Умножение в дополнительном коде с ручной коррекцией (без коррекции множителем)

А. С. Коржавина
as_korzhavina@vyatsu.ru

Лекция по дисциплине «информатика»
(2 марта 2018 г.)

Содержание

Точка зрения на дополнительный код

С помощью дополнительного кода в n-разрядной сетке можно представить целые числа из отрезка

$$X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)].$$

В этом случае:

$$\text{ДК}(X) = \begin{cases} |X|, & \text{если } X \geq 0, \\ 2^n - |X|, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Масштабированный дополнительный код

Если выполнить масштабирование с масштабом $M = 2^n$:

$$X = x \cdot 2^n.$$

Тогда:

$$ДК(X) = \begin{cases} |x| \cdot 2^n, & \text{если } X \geq 0, \\ (1 - |x|) \cdot 2^n, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Для дробных представлений x справедливо:

$$ДК(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 - |x|, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Дополнительный код

Согласно формуле (1) дополнительный код после масштабирования можно рассматривать как

положительное дробное число.

Так как $X \in [-2^{n-1}, +(2^{n-1} - 1)]$, то $x \in [-2^{-1}, \leq +(2^{-1} - 2^{-n})]$, следовательно

$$(1 - |x|) > 0.$$

Пусть

$$A = a \cdot 2^n,$$
$$B = b \cdot 2^n,$$

далее выполняются операции с дробными a, b.

Коррекция псевдопроизведения ДК$(a) \cdot$ ДК(b)

- *Оба сомножителя положительны*. Поправок не требуется.
- *Один из сомножителей отрицателен*. Пусть $a < 0$, $b \geq 0$, тогда правильный код результата: ДК$(ab) = (1 - |ab|)$. Псевдопроизведение:

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = (1 - |a|) \cdot |b| = |b| - |a| \cdot |b|.$$

  Нужна поправка: $(1 - |b|) =$ ДК$(-b)$.
- *Оба сомножителя отрицательны*. Правильный код результата: ДК$(ab) = |ab|$. Псевдопроизведение:

$$\text{ДК}(a) \cdot \text{ДК}(b) = (1 - |a|)(1 - |b|) = 1 - |a| - |b| + |ab|$$

  Прибавив поправку $(|a| + |b|)$, получим $(1 + |ab|)$, который, вследствие переноса единицы в целую часть, эквивалентен правильному $|ab|$.

Коррекция множителем представляет проблему, так как для этого требуются дополнительные аппаратные затраты[a].

[a]Коррекция множимым проблемы не представляет, так как множимое в любом случае прибавляется к СЧП

Пусть a — множитель, а b — множимое.

Дополнительный код множимого

В представлении дополнительного кода множимого b

$$\text{ДК}(b) = \begin{cases} |b|, & \text{если } b \geq 0, \\ 1 - |b|, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

можно заменить $(1 - |b|)$ на выражение $(2^n - |b|)$, где $n > 0$:

$$\text{ДК}(b) = \begin{cases} |b|, & \text{если } b \geq 0, \\ 2^n - |b|, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Действительно, по смыслу, для дробно-масштабированного b:

$$1 \equiv 2^n \equiv \text{«любое целое»} \equiv 0.$$

- $a \geq 0, b \geq 0$: поправок не нужно.

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = |a| \cdot |b| = ДК(ab).$$

- $a \geq 0, b < 0$: поправок не нужно.

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = |a| \cdot (2^n - |b|) = \underbrace{|a| \cdot 2^n}_{\text{целое}\equiv 1} - |ab| = ДК(ab).$$

- $a < 0, b \geq 0$: поправка множимым $+(2^n - |b|)$.

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = (1 - |a|) \cdot |b| = |b| - |ab| = |b| + ДК(ab).$$

- $a < 0, b < 0$: поправка множимым $+|b|$

$$ДК(a) \cdot ДК(b) = (1 - |a|) \cdot (2^n - |b|) =$$
$$= \underbrace{2^n}_{0} - |b| - \underbrace{|a| \cdot 2^n}_{\text{целое}\equiv 0} + |ab| = ДК(ab) - |b|$$

.

Резюме: ДК$(ab) = \ldots$

a — множитель, *b* — множимое

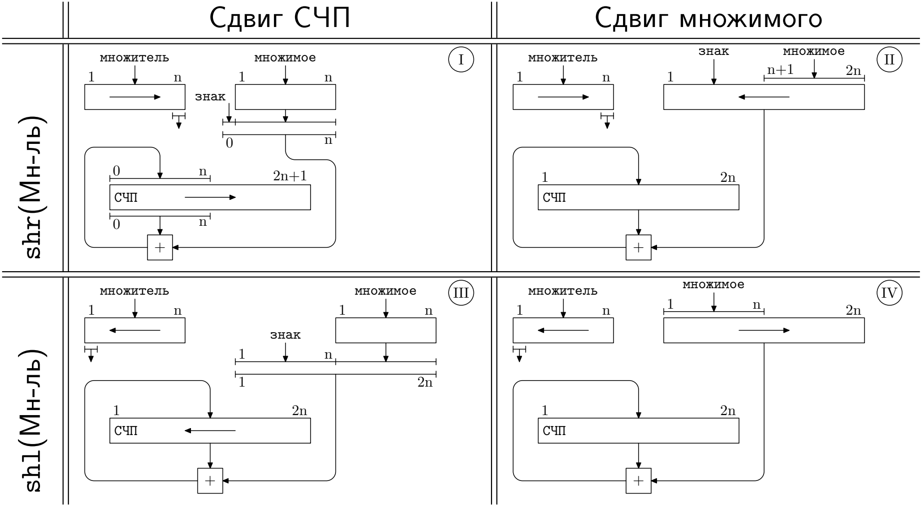
- $a \geq 0, b \geq 0$: ДК(ab) = ДК$(a) \cdot$ ДК(b).
- $a \geq 0, b < 0$: ДК(ab) = ДК$(a) \cdot$ ДК(b).
- $a < 0, b \geq 0$: ДК(ab) = ДК$(a) \cdot$ ДК(b) + ДК$(-b)$.
- $a < 0, b < 0$: ДК(ab) = ДК$(a) \cdot$ ДК(b) + ДК$(-b)$.

Упрощенное правило ручной коррекции

Если множитель отрицателен, то из псевдопроизведения *вычитается* множимое.

```
if a < 0 then
    СЧП := СЧП − b;
end if
```

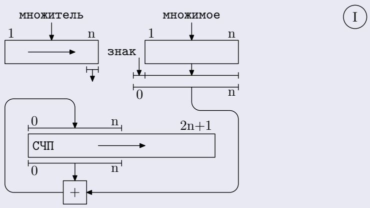
Основные способы умножения



Коррекции подлежит *старшая* половина $2n$ разрядного псевдопроизведения[a].

[a] n-разрядное множимое вычитается из *старшей* половины псевдопроизведения

I-й способ: технические ограничения



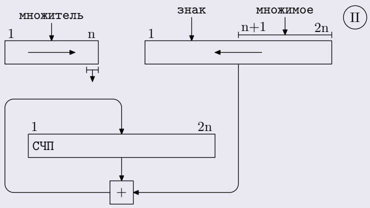
Особенности I-го способа

- СЧП сдвигается вправо;
- Множимое прибавляется к старшей половине СЧП;
- Множимое не сдвигается.

- Коррекция выполняется *только в конце* цикла умножения. В противном случае все поправки «уедут» в младшие разряды СЧП.

Так как в цикле умножения к СЧП прибавляется *половина* множимого, а при коррекции нужно вычесть *целое* множимое, то нужно СЧП расширить одним разрядом справа (младшим) и, выполнив цикл, сделать последний сдвиг. Коррекцию выполнить половиной множимого и в качестве результата выдать младшие 2^n разрядов (без старшего бита). Учесть, что нужно выполнять «знаковые сдвиги» СЧП.

II-й способ: технические ограничения

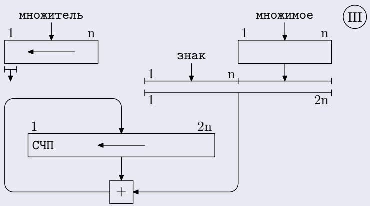


Особенности II-го способа

- СЧП не сдвигается;
- Множимое заносится в младшую часть $2n$-разрядного регистра.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в конце цикла, когда после серии сдвигов множимое выходит в старшую часть $2n$-разрядного регистра.

III-й способ: технические ограничения

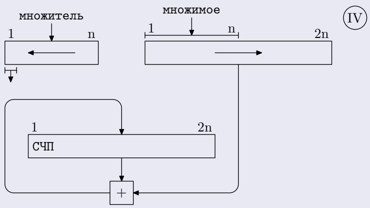


Особенности III-го способа

- СЧП сдвигается влево;
- Множимое прибавляется к младшей половине $2n$-разрядной СЧП.
- Множимое сдвигается влево;

- Поправка множимым без дополнительных затрат выполняется в начале цикла умножения. В конце цикла, после серии сдвигов СЧП, она станет правильной.

IV-й способ: технические ограничения



Особенности IV-го способа

- СЧП не сдвигается;
- Множимое заносится в старшую часть $2n$-разрядного регистра.
- Множимое сдвигается вправо;

- Поправка множимим без дополнительных затрат выполняется до цикла умножения. После поправки выполняется сдвиг регистра множимого и цикл выполняется как обычно.

Операнды для примеров

В качестве примера будем перемножать числа 9 и 11 с различными комбинациями знаков.
Выбрав масштаб $M = 2^5$, получим следующие представления:

$$\begin{aligned}
\text{ДК}(9) &= ,01001, \\
\text{ДК}(-9) &= ,10111, \\
\text{ДК}(11) &= ,01011, \\
\text{ДК}(-11) &= ,10101.
\end{aligned}$$

I-способ: $-9 \cdot 11$. ДК(-99) = ,11100 11101

мн-ль $\rightarrow$	СЧП $\rightarrow$	прим.
,1011$\underline{\underline{1}}$	,00000 000000 + ,.0101 1..... ,00101 100000	+мн-е/2; сдвиг
,.101$\underline{\underline{1}}$	,.0010 110000 + ,.0101 1..... ,01000 010000	+мн-е/2; сдвиг
,..10$\underline{\underline{1}}$	,.0100 001000 + ,.0101 1..... ,01001 101000	+мн-е/2; сдвиг
,...1$\underline{\underline{0}}$	,.0100 110100	сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	,..010 011010 + ,.0101 1..... ,00111 111010	+мн-е/2
	,.0011 111101	сдвиг; Рез-т?
	,.0011 111101 + ,.1010 1..... ,.1110 011101	корр: +ДК(-11)/2=ДК(-мн-е/2); Рез-т/2!
	,11100 11101	Рез-т!

I-способ ($b < 0$): $-9 \cdot -11$. ДК(99) $=$,00011 00011

мн-ль $\to$	СЧП $\to$	прим.
,1011$\underline{\underline{1}}$	,00000 000000 + ,11010 1..... ,11010 100000	+мн-е/2; сдвиг
,.101$\underline{\underline{1}}$	,11101 010000 + ,11010 1..... ,10111 110000	+мн-е/2; сдвиг
,..10$\underline{\underline{1}}$	,11011 111000 + ,11010 1..... ,10110 011000	+мн-е/2; сдвиг
,...1$\underline{\underline{0}}$	,11011 001100	сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	,11101 100110 + ,11010 1..... ,11000 000110	+мн-е/2; сдвиг;
	,11100 000011	Рез-т?
	,11100 000011 + ,.0101 1..... ,10001 100011	корр: +ДК(11)=ДК(-мн-е/2); Рез-т/2!
	,00011 00011	Рез-т!

II-способ: $-9 \cdot -11$. ДК(99) $=$,00011 00011

мн-ль $\rightarrow$	мн-е $\leftarrow$	СЧП	прим.
,1011$\underline{\underline{1}}$	,11111 10101	,00000 00000 + ,11111 10101 ,11111 10101	+мн-е; сдвиг
,.101$\underline{\underline{1}}$	,11111 0101.	,11111 10101 + ,11111 0101. ,11110 11111	+мн-е; сдвиг
,..10$\underline{\underline{1}}$	,11110 101..	,11110 11111 + ,11110 101.. ,11101 10011	+мн-е; сдвиг
,...1$\underline{\underline{0}}$	,11101 01...		сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	,11010 1....	,11101 10011 + ,11010 1.... ,11000 00011	+мн-е;
	,10101	,11000 00011 + ,01011 ..... ,00011 00011	корр: +ДК(11); Рез-т!

III-способ: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
	+ ,00000 00000 ,..... 01001 ,00000 01001	корр: +ДК(9)=ДК(-мн-е)
	,00000 1001.	сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$0101	+ ,00000 1001. ,11111 10111 ,00000 01001	+мн-е; сдвиг
,$\underline{\underline{0}}$101.	,00000 1001.	сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$01..	+ ,00001 001.. ,11111 10111 ,00000 11011	+мн-е; сдвиг
,$\underline{\underline{0}}$1...	,00001 1011.	сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$....	+ ,00011 011.. ,11111 10111 ,00011 00011	Рез-т!

IV-способ:: $-11 \cdot -9$. ДК(99) = ,00011 00011

мн-ль ←	мн-е →	СЧП	прим.
	,10111	+ ,00000 00000 ,01001 ..... ,01001 00000	корр: +ДК(9)=ДК(-мн-е); сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$0101	,11011 1....	+ ,01001 00000 ,11011 1.... ,00100 10000	+мн-е; сдвиг;
,$\underline{\underline{0}}$101.	,11101 11...		сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$01..	,11110 111..	+ ,00100 10000 ,11110 111.. ,00011 01100	+мн-е; сдвиг
,$\underline{\underline{0}}$1...	,11111 0111.		сдвиг
,$\underline{\underline{1}}$....	,11111 10111	+ ,00011 01100 ,11111 10111 ,00011 00011	+мн-е; Рез-т!

1)

Какая разрядность результата должна получиться, если дополнительные коды операндов занимают n бит?

2)

Перемножить числа:

1. 26 и -13 I-м способом;
2. -26 и 13 II-м способом;
3. -26 и -13 III-м способом;
4. -13 и -26 IV-м способом.

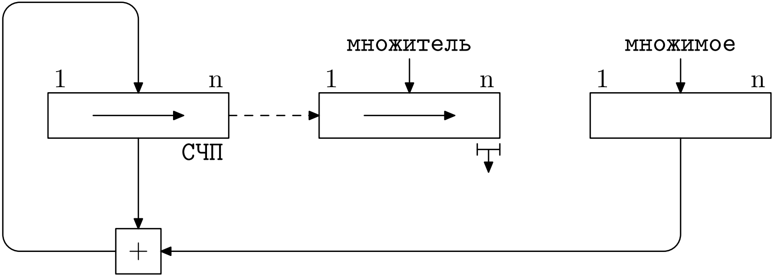
Обосновать выбор масштаба.

3)

Прорешать одним из методов «краевые» случаи в n-разрядной сетке:

- $-2^n \cdot -2^n$;
- $-2^n \cdot x$, где $x > 0$;
- $(2^n - 1) \cdot (2^n - 1)$.

Модифицируйте схему умножения первым способом с учетом работы в ДК (можно использовать условный блок «получение ДК» и мультиплексор):



Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы посвященные работе с битами в [1].

Библиография I

Г.Уоррен-мл. Алгоритмические трюки для программистов / Г.Уоррен-мл. —
2 изд. —
М.: Издательский дом «Вильямс», 2014.