

Sprawozdanie z przedmiotu Metody Elementów Skończonych

1. Wstęp teoretyczny

MES – Metoda Elementów Skończonych, to podejście do rozwiązywania numerycznie problemów za pomocą podziału dziedziny na skończone elementy i wykonywania obliczeń jedynie dla poszczególnych węzłów podziału.

Wykorzystuje się je w celu modelowania przepływów ciepła lub płynów. Symulacji obciążeń konstrukcyjnych, procesów przemysłowych np. skręcania pręta.

Natomiast metoda ta jest metodą przybliżoną i bez odpowiedniej wiedzy teoretycznej, wykorzystanie jej może skutkować poważnymi błędami numerycznymi

2. Symulacja nieustalonego transferu ciepła w układzie dwuwymiarowym

Układ równań MES dla zadanego problemu ma postać:

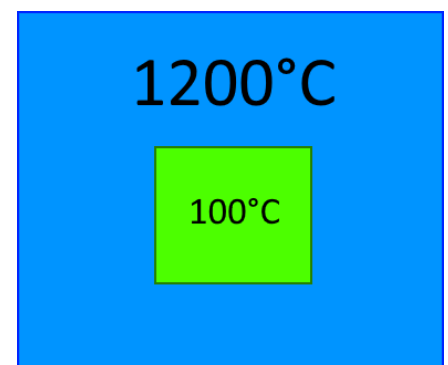
$$\left([H] + \frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\} + \{P\} = 0,$$

gdzie:

$$[H] = \int_V k \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS,$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS,$$

$$[C] = \int_V c\rho \{N\} \{N\}^T dV,$$



Rysunek 1 szkic modelu

Wektor $\{t_1\}$ to wektor temperatury obliczany w każdej iteracji programu

3. Struktura programu:

1. Klasa GlobalData zawiera stałe wartości potrzebne do przeprowadzenia symulacji.
2. Klasa Node zawiera jeden węzeł siatki MES. Posiada id, współrzędne x i y oraz flagę oznaczającą czy dany węzeł ma nałożone warunki brzegowe.
3. Klasa UniversalElement zawiera element uniwersalny, generowany raz. Posiada dane uniwersalne dla każdego elementu: funkcje kształtu, współrzędne całkowania, pochodne funkcji kształtu.
4. Klasa Element zawiera jeden element. Posiada swoje id, tablice id węzłów, jacobian, macierze H, Hbc, C, oraz wektor P.
5. Klasa Solution zawiera globalne macierze H i C oraz wektor P, oraz metodę rozwiązującą zadany układ równań.

4. Działanie programu:

- Wczytanie pliku z danymi symulacji
- Stworzenie elementu uniwersalnego, obliczenie funkcji kształtu i pochodnych
- Obliczenie dla każdego elementu jacobianu przekształcenia, wyznacznika jacobianu, macierzy H, macierzy Hbc, wektora P, macierzy C
- Agregacja lokalnych macierzy i wektorów do ich globalnych odpowiedników
- Rozwiązywanie zadanych równań MES dla skoku czasowego wczytanego z pliku
- Wypisanie maksymalnej oraz minimalnej temperatury w danej iteracji

5. Przedstawienie wyników testowych:

Dla pliku testowego „Test1_4_4.txt”:

dla 2 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 110.03797235555062 temp max: 365.8154726251594
In 100s:
temp min: 168.83700976624795 temp max: 502.5917142786477
In 150s:
temp min: 242.80084627221007 temp max: 587.3726667096677
In 200s:
temp min: 318.61458870451025 temp max: 649.3874821805222
In 250s:
temp min: 391.25579178949204 temp max: 700.0684182944658
In 300s:
temp min: 459.03690891911 temp max: 744.0633414735057
In 350s:
temp min: 521.5862853956571 temp max: 783.3828462176094
In 400s:
temp min: 579.0344613923552 temp max: 818.9921835720453
In 450s:
temp min: 631.6892582329696 temp max: 851.4310377963704
In 500s:
temp min: 679.9076191303868 temp max: 881.0576293885945
```

dla 3 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 110.03797235555064 temp max: 365.81547262515943
In 100s:
temp min: 168.83700976624803 temp max: 502.5917142786477
In 150s:
temp min: 242.8008462722101 temp max: 587.3726667096677
In 200s:
temp min: 318.6145887045103 temp max: 649.387482180522
In 250s:
temp min: 391.2557917894921 temp max: 700.0684182944657
In 300s:
temp min: 459.03690891910986 temp max: 744.0633414735055
In 350s:
temp min: 521.5862853956569 temp max: 783.3828462176094
In 400s:
temp min: 579.0344613923548 temp max: 818.9921835720451
In 450s:
temp min: 631.6892582329692 temp max: 851.4310377963703
In 500s:
temp min: 679.9076191303863 temp max: 881.0576293885943
```

dla 4 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 110.0379723555062 temp max: 365.8154726251593
In 100s:
temp min: 168.837009766248 temp max: 502.59171427864754
In 150s:
temp min: 242.80084627221012 temp max: 587.3726667096676
In 200s:
temp min: 318.61458870451025 temp max: 649.387482180522
In 250s:
temp min: 391.2557917894919 temp max: 700.0684182944656
In 300s:
temp min: 459.0369089191098 temp max: 744.0633414735054
In 350s:
temp min: 521.5862853956569 temp max: 783.3828462176093
In 400s:
temp min: 579.0344613923548 temp max: 818.992183572045
In 450s:
temp min: 631.689258232969 temp max: 851.4310377963701
In 500s:
temp min: 679.9076191303863 temp max: 881.0576293885941
```

wyniki przedstawione na UPEL:

```
110.03797659406167 365.8154705784631
168.83701715655656 502.5917120896439
242.80085524391868 587.372666691486
318.61459376004086 649.3874834542602
391.2557916738893 700.0684204214381
459.03690325635404 744.0633443187048
521.5862742337766 783.382849723737
579.0344449687701 818.9921876836681
631.6892368621455 851.4310425916341
679.9075931513394 881.057634906017
```

Dla pliku testowego „Test2_4_4_MixGrid.txt”:

dla 2 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 95.15905036466786 temp max: 374.66834389655344
In 100s:
temp min: 147.6558659019875 temp max: 505.954314277367
In 150s:
temp min: 220.17807637343165 temp max: 586.9894526119016
In 200s:
temp min: 296.75082847538556 temp max: 647.2801311288147
In 250s:
temp min: 370.98259631441124 temp max: 697.3298790618551
In 300s:
temp min: 440.57396855814136 temp max: 741.2156580867442
In 350s:
temp min: 504.9043332499904 temp max: 781.2407682534284
In 400s:
temp min: 564.0138842035086 temp max: 817.420429694985
In 450s:
temp min: 618.18546016604 temp max: 850.2640353753415
In 500s:
temp min: 667.7764039704329 temp max: 880.1922333906348
```

dla 3 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 95.15905036466786 temp max: 374.66834389655344
In 100s:
temp min: 147.6558659019875 temp max: 505.954314277367
In 150s:
temp min: 220.17807637343165 temp max: 586.9894526119016
In 200s:
temp min: 296.75082847538556 temp max: 647.2801311288147
In 250s:
temp min: 370.98259631441124 temp max: 697.3298790618551
In 300s:
temp min: 440.57396855814136 temp max: 741.2156580867442
In 350s:
temp min: 504.9043332499904 temp max: 781.2407682534284
In 400s:
temp min: 564.0138842035086 temp max: 817.420429694985
In 450s:
temp min: 618.18546016604 temp max: 850.2640353753415
In 500s:
temp min: 667.7764039704329 temp max: 880.1922333906348
```

dla 4 punktów całkowania:

```
In 50s:
temp min: 95.15907045805811 temp max: 374.6682653076116
In 100s:
temp min: 147.65589676737176 temp max: 505.95425550192743
In 150s:
temp min: 220.17811305239852 temp max: 586.9894190714291
In 200s:
temp min: 296.75086744900904 temp max: 647.2801115566522
In 250s:
temp min: 370.98263531131676 temp max: 697.3298658653001
In 300s:
temp min: 440.57400633251007 temp max: 741.2156477930179
In 350s:
temp min: 504.9043692131344 temp max: 781.240855379772
In 400s:
temp min: 564.0139181296031 temp max: 817.4205105019425
In 450s:
temp min: 618.1854920130777 temp max: 850.2641100383188
In 500s:
temp min: 667.7764337841546 temp max: 880.1923022343233
```

wyniki przedstawione na UPEL:

```
95.15184673458245 374.6863325385064
147.64441665454345 505.96811082245307
220.1644549730314 586.9978503916302
296.7364399006366 647.28558387732
370.968275802604 697.3339863103786
440.5601440058566 741.2191121514377
504.8911996551285 781.209569726045
564.0015111915015 817.3915065469778
618.1738556427995 850.2373194670416
667.7655470268747 880.1676054000437
```

Dla pliku testowego „Test3_31_31_kwadrat.txt”:

dla 2 punktów całkowania:

```
In 1s:
temp min: 100.0000000027194 temp max: 149.55695180811625
In 2s:
temp min: 100.0000000052911 temp max: 177.44492795006857
In 3s:
temp min: 100.00000005146062 temp max: 197.26696292169996
In 4s:
temp min: 100.00000033441954 temp max: 213.15278729153135
In 5s:
temp min: 100.00000163824065 temp max: 226.68258341907574
In 6s:
temp min: 100.0000064712037 temp max: 238.60706480588087
In 7s:
temp min: 100.00002152936507 temp max: 249.34669194249935
In 8s:
temp min: 100.00006221274094 temp max: 259.1650791551305
In 9s:
temp min: 100.00015978338763 temp max: 268.24068900501453
In 10s:
temp min: 100.00037134491957 temp max: 276.70109786331943
In 11s:
temp min: 100.00079223550667 temp max: 284.6412831886672
In 12s:
temp min: 100.0015698461014 temp max: 292.1342190508957
In 13s:
temp min: 100.00291748383832 temp max: 299.2374099453064
In 14s:
temp min: 100.00512679752848 temp max: 305.9971215275231
In 15s:
temp min: 100.00857746362759 temp max: 312.4512302135303
In 16s:
temp min: 100.0137432142323 temp max: 318.63120613643787
In 17s:
temp min: 100.02119375970871 temp max: 324.5635314899434
In 18s:
temp min: 100.03159261406797 temp max: 330.27073917337367
In 19s:
temp min: 100.04569120097813 temp max: 335.7721890479795
In 20s:
temp min: 100.06431986990393 temp max: 341.08465853432125
```

dla 3 punktów całkowania:

```
In 1s:
temp min: 100.0000000027194 temp max: 149.55695180811625
In 2s:
temp min: 100.00000000529111 temp max: 177.44492795006855
In 3s:
temp min: 100.00000005146063 temp max: 197.2669629217
In 4s:
temp min: 100.00000033441951 temp max: 213.1527872915314
In 5s:
temp min: 100.00000163824066 temp max: 226.68258341907577
In 6s:
temp min: 100.00000647120369 temp max: 238.6070648058808
In 7s:
temp min: 100.00002152936506 temp max: 249.3466919424993
In 8s:
temp min: 100.00006221274093 temp max: 259.16507915513046
In 9s:
temp min: 100.00015978338764 temp max: 268.2406890050145
In 10s:
temp min: 100.00037134491953 temp max: 276.7010978633194
In 11s:
temp min: 100.00079223550662 temp max: 284.6412831886672
In 12s:
temp min: 100.00156984610139 temp max: 292.13421905089564
In 13s:
temp min: 100.00291748383829 temp max: 299.23740994530635
In 14s:
temp min: 100.00512679752846 temp max: 305.9971215275231
In 15s:
temp min: 100.0085774636276 temp max: 312.4512302135304
In 16s:
temp min: 100.01374321423229 temp max: 318.63120613643787
In 17s:
temp min: 100.02119375970865 temp max: 324.56353148994344
In 18s:
temp min: 100.03159261406789 temp max: 330.27073917337367
In 19s:
temp min: 100.04569120097806 temp max: 335.77218904797957
In 20s:
temp min: 100.06431986990387 temp max: 341.08465853432125
```

dla 4 punktów całkowania:

wyniki przedstawione na UPEL:

```
In 1s:
temp min: 100.0000000027195 temp max: 149.55695180811628
In 2s:
temp min: 100.00000000529111 temp max: 177.44492795006863
In 3s:
temp min: 100.00000005146063 temp max: 197.26696292169999
In 4s:
temp min: 100.00000033441948 temp max: 213.15278729153144
In 5s:
temp min: 100.00000163824062 temp max: 226.68258341907574
In 6s:
temp min: 100.00000647120366 temp max: 238.60706480588067
In 7s:
temp min: 100.00002152936504 temp max: 249.34669194249915
In 8s:
temp min: 100.00006221274091 temp max: 259.1650791551303
In 9s:
temp min: 100.0001597833876 temp max: 268.2406890050143
In 10s:
temp min: 100.0003713449195 temp max: 276.7010978633192
In 11s:
temp min: 100.00079223550662 temp max: 284.64128318866705
In 12s:
temp min: 100.00156984610135 temp max: 292.1342190508954
In 13s:
temp min: 100.00291748383826 temp max: 299.2374099453062
In 14s:
temp min: 100.00512679752842 temp max: 305.9971215275229
In 15s:
temp min: 100.00857746362755 temp max: 312.45123021353015
In 16s:
temp min: 100.01374321423228 temp max: 318.6312061364377
In 17s:
temp min: 100.02119375970865 temp max: 324.5635314899433
In 18s:
temp min: 100.03159261406793 temp max: 330.2707391733735
In 19s:
temp min: 100.04569120097811 temp max: 335.7721890479794
In 20s:
temp min: 100.06431986990391 temp max: 341.0846585343212
```

```
99.99969812978378 149.5566275788947
100.00053467957446 177.44482649738018
100.00084733335379 197.2672291500534
100.00116712763896 213.15348263983788
100.00150209858216 226.6837398631218
100.001852708951 238.60869878203812
100.00222410506852 249.34880985057373
100.00263047992797 259.1676797521773
100.00310216686808 268.24376548847937
100.00369558647527 276.70463950306436
100.00450560745507 284.64527660833346
100.00567932588369 292.1386492100023
100.00742988613344 299.242260871447
100.01004886564658 306.00237684844643
100.01391592562979 312.4568735346492
100.01950481085419 318.637221302136
100.02738525124852 324.56990275925733
100.0382207726261 330.27745133351596
100.05276279329537 335.77922748329735
100.07184163487159 341.0920092636545
```

6. Wnioski:

Otrzymane wyniki są zbliżone do wartości podanych na platformie UPEL, co wskazuje na poprawne działanie programu. Ewentualne niedokładności mogą wynikać z obliczeń sum cząstkowych oraz ograniczonej precyzji operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych. Metoda elementów skończonych okazała się skutecznym narzędziem do precyzyjnego modelowania procesu przepływu ciepła. Niemniej jednak, uzyskanie wiarygodnych wyników wymaga odpowiedniej wiedzy teoretycznej użytkownika. Brak tej wiedzy może prowadzić do skrajnie błędnych rezultatów, ponieważ program akceptuje dowolne dane wejściowe, a odpowiedzialność za ich właściwą interpretację oraz weryfikację poprawności spoczywa na użytkowniku.