Höhere Mathematik

(Ended early)

User: report_tester_full

Date: 2026-01-31 10:00

Pace: Turbo

Duration: 12 min 20 s (Limit: 4 min)

9

of 15 points

60.0 %

✓ 3

Correct

✗ 2

Wrong

? 0

Open

5

Total

Feeling vs. result

How well your feeling matches the results.

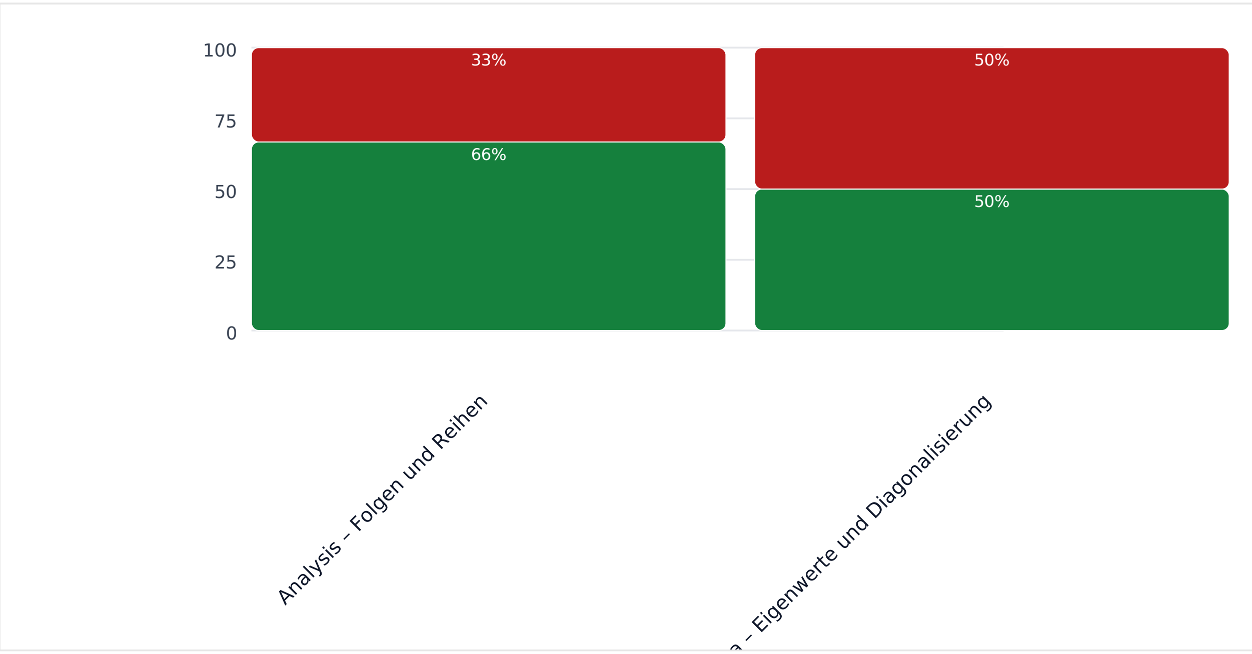
	Correct	Wrong
Sure	2 (40%)	1 (20%)
Unsure	1 (20%)	1 (20%)

Totals: Sure 3 | Unsure 2 | Correct 3 | Wrong 2

Performance by Topic

Correct Wrong Unanswered

Share per topic (100% = all questions in topic)

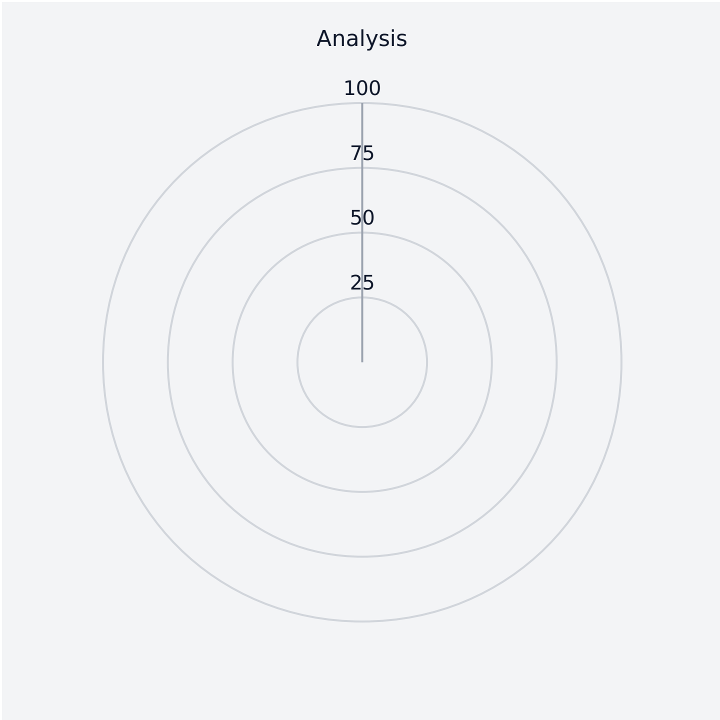


Gaps identified

- **Analysis – Folgen und Reihen**
  Q 2

- **Lineare Algebra – Eigenwerte und Diagonalisierung**
  Q 4

Performance (Cognitive Stage)



Radar shows correct % per cognitive stage (Bloom).

Patterns:

- **Cramming (Spike at Reproduction)**: Good memory, weak application → Practice transfer.
- **Surface**: Concepts known, usage fails → Use case studies.
- **Practical**: Good app, theory gaps → Refresh basics.
- **Analytical**: Strong solver, basic gaps → Review fundamentals.
- **Balanced**: Solid all-rounder → Keep it up!

Stage	Hits	Quota
Analysis	3/5	**60 %**

Vs. Average

Level	You	Avg	Diff
Overall	60 %	53 %	**↑ 6.7 % above avg**

By Cognitive Stage

Stage	You	Avg	Diff
Analysis	60 %	60 %	**= 0.0 % average**

Base: 3 participants. Date: 2026-01-31 10:00.

Bookmarked Questions

Your marked questions:

- **Q 1** (Set no. 1)
  Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$...
- **Q 3** (Set no. 3)
  Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}...

✔ Correct

QUESTION 1 / 5 (SET NO. 1)

STAGE: ANALYSIS

Analysis – Folgen und Reihen

Concept: Konvergenz und Summation von Reihen

Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Welche Aussage trifft zu?

- ✔ Die Reihe konvergiert und ihr Wert ist 2.
- ○ Die Reihe konvergiert und ihr Wert ist 1.
- ○ Die Reihe divergiert, weil die Folgenglieder nicht gegen 0 konvergieren.
- ○ Die Reihe ist nur bedingt konvergent, nicht aber absolut konvergent.
- ○ Die Reihe divergiert, wie der Quotiententest zeigt.

Why: Die Reihe ist eine Potenzreihe mit $x = \frac{1}{2}$ und lässt sich über die Ableitung der geometrischen Reihe explizit summieren. Man erhält $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$ und damit für $x = \frac{1}{2}$ den Wert 2. Die Reihe ist absolut konvergent, also insbesondere konvergent.

Deep Dive: Explizite Summation der Reihe

Durch Ableiten und Umformen der geometrischen Reihe erhält man eine geschlossene Formel für $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Das Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ liefert den konkreten Wert der gegebenen Reihe.

- Betrachten Sie die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.
- Leiten Sie die Reihe gliedweise ab und erhalten Sie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Multiplizieren Sie mit x und erhalten Sie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$.
- Setzen Sie $x = \frac{1}{2}$ ein und erhalten Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$.

✗ Wrong

QUESTION 2 / 5 (SET NO. 2)

STAGE: ANALYSIS

Analysis – Folgen und Reihen

Concept: Konvergenz von Folgen und Definition der Eulerschen Zahl

---

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Welche Aussage ist korrekt?

✔ Die Folge ist streng wachsend und konvergiert gegen e.

✗ **Die Folge ist streng fallend und konvergiert gegen 1.**

○ Die Folge ist beschränkt, aber divergiert, weil sie oszilliert.

○ Die Folge ist unbeschränkt, da $a_n \to \infty$ gilt.

○ Die Folge konvergiert nicht, weil $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ kein Cauchy-Folgenkandidat ist.

Why: Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wird klassisch zur Definition der Eulerschen Zahl e verwendet. Man kann zeigen, dass (a_n) streng wachsend und nach oben durch e beschränkt ist und daher gegen e konvergiert.

Deep Dive: Konvergenzverhalten der Folge $(1 + 1/n)^n$

Die Folge (a_n) ist ein Standardbeispiel für eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Ihr Grenzwert wird als Eulersche Zahl e bezeichnet und spielt eine zentrale Rolle in Analysis und Exponentialrechnung.

- Zeigen Sie, dass $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ monoton wachsend ist, etwa durch Vergleich von a_{n+1} und a_n.
- Nutzen Sie Abschätzungen wie $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ für alle n zur Herleitung einer oberen Schranke.
- Wenden Sie das Monotonie- und Beschränktheitskriterium an, um die Konvergenz von (a_n) zu folgern.
- Definieren Sie e als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

✔ Correct

QUESTION 3 / 5 (SET NO. 3)

STAGE: ANALYSIS

Analysis – Folgen und Reihen

Concept: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

---

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = x^n$. Welche Aussage beschreibt das Konvergenzverhalten von (f_n) korrekt?

- ✔ Die Folge (f_n) konvergiert punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Grenzfunktion, aber nicht gleichmäßig auf $[0,1]$.
- ○ Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion.
- ○ Die Folge (f_n) konvergiert weder punktweise noch gleichmäßig auf $[0,1]$.
- ○ Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[a,1]$ mit $0 < a < 1$.
- ○ Die Folge (f_n) konvergiert punktweise nur in $x = 0$, sonst divergiert sie.

Why: Für $x \in [0,1)$ gilt $x^n \to 0$, während für $x = 1$ stets $f_n(1) = 1$ gilt. Die Grenzfunktion ist also $f(x) = 0$ für $x \in [0,1)$ und $f(1) = 1$. Diese Konvergenz ist auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig, da die Konvergenz in der Nähe von 1 beliebig langsam wird.

Deep Dive: Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz für x^n

Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ liefert ein Standardbeispiel für punktweise, aber nicht gleichmäßige Konvergenz. Besonders die Werte nahe bei $x = 1$ verhindern die Gleichmäßigkeit, obwohl für alle $x < 1$ eine schnelle Konvergenz gegen 0 vorliegt.

- Untersuchen Sie zunächst für festes $x \in [0, 1)$ den Grenzwert von x^n und nutzen Sie $|x| < 1$.
- Betrachten Sie den Sonderfall $x = 1$, wo $x^n = 1$ für alle n gilt.
- Definieren Sie die punktweise Grenzfunktion f durch $f(x) = 0$ für $x \in [0, 1)$ und $f(1) = 1$.
- Prüfen Sie die Gleichmäßigkeit: betrachten Sie $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ und zeigen Sie, dass dieser Supremumsabstand nicht gegen 0 geht.

✗ Wrong

QUESTION 4 / 5 (SET NO. 4)

STAGE: ANALYSIS

Lineare Algebra – Eigenwerte und Diagonalisierung

Concept: Diagonalisierbarkeit und geometrische Multiplikität

Ein Endomorphismus T eines dreidimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums habe charakteristisches Polynom $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Welche Aussage ist korrekt?

✔ Der Operator T ist genau dann diagonalisierbar, wenn der Eigenraum zu $\lambda = 1$ die Dimension 2 hat.

✗ **Der Operator T ist stets diagonalisierbar, weil das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.**

○ Der Operator T ist nie diagonalisierbar, weil $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle ist.

○ Der Operator T ist genau dann diagonalisierbar, wenn der Eigenraum zu $\lambda = 2$ die Dimension 2 hat.

○ Der Operator T ist genau dann diagonalisierbar, wenn beide Eigenräume eindimensional sind.

Why: Für einen dreidimensionalen Raum muss die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich 3 sein, damit eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Da $\lambda = 2$ einfache Nullstelle ist, ist der Eigenraum zu $\lambda = 2$ immer eindimensional. Daher ist T genau dann diagonalisierbar, wenn der Eigenraum zu $\lambda = 1$ die Dimension 2 hat.

Deep Dive: Kriterium für Diagonalisierbarkeit über dem Charakteristikum

Die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus wird durch das Verhältnis von algebraischer zu geometrischer Multiplizität bestimmt. In endlicher Dimension ist ein Operator genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume der Raumdimension entspricht.

- Notieren Sie die algebraischen Multiplizitäten: $\lambda = 1$ mit Multiplikität 2, $\lambda = 2$ mit Multiplikität 1.
- Nutzen Sie, dass die geometrische Multiplizität höchstens die algebraische Multiplizität erreichen kann.
- Beobachten Sie, dass der Eigenraum zu $\lambda = 2$ aufgrund der einfachen Nullstelle die Dimension 1 hat.
- Fordern Sie für Diagonalisierbarkeit, dass die Summe der Dimensionen der Eigenräume 3 ergibt; daraus folgt die notwendige Bedingung $\dim E_1 = 2$.

✔ Correct

QUESTION 5 / 5 (SET NO. 5)

STAGE: ANALYSIS

Lineare Algebra – Eigenwerte und Diagonalisierung

Concept: Minimalpolynom und Jordansche Normalform

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Welche Aussage beschreibt den Zusammenhang zwischen Minimalpolynom m_A und Diagonalisierbarkeit von A korrekt?

✔ Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, wenn das Minimalpolynom m_A sich in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerlegen lässt.

○ Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn der Grad von m_A gleich n ist.

○ Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn m_A keine Linearfaktoren besitzt.

○ Die Matrix A ist immer diagonalisierbar, sobald ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, unabhängig von m_A.

○ Die Matrix A ist nie diagonalisierbar, wenn m_A Linearfaktoren enthält.

Why: Das Minimalpolynom kodiert die Größe der Jordanklötze. Zerfällt m_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so sind alle Jordanklötze eindimensional und A ist diagonalisierbar. Treten dagegen mehrfach dieselben Linearfaktoren im Minimalpolynom auf, existieren nichttriviale Jordanklötze und A ist nicht diagonalisierbar.

Deep Dive: Minimalpolynom als Diagonalisierbarkeitskriterium

Das Minimalpolynom enthält präzise Informationen über die innere Struktur einer Matrix im Sinne der Jordanschen Normalform. Seine Zerlegung in einfache Linearfaktoren ist äquivalent zur Existenz einer Basis, in der A diagonal ist.

- Erinnern Sie sich, dass das Minimalpolynom m_A das kleinste normierte Polynom ist, für das $m_A(A) = 0$ gilt.
- Nutzen Sie die Theorie der Jordanschen Normalform, nach der das Minimalpolynom die Größen der Jordanklötze bestimmt.
- Zeigen Sie, dass mehrfache Linearfaktoren im Minimalpolynom genau dann auftreten, wenn Jordanklötze der Größe größer als 1 vorhanden sind.
- Folgern Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn alle Jordanklötze die Größe 1 haben, also m_A nur einfache Linearfaktoren besitzt.

MINI-GLOSSARY

Key terms from the set

Analysis – Folgen und Reihen

Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Eulersche Zahl e

Konstante $e \approx 2{,}71828$, definiert u.a. durch $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Folge

Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jedem n ein Folgenglied a_n zuordnet.

Funktionenfolge

Folge (f_n) von Abbildungen mit gemeinsamer Definitionsmenge.

Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit der Summenformel $\frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

Gleichmäßige Konvergenz

Konvergenz mit $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, bei der alle Stellen gleichzeitig kontrolliert werden.

Konvergenz

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen L, wenn $|a_n - L|$ für großes n beliebig klein wird.

Monoton wachsend

Eine Folge (a_n) mit $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.

Punktweise Konvergenz

Konvergenz einer Funktionenfolge, bei der für jedes feste x die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

Quotiententest

Konvergenzkriterium, das den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ betrachtet.

Reihe

Unendliche Summe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, deren Konvergenz untersucht wird.

Supremum

Kleinste obere Schranke einer Menge reeller Zahlen.

Lineare Algebra – Eigenwerte und Diagonalisierung

Algebraische Multiplizität

Vielfachheit einer Nullstelle im charakteristischen Polynom.

Diagonalisierbare Matrix

Matrix, die zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, d.h. $A = SDS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D.

Diagonalisierbarkeit

Eigenschaft eines Operators, für die es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, in der die Darstellungsmatrix diagonal ist.

Endomorphismus

Lineare Abbildung eines Vektorraums in sich selbst.

Geometrische Multiplizität

Dimension des Eigenraums zum Eigenwert.

Jordanklotz

Block in der Jordanschen Normalform, der zu einem Eigenwert gehört und die Größe verallgemeinerter Eigenräume beschreibt.

Jordansche Normalform

Kanonsche Normalform einer Matrix über $\mathbb{C}$, bestehend aus Jordanklötzen.

Minimalpolynom

Kleinstes normiertes Polynom m_A mit der Eigenschaft $m_A(A) = 0$.