Умножение с фиксированной точкой (прямой код)

Михаил Шихов
m.m.shihov@gmail.com

Лекция по дисциплине «информатика»
(11 февраля 2016 г.)

Содержание

Дробно-нормализованные числа

Для обоснований выкладок мы используем дробное масштабирование

$$x = y \cdot M$$

Для обоснования выкладок будут использоваться y.

y — дробное число, его целая часть y равна нолю.

Рарзядная сетка хранит разряды дробной части y.

$$0.\overset{n-1}{}\boxed{yyyyy \cdots yyyyy}\overset{0}{}$$

Чтобы зафиксировать запятую между k и $(k-1)$ разрядами n-разрядной сетки, выбирается масштаб

$$M = 2^{(n-k)}.$$

Умножение «столбиком»

Пусть для положительных чисел A и B имеются дробно-масштабированные представления в двоичной системе счисления. Пусть

$$A \equiv (0, a_1 \cdots a_n)_2.$$

Тогда результат произведения $A \times B$ в двоичной системе счисления будет определяться по формуле:

$$A \times B = B \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n} (B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} (B \gg i) \cdot a_i.$$

Пример умножения

Операнды

Требуется найти произведение $A \times B$, где $A = 23$ и $B = 25$. Дробные представления (с масштабирующим множителем $M = 2^5$) будут:

$$A \equiv 0,10111,$$
$$B \equiv 0,11001.$$

Результатоом произведения будет дробное число, но с масштабом

$$M^2 = 2^{10}$$

Пример умножения

Процесс

$$A \equiv 0{,}10111,$$

$$B \equiv 0{,}11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	0,1....	0,.1100 1....
-2	0,.0...	0,..... .....
-3	0,..1..	0,...11 001..
-4	0,...1.	0,....1 1001.
-5	0,....1	0,..... 11001
	Результат:	0,10001 11111

Один шаг нахождения суммы

1) Можно сделать по разному...

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_3 B \cdot 2^{-3} + \dots + a_{(n)} B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\cdots(((a_1 B \cdot 2^{-1}) + a_2 B \cdot 2^{-2}) + a_3 B \cdot 2^{-3}) + \dots + a_n B \cdot 2^{-n})$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 B \cdot 2^{-1}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} + a_i B \cdot 2^{-i}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат $(S_1 \to S_2 \to \dots \to S_{n-1} \to S_n)$

Один шаг нахождения суммы

2) Можно сделать по разному...

$$a_n \cdot \frac{B}{2^n} + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}} + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_n \cdot \frac{B}{2^n}\right) + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}}\right) + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}}\right) + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}\right)$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_n B \cdot 2^{-n}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} + a_i B \cdot 2^{-i}, & \text{если } i < 1. \end{cases}$$

S_1 — результат ($S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_2 \to S_1$)

Один шаг нахождения суммы

3) Можно сделать по разному...

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_3 B \cdot 2^{-3} + \cdots + a_{(n)} B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\cdots \left(\left(\left(a_1 \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + a_2 \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + a_3 \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + \cdots + a_n \frac{B}{2^n} \right)$$

В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 \frac{B}{2^n}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} \cdot 2 + a_i \frac{B}{2^n}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат $(S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{n-1} \to S_n)$

Один шаг нахождения суммы

4) Можно сделать по разному...

$$a_n B \cdot 2^{-n} + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + a_{(n-2)} B \cdot 2^{-(n-2)} + \dots + a_1 B \cdot 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

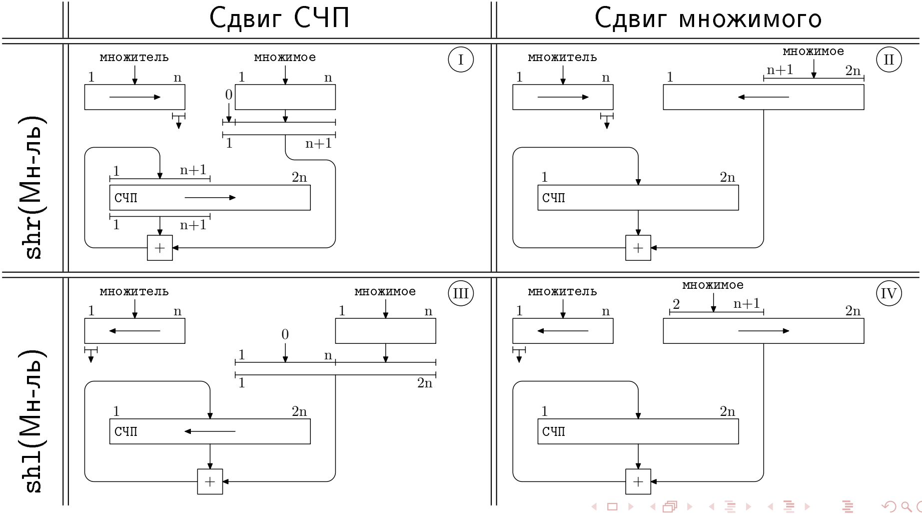
$$\left(\cdots \left(\left(\left(a_n \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + a_{(n-1)} \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + a_{(n-2)} \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + \dots + a_1 \frac{B}{2} \right)$$

В реккурентной форме:

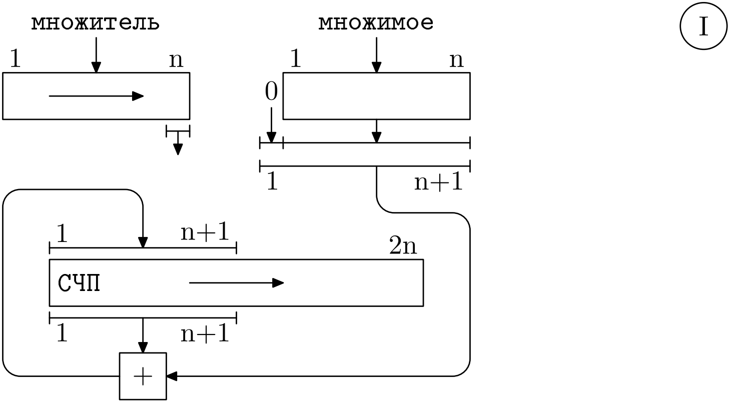
$$S_i = \begin{cases} a_n \frac{B}{2}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} \cdot 2^{-1} + a_i \frac{B}{2}, & \text{если } i < 1. \end{cases}$$

S_1 — результат $(S_n \to S_{n-1} \to \dots \to S_2 \to S_1)$

Основные способы умножения

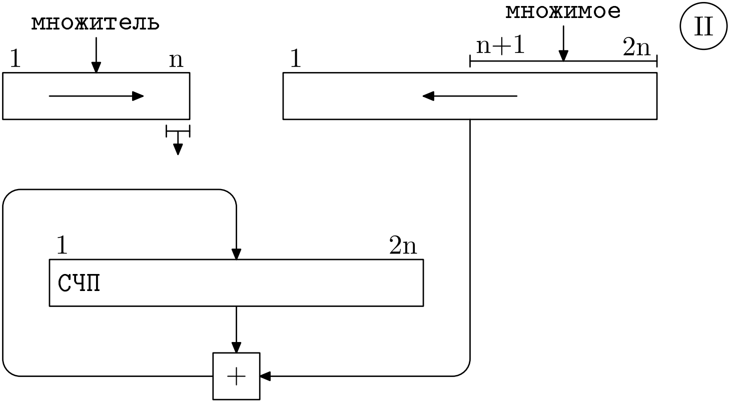


I-способ



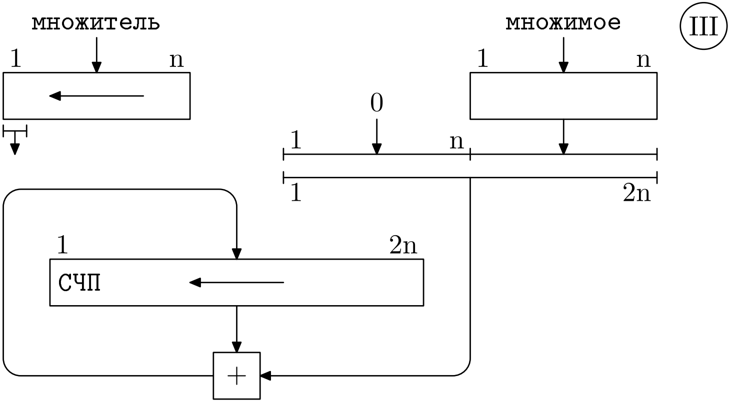
$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_n\frac{B}{2}\right)\cdot 2^{-1}+a_{(n-1)}\frac{B}{2}\right)\cdot 2^{-1}+a_{(n-2)}\frac{B}{2}\right)\cdot 2^{-1}+\cdots+a_1\frac{B}{2}\right)$$

II-способ



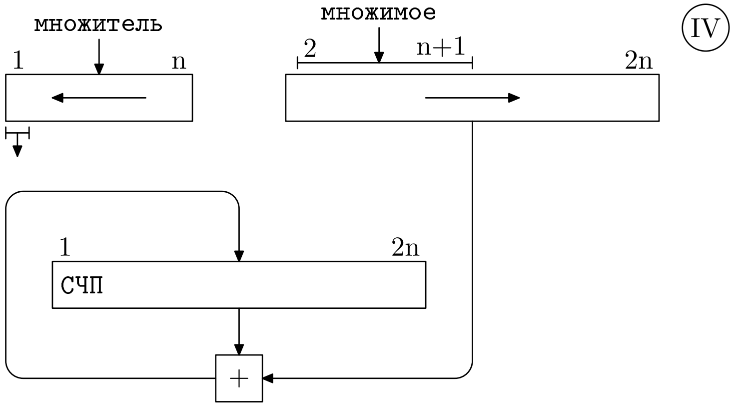
$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_n \cdot \frac{B}{2^n}\right) + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}}\right) + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}}\right) + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}\right)$$

III-способ



$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_1\frac{B}{2^n}\right)\cdot 2 + a_2\frac{B}{2^n}\right)\cdot 2 + a_3\frac{B}{2^n}\right)\cdot 2 + \cdots + a_n\frac{B}{2^n}\right)$$

IV-способ



$$(\cdots(((a_1 B \cdot 2^{-1}) + a_2 B \cdot 2^{-2}) + a_3 B \cdot 2^{-3}) + \cdots + a_n B \cdot 2^{-n})$$

Умножение в прямом коде

При умножении в прямом коде знак результата и результат умножения модулей формируются независимо.

Знак получают сложением по модулю два (XOR) знаков множителя и множимого

Скорректировать запрещенные комбинации.

Операнды

Перемножить числа в прямом коде

Множитель:

$$-25 = (-11001)_2.$$

Множимое:

$$-23 = (-10111)_2.$$

Используем дробное масштабирование с множителем 2^5.

Знак получаем отдельно: $1 \oplus 1 = 0$.

Далее показано получение модулей результатов разными способами.

I-способ

мн-ль →	СЧП →	прим.
,11001	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е; сдвиг
,.1100	,00101 11000	сдвиг
,..110	,00010 11100	сдвиг
,...11	+ ,00001 01110 ,.1011 1.... ,01100 11110	+мн-е; сдвиг
,....1	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

II-способ

множитель →	множимое ←	СЧП	прим.
$,1100\underline{\underline{1}}$	,..... 10111	+ ,00000 00000 ,..... 10111 ,00000 10111	+мн-е; сдвиг
$,.110\underline{\underline{0}}$	,....1 0111.		сдвиг
$,..11\underline{\underline{0}}$	,...10 111..		сдвиг
$,...1\underline{\underline{1}}$	,..101 11...	+ ,00000 10111 ,..101 11... ,00110 01111	+мн-е; сдвиг
$,....\underline{\underline{1}}$	,.1011 1....	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

III-способ

множитель $\leftarrow$	СЧП $\leftarrow$	прим.
$,\underline{\underline{1}}1001$	+ ,00000 00000 ,. . . . . 10111 ,00000 10111	+мн-е; сдвиг
$,\underline{\underline{1}}001.$	+ ,00001 0111. ,. . . . . 10111 ,00010 00101	+мн-е; сдвиг
$,\underline{\underline{0}}01..$	,00100 0101.	сдвиг
$,\underline{\underline{0}}1...$	,01000 101..	сдвиг
$,\underline{\underline{1}}....$	+ ,10001 01... ,. . . . . 10111 ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

IV-способ

множитель ←	множимое →	СЧП	прим.
,11001	,.1011 1....	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е; сдвиг;
,1001.	,..101 11...	+ ,01011 10000 ,..101 11... ,10001 01000	+мн-е; сдвиг
,001..	,...10 111..		сдвиг
,01...	,....1 0111.		сдвиг
,1....	,..... 10111	+ ,10001 01000 ,..... 10111 ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

1)

Какая разрядность результата должна получиться, если прямые коды операндов занимают n бит?

2)

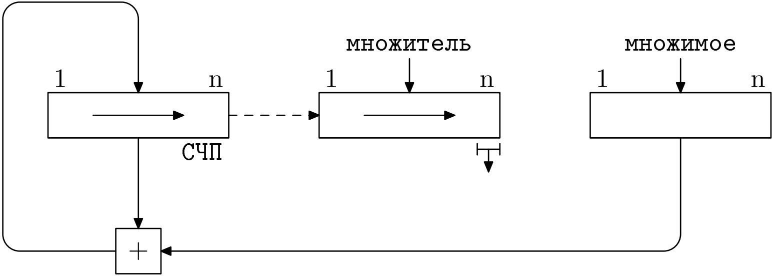
Перемножить числа -91 и 114. Самостоятельно выбрать масштаб.

3)

Выявить ситуации получения неправильных прямых кодов.

4)

Обосновать, работает ли схема умножения модулей первым способом:



- Как её модифицировать, если она работает неправильно?
- Где получается результат?

Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы, посвященные работе с суммами и рекуррентными соотношениями в книге [1].

Библиография I

Р.Грэхем. Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. —
М.: Мир, 1998. —
703 с.