III. Анализ зависимости смещения нуля ЛГ, от его параметров

1. Математическая модель ЛГ

Среди основных типов лазерных гироскопов (ЛГ), широко применяемых на практике, можно выделить прибор на основе кольцевого газового He-Ne-лазера с плоским 4-х зеркальным резонатором и с линейно поляризованным в сагиттальной плоскости излучением. Накачка лазера, работающего, как правило на длине волны, осуществляется разрядом постоянного тока по симметричной схеме: один катод - два анода.

ЛГ такого типа, установленные на виброподставку, могут использоватся, например, в качестве чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) для крупногабаритных самолетов гражданской авиации, совершающих маневры с малыми угловыми скоростями.

Для проектирования БИНС и компьютерного моделирования ее работы необходимо иметь математическую модель выходного сигнала вибрирующего ЛГ. Одной из составляющих этой модели является аналитическое выражение для выходной характеристики прибора. В теории ЛГ ее называют динамической частотной характеристикой, либо просто частотной характеристикой.

Частотная характеристика вибрирующего ЛГ определяется выражением

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_f}{2\pi}\,\omega_{\mathrm{beat}} \tag{4}$$

где k_f- коэффициент "умножения частоты" (k_f = 1, 2, 4, ...), реализуемый посредством оптоэлектронной системы съема и обработки информации; dN/dt - частота следования информационных импульсов N с выхода ЛГ; ω_{beat}- усредненная за период колебаний круговая частота биения встречных волн (ВВ). Частотная характеристика (4) определена, если известно выражение для ω_{beat} как функции угловой скорости Ω вращения ЛГ, его внутренних параметров и параметров крутильных колебаний моноблока.

В состав ЛГ входят автоматические системы стабилизации периметра резонатора и токов разряда. Первая из них обеспечивает генерацию ЛГ на центре линии излучения, вторая - стабильность и одинаковое значение токов в плечах разряда. Общая работа этих систем обеспечивает заданный режим генерации ЛГ и чстраняет влияние на точность прибора таких нежелательных факторов, как отстройка частоты и разбаланс токов.

Остаются, впрочем, еще и другие факторы, которые устранить нельзя и при мультипликативном взаимодействии, приводящие к дополнительным погрешностям ЛГ. К ним следует отнести обратное рассеяние и поглощение излучения излучения на оптических элементах резонатора и неидентичность коэффициентов усиления ВВ., обусловленную неравнодобротностью резонатора. Учет этих двух факторов, а также количественный анализ их влияния на выходной сигнал ЛГ и составляют предмет данной статьи.

Для медленно вращающегося ЛГ при непременном условии, что входящая в его состав автоматическая система вибрационного разнесения частот реализует с помощью специального алгоритма "ошумление" амплитуды колебаний моноблока и тем самым подавляет эффекты динамической синхронизации ВВ , зависимость $\omega_{beat} = \omega_{beat}(\Omega)$ необходимо представить в виде:

$$\omega_{\text{beat}} = K_0 + (1 + K_1)M\Omega + \sum_{j=2}^{J} K_j M^j \Omega^j \tag{5}$$

где K_0, K_1 и $K_j (j = 2, ..., J)$ - коэффициенты полиномиальной модели частотной характеристики вибрирующего ЛГ, которые обусловлены связью ВВ через обратное рассеяние на зеркалах его резонатора и неоднородно распределенные вдоль осевого контура потери; М - масштабный множитель. В идеальном ЛГ, в котором связь между ВВ отсутствует, коэффициенты K_0, K_1, K_j в (2) равны нулю и $\omega_{beat} = M\Omega$.

Формулы для расчета нечетных коэффициентов $K_1, K_3, K_5, ...$ полинома (5) могут быть получены из работы . Особенность этих формул состоит в том., что они содержат коэффициенты связи волн не только во второй степени, но и в более высоких степенях.

2. Исходные соотношения

Согласно выражение для частоты биений ω_{beat} равномерно вращающегося ЛГ рассматриваемого типа имеет следующий вид:

$$\omega_{\mathrm{beat}} = \left[1 - \frac{\mathrm{r}_{\mathrm{p}}^2}{2\omega^2} + \frac{\mathrm{r}_{\mathrm{m}}^2}{2(\alpha_{\mathrm{m}}^2 + \omega^2)}\right]\omega +$$

$$D(r_2^2 - r_1^2)\left\{-\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\alpha_m^2 + \omega^2}\left[1 + \frac{\alpha_m(\alpha_p + \alpha_m)}{2(\alpha_p^2 + \omega^2)}\right]\right\} +$$

$$D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})\,\frac{\alpha_p\alpha_m - \omega^2}{(\alpha_p^2 + \omega^2)(\alpha_{\mathrm{m}}^2 + \omega^2)}\ (\omega = M\Omega) \tag{6}$$

Выражение (6) получено в результате решения в приближении слабой связи ВВ системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемого ЛГ, которую на основании соотношений из работы[3] можно привести к известному из[3] виду

$$\dot{I}_1 = (\alpha_1 - \beta I_1 - \theta I_2)I_1 - 2r_2(I_1I_2)^{1/2}cos(\psi + \varepsilon_2),$$

$$\dot{I}_2 = (\alpha_2 - \beta I_2 - \theta I_1)I_2 - 2r_2(I_1I_2)^{1/2}cos(\psi - \varepsilon_1),$$

$$\dot{\psi} = \omega + r_2(I_2/I_1)^{1/2}sin(\psi + \varepsilon_2) + r_1(I_1/I_2)^{1/2}sin(\psi - \varepsilon_1) \tag{7}$$

где

$$\omega = M_g\Omega + \sigma_2 - \sigma_1 = M\Omega; M_g = \frac{8\pi A_0}{\lambda L} \quad (8)$$

$I_{1,2}, \psi, \dot{\psi}$ - безразмерные интенсивности, мгновенная разность фаз и мгновенная круговая частота биений ВВ; $\alpha_{1,2}, \beta, \theta$ - коэффициенты Лэмба, характеризующие соответственно превышение линейного усиления над потерями для каждой из ВВ, их самонасыщение и взаимное насыщение; $r_{1,2}$ и $\varepsilon_{1,2}$ - модули и аргументы комплексных интегральных коэффициентов связи ВВ через обратное рассеяние; ω - расщепление круговых частот встречных волн, обусловленное вращением ЛГ в инерциальном пространстве с угловой скоростью Ω и вычисленное без учета их связи; M_g - геометрический масштабный множитель ЛГ; A_0 - площадь, охватываемая осевым контуром; L - периметр осевого контура; λ - длинна волны генерируемого излучения; $\sigma_{1,2}$ - коэффициенты Лэмба, определяющие малую поправку к геометрическому масштабному множителю; M - масштабный множитель ЛГ с учетом влияния активной среды.

Коэффициенты $\alpha_{1,2}$ в уравнениях для $I_{1,2}$ определяются выражениями

$$\alpha_{1,2} = \alpha \mp \delta \quad (9)$$

из которых следует $\alpha = (\alpha_2 + \alpha_1)/2, \delta = (\alpha_2 - \alpha_1)/2.$

Входящие в (6) параметры α_p, α_m рассчитываются по формулам

$$\alpha_p = \alpha, \alpha_p = \frac{\alpha_p(1 - h)}{1 + h} \quad (10)$$

где $h = \theta/\beta$, и представляют собой обратные времена релаксации интенсивностей ВВ соответственно, т.е.

$$\alpha_p = \frac{1}{T_{\alpha_p}}, \alpha_m = \frac{1}{T_{\alpha_m}} \qquad (11)$$

где T_{α_p} и T_{α_m} - времена релаксации.

Малый безразмерный параметр D в (6) характеризует степень неодинаковости ВВ. Он определен соотношением

$$D = \frac{\delta}{\alpha_m}, (|D| \ll 1) \qquad (12)$$

и в случае, когда причиной этой неодинаковости является неравнодобротность $\Delta Q/Q$ резонатора ЛГ, рассчитывается по формуле

$$D = \frac{\Delta Q}{Q}\frac{1 + h}{1 - h} \qquad (13).$$

В выражении (6) фигурируют также параметры r_p и r_m,представляющие собой комбинации коэффициентов связи ВВ. Их можно рассчитать по формулам

$$r_p = (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 cos(\varepsilon_{12}))^{1/2},$$
$$r_m = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 cos(\varepsilon_{12}))^{1/2} \qquad (14)$$

где $\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

3. Постановка задачи

Пусть закон крутильных колебаний моноблока ЛГ задан в виде

$$\nu(t) = Asin(sin(\nu t)) \qquad (15)$$

где A и ν - средние за период колебаний амплитуда и круговая частота соответственно.

Из (15) следует выражение для угловой скорости $\Omega_{rel}(t)$ колебаний моноблока ЛГ:

$$\Omega_{rel}(t) = Wcos(\nu t) \qquad (16)$$

где $W = \nu A$ - амплитуда относительной угловой скорости вибрации моноблока

ЛГ.

Для решения поставленной задачи необходимо на основе формулы (6) с учетом (16) получить выражения для расчета первых четырёх коэффициентов (K_0, K_1, K_2, K_3) полиномиальной модели (5) для Ω, малых по сравнению с амплитудой W.

4. Краткое описание методики расчета

С помощью тождественных преобразований выражение (6) для ω_{beat} можно привести к следующему виду:

$$\omega_{beat} =$$

$$\left[1 - \frac{2r_1r_2cos(\varepsilon_{12})}{\alpha_m^2 + \omega^2} - \frac{\alpha_m^2R_p^2}{2\omega^2(\alpha_m^2 + \omega^2)} + \frac{D\alpha_m(\alpha_m + \alpha_m)(r_2^2 - r_1^2)}{2(\alpha_p^2 + \omega^2)(\alpha_m^2 + \omega^2)}\right]\omega$$

$$+D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12}) \frac{\alpha_p\alpha_m - \omega^2}{(\alpha_p^2 + \omega^2)(\alpha_m^2 + \omega^2)} \tag{17}$$

где $R_p^2 = r_p^2 + 2D(r_2^2 - r_1^2); \omega = M\Omega$.

Второе, третье и четвёртое слагаемые в квадратных скобках (17) характеризуют поправки к масштабному множителю равномерно вращающегося ЛГ, обусловленные связью ВВ. Эти слагаемые сгруппированы по степени значимости - в порядке убывания. При больших Ω доминирующим является второе слагаемое, поскольку в его знаменателе содержится Ω^2. Третье и четвёртое слагаемые содержат в знаменателе Ω^4 и поэтому имеют намного меньший удельный вес. Для ЛГ на внброподставке характерен как раз режим вращений с большими угловыми скоростями. Учитывая это, упростим выражение (17), исключив из его состава малые величины. В результате получим

:

$$\omega_{beat} = \left(1 - \frac{2r_1r_2cos(\varepsilon_{12})}{\alpha_m^2 + \omega^2}\right)\omega + D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12}) \frac{\alpha_p\alpha_m - \omega^2}{(\alpha_p^2 + \omega^2)(\alpha_m^2 + \omega^2)}. \qquad (18)$$

Уместно отметить, что из этой формулы при $D = 0$ и больших расщеплениях частот $\omega = M\Omega$ с очевидностью вытекает известное из работы[3] асимптотическое представление:

$$\omega_{beat} = \omega - \frac{2r_1r_2cos(\varepsilon_{12})}{\omega} \qquad (19)$$

проверенное экспериментально для широкого диапазона значений r_1, r_2; и. что существенно, для ε_{12}.

Следуя методологии работы, для решения сформулированной задачи применим квазистатический подход. Этот подход является приближенным и суть его сводится к следующему: за основу берется выражение для ω_{beat} справедливое для режима равномерного вращения ЛГ, однако затем это выражение подвергается процедуре усреднения за период $\tau = 2\pi/\nu$ колебаний моноблока прибора. Интуитивным основанием для использования такого подхода может служить условие малости времени релаксации $T_{\alpha_p}, T_{\alpha_m}$ по сравнению с периодом колебаний τ; при выполнении этого условия лазерная система будет успевать отслеживать внешнее воздействие. Отметим, что на возможность использования квазистатичного подхода для медленно вращающегося ЛГ на виброподставке указано также в работе[3].

Осуществим в (18) следующую подстановку:

$$\omega = M\Omega + \omega cos(\nu t) \qquad (20)$$

где $\omega = MW = M\nu A$ - амплитудное значение расщепления частот встречных волн ЛГ, обусловленное угловой вибрацией моноблока относительно корпуса прибора.

Затем, рассматривая случай малых угловых скоростей, разложим (18) в ряд по степеням Ω и ограничимся при этом его первыми четырмя членами, которые усредним за период τ. В результате получим

$$\omega_{beat} = K_0 + (1 + K_1)M\Omega + K_2 M^2\Omega^2 + K_3 M^3\Omega^3 \tag{21}$$

где

$$K_0 = \frac{D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})}{\alpha_p - \alpha_m}\left[\frac{1}{(\alpha_m^2 + \omega^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha_p^2 + \omega^2)^{1/2}}\right] \tag{22}$$

$$K_1 = -\frac{2\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})}{(\alpha_m^2 + \omega^2)^{3/2}} \tag{23}$$

$$K_2 = -\frac{\omega^6 D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})}{(\alpha_p - \alpha_m)(\alpha_p^2 + \omega^2)^2(\alpha_m^2 + \omega^2)^2} \times \\ \times\left[\frac{N_m}{(\alpha_m^2 + \omega^2)^{1/2}} - \frac{N_p}{(\alpha_p^2 + \omega^2)^2}\right] \tag{24}$$

$$K_3 = -\frac{(3\omega^2 - 2\alpha_m^2)\alpha_m r_1 r_2 cos(\varepsilon_{12})}{(\alpha_m^2 + \omega^2)^{7/2}} \tag{25}$$

Параметры N_m, N_p в правой части (24) рассчитываются по формулам:

$$N_m = 1 + 2(\alpha_p^2 - \alpha_m^2)\omega^{-2} + \alpha_p^2(\alpha_p^2 - 4\alpha_m^2)\omega^{-4} - 2\alpha_p^4\alpha_m^2\omega^{-6} \tag{26}$$

$$N_p = 1 + 2(\alpha_m^2 - \alpha_p^2)\omega^{-2} + \alpha_m^2(\alpha_m^2 - 4\alpha_p^2)\omega^{-4} - 2\alpha_m^4\alpha_p^2\omega^{-6} \tag{27}$$

В выражении (21) коэффициент K_0 характеризует сдвиг нуля ЛГ, K_1 - поправку к масштабному множителю, а K_2 - некоммутируемую относительно угловой скорости составляющую частоты биений, которая зависит от Ω квадратично. Коэффициент K_3 характеризирует коммутируемую относительно угловой частоты составляющую ω_{beat}, пропорциональную Ω^3.

Четные коэффициенты K_0, K_2 полинома (21) обусловлены мультипликативным взаимодействием фактором неодинаковости усиления ВВ и их связи через обратное рассеяние. Нечетные коэффициенты K_1, K_3 обусловлены только одним из факторов.

Таким образом, совокупность формул (22)-(27) для расчета первых четырех коэффициентов полиномиальной модели (5) частотной характеристики (4) вибрирующего ЛГ представляет собой результат решения сформулированной задачи.

Наибольший интерес для нас представляет коэффициент K_0, который как было сказано ранее характеризует сдвиг нуля. Исходя из соотношений приведенных в работах[2,4], окончательное выражение для сдвига нуля имеет вид:

$$\Omega_0 = \frac{D\alpha_m r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})}{M(\alpha_p - \alpha_m)} \left[\frac{1}{(\alpha_m^2 + w^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha_p^2 + w^2)^{1/2}} \right] \tag{28}$$

отличаясь от (22) появившимся в знаменателе активным масштабным множителем M.. Расчет проводим исходя из ранее упомянутых[2,4]. Опишем переменные данного уравнения:

$$w = MW = M\nu A \tag{29}$$

$$\alpha_p = (c/L)\Gamma(N_{rel} - 1) \tag{30}$$

$$\alpha_m = \alpha_p(1 - h)/(1 + h) \tag{31}$$

$$D = \Delta Q/Q(1 + h)(1 - h) \qquad (32)$$

Здесь $w = M\nu A$ - амплитудное значение расщепления круговых частот встречных волн ЛГ вследствие угловой вибрации моноблока; α_p - обратное время релаксации суммы интенсивностей встречных волн (c - скорость света; Г - суммарные резонаторные потери за один проход; N_{rel} - относительное превышение накачкой своего порогового значения [2,3,4]); α_m - обратное время релаксации разности интенсивностей встречных волн; D - параметр, учитывающий фактор неравнодобротности $\Delta Q/Q$ резонатора ЛГ.

Величины α_m и D в (28) посредством параметра h $(h = \theta/\beta)$ зависят от свойств активной среды, в частности, от суммарного давления p гелий-неоновой смеси. Согласно [4]

$$h = x_0[1 + x_0(p)F(\lambda_a)],$$

$$x_0(p) = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\gamma_{ab}}{K_u}\,exp\left(-\frac{\xi_{is}^2}{4}\right)\frac{\gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b}\,\frac{\lambda_a}{1 - \lambda_a},$$

$$F(\lambda_a) = \frac{1}{\pi\xi_{is}^2}\,exp\left(-\frac{\xi_{is}^2}{2}\right)\left(\frac{\gamma_a + \gamma_b}{\gamma_b}\right)^2\left(\frac{1 - \lambda_a}{\lambda_a}\right)^2 - 1 \qquad (33)$$

Здесь γ_a, γ_b, γ_{ab} - константы релаксации соответственно верхнего и нижнего лазерных состояний и лазерного перехода:

$$\gamma_a = \gamma_a^{(0)} + K_a p,$$

$$\gamma_b = \gamma_b^{(0)} + K_b p,$$

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ab}^{(0)} + K_{ab} p \qquad (34)$$

где $\gamma_a^{(0)}, \gamma_b^{(0)}, \gamma_{ab}^{(0)}$ - значения этих величин в приближении нулевого давления; K_a, K_b, K_{ab} - коэффициенты линейной зависимости от давления [7]); λ_a - параметр пленения резонансного излучения; $\varepsilon_{is} = \Delta_{is}/K_u$ - нормированный на параметр доплеровской ширины линии K_u изотопический сдвиг Δ_{is} частоты лазерного перехода.

Для варианта геометрии резонатора рассматриваемого ЛГ выражение для комбинаций коэффициентов связи $r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12})$ входящее в (28), можно записать в виде:

$$r_1 r_2 sin(\varepsilon_{12}) = 4(c/L)^2 \times$$
$$\{(a_f^2 + a_s^2)sin2\chi + 2(a_f b_f + a_s b_s)cos\chi + 2[a_f a_s sin2\chi + (a_f b_s + a_s b_f)cos\chi]cos2\phi\}$$

(35).

Рассмотрим ЛГ с квадратным четырехзеркальным резонатором с длиной плеча l = 5 см. Резонатор образован двумя плоскими сигнальными зеркалами и двумя установленными на пьезокорректорах смежными сферическими зеркалами радиуса кривизны K. Даны значения:

- интегральный коэффициент светорассеяния в полный телесный угол: $K_{scat} = 100x10^{-6}, 10x10^{-6}$;

- активный масштабный множитель, учитывающий свойства усиливающей среды: M = 496459;

- угол $\phi = 0^o$;

- изотопический сдвиг частоты лазерного перехода: $\Delta_{is} = 2\pi 875x10^6$ c^{-1};

- параметр доплеровской ширины линии: $K_u = 2\pi 910x10^6$ c^{-1};

- константы релаксации соответственно верхнего и нижнего лазерных состояний и лазерного перехода в приближении нулевого давления: $\gamma_a^{(0)}=2\pi 17.4x10^6$ c^{-1}, $\gamma_b^{(0)}=2\pi 10.3x10^6$ c^{-1}, $\gamma_{ab}^{(0)}=2\pi 13.8x10^6$ c^{-1};

- коэффициенты линейной зависимости от давления: $K_a=2\pi 3.9x10^6 \dfrac{1}{c \cdot Top}$,

$K_b=2\pi 7.5x10^6 \dfrac{1}{c \cdot Top}$, $K_{ab}=2\pi 60x10^6 \dfrac{1}{c \cdot Top}$;

- параметр пленения резонансного излучения: λ_a=0.59;

- скорость света: c = 2.9979x10^8 м/с;

- периметр осевого контура резонатора: L = 20 см;

- эффективные углы дифракционной расходимости излучения в сечениях, где расположены плоские и сферические зеркала: θ_f=207", θ_s=205";

- модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи встречных волн через поглощение и пропускание на плоских зеркалах: b_f=1.13x10^{-8};

- модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи встречных волн через поглощение на сферических зеркалах: b_s=3.72x10^{-9};

- угол потерь на рассеяние: χ= 0.31°;

- суммарные резонаторные потери за один проход: Г=400x10^{-6}.

Наша задача рассмотреть влияние параметров вибрирующего ЛГ на смещение нуля, исходными параметрами для нас являются:

- давление He-Ne смеси: $p = 6.5(Тор)$;
- амплитуда колебаний моноблока: $A = 120(угл.с)$;
- круговая частота колебаний моноблока: $\nu = 350(Гц)$;
- неравнодобротность резонатора ЛГ: $\Delta Q/Q = 0.01$;
- относительное превышение накачкой своего значения: $N_{rel} = 1.3$;

а пределы их изменения заданы:

- $p \in [2; 6.5](Тор)$;
- $A \in [60; 200](угл.с)$;
- $\nu \in [300; 500](Гц)$;
- $\Delta Q/Q \in [0; 0.05]$;
- $N_{rel} \in [1; 2.5]$.

5. Программная реализация в Octave

Для решения поставленной задачи, была разработана модульная программа на языке Octave. Octave представляет собой язык компьютерной математики подобный широко распространенному в Украине пакету Matlab компании MathWorks. Программа написанная для Octave может быть без трудностей перенесена в Matlab и наоборот. Достоинствами данного пакета есть его свободная распространяемость, доступность большого числа функций и описанная выше совместимость с популярным программным продуктом.

Алгоритм работы основан на теоретической части данного исследования. Программа состоит из двух частей (файлов): файл "*plot_lg_parm.m*" - это основная программа, в ней заданы переменные определяющие параметры гироскопа влияние которых на сдвиг нуля нужно исследовать, и производится печать полученных графиков в формат PNG(Portable Network Graphics). Вычисление значений производится путем вызова функции Omega_0 с передачей ей соответствующих параметров. Omega_0 определена во втором файле программы - "*Omega_0.m*". В теле функции заданы в виде переменных остальные значения из условия и выражения (28)-(35), с помощью которых производится расчет. Также осуществляется преобразование некоторых переменных к размерностям, которые используются в расчетных формулах, и обратное преобразование Ω_0 из рад/с в град/ч которые более удобны для графического представления. Оба файла подробно прокомментированы (см. Приложение А). После запуска программы в текущей директории появляются файлы графиков зависимостей. При написании кода использовалась Octave 2.1.71, с более ранними версиями программа не тестировалась. Для корректной работы необходимо, чтобы оба файла находились в одной директории.