Логические функции

Содержание

Полностью определенные БФ

Булеву функцию, определенную на всех своих наборах, называют полностью определенной.

Полностью определенные БФ

x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\cdots$	0	0	$y_0 = f(0, \cdots, 0, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$y_1 = f(0, \cdots, 0, 1)$
0	$\cdots$	1	0	$y_2 = f(0, \cdots, 1, 0)$
0	$\cdots$	1	1	$y_3 = f(0, \cdots, 1, 1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	$\cdots$	1	1	$y_{2^n-1} = f(1, \cdots, 1, 1)$

Полностью определенные БФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Частично определенные БФ

Булеву функцию n переменных называют неполностью определенной или частичной, если она определена не на всех двоичных наборах длины n.

Частично определенные БФ

x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\cdots$	0	0	$y_0 = f(0, \cdots, 0, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$y_1 = f(0, \cdots, 0, 1)$
0	$\cdots$	1	0	$-$
0	$\cdots$	1	1	$y_3 = f(0, \cdots, 1, 1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	$\cdots$	1	1	$-$

Частично определенные БФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	—
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	—
1	1	0	1
1	1	1	—

Частично определенные БФ

Неполностью определенная БФ не попадает под определение БФ, но при произвольном доопределении (на всех наборах, на которых она не определена) это несоответствие снимается.

Частично определенные БФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	–
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	–
1	1	0	1
1	1	1	–

Частично определенные БФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Частично определенные БФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Частично определенные БФ

Если булева функция не определена на m наборах аргументов, то путем ее доопределения можно получить 2^m различных полностью определенных функций.

Минимизация частично определенных БФ

x_1x_2	0	0	1	1
x_3	0	1	1	0
0	0	–	1	1
1	1	0	–	–

Минимизация частично определенных БФ

x_1x_2	0	0	1	1
x_3	0	1	1	0
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1$$

Минимизация БФ методом Квайна

Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений:
Соотношение склеивания

$$Ax \vee A\overline{x} = Ax \vee A\overline{x} \vee A = A$$

Соотношение поглощения

$$A\overline{x} \vee A = A$$

Минимизация БФ методом Квайна

Исходные данные: БФ в СДНФ.
Суть метода заключается в в последовательном выполнении всех возможных склеиваний и затем всех возможных поглощений, что приводит к сокращенной ДНФ.
Далее из сокращенной ДНФ убираются лишние импликанты. Строится специальная таблица, строками которой соответствуют простые импликанты, т.е. члены сокращенной ДНФ, а столбцам – конституенты единицы, т.е. Члены СДНФ.

Минимизация БФ методом Квайна

Простая импликанта поглощает некоторую конституенту единицы, если является ее собственной частью. Соответствующая клетка таблицы на пересечении строки и столбца отмечается крестиком.

1. находятся столбцы матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам импликаты называются базисными и составляют так называемое ядро булевой функции. Ядро обязательно входит в минимальную ДНФ.
2. рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют крестиками остальные столбцы импликантной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом букв в такой совокупности импликант.

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \vee$$
$$\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$$

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

$$1-2: \ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4$$

$$1-3: \ \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4$$

$$2-4: \ \overline{x_1}\,x_3\,x_4$$

$$3-4: \ \overline{x_1}\,x_2\,x_4$$

$$4-6: \ x_2\,x_3\,x_4$$

$$5-6: \ x_1\,x_2\,x_3$$

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 = \overline{x_1}\,x_4$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_3\,x_4 = \overline{x_1}\,x_4$$

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

Сокращенная ДНФ

$$x_2\ x_3\ x_4 \vee x_1\ x_2\ x_3 \vee \overline{x_1}\ x_4$$

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

Пр. импл.	Конституенты единицы					
	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4$	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4$	$\overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}\ x_4$	$\overline{x_1}\ x_2\ x_3\ x_4$	$x_1\ x_2\ x_3\ \overline{x_4}$	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$
$\overline{x_1}\ x_4$	×	×	×	×		
$x_2\ x_3\ x_4$				×		×
$x_1\ x_2\ x_3$					×	×

Минимизация БФ методом Квайна

Пример

Минимальная ДНФ

$$f = \overline{x_1}\, x_4 \vee x_1\, x_2\, x_3$$

Система БФ

x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f_1(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$	$f_2(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\cdots$	0	0	$f_1(0, \cdots, 0, 0)$	$f_2(0, \cdots, 0, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$f_1(0, \cdots, 0, 1)$	$f_2(0, \cdots, 0, 1)$
0	$\cdots$	1	0	$f_1(0, \cdots, 1, 0)$	$f_2(0, \cdots, 1, 0)$
0	$\cdots$	1	1	$f_1(0, \cdots, 1, 1)$	$f_2(0, \cdots, 1, 1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	$\cdots$	1	1	$f_1(1, \cdots, 1, 1)$	$f_2(1, \cdots, 1, 1)$

Система БФ

Система ДНФ булевых функций называется минимальной, если ее полное множество элементарных конъюнкций содержит минимальное количество букв, а каждая ДНФ булевой функции системы включает минимальное число элементарных конъюнкций наименьшего ранга.

Минимизация системы БФ I

Алгоритм

1. Построить полное множество A элементарных конъюнкций минимизируемой системыфункций, считая, что вначале каждая из функций представлена в СДНФ. Каждой конституенте единицы множества A присвоить признак, содержащий номера функций системы, в которые входит рассматриваемая конституента.
2. Произвести минимизацию СДНФ функции ϕ, конституентами единицы которой являются все элементы множества A. При выполнении склеивания двух конституент единицы каждой вновь образуемой элементарной конъюнкции присвоить признак, состоящий из номеров функций склеиваемых конституент единицы и т.д. Полученные в результате склеивания и поглощения конъюнкции называются простыми импликантами системы функций.

3. Построить импликантную матрицу функции ϕ, аналогичную матрице квайна, с той разницей, что для каждой конституенты единицы выделяется столько столбцов, сколько различных номеров функций содержит ее признак. Покрытие матрицы импликантами производится аналогично методу квайна.

Минимизация системы БФ
Пример

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Минимизация системы БФ

Пример

$$f_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,x_2\,x_3$$

$$f_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3$$

Минимизация системы БФ
Пример

$$A = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(1,2);\ \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}(2);\ \overline{x_1}\,x_2\,x_3(2);\ x_1\,\overline{x_2}\ x_3(1,2);$$
$$x_1\,x_2\ \overline{x_3}(1);\ x_1\,x_2\,x_3(1)\}$$

Минимизация системы БФ

Пример

$$\phi = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(1,2) \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}(2) \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3(2) \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3(1,2) \vee$$
$$\vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}(1) \vee x_1\,x_2\,x_3(1)$$

Минимизация системы БФ

Пример

$$\phi = \overline{x_1}\ \underset{1}{\overline{x_2}}\ \overline{x_3}(1,2) \vee \overline{x_1}\ \underset{2}{x_2}\ \overline{x_3}(2) \vee \overline{x_1}\ \underset{3}{x_2}\ x_3(2) \vee x_1\ \underset{4}{\overline{x_2}}\ x_3(1,2) \vee$$

$$\vee x_1\ \underset{5}{x_2}\ \overline{x_3}(1) \vee x_1\ \underset{6}{x_2}\ x_3(1)$$

$$1-2:\ \overline{x_1}\ \overline{x_3}(2)$$
$$2-3:\ \overline{x_1}\ x_2(2)$$
$$4-6:\ x_1\ x_3(1)$$
$$5-6:\ x_1\ x_2(1)$$

Минимизация системы БФ

Пример

Пр. импл.	Конституенты единицы							
	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}$		$\overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}$	$\overline{x_1}\ x_2\ x_3$	$x_1\ \overline{x_2}\ x_3$		$x_1\ x_2\ \overline{x_3}$	$x_1\ x_2\ x_3$
	1	2	2	2	1	2	1	1
$\overline{x_1}\ \overline{x_3}(2)$		x	x					
$\overline{x_1}\ x_2(2)$			x	x				
$x_1\ x_3(1)$					x			x
$x_1\ x_2(1)$							x	x
$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}(1,2)$	x	x						
$x_1\ \overline{x_2}\ x_3(1,2))$					x	x		

Минимизация системы БФ
Пример

$$f_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\ x_3 \vee x_1\,x_2$$

$$f_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\ x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2$$

Советы самоучке

Рекомендуется почитать разделы, посвященные булевым функциям в [1, 2].

Библиография I

- В.А.Горбатов. Дискретная математика: учебник для студентов ВТУЗов / В.А.Горбатов, А.В.Горбатов, М.В.Горбатова. — М.: ООО «Издательство АСТ» and ООО «Издательство Астрель», 2003.
- С.В.Яблонский. Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов / С.В.Яблонский; Под ред. В.А.Садовничего. — М.: Высшая школа, 2001.