Wavelets

Conceptos básicos

Multiresolución:

Una imagen es un conjunto de áreas de diferentes tamaños, texturas y brillo que se unen para formar objetos.

- Si los objetos son pequeños o tienen bajo contraste se los examina en alta resolución.
- si los objetos son grandes o tienen alto contraste se los examina en baja resolución.
- si existen objetos de diferentes tamaños o contrastes sería conveniente estudiarlos a diferentes resoluciones.

Conceptos básicos

Una imagen es un array bidimensional de intensidades con valores estadísticos variando localmente.

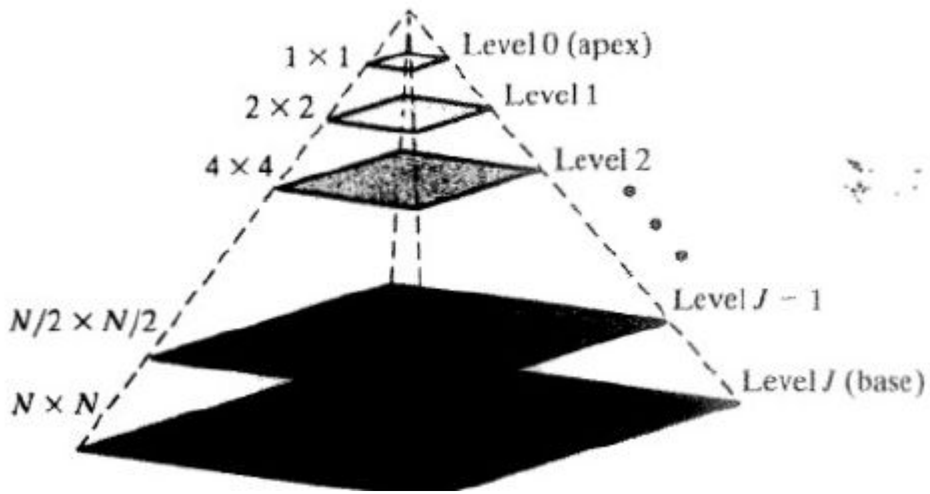
- La diferente estadística local se debe a la presencia de detalles abruptos, como bordes o áreas adjuntas de diferente contraste.
- Diferentes regiones de la imagen producen histogramas diferentes, lo que resulta en estadística diferente.
- Es difícil o imposible lograr una representación estadística global de la imagen.

Conceptos básicos

una descomposición piramidal, permite representar una imagen a diferentes resoluciones.

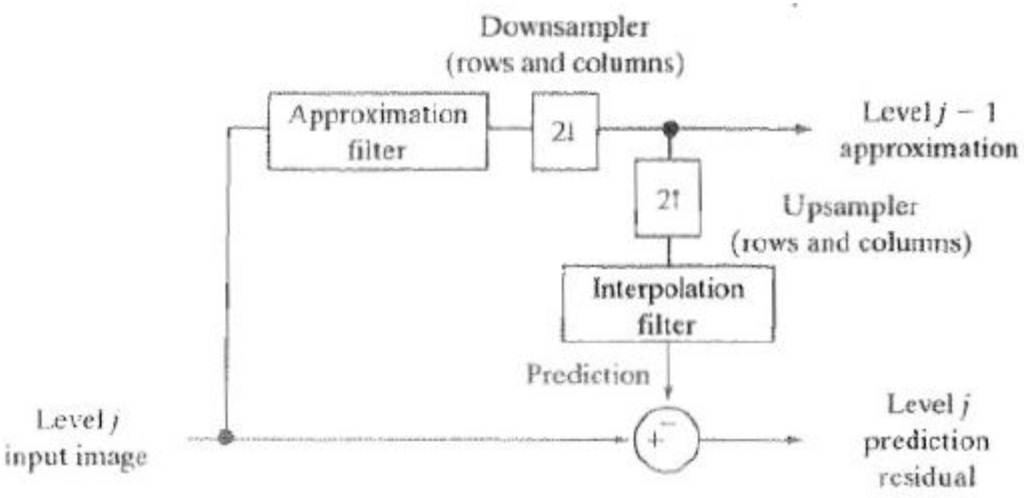
Una pirámide es una descomposición a resolución y tamaño decreciente.

- Base tiene el máximo tamaño y resolución.
- Apex tiene el mínimo tamaño y resolución.
- Si el lado de una imagen de la pirámide es 2j x 2j, al
- valor de j se lo denomina nivel o plano.
- Siempre se construyen dos pirámides: una de
- aproximación y otra de detalles.



ambas pirámides se calculan de manera iterativa:

1. Para un plano j, se obtiene una aproximación de resolución menor filtrando con pasabajos y reduciendo las dimensiones en un factor 2 para formar el plano j-1 de la pirámide de aproximación.
2. Se obtiene una predicción del plano j expandiendo en un factor 2 el plano j-1 e interpolando.
3. Se calcula la diferencia entre la imagen inicial y la predicción obtenida para armar el plano j de la pirámide de detalles.
4. En el plano más bajo de la pirámide de detalles se coloca el plano de aproximación equivalente


Downsampler
(rows and columns)
Approximation filter
2↓
Level $j-1$ approximation
2↑
Upsampler
(rows and columns)
Interpolation filter
Prediction
Level j input image
Level j prediction residual

el filtrado se realiza en el dominio espacial y se pueden utilizar diversos filtros:

- Media aritmética,
- Gaussianos pasabajos,
- No usar filtro, (pirámides de submuestreo.)
- Filtro wavelet.

Se pueden utilizar diferentes procesos para interpolar:

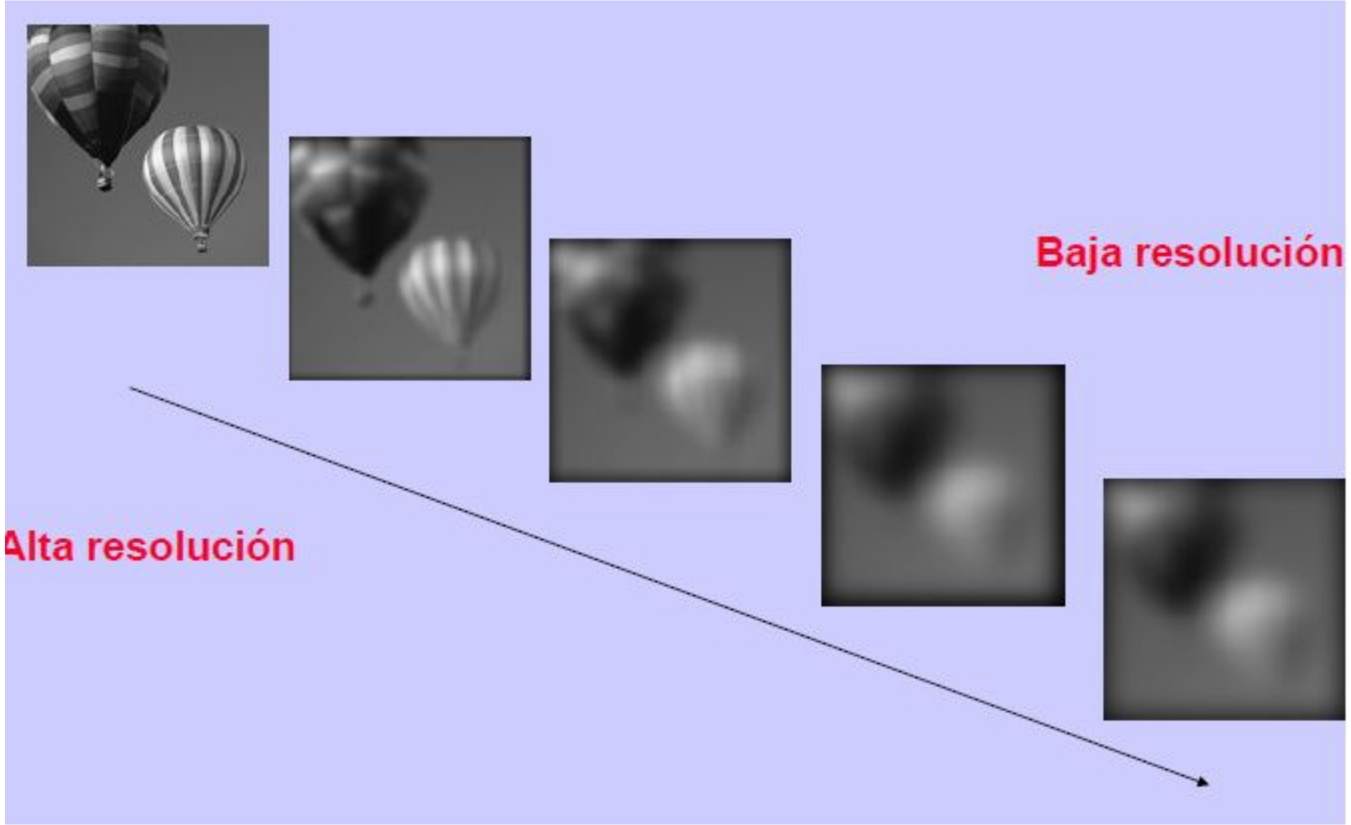
- Vecino más próximo.
- Bilineal.
- Bicúbica.

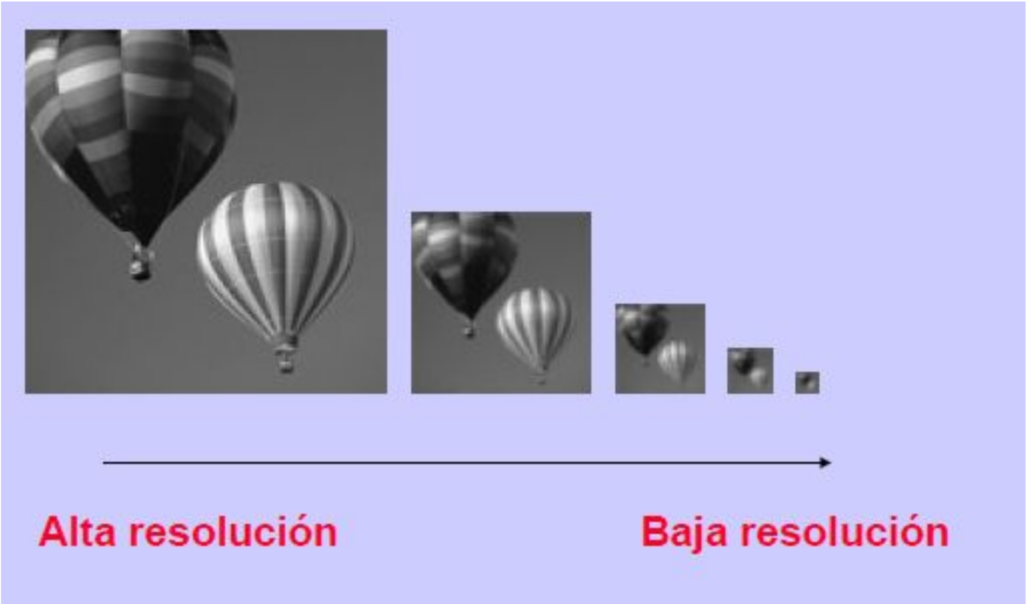
UPSAMPLING

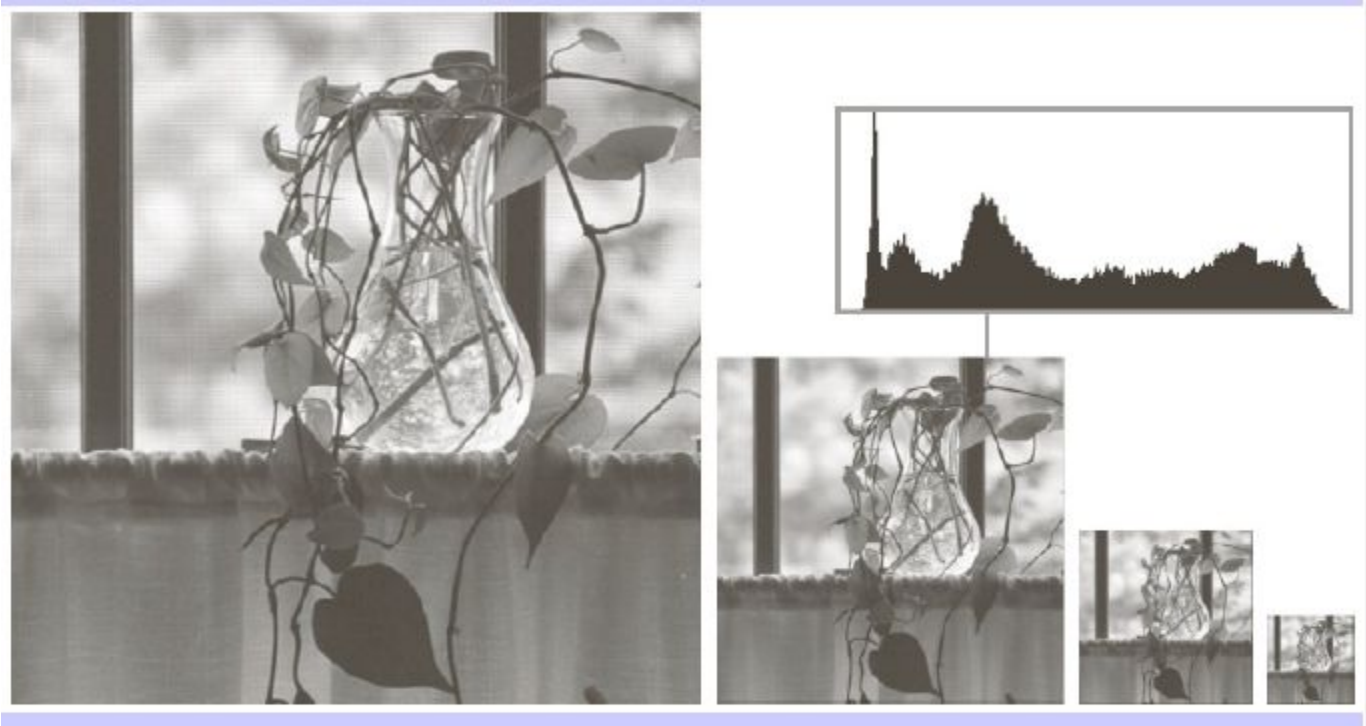
$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f(n/2) & \text{if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

DOWNSAMPLING

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$


Baja resolución
Alta resolución


Alta resolución
Baja resolución

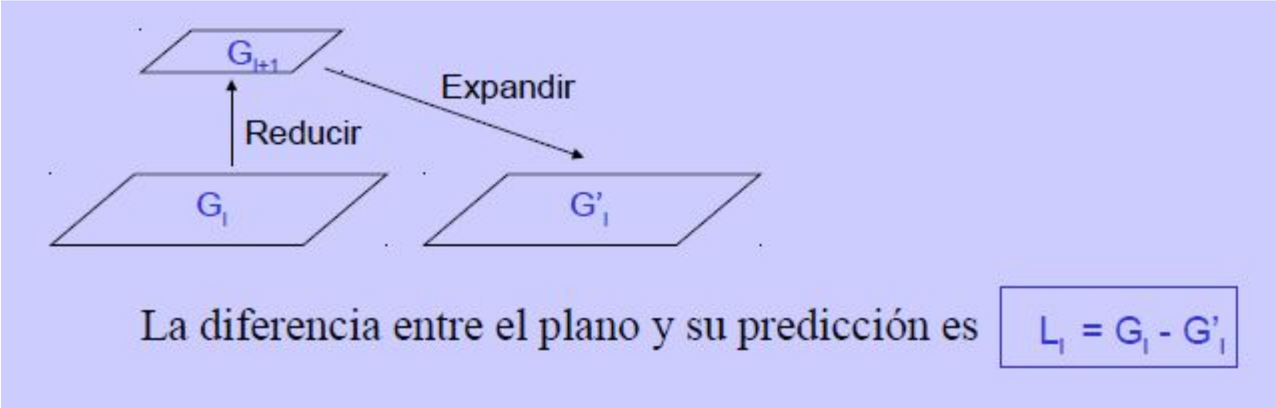


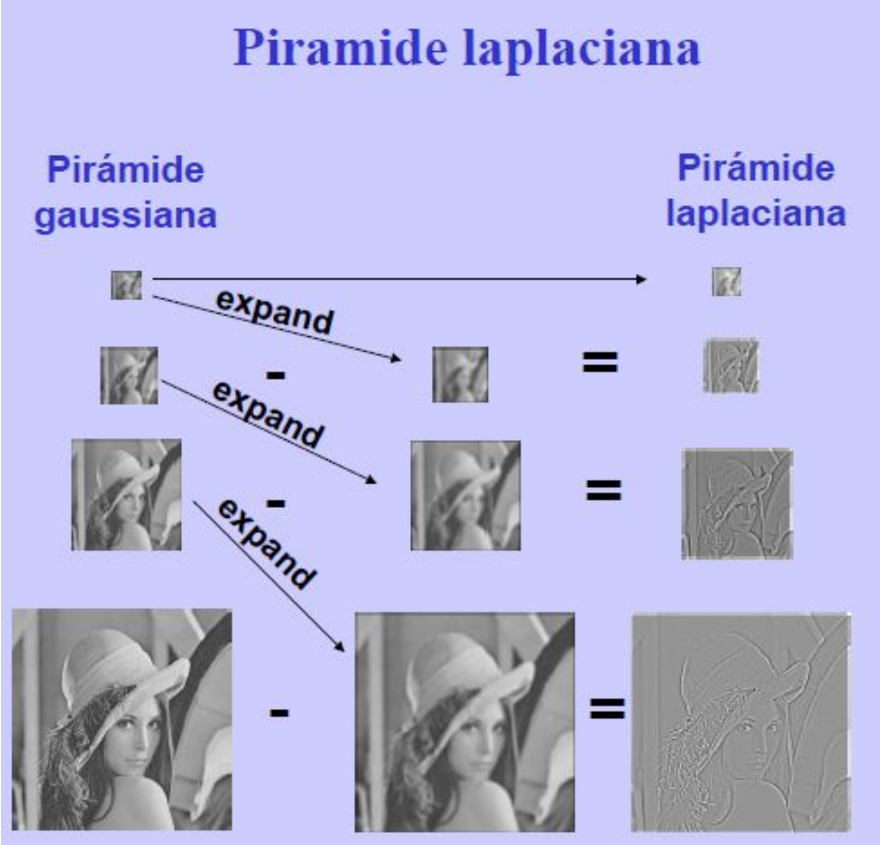
Piramide Gaussiana

Uso de filtro Gaussiando y las sumas del coeficiente debe ser cero.

Pirámide Laplaciana

Los planos son planos de detalles




Piramide laplaciana
Pirámide gaussiana
Pirámide laplaciana
expand
-
=
expand
-
=
expand
-
=

Wavelets

$$Complex\ Function = \sum_i (weight)_i \bullet (BasisFunction)_i$$

$$f = \sum_i F_i K_{ij} \qquad F_i = \sum_j K_{ij} f_j \quad \text{(discrete)}$$

$$f(x) = \int K(x,\omega) F(\omega) d\omega \quad \text{(continuous)}$$

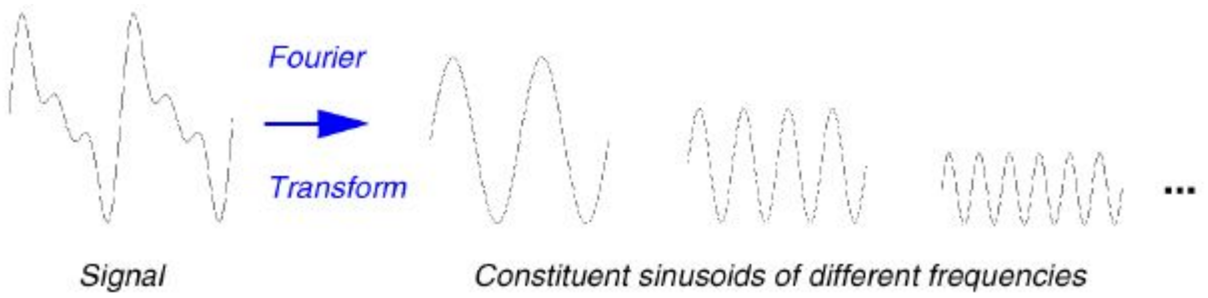
$$F(\omega) = \int K(x,\omega) f(x) dx$$

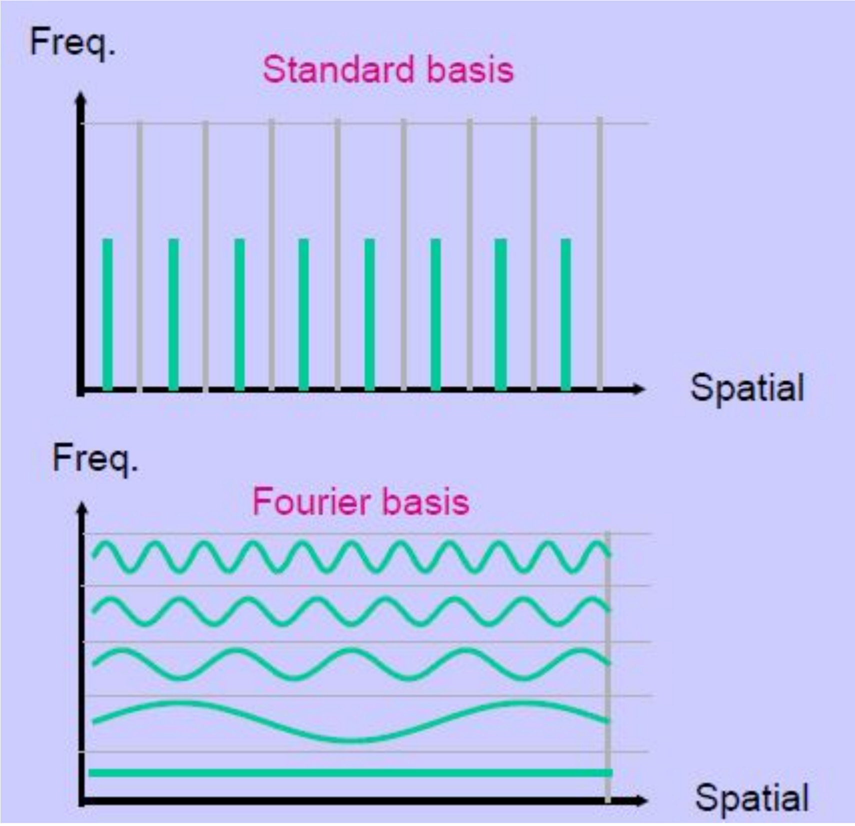
Wavelets

Trasnformada de Fourier:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

Si se multiplican los coeficientes F(w) por la senoide de la frecuencia correcta recupera la componente senoidal original





Freq.
Standard basis
Spatial
Freq.
Fourier basis
Spatial

son pequeñas ondas de frecuencia variable y tensión limitada.

• su diferencia con la transformada de Fourier es que conserva información espacial.

• se utilizan en diferentes procesos de análisis y procesamiento de imágenes que se agrupan en el área de teoría de multiresolución.

• la teoría de multiresolución trata de la representación y análisis de señales (o imágenes) en

más de una resolución.

a= escala

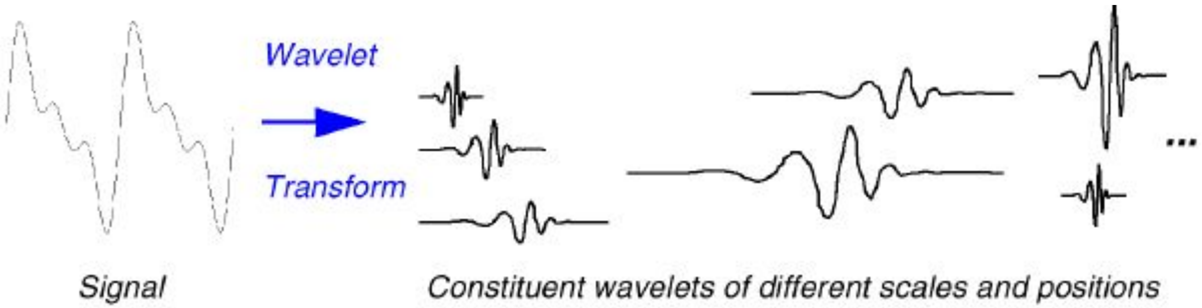
B= desplazamientos

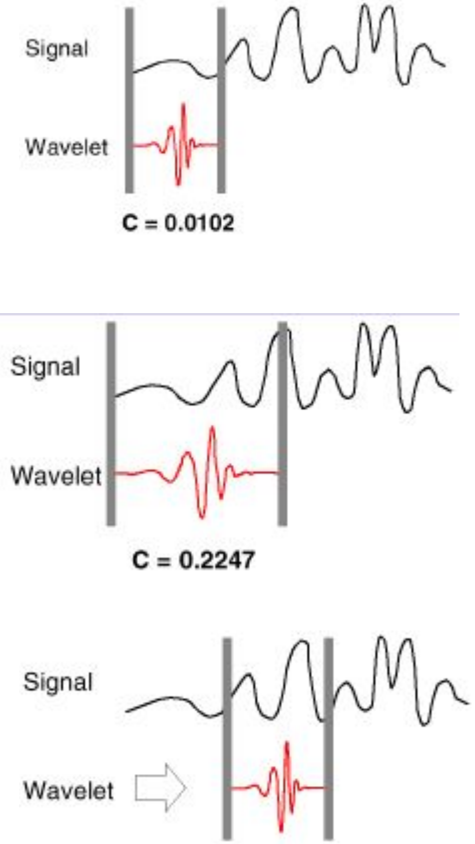
$$W_i = \sum_j f_j \, K_{i,j}$$

$$f_j = \sum_i W_i \, K_{i,j}$$

$$K_{i,j} \Rightarrow \Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \, \Psi_0 \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

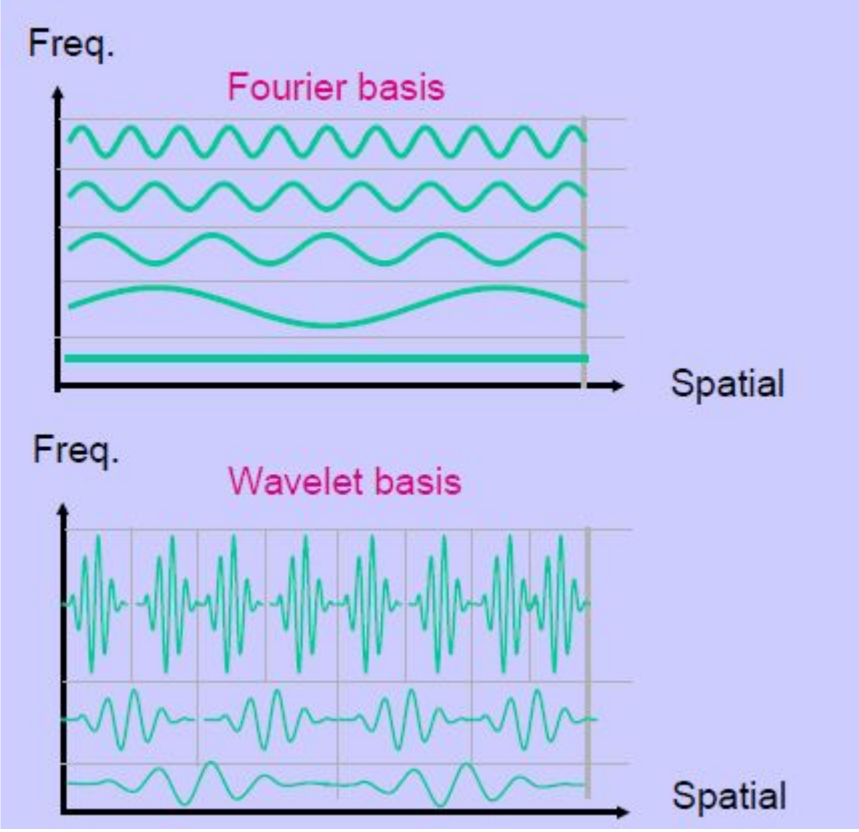
$$K_{i,j} \Rightarrow \Psi_{a,b_x,b_y}(x,y) = \frac{1}{|a|} \, \Psi_0 \left(\frac{x-b_x}{a}, \frac{y-b_y}{a} \right)$$


Wavelet
Transform
Signal
Constituent wavelets of different scales and positions


Signal
Wavelet
C = 0.0102
Signal
Wavelet
C = 0.2247
Signal
Wavelet

$a=2^j$

$b=k2^j$


Freq.
Fourier basis
Spatial
Freq.
Wavelet basis
Spatial

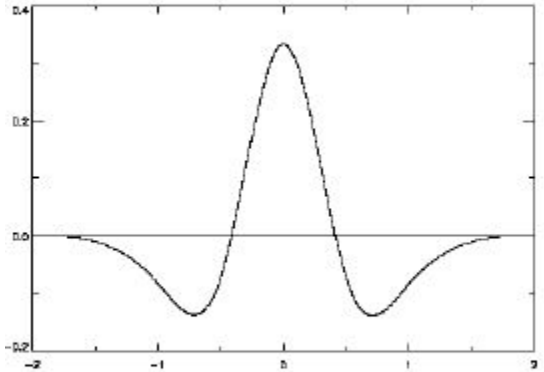
Cambio rápido -> alta frecuencia

Cambio lento -> baja frecuencia

Definiciones de Ψ_0:

- Wavelet sombrero mexicano :

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

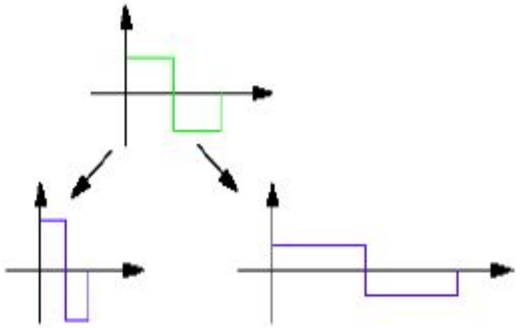


- Wavelet Haar :

Basis functions

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \le t < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)$$



Transformada de Haar

las funciones que la definen es en conjunto de wavelets ortogonal más simple posible (Haar 1910).

• La transformada de Haar puede expresarse como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T$$

donde **F** es la imagen de dimensiones N x N, **H** es la matriz de transformación de Haar de dimensiones N x N, y **T** es la transformada de Haar de dimensiones N x N.

• la transpuesta se necesita porque **H** no es simétrica.

Transformada de Haar

• la matriz **H** contiene las funciones básicas de Haar, $h_k(z)$.

• estas funciones se definen sobre el intervalo contínuo $z \in [0,1]$ para k=0, 1, 2, ..., N-1, donde $N=2^n$.

• para generar **H** se encuentra k mediante:

$$k = 2^p + q - 1,$$

$$0 \leq p \leq n - 1,$$

$$q = 0 \text{ or } 1 \text{ for } p = 0,$$

$$1 \leq q \leq 2^p \text{ for } p \neq 0.$$

Transformada de Haar

las funciones básicas de Haar son:

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad z \in [0, 1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0 & \text{otherwise, } z \in [0, 1] \end{cases}$$

una fila k cualquiera de **H** contienen las hk(z) para valores z = 0/N, 1/N, 2/N, ..., (N-1)/N.

Si N=2, H es :

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

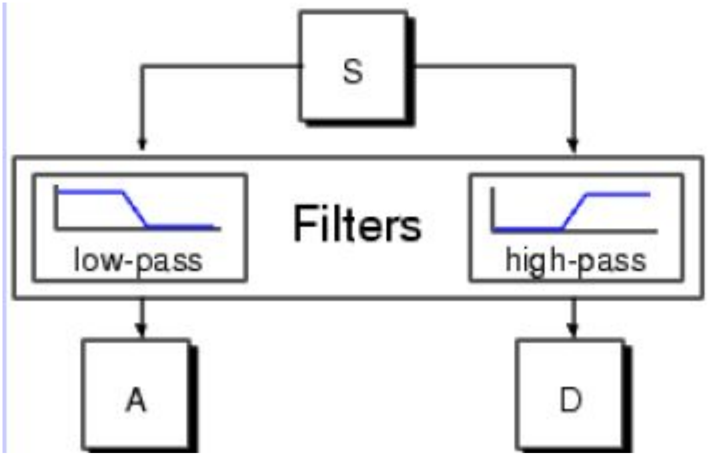
Si N es 4, los valores de k, p,q y H son:

k	p	q
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	2

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

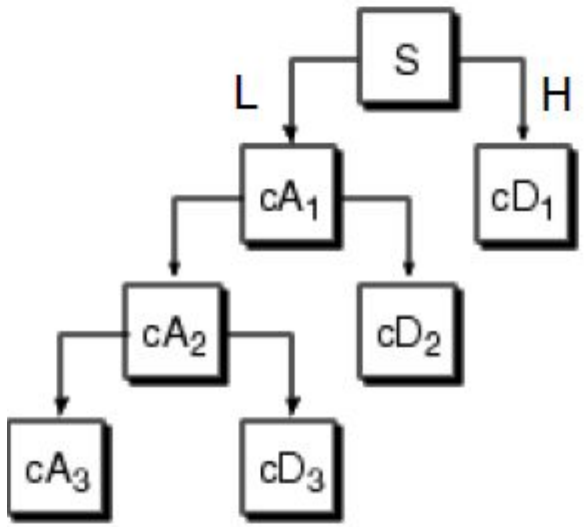
Wavelets

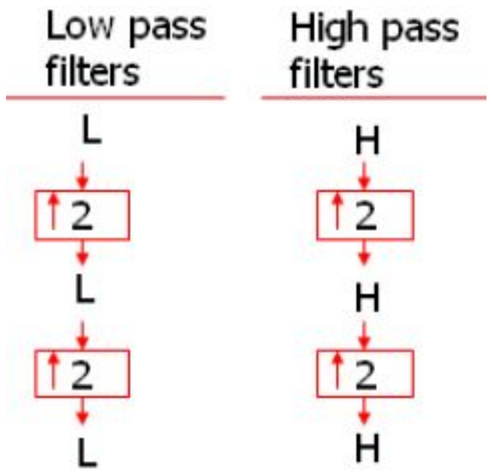
Mallat (1989) definió la estructura de filtrado en banda para la Transformada Wavelet:



Wavelts

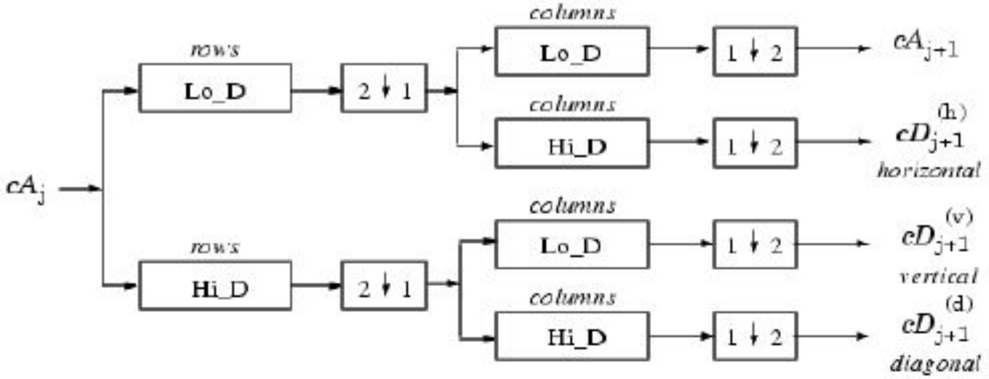
El árbol de estructura de la TW





Two-Dimensional DWT

Decomposition Step



where

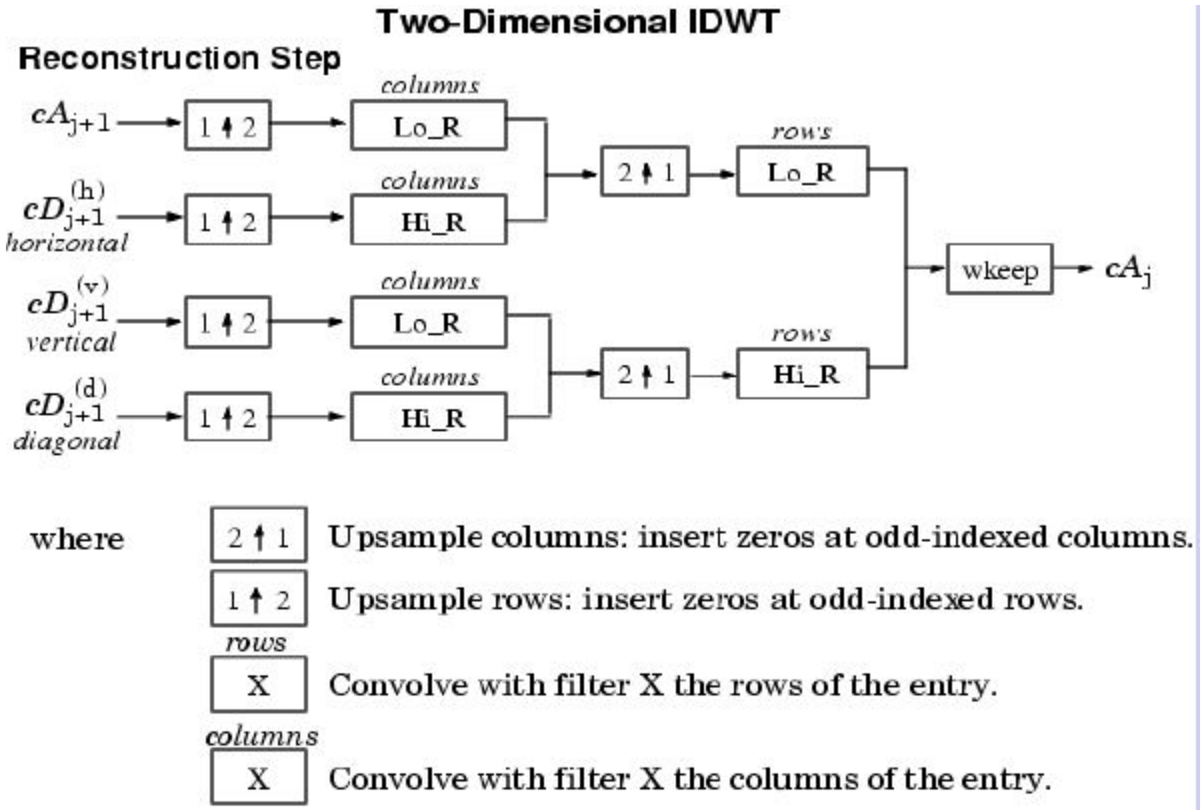
$\boxed{2 \downarrow 1}$ Downsample columns: keep the even indexed columns.

$\boxed{1 \downarrow 2}$ Downsample rows: keep the even indexed rows.

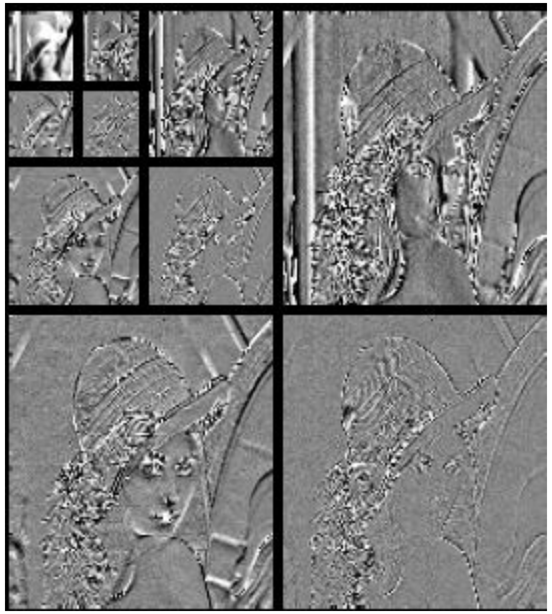
rows $\boxed{X}$ Convolve with filter X the rows of the entry.

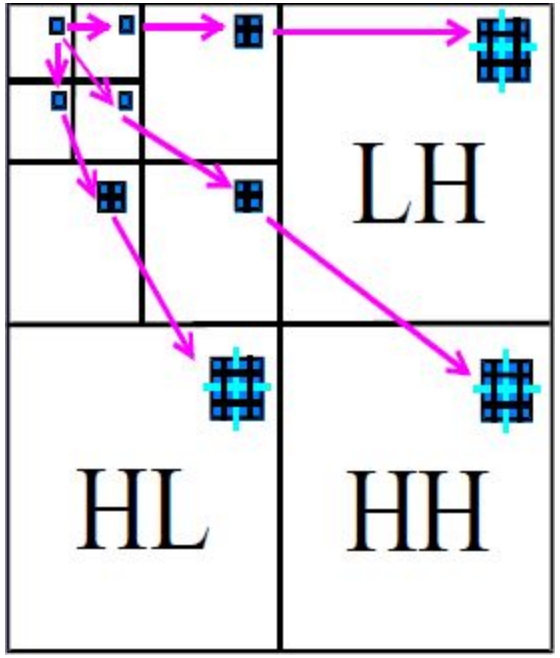
columns $\boxed{X}$ Convolve with filter X the columns of the entry.

Initialization $CA_0 = s$ for the decomposition initialization.



Two-Dimensional IDWT
Reconstruction Step
cA j+1
cD (h) j+1 horizontal
cD (v) j+1 vertical
cD (d) j+1 diagonal
1 ↑ 2
columns
Lo_R
Hi_R
2 ↑ 1
rows
Lo_R
Hi_R
wkeep
cA j
where
2 ↑ 1 Upsample columns: insert zeros at odd-indexed columns.
1 ↑ 2 Upsample rows: insert zeros at odd-indexed rows.
rows X Convolve with filter X the rows of the entry.
columns X Convolve with filter X the columns of the entry.





LH
HL
HH

Wavelets - ruido

se puede remover el ruido en forma global o en los planos (coeficientes más bajos).

• la idea es fijar un límite para los coeficientes por debajo del cual son puestos a cero.

• es mejor aplicar lógica difusa para suavizar la imagen final.

• si M es el número total de pixels y σ la desviación standard, un límite para los coeficientes es:

$\sigma = \sqrt{2 Log M}$

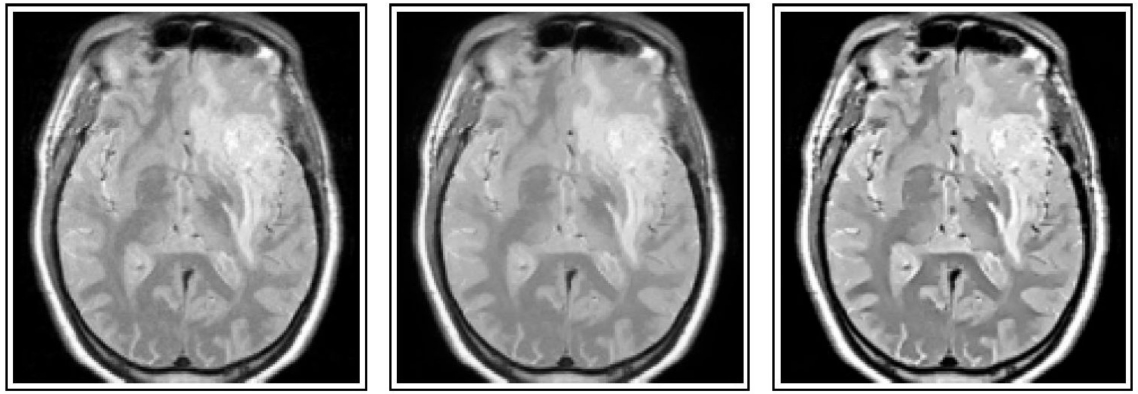
• otra posibilidad es aplicar límites por plano en forma adaptiva dependiendo de la escala de interés

Wavelets - Realce

otra posibilidad es mejorar la imagen aplicando una función no lineal a los coeficientes.

• por ejemplo, es posible mejorar el contraste haciendo que los coeficientes más pequeños sean aún más chicos y viceversa.

Realce - Ruido



(a) (b) (c)