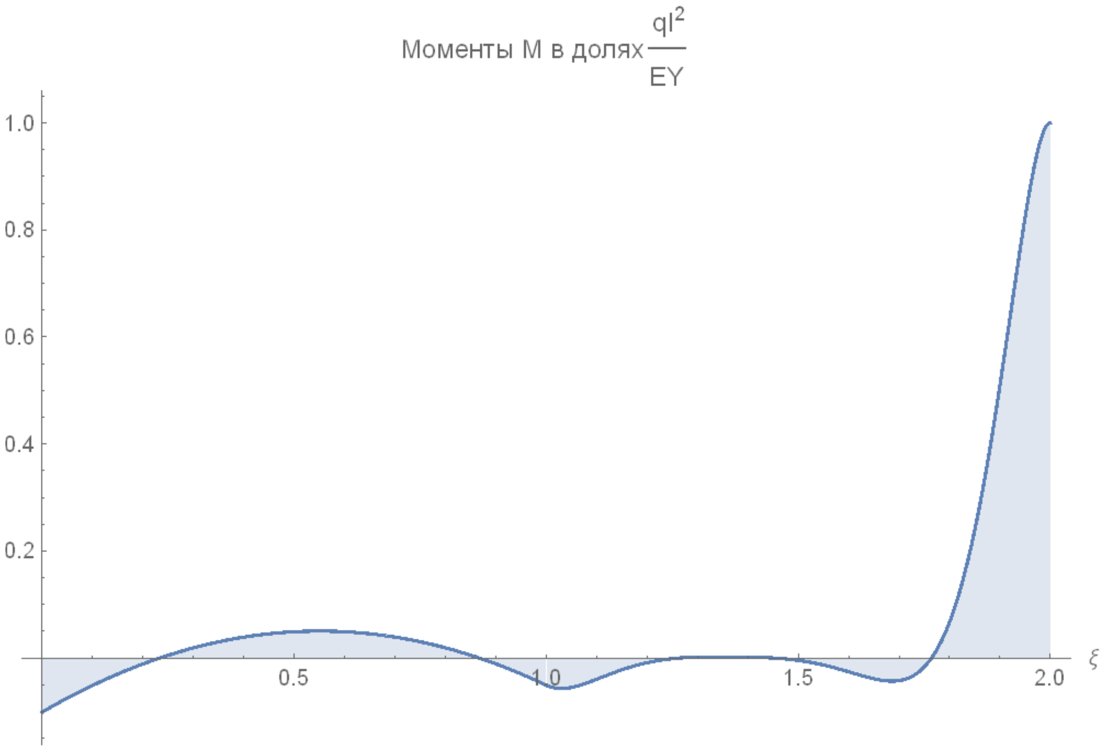
$$\upsilon_1'''(1) = \upsilon_2'''(0)$$

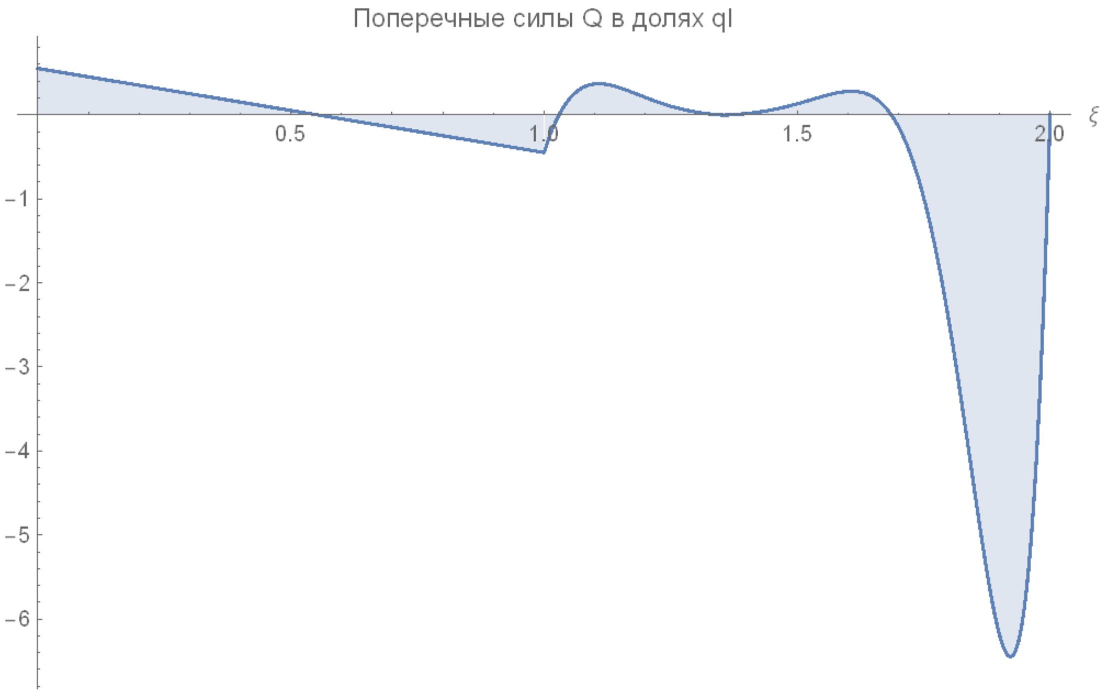
$$\upsilon_3''(0) = -ql^2$$

$$\upsilon_3'''(0) = 0$$


Прогибы v в долях $\frac{ql^4}{EY}$
0.004
0.002
−0.002
−0.004
0.5
1.0
1.5
2.0


Углы поворота θ в долях $\frac{ql^3}{EY}$
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.10
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ


Моменты M в долях $\frac{ql^2}{EY}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ


Поперечные силы Q в долях ql
0.5
1.0
1.5
2.0
ξ
−1
−2
−3
−4
−5
−6

```
In[1]:= ClearAll["Global`"]
λ = 2;
v1[ξ1_] =
  q l^4/EY * (α ξ1^2/2 - β ξ1^3/6 + ξ1^4/24 + B1 ξ1 + B2);
v1diff[ξ1_] = 1/l * D[v1[ξ1], ξ1];

v1difs[ξ1_] = 1/l * D[v1diff[ξ1], ξ1];

v1dift[ξ1_] = 1/l * D[v1difs[ξ1], ξ1];

K1[x_] = Cosh[x] * Cos[x];
K2[x_] =
  1/2 *
   (Cosh[x] * Sin[x] + Sinh[x] * Cos[x]);
K3[x_] = 1/2 * Sinh[x] * Sin[x];

K4[x_] =
  1/4 * (Cosh[x] * Sin[x] - Sinh[x] Cos[x]);
v2[ξ2_] =
  q l^4/EY *
   (C1 * K1[λ ξ2] + C2 * K2[λ ξ2] +
     C3 * K3[λ ξ2] + C4 * K4[λ ξ2] +
     1/64 (1 - K1[λ ξ2]));
v2diff[ξ2_] = 1/l * D[v2[ξ2], ξ2];

v2difs[ξ2_] = 1/l * D[v2diff[ξ2], ξ2];

v2dift[ξ2_] = 1/l * D[v2difs[ξ2], ξ2];

CONSTS =
  Solve[{v1[0] == 0, v1diff[0] == 0,
       v1[1] == v2[0],
       v1diff[1] == v2diff[0],
       v1difs[1] == v2difs[0],
       v1dift[1] == v2dift[0],
       v2difs[1] == q l^2/EY, v2dift[1] == 0},
      {α, β, C1, C2, C3, C4, B1, B2}] //
    FullSimplify // N;
{{α → 0.07045576542732714`,
  β → 0.5155791488484763`,
  C1 → -0.009035308761082482`,
  C2 → -0.010333571165122174`,
  C3 → 0.013719154144712708`,
  C4 → 0.060552606393940465`, B1 → 0.`,
  B2 → 0.`}};
v1[ξ1_] = EY/(q l^4) * v1[ξ1] /. CONSTS;
v2[ξ2_] = EY/(q l^4) * v2[ξ2] /. CONSTS;

v[ξ_] =
  Piecewise[{{v1[ξ], 0 ≤ ξ ≤ 1},
    {v2[ξ - 1], 1 ≤ ξ ≤ 2}}];
θ[ξ_] = -D[v[ξ], ξ];
M[ξ_] = D[θ[ξ], ξ];
Q[ξ_] = D[M[ξ], ξ];
Plot[-v[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,

  PlotLabel → "Прогибы v в долях ql^4/EY",

  PlotRange → Full, ImageSize → 500];


Plot[θ[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,
  AxesLabel → {ξ},
  PlotLabel →
   "Углы поворота θ в долях ql^3/EY",
  PlotRange → Full, ImageSize → 500];
Plot[M[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,
  AxesLabel → {ξ},
  PlotLabel → "Моменты M в долях ql^2/EY",
```

```
In[27]:= ClearAll["Global`"]
λ = 10;
v1[ξ1_] =
  q l^4/EY * (α ξ1^2/2 - β ξ1^3/6 + ξ1^4/24 + B1 ξ1 + B2);
v1diff[ξ1_] = 1/l * D[v1[ξ1], ξ1];

v1difs[ξ1_] = 1/l * D[v1diff[ξ1], ξ1];

v1dift[ξ1_] = 1/l * D[v1difs[ξ1], ξ1];

v2[ξ2_] =
  q l^4/EY *
   (Exp[-λ ξ2]
      (C1 Cos[λ ξ2] - C2 Sin[λ ξ2]) +
     0.25 * 10^-4);
v2diff[ξ2_] = 1/l * D[v2[ξ2], ξ2];

v2difs[ξ2_] = 1/l * D[v2diff[ξ2], ξ2];

v2dift[ξ2_] = 1/l * D[v2difs[ξ2], ξ2];

v3[ξ3_] =
  q l^4/EY *
   (Exp[-λ ξ3]
      (C3 Cos[λ ξ3] - C4 Sin[λ ξ3]) +
     0.25 * 10^-4);
v3diff[ξ3_] = 1/l * D[v3[ξ3], ξ3];

v3difs[ξ3_] = 1/l * D[v3diff[ξ3], ξ3];

v3dift[ξ3_] = 1/l * D[v3difs[ξ3], ξ3];

CONSTS =
  Solve[{v1[0] == 0, v1diff[0] == 0,
     v1[1] == v2[0], v1diff[1] == v2diff[0],
     v1difs[1] == v2difs[0],
     v1dift[1] == v2dift[0],
     v3difs[0] == -q l^2/EY, v3dift[0] == 0},
    {α, β, C1, C2, C3, C4, B1, B2}];
v1[ξ1_] = EY/(q l^4) * v1[ξ1] /. CONSTS;
v2[ξ2_] = EY/(q l^4) * v2[ξ2] /. CONSTS;
v3[ξ3_] = EY/(q l^4) * v3[ξ3] /. CONSTS;
rootv = FindRoot[v2[ξ] == v3[1 - ξ],
   {ξ, 0, 1}];
v[ξ_] =
  Piecewise[{{v1[ξ], 0 ≤ ξ ≤ 1},
    {v2[ξ - 1],
     1 < ξ ≤ 1 + 0.10777640583292933`},
    {v3[2 - ξ], 1 + 0.10777640583292933` <
      ξ ≤ 2}}];
dv1[ξ_] = D[-v1[ξ], ξ];
dv2[ξ_] = D[-v2[ξ], ξ];
dv3[ξ_] = D[-v3[ξ], ξ];
rootθ =
  FindRoot[dv2[ξ] == dv3[1 - ξ],
   {ξ, 0 , 1}];
θ[ξ_] =
  Piecewise[{{dv1[ξ], 0 ≤ ξ ≤ 1},
    {dv2[ξ - 1],
     1 < ξ ≤ 1 + 0.18611917122804958`},
    {dv3[2 - ξ],
     1 + 0.18611917122804958` < ξ ≤ 2}}];
ddv1[ξ_] = D[dv1[ξ], ξ];
ddv2[ξ_] = D[dv2[ξ], ξ];
ddv3[ξ_] = D[dv3[ξ], ξ];
rootM =
  FindRoot[ddv2[ξ] == ddv3[1 - ξ],
   {ξ, 0 , 0.5}];
M[ξ_] =
  Piecewise[{{ddv1[ξ], 0 ≤ ξ ≤ 1},
    {ddv2[ξ - 1],
     1 < ξ ≤ 1 + 0.28193565938505816`},
    {ddv3[2 - ξ],
```

```
Q[ξ_] = D[M[ξ], ξ];
dddv1[ξ_] = D[ddv1[ξ], ξ];
dddv2[ξ_] = D[ddv2[ξ], ξ];
dddv3[ξ_] = D[ddv3[ξ], ξ];
rootQ =
  FindRoot[dddv2[ξ] == dddv3[1 - ξ],
   {ξ, 0, 0.5}];
Q[ξ_] =
  Piecewise[{{dddv1[ξ], 0 ≤ ξ ≤ 1},
    {dddv2[ξ - 1],
     1 < ξ ≤ 1 + 0.3555482327696569`},
    {dddv3[2 - ξ],
     1 + 0.3555482327696569` < ξ ≤ 2}}];
Plot[-v[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,

  PlotLabel → "Прогибы v в долях ql^4/EY",

  PlotRange → Full, ImageSize → 500];


Plot[θ[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,
  AxesLabel → {ξ},
  PlotLabel → "Углы поворота θ в долях ql^3/EY",
  PlotRange → Full, ImageSize → 500];
Plot[M[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,
  AxesLabel → {ξ},
  PlotLabel → "Моменты M в долях ql^2/EY",
  PlotRange → Full, ImageSize → 500];
Plot[Q[ξ], {ξ, 0, 2}, Filling → Axis,
  AxesLabel → {ξ},
  PlotLabel →
   "Поперечные силы Q в долях ql",
  PlotRange → Full, ImageSize → 500];

Grid[Table[{ξ, v[ξ], θ[ξ], M[ξ], Q[ξ]},
   {ξ, 0 , 2 , 0.1}], Frame → All,
  Background →
   {{LightBlue , LightGreen, LightBrown,
     LightYellow, LightOrange}, None}] ;

ReplacePart[%109,
  1 → Prepend[First[%109],
```

ξ	v[ξ]	θ[ξ]	M[ξ]	Q[ξ]
0.	{0.}	{0.}	{-0.101047}	{0.550113}
0.1	{0.000417715}	{-0.00752078}	{-0.0510355}	{0.450113}
0.2	{0.00135412}	{-0.0105404}	{-0.0110242}	{0.350113}
0.3	{0.0024091}	{-0.010059}	{0.018987}	{0.250113}
0.4	{0.00328254}	{-0.00707636}	{0.0389983}	{0.150113}
0.5	{0.00377433}	{-0.00259264}	{0.0490095}	{0.0501125}
0.6	{0.00378436}	{0.00239221}	{0.0490208}	{-0.0498875}
0.7	{0.00331252}	{0.00687819}	{0.039032}	{-0.149887}
0.8	{0.00245869}	{0.00986528}	{0.0190433}	{-0.249887}
0.9	{0.00142276}	{0.0103535}	{-0.0109455}	{-0.349887}
1.	{0.000504615}	{0.00734286}	{-0.0509342}	{-0.449887}
1.1	{0.0000414952}	{0.00215585}	{-0.0398179}	{0.365188}
1.2	{0.0000269035}	{4.88098×10^{-6}}	{-0.0089357}	{0.20606}
1.3	{0.0000245581}	{-0.000068747}	{0.00128656}	{0.0324925}
1.4	{9.63687×10^{-6}}	{-0.000238002}	{0.00168742}	{0.013852}
1.5	{-0.0000168624}	{-0.00019113}	{-0.00454988}	{0.129224}
1.6	{0.0000155529}	{0.00119719}	{-0.0258332}	{0.277226}
1.7	{0.000306574}	{0.00492888}	{-0.0422629}	{-0.140519}
1.8	{0.000921897}	{0.00563193}	{0.0667407}	{-2.4612}
1.9	{0.000578969}	{-0.0198766}	{0.508326}	{-6.1912}
2.	{-0.004975}	{-0.1}	{1.}	{0.}