

Минимизация логических функций

Определение: Преобразование логических функций с целью упрощения их аналитического представления называется минимизацией.

Дизъюнктивная нормальная форма называется **минимальной**, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ, эквивалентных ей.

Методы минимизации:

1. Метод непосредственных преобразований логических функций.
2. Метод неопределенных коэффициентов.
3. Аналитические методы (метод Квайна, метод Квайна – Мак-Класки)
4. Метод минимизирующих карт (карты Карно, диаграммы Вейча)

МЕТОД МИНИМИЗИРУЮЩИХ КАРТ (КАРТЫ КАРНО ИЛИ ДИАГРАММЫ ВЕЙЧА)

Карты Карно (их разновидностью являются диаграммы Вейча) являются графическим представлением таблиц истинности. Поэтому они строятся или по таблице истинности анализируемой функции, или же по ее СНДФ.

Диаграммы Вейча представляет собой прямоугольник, разбитый на квадраты, число которых равно общему числу наборов для данной функции n переменных, т.е. оно равно 2^n . Так, для функции 3-х переменных квадратов будет 8, 4-х - 16 и т.д.

МЕТОД МИНИМИЗИРУЮЩИХ КАРТ (КАРТЫ КАРНО ИЛИ ДИАГРАММЫ ВЕЙЧА)

Каждый квадрат соответствует определенному набору или терму, причем наборы располагаются так, чтобы соседние наборы или термы, как по горизонтали, так и по вертикали, отличались бы только значением одной переменной: в одном квадрате она с инверсией, а в другом, соседнем - без. Причем, надо учесть, что квадраты, расположенные на противополжных концах каждой строки или столбца, также являются соседними.

Функцию в СНДФ наносят на карту, отмечая, например, знаком 1 квадраты, соответствующие тем наборам, на которых функция равна единице, т.е. в СНДФ функции есть соответствующий минтерм. Остальные квадраты отмечаются знаком 0.

Код Грея

система счисления, в которой два соседних значения различаются только в одном разряде

Код Грея

10СС	2СС	Код Грея	10СС	2 СС	Код Грея
0	0000	0000	8	1000	1100
1	0001	0001	9	1000	1101
2	0010	0011	10	1000	1111
3	0011	0010	11	1000	1110
4	0100	0110	12	1000	1010
5	0101	0111	13	1000	1011
6	0110	0101	14	1000	1001
7	0111	0100	15	1000	1000

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	1
X_1	0	1	0
	1	1	1

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
		0	0	1	0
		1	0	1	0

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

	BC	00	01	11	10
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0



Пример

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

		0	0	1	1	A
		0	1	1	0	B
0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
C	D					

Пример

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

		AB			
		00	01	11	10
C D	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

Пример

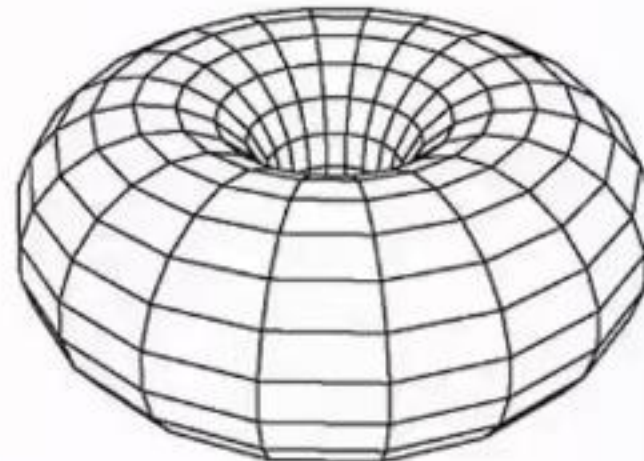
E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
C D	00	0	0	1	0	0	1	0	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

ДНФ КНФ

1. Объединяем смежные клетки с **единицами** (**нулями**) в максимально возможные области, содержащие 2^n клеток
2. В области **НЕ** должно находиться клеток, содержащих **нули** (**единицы**)
3. Области могут пересекаться
4. Возможно несколько вариантов покрытия
5. Крайние строки и столбцы являются соседними между собой

X_2X_3		00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1



Правила

6. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну

E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	1	1	0	0	1	1	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

7. Для каждой области записываем **конъюнкцию** (**дизъюнкцию**) переменных, не изменяющих своё значение
Если неизменная переменная равна **нулю** (**единице**) – инвертируем
8. **Конъюнкции** (**дизъюнкции**) областей объединяем **дизъюнкцией** (**конъюнкцией**).

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	1
X_1	0	1	0
	1	1	1

$$F = \neg X_2 \vee X_1$$

Пример

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = X_1 \cdot \neg X_2 \vee \neg X_1 \cdot X_2$$

Пример

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = (X_1 \vee X_2) \cdot (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\begin{aligned} &(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ &\vee (A \cdot B \cdot C) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма
(**СДНФ**)

$$\begin{aligned} &(A \vee B \vee C) \cdot \\ &\cdot (A \vee \neg B \vee C) \cdot \\ &\cdot (A \vee \neg B \vee \neg C) \cdot \\ &\cdot (\neg A \vee B \vee C) \cdot \\ &\cdot (\neg A \vee \neg B \vee C) \end{aligned}$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (**СКНФ**)

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = \neg B \cdot C \vee A \cdot C$$

МДНФ

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = C \cdot (A \vee \neg B)$$

МКНФ

Недостатки

Применим для функций до **7** переменных

Выбор областей – визуально

Нет алгоритма, обеспечивающего оптимальное решение

Пример. Минимизировать функцию, заданную в СДНФ:

$$f(x, y, z)_{\text{СДНФ}} = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee x y z \vee \bar{x} \bar{y} z$$

		y	\bar{y}	
x		1	1	
\bar{x}	1		1	1
	\bar{z}	z	\bar{z}	

Минимальные формы:

$$f(x, y, z)_{\text{МДНФ1}} = x z \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} z$$

$$f(x, y, z)_{\text{МДНФ2}} = x z \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y}$$

Пример. Минимизировать функцию, заданную в СКНФ:

$$f(a,b,c,d)_{\text{СКНФ}} = \prod(2,3,5,6,7,10,11,13,14)$$

	\bar{d}	d	\bar{d}	
a	0	0	0	\bar{c}
\bar{a}	0	0	0	c
	b	\bar{b}		\bar{c}

Минимальная форма:

$$f(a,b,c,d)_{\text{МКНФ}} = (a \vee \bar{c}) \& (b \vee d) \& (\bar{b} \vee c \vee \bar{d})$$

Неполностью определенные ЛФ

Неполностью определенной ЛФ от n переменных называется функция, заданная на множестве наборов, меньше чем 2^n .

Каждая строка таблицы истинности или ячейка на диаграмме Вейча соответствует определенному значению логической функции для соответствующей комбинации значений аргументов, т.е. для соответствующего набора. В некоторых случаях известно, что какой-то набор появиться не может или же если он появится, то это значение функции, по тем или иным причинам, не существенно. Для таких случаев нет необходимости определять это значение функции по таблице истинности. В таких случаях говорят о неполностью определенных ФАЛ.

На диаграмме Вейча неопределенное условие обозначается прочерком в соответствующей ячейке. Такие ячейки могут произвольным образом включаться как в группу единичных, так и в группу нулевых ячеек, или же вообще никуда не включать.

ПРИМЕР. Получить методом диаграмм Вейча минимальную дизъюнктивную нормальную форму неполностью определенной ФАЛ, заданой в следующем виде:

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,5,8,12,15), X(1,2,3,10,13,14)$$

	\bar{d}	d	\bar{d}	
a	1	x	1	\bar{c}
	x	1	x	c
\bar{a}			x	\bar{c}
		1	x	c
	b	\bar{b}		

$$f(a,b,c,d)_{\text{МДНФ1}} = ab \vee \bar{b} \bar{d} \vee \bar{a} \bar{c} d$$

$$f(a,b,c,d)_{\text{МДНФ2}} = ab \vee \bar{b} \bar{d} \vee b \bar{c} d$$

Получим МКНФ этой же функции:

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,5,8,12,15), X(1,2,3,10,13,14)$$

$$f(a,b,c,d) = \&(4,6,7,9,11), X(1,2,3,10,13,14)$$

	\bar{d}	d	\bar{d}	
a		x	0	\bar{c}
	x		0	x
\bar{a}	0	0	x	x
	0		x	\bar{c}
	b	\bar{b}		

$$f(a,b,c,d)_{\text{МКНФ}} = (a \vee \bar{c}) \& (b \vee \bar{d}) \& (a \vee \bar{b} \vee d)$$