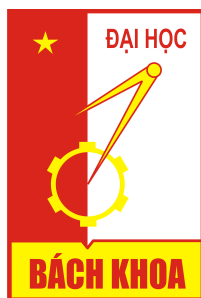


**ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**



**Báo cáo học phần: Mô hình mô phỏng**

**MÔ PHỎNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒ PHI TUYẾN  
VÀ ỨNG DỤNG**

**Nguyễn Việt Dũng**

**dung.nv232215M@sis.hust.edu.vn**

**Chuyên ngành: Toán-Tin**

**Giảng viên hướng dẫn:** TS. Tạ Thị Thanh Mai

**Khoa:** Toán ứng dụng và Tin học

**HÀ NỘI, 4/2024**

# Mục lục

<b>Bảng ký hiệu và chữ viết tắt</b>	<b>iii</b>
<b>Danh sách bảng</b>	<b>iv</b>
<b>Danh sách hình vẽ</b>	<b>v</b>
<b>Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị</b>	<b>1</b>
1.1 Các không gian hàm . . . . .	1
1.1.1 Không gian véc tơ . . . . .	1
1.1.2 Không gian chuẩn . . . . .	2
1.1.3 Không gian Banach . . . . .	2
1.1.4 Không gian có tích vô hướng . . . . .	3
1.1.5 Không gian Hilbert . . . . .	4
1.2 Bài toán yếu trong không gian Hilbert . . . . .	5
1.2.1 Phiếm hàm tuyến tính . . . . .	5
1.2.2 Dạng song tuyến tính . . . . .	5
1.2.3 Bài toán yếu . . . . .	6
1.2.4 Phương pháp xấp xỉ Galerkin . . . . .	7
1.2.5 Tìm nghiệm gần đúng . . . . .	8
1.2.6 Đánh giá sai số . . . . .	9
<b>Chương 2 Bài toán biến dạng đàn hồi tuyến tính và phi tuyến</b>	<b>10</b>
2.1 Bài toán biến dạng đàn hồi tuyến tính . . . . .	10
2.2 Bài toán biến dạng đàn hồi phi tuyến với vật liệu siêu đàn hồi . . . . .	12
2.3 Phương pháp học sâu giải bài toán biến dạng đàn hồi của vật thể hyperelastic . . . . .	14

2.3.1	Kiến trúc mô hình . . . . .	14
2.3.2	Deep Energy Method (DEM) . . . . .	15
<b>Chương 3</b>	<b>Ví dụ mô phỏng</b>	<b>18</b>
3.1	Uốn cong thanh 1D . . . . .	18
3.2	Uốn cong thanh 3D . . . . .	19
	<b>Kết luận</b>	<b>23</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>24</b>



# Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}^m$	Không gian véc tơ thực $m$ chiều
$\mathcal{I}$	Ma trận đơn vị
$\varepsilon(\mathbf{u})$	Ứng suất biến dạng theo véc tơ $\mathbf{u}$
$\mathcal{A}(\mathbf{u})$	Ứng suất cắt theo véc tơ $\mathbf{u}$
$A^\top$	Chuyển vị của ma trận $A$
$\text{tr}(A)$	Vết của ma trận $A$
$\mathbf{u} \cdot V$	Tích vô hướng của hai véc tơ $\mathbf{u}$ và $V$ trong $\mathbb{R}^m$
$\mathbf{u} : V$	Tích vô hướng Frobenius của hai véc tơ $\mathbf{u}$ và $V$ trong $\mathbb{R}^m$ . $\mathbf{u} : V = \text{tr}(\mathbf{u}\mathbf{v}^\top)$
$\partial_i \mathbf{u}$	Đạo hàm yếu của véc tơ $\mathbf{u}$ theo biến $x_i$
$\nabla \mathbf{u}$	Toán tử Gradient. $\nabla \mathbf{u} = (\partial_j u_i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$
$\text{div}(\mathbf{u})$	Toán tử Divergence. $\text{div}(\mathbf{u}) = \left( \sum_{j=1}^m \partial_j u_i \right)_{1 \leq i \leq m}^\top \in \mathbb{R}^m$
$\Delta \mathbf{u}$	Toán tử Laplace. $\Delta \mathbf{u} = \left( \sum_{j=1}^m \partial_{jj} u_i \right)_{1 \leq i \leq m}^\top \in \mathbb{R}^m$
$\Omega$	Miền Lipschitz bị chặn
$\Gamma$	Biên của miền $\Omega$
$\kappa, \mu$	Các hằng số Lamé của vật liệu
$E$	Mô đun Young của vật liệu
$\nu$	Tỷ số Poisson của vật liệu
$\mathbf{P}$	Ứng suất Piola-Kirchhoff đầu tiên
$\mathbf{S}$	Ứng suất Piola-Kirchhoff thứ hai
$\Psi$	Hàm năng lượng biến dạng
$L^p(\Omega)$	Không gian các hàm thực khả tích Lebesgue bậc $p$ trên $\Omega$
$W^{k,p}(\Omega)$	Không gian Sobolev: Không gian các hàm $u \in L^p(\Omega)$ có đạo hàm tới cấp $k$ thuộc $L^p(\Omega)$ . Ký hiệu $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$

BFGS	Ước lượng Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
IPOPT	Internal Point OPTimizer: Thư viện giải bài toán tối ưu phi tuyến kích thước lớn

# **Danh sách bảng**

# Danh sách hình vẽ

1.1	Miền $\Omega$ được chia thành các tam giác riêng biệt . . . . .	7
2.1	Biến dạng đàn hồi. . . . .	13
2.2	Kiến trúc mạng feedforward. . . . .	15
2.3	Sơ đồ của Deep Energy Method. . . . .	17
3.1	(trái) Hình dạng vật thể. (phải) Với hàm mật độ năng lượng $\Psi(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\varepsilon - 1$ . được vẽ theo tọa độ $\varepsilon$ . . . . .	18
3.2	Nghiệm thu được của DEMM, DMT, DEMS trong hai trường hợp. . . . .	20
3.3	So sánh chuẩn sai số $L^2$ và bán chuẩn lỗi $H^1$ trong 3 trường hợp: 10 điểm, 100 điểm, 1000 điểm. . . . .	20
3.4	Lưới của thanh 3D. . . . .	21
3.5	Biến dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ monte-carlo. . . . .	21
3.6	Biến dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ hình thang. . . . .	22
3.7	Biến dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ Simpson. . . . .	22



# Chương 1

## Một số kiến thức chuẩn bị

Kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo từ [5], [2]

### 1.1 Các không gian hàm

#### 1.1.1 Không gian véc tơ

**Định nghĩa 1.1.1** Không gian véc tơ  $V$  trên trường vô hướng  $K$  là một tập các đối tượng, mỗi đối tượng là một véc tơ, trong đó xác định hai phép toán:

- (1) Phép cộng:

$$x \in V, y \in V \Rightarrow (x + y) \in V$$

- (2) Phép nhân vô hướng:

$$x \in V, k \in K \Rightarrow kx \in V$$

Sao cho 8 tính chất sau được thỏa mãn:

1.  $x + y = y + x$   $\forall x, y \in V.$
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$   $\forall x, y, z \in V.$
3.  $\exists \theta \in V : \theta + x = x + \theta = x$   $\forall x \in V.$
4.  $x \in V, \exists -x \in V : x + (-x) = (-x) + x = \theta$
5.  $k(x + y) = kx + ky$   $\forall x, y \in V, \forall k \in K.$
6.  $(k + l)x = kx + lx,$   $\forall x \in V, \forall k, l \in K.$
7.  $k(lx) = (kl)x,$   $\forall x \in V, \forall k, l \in K.$
8.  $1x = x,$   $\forall x \in V.$

Trong đó, phần tử  $\theta$  là phần tử "trung hòa" hay còn gọi là phần tử "không" của  $V$  và phần tử  $-x$  là phần tử "đối" của  $x$ .

### 1.1.2 Không gian chuẩn

**Định nghĩa 1.1.2** Không gian chuẩn (không gian định chuẩn) là một không gian véc tơ  $V$  trong đó ứng với mỗi phần tử  $x \in V$  đều có cách xác định một số thực kí hiệu là  $\|x\|$  được gọi là chuẩn của  $x$ , thỏa mãn 3 tính chất sau:

1.  $\|x\| \geq 0$   $\forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ .
2.  $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$   $\forall x \in V, \forall k \in K$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$   $\forall x, y \in V$ .

**Sự hội tụ:** Trong không gian chuẩn  $V$  xét dãy phần tử  $\{x_n\}$ . Ta nói dãy  $x_n$  hội tụ tới  $x \in V$  (hay có giới hạn là  $x \in V$ ) nếu dãy số  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  tức là:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

**Sự trù mật:**  $V$  là một không gian chuẩn. Cho  $S \subset T \subset V$ . Ta có  $S$  trù mật trong  $T$  nếu với mỗi phần tử  $y \in T$  tồn tại  $\{y_n \in S\}$  để  $y_n \rightarrow y$ .  
Nếu  $T = V$  thì  $S$  trù mật trong  $V$ .

**Chuẩn tương đương:** Hai chuẩn khác nhau  $\|x\|_1, \|x\|_2$  là tương đương nếu:

$$\exists M_1, M_2 > 0 : M_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in V.$$

*Ý nghĩa:* Nếu một dãy hội tụ theo chuẩn thứ nhất thì dãy đó cũng hội tụ theo chuẩn thứ hai và ngược lại:

$$\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0.$$

### 1.1.3 Không gian Banach

#### Dãy Cauchy

$V$  là một không gian chuẩn, xét dãy  $\{x_n \in V\}$  là dãy Cauchy nếu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

**Nhận xét 1.1.1** Mọi dãy Cauchy có không quá một giới hạn.

#### Chứng minh.

Thực vậy, giả sử dãy  $\{x_n \in V\}$  có hai giới hạn là  $a$  và  $b$  với  $a \neq b$  nghĩa là  $\|b - a\| > 0$ .

Khi đó chọn  $\varepsilon = \frac{\|b - a\|}{4}$  sẽ tồn tại số nguyên  $N > 0$  sao cho khi  $n > N$  thì:

$$\|x_n - a\| < \frac{\|b - a\|}{4}, \quad \|x_n - b\| < \frac{\|b - a\|}{4}.$$

Ta lại có:  $b - a = (x_n - a) - (x_n - b)$

$$\begin{aligned}\|b - a\| &< \|x_n - a\| + \|x_n - b\| < \frac{\|b - a\|}{4} + \frac{\|b - a\|}{4} = \frac{\|b - a\|}{2} \\ &\Rightarrow \frac{\|b - a\|}{2} < 0 \Rightarrow \|b - a\| < 0.\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu  $\|b - a\| > 0$ , vậy ta có điều phải chứng minh.

**Nhận xét 1.1.2** Trong không gian chuẩn  $V$  mọi dãy hội tụ là dãy Cauchy.

**Chứng minh.**

Thực vậy, giả sử  $x_n \rightarrow x \in V$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Nhận xét 1.1.3** Không phải dãy Cauchy nào cũng hội tụ

**Định nghĩa 1.1.3** Một không gian chuẩn  $V$  trong đó mọi dãy Cauchy đều hội tụ là một không gian đầy. Không gian chuẩn đầy gọi là không gian Banach.

### 1.1.4 Không gian có tích vô hướng

**Định nghĩa 1.1.4** Trong không gian véc tơ  $V$  trên trường số thực  $\mathbb{R}$  nếu tồn tại một ánh xạ:  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tức là ứng với mỗi cặp  $(u, v) \in V \times V$  có cách xác định một số thực ký hiệu là  $(u, v)$  để thỏa mãn 5 tính chất sau:

1.  $(u, v) = (v, u),$   $\forall u, v \in V.$
2.  $(u + w, v) = (u, v) + (w, v),$   $\forall u, v, w \in V.$
3.  $(ku, v) = k(u, v),$   $\forall u, v \in V, \forall k \in \mathbb{R}.$
4.  $(u, u) \geq 0,$   $\forall u \in V.$
5.  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \theta.$

Thì đại lượng  $(u, v)$  là một tích vô hướng trong không gian véc tơ  $V$ , và  $V$  gọi là không gian có tích vô hướng.

### **Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz - Bunhiacowski (C - S - B).**

Ta có bất đẳng thức C - S - B như sau:

$$|(u, v)| \leq (u, u) \cdot (v, v).$$

#### **Chứng minh.**

Theo tính chất (4) của tích vô hướng ta có:

$$(u + tv, u + tv) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Với mọi  $t \in \mathbb{R}$  ta có:

$$(u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) = (u, u) + 2t(u, v) + t^2(v, v) \geq 0.$$

Đây là một phương trình bậc hai với ẩn là  $t$ , để dấu " $\geq$ " xảy ra  $\forall t \in \mathbb{R}$  thì:

$$\Delta' = (u, v)^2 - (u, u)(v, v) \leq 0.$$

(Bất đẳng thức C-S-B).

### **1.1.5 Không gian Hilbert**

**Không gian tiền Hilbert:** Trong không gian có tích vô hướng  $V$  ta xét đại lượng:

$$\sqrt{(u, u)}, \quad \forall u \in V.$$

Theo tính chất của tích vô hướng, đại lượng trên thỏa mãn tính chất của chuẩn véc tơ. Nên không gian véc tơ  $V$  với chuẩn  $\|u\|_V := \sqrt{(u, u)}$  là một không gian chuẩn. Và không gian chuẩn này gọi là không gian tiền Hilbert.

**Định nghĩa 1.1.5** Không gian tiền Hilbert  $V$  là một không gian đầy thì nó được gọi là không gian Hilbert

#### **Nhận xét 1.1.4 :**

- Không gian Hilbert là không gian Banach.
- Trong không gian Hilbert  $V$ :

$$(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow u = \theta.$$

- Bất đẳng thức C-S-B có dạng:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

## 1.2 Bài toán yếu trong không gian Hilbert

### 1.2.1 Phiếm hàm tuyến tính

**Định nghĩa 1.2.1**  $V$  là một không gian Hilbert. Ta có:

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Khi đó  $F$  là một phiếm hàm trên  $V$ .

Phiếm hàm  $F$  là tuyến tính nếu:

$$F(pu + qv) = pF(u) + qF(v), \quad \forall u, v \in V, \forall p, q \in \mathbb{R}.$$

**Nhận xét 1.2.1** Phiếm hàm tuyến tính  $F$  liên tục hoặc bị chặn trên  $V$  nếu tồn tại hằng số dương  $M$  sao cho:

$$|F(v)| \leq M \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

### 1.2.2 Dạng song tuyến tính

**Định nghĩa 1.2.2** Cho  $V$  là một không gian Hilbert. Ta nói  $\alpha(u, v)$  là một song tuyến tính trên  $V$  nếu:

$$\alpha(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Và  $\forall u, v, w \in V, \forall k, h \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha(ku + hw, v) = k\alpha(u, v) + h\alpha(w, v),$$

$$\alpha(u, kv + hw) = k\alpha(u, v) + h\alpha(u, w).$$

Dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  đối xứng trên  $V$  nếu:

$$\alpha(u, v) = \alpha(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

**Nhận xét 1.2.2 :**

- Dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  liên tục hay bị chặn trên  $V$  nếu tồn tại hằng số dương  $M$  sao cho:

$$|\alpha(u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

- Dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  có tính  $V$  – elliptic nếu tồn tại hằng số dương  $\gamma$  sao cho:

$$\alpha(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

**Định lý 1.1 (Định lý Riesz):**

Nếu phiếm hàm tuyến tính  $F$  liên tục trên không gian Hilbert  $V$  thì tồn tại một phần tử duy nhất  $w \in V$  sao cho:

$$F(v) = (w, v), \quad \forall v \in V,$$

nghĩa là  $F$  có thể biểu diễn ở dạng một tích vô hướng.

**1.2.3 Bài toán yếu****Phát biểu bài toán:**

Xét không gian Hilbert  $V$ . Cho  $\alpha(u, v)$  là một dạng song tuyến tính trên  $V$  và  $L(v)$  là một phiếm hàm tuyến tính trên  $V$ .

Bài toán: Tìm  $u \in V$  thỏa mãn:

$$\alpha(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.1)$$

Ta gọi đây là bài toán yếu trong không gian Hilbert  $V$ .

**Dạng biến phân của bài toán yếu:**

Nếu dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  đối xứng, liên tục trên  $V$  và  $V$  – elliptic, đồng thời phiếm hàm tuyến tính  $L(v)$  liên tục trên  $V$  thì bài toán yếu ban đầu tương đương với bài toán sau:

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v). \quad (1.2)$$

Trong đó:

$$J(v) := \alpha(v, v) - 2L(v) \quad \forall v \in V.$$

**Sự tồn tại nghiệm của bài toán yếu**

–  $\alpha(u, v)$  đối xứng

**Định lý 1.2** Nếu dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  đối xứng, liên tục trên  $V$  và  $V$  – elliptic, đồng thời phiếm hàm tuyến tính  $L(v)$  liên tục trên  $V$  thì bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất.

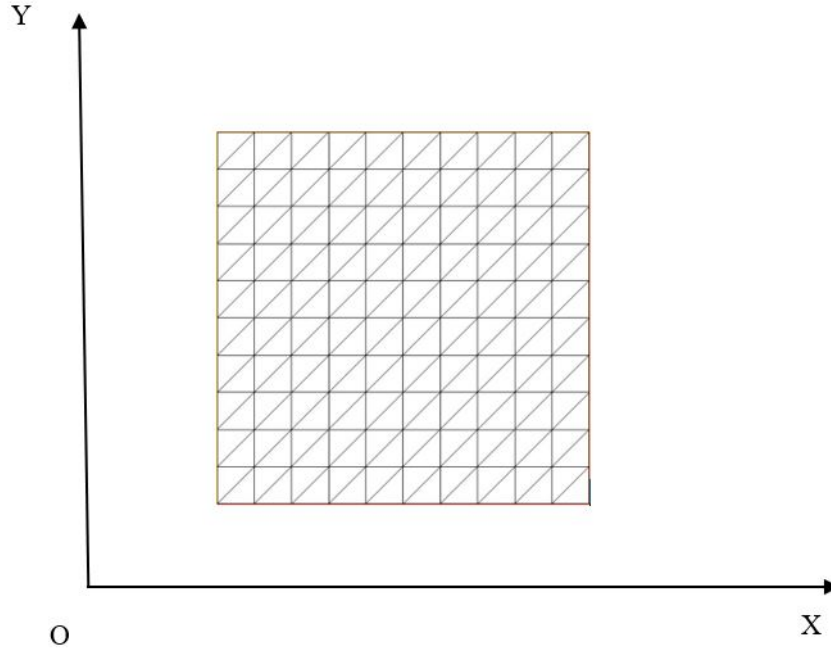
–  $\alpha(u, v)$  không đối xứng

**Bổ đề 1.1 (Bổ đề Lax - Milgram (L - M))**

1.  $\alpha(u, v)$  là một dạng song tuyến tính liên tục trên  $V$  và  $V$  – elliptic,
2.  $L(v)$  là một phiếm hàm tuyến tính, liên tục trên  $V$ , thì bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất.

### 1.2.4 Phương pháp xấp xỉ Galerkin

Xét  $\Omega$  là miền bị chặn và có biên kín trơn từng khúc. Ta chia miền  $\Omega$  thành các tam giác nhỏ khác nhau không có điểm chung trong, không có đỉnh của tam giác nọ nằm trên cạnh tam giác kia, đồng thời các góc hình học của tam giác  $> 0$ , và khi cạnh tam giác tiến về 0 thì diện tích của tam giác cũng dần tiến về 0.



Hình 1.1: Miền  $\Omega$  được chia thành các tam giác riêng biệt

Ta ký hiệu mỗi đỉnh của tam giác là những nút  $P_1, P_2, \dots, P_N$ .

Đồng thời các tam giác con gọi là phần tử được đánh số từ 1 tới  $M$ :  $T_1, T_2, \dots, T_M$ .

Tam giác thứ  $l$ ,  $T_l$  có ba đỉnh hoàn toàn xác định đó là  $P_i, P_j, P_k$ .

#### **Không gian con hữu hạn chiều $V_N$**

Xét một phần tử hữu hạn tam giác  $T_l$  với ba đỉnh tương ứng là:

$$P_i(x_i, y_i), P_j(x_j, y_j), P_k(x_k, y_k).$$

Ta xây dựng hàm  $\varphi_i$  ứng với  $P_i$  là hàm bậc nhất đối với  $x, y$  đồng thời liên tục và tuyến tính từng phần trong  $\Omega$ :

$$\varphi_i(x, y) = Ax + By + C, \quad (x, y) \in T_l.$$

Với điều kiện:

$$\varphi_i(x_i, y_i) = 1, \quad \varphi_i(x_j, y_j) = 0, \quad \varphi_i(x_k, y_k) = 0.$$

**Nhận xét 1.2.3 :**

- Hàm  $\varphi_i$  thuộc  $W_0^1(\Omega)$  và có giá đỡ nhỏ.
- Họ  $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  độc lập tuyến tính.

Vì vậy họ các  $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N$  sinh ra một không gian con  $N$  chiều của  $W_0^1(\Omega)$ .

Ta gọi:

$$V_N := \text{span}\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Không gian  $V_N$  là một không gian phần tử hữu hạn.

**1.2.5 Tìm nghiệm gần đúng**

Ta sẽ giải bài toán (1.1) trên không gian  $V_N$ .

Bài toán: Tìm  $u_N \in V_N$  thỏa mãn:

$$\alpha(u_N, v) = L(v), \quad \forall v \in V_N.$$

Hàm  $u_N \in V_N$  nên:

$$u_N(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x, y).$$

Ta cần xác định  $c_i$  sao cho bài toán thỏa mãn với mọi  $v = \varphi_j \in V_N, j = \overline{1, N}$ , tức là:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, \varphi_j\right) = L(\varphi_j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Hay:

$$\sum_{i=1}^N c_i \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Bài toán quay về việc giải hệ đại số:

$$Ac = F.$$

Với:

$$c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N)^T, \quad F = (F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N)^T, \quad A = (A_{ij}).$$

Trong đó:

$$A_{ij} := \alpha(\varphi_i, \varphi_j), \quad F_j = L(\varphi_j).$$

Ta xét dạng thuần nhất của hệ đại số trên:  $Ac = 0$ . Nhận thấy hệ này chỉ có nghiệm tầm thường nên hệ ban đầu có nghiệm duy nhất.

Sau khi tìm ra hệ số  $c_i$  ta quay lại tìm nghiệm  $u_N$  trong không gian  $V_N$ .



### 1.2.6 Đánh giá sai số

Khi  $N$  càng lớn thì nghiệm xấp xỉ  $u_N$  càng gần  $u$ . Tức là sai số ta thu được là nhỏ nhất có thể:

$$\|u - u_N\|_V \rightarrow 0.$$

**Định lý 1.3** Giả sử  $\alpha(u, v)$  là một dạng song tuyến tính đối xứng, liên tục trên  $V$  và  $V$  – elliptic. Khi đó:

$$\alpha(u - u_N, u - u_N) \leq \alpha(u - y_N, u - y_N), \quad \forall y_N \in V_N.$$

**Định lý 1.4** Giả sử  $\alpha(u, v)$  là một dạng song tuyến tính đối xứng, liên tục trên  $V$  và  $V$  – elliptic. Và  $M, \gamma$  là những hằng số dương thỏa mãn:

$$|\alpha(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \alpha(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2.$$

Ta có:

$$\|u - u_N\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\gamma}} \|u - y_N\|_V, \quad \forall y_N \in V_N.$$

Và:

$$\|u - u_N\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\gamma}} \inf_{y_N \in V_N} \{\|u - y_N\|_V\}.$$

## Chương 2

# Bài toán biến dạng đàn hồi tuyến tính và phi tuyến

Biến dạng đàn hồi là làm thay đổi hình dạng của vật liệu khi tác dụng một lực trong giới hạn đàn hồi của vật. Đặc tính vật lí này đảm bảo rằng các vật liệu đàn hồi sẽ lấy lại kích thước ban đầu sau khi loại bỏ các lực tác dụng.

### 2.1 Bài toán biến dạng đàn hồi tuyến tính

Giả sử  $\mathcal{A}(\mathbf{u}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) là *stress tensor* và  $\varepsilon(\mathbf{u}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) là *strain tensor* được xác định như sau:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.1)$$

Theo định luật Hooke, ta có mối quan hệ giữa *stress tensor* và *strain tensor* như sau:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \lambda \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) \mathcal{I} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

trong đó:

- $\lambda, \mu$  là các hệ số Lamé.
- $\mathcal{I}$  là ma trận đơn vị.
- Hệ số  $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$  mô tả khả năng nén của vật, hệ số này càng lớn thì vật gần như không thể nén.
- Các hệ số  $\lambda, \mu$  được biểu diễn qua hằng số Young và hệ số Poisson như sau:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

- Hệ số Poisson:  $-1 \leq \nu < \frac{1}{2}$ .

- Giả định  $\lambda \geq 0$  nên ta có  $\nu \geq 0$ . Một vật liệu gần như không thể nén thì tương ứng với nó là hệ số Poisson rất gần với  $\frac{1}{2}$ .

Dưới tác dụng của ngoại lực  $\mathbf{f}$ , theo điều kiện cân bằng lực ta có:

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (2.3)$$

Ta kết hợp phương trình (2.3) với các điều kiện biên, ta có hệ phương trình đàn hồi tuyến tính:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \mathbf{u} \in \Omega, \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathcal{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \mathbf{u} \in \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{u} \in \Gamma_D, \\ \mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g}_N & \mathbf{u} \in \Gamma_N. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán đàn hồi là một trường véc tơ dịch chuyển  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  gây ra bởi lực  $\mathbf{f}$  sau khi hệ thống trở lại trạng thái cân bằng ban đầu.

Để đưa bài toán tuyến tính đàn hồi về bài toán yếu, ta nhân vô hướng hai vế của phương trình (2.3) với hàm thử  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

Áp dụng công thức Green:

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathcal{A}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathcal{A}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \, ds.$$

Ta có  $\mathbf{u} = 0$  trên biên  $\Gamma_D$ :

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Và:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathcal{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathcal{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}).$$

Do đó:

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

### Dạng biến phân của bài toán đàn hồi:

Phát biểu bài toán: Tìm  $\mathbf{u} \in (\mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d$  sao cho:

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{L}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d, \quad (2.4)$$

với dạng song tuyến tính:

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \cdot \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx,$$

và phiếm hàm tuyến tính:

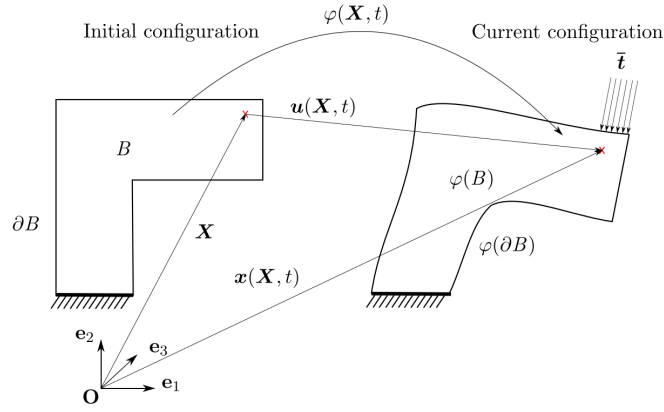
$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v} ds.$$

Ta thấy (2.4) là một bài toán yếu trong không gian Hilbert đã được nhắc đến ở 1.2. Theo bổ đề Lax - Milgram, bài toán (2.4) có nghiệm duy nhất. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu về phương trình biến dạng đàn hồi phi tuyến tính của vật liệu siêu đàn hồi không nén được.

## 2.2 Bài toán biến dạng đàn hồi phi tuyến với vật liệu siêu đàn hồi

Xét một vật thể được làm từ vật liệu hyperelastic không tuyến tính, đẳng hướng và đồng nhất. Vật thể  $B$  được mô tả bởi một tập hợp các hạt hoặc điểm  $X$  và được giới hạn bởi biên  $\partial B$  trong cấu hình ban đầu. Vật thể bị biến dạng do tải trọng  $t$  được áp dụng lên nó ở một số khu vực nhất định (như hình 2.1). Ánh xạ của các điểm vật liệu từ cấu hình ban đầu sang cấu hình hiện tại được cho bởi:  $\varphi : B \rightarrow B_t/X \mapsto \varphi(X, t) : x = u + X$ .

Chúng ta chọn sử dụng bài toán giá trị biên trong cấu hình ban đầu bao gồm các thành phần sau: Cân bằng:  $\nabla_X \cdot \mathbf{P} + \mathbf{f}_B = 0$ , Biên Dirichlet:  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  trên  $\partial B_u$ , Biên Neumann:  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}$  trên  $\partial B_t$ , trong đó  $\nabla_X \cdot \mathbf{P}$  biểu thị toán tử phân kỳ áp dụng lên stress Piola-Kirchhoff cấp một liên quan đến  $X$  trên cấu hình ban đầu;  $\bar{\mathbf{u}}$  và  $\bar{\mathbf{t}}$  là các giá trị được quy định trên biên Dirichlet và Neumann, tương ứng. Các biên phải thỏa mãn  $\partial B_u \cup \partial B_t = \partial B$  và  $\partial B_u \cap \partial B_t = \emptyset$ . Vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài được ký hiệu là  $\mathbf{N}$  và lực tác động được ký hiệu là  $\mathbf{f}_B$ . Stress Piola-Kirchhoff cấp một  $\mathbf{P}$  liên quan đến đại lượng đối ngẫu gọi là gradient biến dạng  $\mathbf{F}$ . Gradient biến dạng được định nghĩa là  $\mathbf{F} = \nabla_X \varphi(\mathbf{X})$ , trong đó  $\nabla_X \varphi$  biểu thị toán tử gradient áp dụng lên ánh xạ biến dạng trên cấu hình ban đầu. Định luật cơ bản được định nghĩa



Hình 2.1: Biến dạng đàn hồi.

như sau  $\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}$ , trong đó  $\Psi$  là năng lượng biến dạng của một vật liệu cụ thể. Báo cáo này ta tập trung vào hai mô hình hyperelastic: Neo-Hookean và Mooney-Rivlin. Các mô hình năng lượng biến dạng này được viết như sau:

- Neo-Hookean:

$$\Psi(I_1, I_2) = \frac{1}{2}[\log(J)]^2 - \mu \log(J) + \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3), \quad (2.5)$$

trong đó bất biến thứ nhất được định nghĩa là  $I_1 = \text{trace}(C)$  và bất biến thứ hai được định nghĩa là  $J = \det(F)$ . Tensor Cauchy-Green phải là  $C$  và được cho bởi  $C = F^T F$ . Các tham số Lamé  $\Lambda$  và  $\mu$  được cho như sau

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

trong đó  $E$  và  $\nu$  biểu thị Modulus Young và tỷ số Poisson, tương ứng.

- Mooney-Rivlin:

$$\psi(I_1, I_2, J) = c_1(J - 1)^2 - \log(J) + (c_1 + c_2)(I_1 - 3) + (c_2 - 3), \quad (2.6)$$

trong đó các bất biến ( $I_1, I_2$ , và  $J$ ) được định nghĩa như sau

$$I_1 = \text{trace}(C), \quad I_2 = \frac{1}{2}[\text{trace}(C)]^2 - \text{trace}(C \cdot C), \quad J = \sqrt{\det(C)}$$

$c_1, c_2$  là các hằng số vật liệu và  $d$  liên quan đến  $c_1, c_2$  bởi  $d = 2(c_1 + c_2)$  giả sử rằng cấu hình tham chiếu không có stress.

Để giải phương trình cân bằng với điều kiện biên theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta cần phải thực hiện chuyển đổi phương trình từ dạng mạnh sang dạng yếu. Nguyên lý cổ điển của năng lượng tiềm năng tối thiểu có thể được cải biên dựa trên năng lượng biến dạng này trong lý thuyết hình học. Trong lý thuyết biến dạng hữu

hạn, ta cần phải xét rằng các biến dạng có thể xảy ra là không duy nhất. Do đó, chỉ có thể thu được giá trị thế năng tĩnh. Trong trường hợp elastostatics, thế năng năng được viết dưới dạng:

$$\Pi(\varphi) = \int_B \psi dV - \int_B f \varphi \cdot dV - \int_{\partial B_t} t \cdot \varphi dA. \quad (2.7)$$

Chúng ta tối thiểu hóa thế năng để tìm cực tiểu

$$\min_{\varphi \in H} \Pi(\varphi), \quad (2.8)$$

trong đó  $H$  là không gian của các hàm chấp nhận được (hàm thử).

## 2.3 Phương pháp học sâu giải bài toán biến dạng đàn hồi của vật thể hyperelastic

### 2.3.1 Kiến trúc mô hình

Mục tiêu của một mạng feedforward là để xấp xỉ một hàm liên tục, ánh xạ một đầu vào tương ứng với đầu ra dựa trên định lý xấp xỉ phổ quát [38]. Mạng feedforward có thể coi như là một ánh xạ với đầu vào và đầu ra được viết như sau

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ X &\longmapsto z(X), \end{aligned}$$

trong đó  $n$  xác định số chiều của mạng và  $m$  xác định số chiều của đầu ra. Cả  $n$  và  $m$  đều biểu thị số lượng nơ-ron trong lớp đầu vào và đầu ra tương ứng.

Hàm kích hoạt  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm phi tuyến giúp mạng nơ-ron trở nên linh hoạt và xấp xỉ được nhiều lớp hàm phức tạp. Hàm kích hoạt được sử dụng như sau:

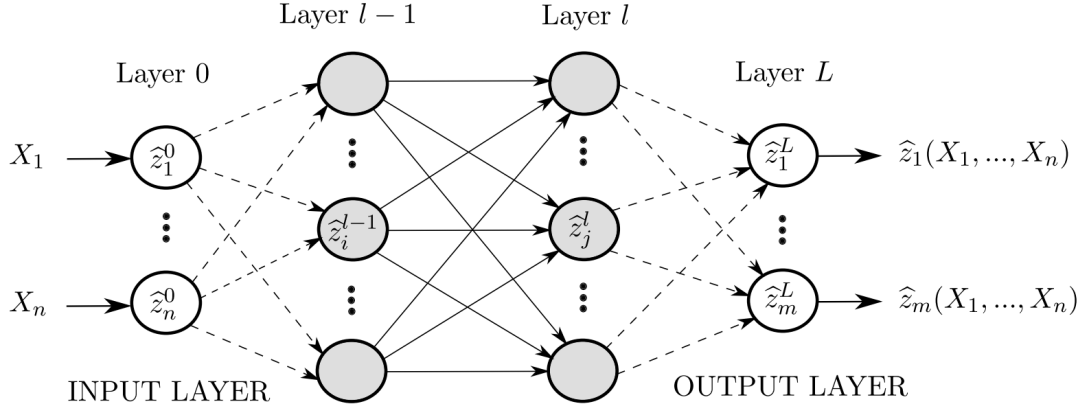
Trong lớp thứ nhất:

$$\sigma_k = \sigma \left( \sum_{j=1}^{n_0} w_{jk}^1 x_j + b_k^1 \right), k = 1, \dots, n_1$$

Trong lớp thứ hai:

$$\sigma_k = \sigma \left( \sum_{j=1}^{n_0} w_{jk}^2 \sigma_j + b_k^2 \right), k = 1, \dots, n_2$$

...



Hình 2.2: Kiến trúc mạng feedforward.

Trong lớp thứ  $l$ :

$$\sigma_k = \sigma \left( \sum_{j=1}^{n^{(l-1)}} w_{jk}^l \sigma_j + b_k^l \right), k = 1, \dots, n_l$$

Trong lớp cuối cùng:

$$\sigma_k = \sigma \left( \sum_{j=1}^{L-1} w_{jk}^L \sigma_j + b_k^L \right), k = 1, \dots, n_L; L = l = m.$$

### 2.3.2 Deep Energy Method (DEM)

Ý tưởng của DEM là để tối thiểu hóa thế năng (2.7) với sự giúp đỡ của một mạng nơ-ron nhân tạo như toàn bộ quá trình được hiển thị trong Hình 4. Do đó, việc định nghĩa một hàm mất mát là cần thiết. Trong trường hợp này, chúng ta khai thác thế năng như là hàm mất mát,

$$\mathcal{L}(\theta) = \int_B \Psi(\hat{F}) dV - \left( \int_B \mathbf{f}_b \cdot \hat{\phi}(\mathbf{X}; \theta) dV + \int_{\partial B_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \hat{\phi}(\mathbf{X}; \theta) dA \right), \quad (2.9)$$

trong đó các ký hiệu mũ được tính toán bởi mạng nơ-ron. Hàm thử bây giờ được biểu diễn như sau

$$\hat{\phi}(x; 0) = \hat{u}(x; 0) + X, \quad (2.10)$$

trong đó  $X(\cdot)$  phải tuân thủ các điều kiện biên và ta sử dụng  $u(X)$  thay vì  $u(X; 0)$ . Một mạng nơ-ron feedforward được xây dựng bởi bộ tham số  $\theta$  được sử dụng để

cực tiểu hóa hàm mất mát. Mạng nơ-ron xấp xỉ vector dịch chuyển được chọn dưới dạng sao cho nó đáp ứng các điều kiện biên, cụ thể

$$\tilde{u}(X) = A(X) + B(X, \tilde{q}(x; 0)),$$

trong đó  $Z^*(X : \theta)$  là đầu ra của mạng nơ-ron với tham số

$$\theta^* = \operatorname{argmin} \mathcal{L}(\theta).$$

được giải tính thông qua lan truyền ngược.

Khi áp dụng quy tắc trung bình, phương trình (2.9) được viết như sau:

$$\mathcal{L}(\theta) \approx V \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \hat{\Psi}_i - V \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} (f_b)_i \cdot \hat{\varphi}_i - A \frac{1}{N_{B_t}} \sum_{i=1}^{N_{B_t}} \bar{t}_i \cdot \hat{\varphi}_i. \quad (2.11)$$

trong đó  $N_B$  là tổng số điểm dữ liệu trong miền;  $N_{B,i}$  là số điểm dữ liệu tại biên truyền tải;  $V$  là thể tích của vật rắn  $A$  và  $A$  là diện tích bề mặt của nó. Nếu một hàm  $f$  được đánh giá tại một điểm vật liệu  $X_i$ , chúng ta ký hiệu điều này bằng  $f_i$ . Do quy tắc trung bình dẫn đến lỗi tích phân tương đối lớn, chúng ta cũng đã thử nghiệm quy tắc hình thang và quy tắc Simpson để đánh giá các tích phân, tức là:

Quy tắc hình thang:

$$\mathcal{L}(\theta) \approx \sum_{i=1}^{N_B} w_i^t \hat{\Psi}_i - \sum_{i=1}^{N_B} w_i^t [(f_b)_i \cdot \hat{\varphi}_i] - \sum_{i=1}^{N_{B_t}} w_i^t [\bar{t}_i \cdot \hat{\varphi}_i]. \quad (2.12)$$

Quy tắc Simpson:

$$\mathcal{L}(\theta) \approx \sum_{i=1}^{N_B} w_i^s \hat{\Psi}_i - \sum_{i=1}^{N_B} w_i^s [(f_b)_i \cdot \hat{\varphi}_i] - \sum_{i=1}^{N_{B_t}} w_i^s [\bar{t}_i \cdot \hat{\varphi}_i]. \quad (2.13)$$

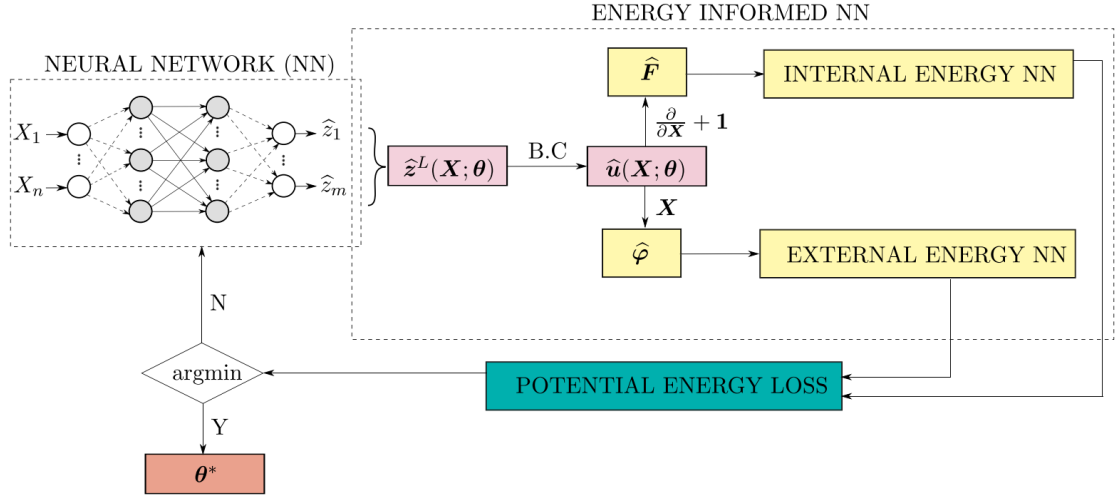
trong đó  $w_T$  và  $w_S$  là trọng số tại điểm vật liệu  $X_i$  của Quy tắc Hình thang và Quy tắc Simpson, tương ứng, sau đó được gọi là DEMM, DEMT và DEMS, trong đó các chữ cái cuối cùng chỉ ra cách tích phân được đánh giá, tức là bằng quy tắc trung bình, quy tắc hình thang hoặc quy tắc Simpson, tương ứng. Mã pytorch liên quan có thể được tìm thấy trong Hình 5. Bây giờ mạng nơ-ron được thông báo bởi năng lượng đàn hồi lưu trữ có các dạng sau Neo-Hookean:

$$\psi(T_1, T_2) = \frac{1}{2} \lambda (\log(J))^2 - \mu \log(J) + \frac{1}{2} \mu (T_1 - 3).$$

Mooney-Rivlin:

$$\psi(T_1, T_2, c) = c(J - 1)^2 - d \log(J) + c_1(T_1 - 3) + c_2(T_2 - 3).$$





Hình 2.3: Sơ đồ của Deep Energy Method.

Các bất biến  $I_1$ ,  $I_2$ , và  $J$  được tính toán như sau:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{trace}(C), \\
 I_2 &= \frac{1}{2}[\text{trace}(C)^2 - \text{trace}(C \cdot C)], \\
 J &= \sqrt{\det(C)}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Ứng suất Green-Lagrangian  $E$  và ứng suất Piola-Kirchhoff bậc hai  $S$  được biểu diễn dưới dạng NN như sau:

$$E = \frac{1}{2}(C - I),$$

và

$$S = F^{-1}P,$$

và

$$P = \frac{\partial V}{\partial F}$$

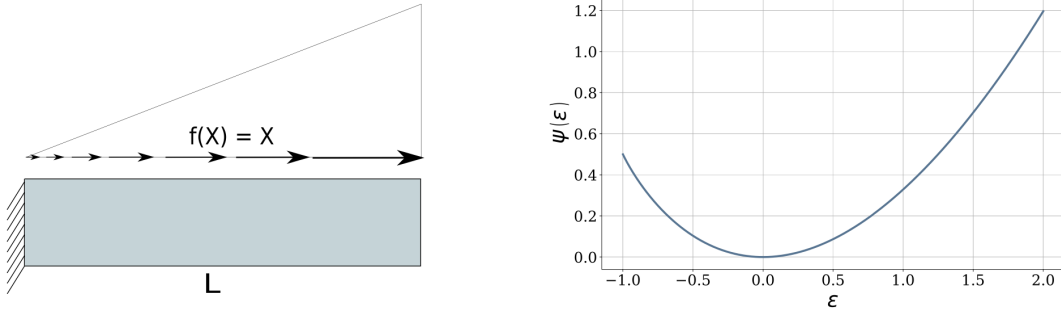
trong đó  $F$  và  $P$  biểu thị cho gradient biến dạng và tensor ứng suất Piola-Kirchhoff bậc nhất, tương ứng, được thông báo bởi NNs.  $F$  được tính toán như sau:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} u_{11} + 1 & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} + 1 & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} + 1 \end{bmatrix}$$

## Chương 3

# Ví dụ mô phỏng

### 3.1 Uốn cong thanh 1D



Hình 3.1: (trái) Hình dạng vật thể. (phải) Với hàm mật độ năng lượng  $\Psi(\epsilon) = (1 + \epsilon)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\epsilon - 1$ . được vẽ theo tọa độ  $\epsilon$ .

Đầu tiên ta nghiên cứu bài toán thanh 1D đơn giản như được mô tả trong Hình 3.1 với hàm mật độ năng lượng biến dạng được cho như sau:

$$\Psi(\epsilon) = (1 + \epsilon)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\epsilon - 1.$$

Lưu ý  $\Psi(0) = 0$  khi không có biến dạng, theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\Pi = \int_L \Psi(\epsilon) dX - \int_L f(X)u(X) dX - [\bar{t}u(X)]_{X:=L}.$$

Trong công thức này,  $X$  là tọa độ vật liệu,  $\epsilon = du/dX$  biểu thị gradient dịch chuyển và  $\bar{t}$  là lực kéo tác dụng lên phía bên phải của thanh. Chúng tôi đặt  $\bar{t}$  bằng 0. Bài toán giá trị biên có dạng:

$$\frac{d}{dX} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} + f(X) = 0, \quad -1 \leq X \leq L := 1 \quad (3.1)$$

với điều kiện biên

$$u(-1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{X:=L} = \bar{t} \quad (3.2)$$

Nghiệm chính xác trong ví dụ này được đưa ra

$$u(X) = \frac{1}{135} (68 + 105X - 40X^3 + 3X^5). \quad (3.3)$$

Chuẩn sai số  $L^2$  và nửa chuẩn sai số  $H^1$  được tính như sau

$$\|e\|_{L^2} = \frac{\|\hat{u} - u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{\int_L (\hat{u} - u)^2 dX}}{\sqrt{\int_L u^2 dX}}, \quad (3.4)$$

$$\|e\|_{H^1} = \frac{\|\hat{u} - u\|_{H^1}}{\|u\|_{H^1}} = \frac{\sqrt{\int_L (\hat{\epsilon} - \epsilon)^2 dX}}{\sqrt{\int_L \epsilon^2 dX}}. \quad (3.5)$$

Báo cáo sử dụng 2 bộ dữ liệu: 100 điểm và 1000 điểm làm dữ liệu để huấn luyện mạng nơ-ron. Một mạng nông (1 – 10 – 1) được xây dựng. Trong đó, báo cáo sử dụng 1 nơ-ron ở lớp đầu vào, 1 nơ-ron ở lớp đầu ra và 10 nơ-ron được sử dụng để thực thi việc học ở lớp ẩn. Báo cáo sử dụng hàm kích hoạt Tanh. Ngoài ra, trình tối ưu hóa L-BFGS được sử dụng trong ví dụ này. Mạng được huấn luyện trong 30 bước. Dựa vào điều kiện biên, báo cáo thiết lập đầu ra cho mạng NN thỏa mãn ràng buộc có dạng:

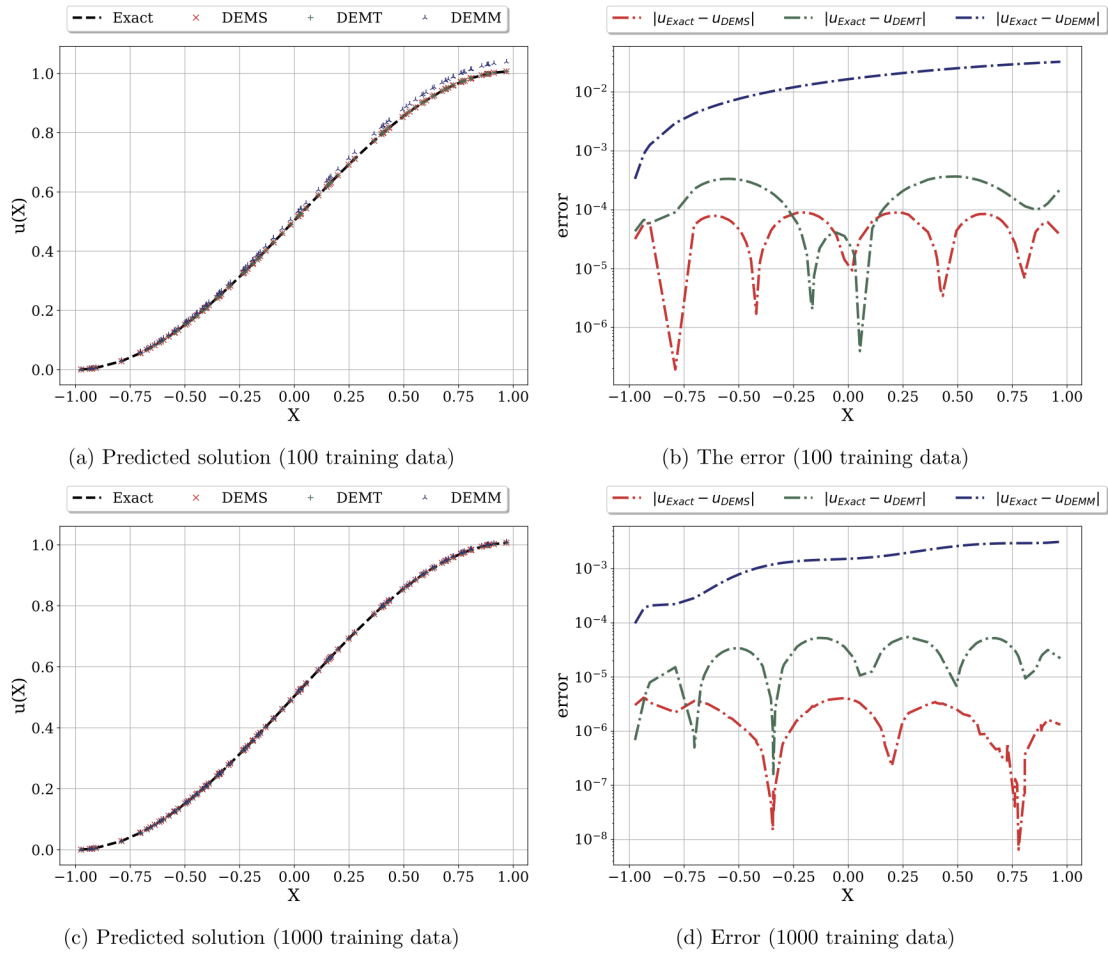
$$\hat{u}(X) = (X + 1)\hat{z}^L(X, w, b). \quad (3.6)$$

Hình 3.2 cho thấy nghiệm mà DEM thu được cho hai bộ dữ liệu. Trong khi nghiệm của DEMT và DEMS phù hợp tốt với nghiệm giải tích thì nghiệm của DEMM lại kém chính xác hơn, đặc biệt là ở phần cuối của thanh. Báo cáo cũng tính toán sai số trong chuẩn  $L^2$  và nửa chuẩn  $H^1$ , xem Hình 3.3. DEM dựa trên quy tắc Simpson luôn cung cấp giá trị gần đúng tốt nhất trong mọi trường hợp.

### 3.2 Uốn cong thanh 3D

Ví dụ này mô phỏng biến dạng của thanh 3D. Thanh có các kích thước sau: chiều dài  $L = 4$  m, chiều cao  $H = 1$  m, và chiều sâu  $D = 1$  m. Dầm chịu tải trọng kéo đều  $t = -5.0$  N ở đầu phải và được kẹp ở phía bên trái. Thanh được làm bằng vật liệu Neo-Hookean đồng nhất, đẳng hướng với hệ số Young  $E = 1000$  N/m<sup>2</sup> và hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ . Thế năng cho bởi

$$\Psi(I_1, J) = \frac{1}{2}\lambda [\log(J)]^2 - \mu \log(J) + \frac{1}{2}\mu (I_1 - 3). \quad (3.7)$$



Hình 3.2: Nghiệm thu được của DEMM, DENT, DEMS trong hai trường hợp.

Data	Method	DEMM	DENT	DEMS
$10^1$ points ( $lr = 0.01$ )	$\ e\ _{L^2}$	$3.70e - 01$	$2.66e - 02$	$4.98e - 03$
	$\ e\ _{H^1}$	$3.53e - 01$	$4.04e - 02$	$3.48e - 02$
$10^2$ points ( $lr = 0.1$ )	$\ e\ _{L^2}$	$3.13e - 02$	$3.55e - 04$	$9.39e - 05$
	$\ e\ _{H^1}$	$2.92e - 02$	$1.53e - 03$	$8.95e - 04$
$10^3$ points ( $lr = 1.0$ )	$\ e\ _{L^2}$	$3.12e - 03$	$5.06e - 05$	$3.56e - 06$
	$\ e\ _{H^1}$	$3.33e - 03$	$5.15e - 04$	$2.87e - 05$

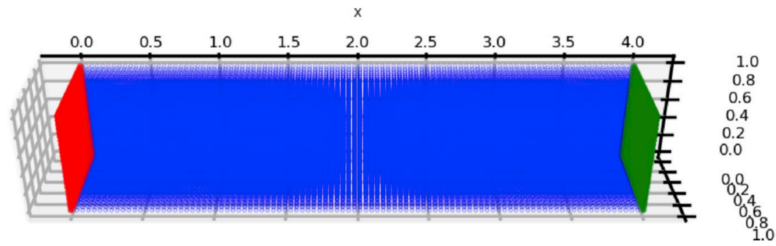
Hình 3.3: So sánh chuẩn sai số  $L^2$  và bán chuẩn lỗi  $H^1$  trong 3 trường hợp: 10 điểm, 100 điểm, 1000 điểm.

Thiết kế thử nghiệm: Sinh 62500 điểm ( $N_1 = 100, N_2 = 25, N_3 = 25$ ) làm dữ liệu nạp để huấn luyện mạng của chúng tôi như được hiển thị trong Hình 17. Một mạng feedforward 5 lớp (330-30-30-3) được xây dựng. Trong đó, báo cáo sử dụng 3 neuron trong lớp đầu vào cho tọa độ dữ liệu và 3 neuron trong lớp đầu ra cho vector dịch chuyển. Hơn nữa, trong mỗi lớp ẩn chứa 30 nơ-ron. Báo cáo sử dụng hàm kích hoạt tanh để đánh giá các giá trị thần kinh trong các lớp ẩn. Optimizer L-BFGS với learning-rate  $lr = 0.5$  được sử dụng để tối ưu các tham số mạng. Mạng được huấn luyện trong 40 bước. Điều kiện biên được mô hình hóa dưới dạng

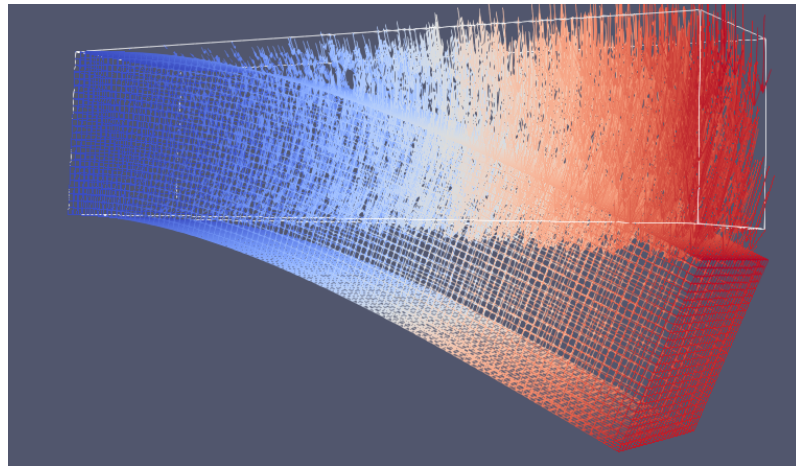
$$\hat{u}_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 \hat{z}_1^L(X_1, X_2, X_3; w, b) \quad (3.8)$$

$$\hat{u}_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 \hat{z}_2^L(X_1, X_2, X_3; w, b) \quad (3.9)$$

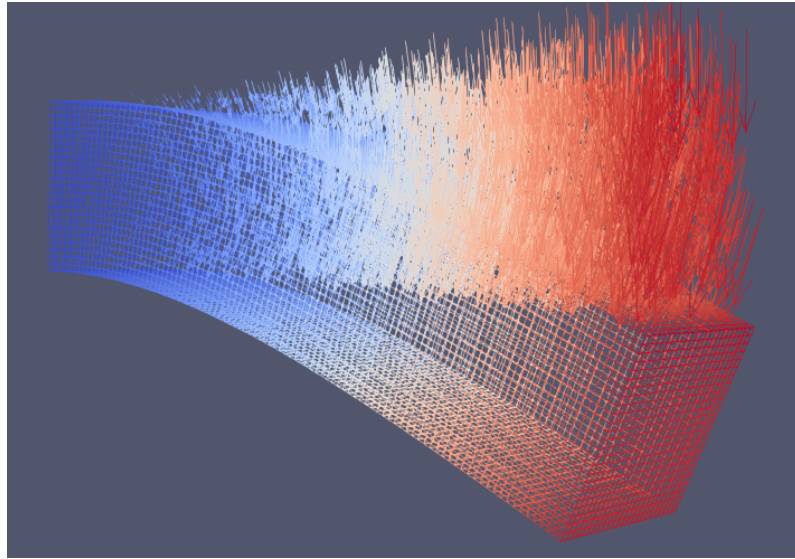
$$\hat{u}_3(X_1, X_2, X_3) = X_1 \hat{z}_3^L(X_1, X_2, X_3; w, b) \quad (3.10)$$



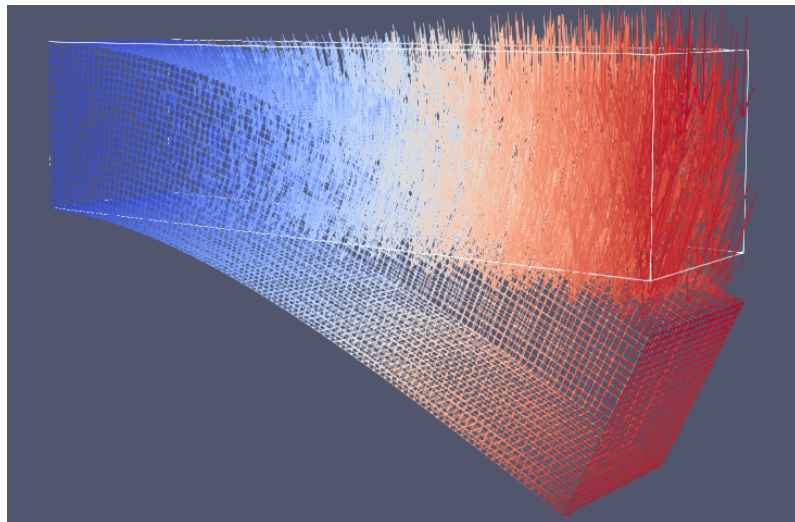
Hình 3.4: Lưới của thanh 3D.



Hình 3.5: Biểu dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ monte-carlo.



Hình 3.6: Biểu dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ hình thang.



Hình 3.7: Biểu dạng cho bởi phương pháp xấp xỉ Simpson.

# Kết luận

Giải quyết bài toán biến dạng đàn hồi tuyến tính còn giúp mô phỏng nhiều thí nghiệm quan trọng trong lĩnh vực y sinh như mô phỏng cơ học của các cơ quan như tim, mạch máu, cơ bắp, và trong thiết kế và mô phỏng các thiết bị y tế như các biện pháp gắn cố tĩnh mạch, các bộ tải,... Với việc hiểu rõ hơn về biến dạng đàn hồi phi tuyến trong y sinh học, chúng ta có thể phát triển các mô hình và phương pháp tính toán chính xác hơn để nắm bắt và dự đoán hành vi của các cấu trúc sinh học trong các điều kiện thực tế và các ứng dụng y học.

# Tài liệu tham khảo

- [1] FREEFEM *FreeFem Documentation Algorithms and Optimization*, 2023
- [2] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond "*Theory and Practice of Finite Elements.*", 2004.
- [3] FREEFEM *FreeFem Module Non-linear elasticity*, 2023
- [4] Javier Bonet, Richard D. Wood "*Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.*", 2008.
- [5] Tạ Văn Đĩnh, "*Giáo trình Phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn*", NXB Khoa học và Kỹ Thuật, 2002.
- [6] Robert A. Adams and John J. F. Fournier "*Sobolev spaces second edition.*", 2003.
- [7] Houssam Houssein, Simon Garnotel, Frédéric Hecht "*Frictionless contact problem for hyperelastic materials with interior point optimizer*", vol. 22, Nov 2019.