Умножение с фиксированной точкой (прямой код)

Содержание

Дробно-нормализованные числа

Для обоснований выкладок мы используем дробное масштабирование

$$x = y \cdot M$$

Для обоснования выкладок будут использоваться y.

y — дробное число, его целая часть y равна нолю.

Рарзядная сетка хранит разряды дробной части y.

$$\begin{array}{ll} & \scriptstyle n\text{-}1 \qquad\qquad\qquad\quad 0 \\ 0. & \boxed{\mathtt{yyyyy\cdots yyyyy}} \end{array}$$

Чтобы зафиксировать запятую между k и $(k-1)$ разрядами n-разрядной сетки, выбирается масштаб

$$M = 2^{(n-k)}.$$

Умножение «столбиком»

Пусть для положительных чисел A и B имеются дробно-масштабированные представления в двоичной системе счисления. Пусть

$$A \equiv (0, a_1 \cdots a_n)_2.$$

Тогда результат произведения $A \times B$ в двоичной системе счисления будет определяться по формуле:

$$A \times B = B \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n} (B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} (B \gg i) \cdot a_i.$$

Пример умножения
Операнды

Требуется найти произведение $A \times B$, где $A = 23$ и $B = 25$. Дробные представления (с масштабирующим множителем $M = 2^5$) будут:

$$A \equiv \texttt{0,10111},$$
$$B \equiv \texttt{0,11001}.$$

Результатом произведения будет дробное число, но с масштабом

$$M^2 = 2^{10}$$

Пример умножения «столбиком» чисел без знака

$$A \equiv \texttt{,10111},$$
$$B \equiv \texttt{,11001}.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	`1....`	`.1100 1....`
-2	`.0...`	`..... .....`
-3	`..1..`	`...11 001..`
-4	`...1.`	`....1 1001.`
-5	`....1`	`..... 11001`
	Результат:	`,10001 11111`

$$(\texttt{,10001 11111})_2 \cdot 2^{10} = (\texttt{10001 11111,})_2 = 575 = 23 \cdot 25.$$

I-й способ

I-й способ

$$A \equiv \texttt{,10111,}$$
$$B \equiv \texttt{,11001.}$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	1	.1100 1....
		01100 10000

I-й способ

$$A \equiv \texttt{,10111,}$$
$$B \equiv \texttt{,11001.}$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	.1100 1....
-5	1	..110 01...
		10010 11000

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	.1100 1....
-4	...1.	..110 01...
-5	1	...11 001..
		10101 11100

I-й способ

$$A \equiv \texttt{,10111,}$$
$$B \equiv \texttt{,11001.}$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	....
-3	..1..	..110 01...
-4	...1.	...11 001..
-5	1	....1 1001.
		01010 11110

I-й способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

I способ: аналитически

$$a_n B \cdot 2^{-n} + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + \cdots + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_1 B \cdot 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

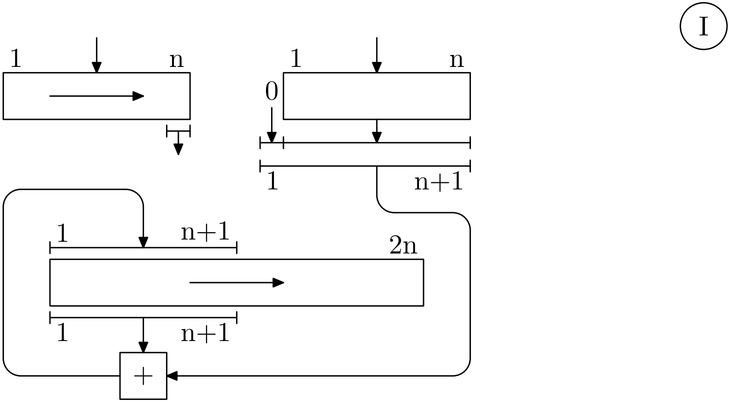
$$\left(\left(\cdots\left(\left(a_n \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + a_{(n-1)} \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + \cdots + a_2 \frac{B}{2}\right) \cdot 2^{-1} + a_1 \frac{B}{2}\right)$$

В реккурентной форме:

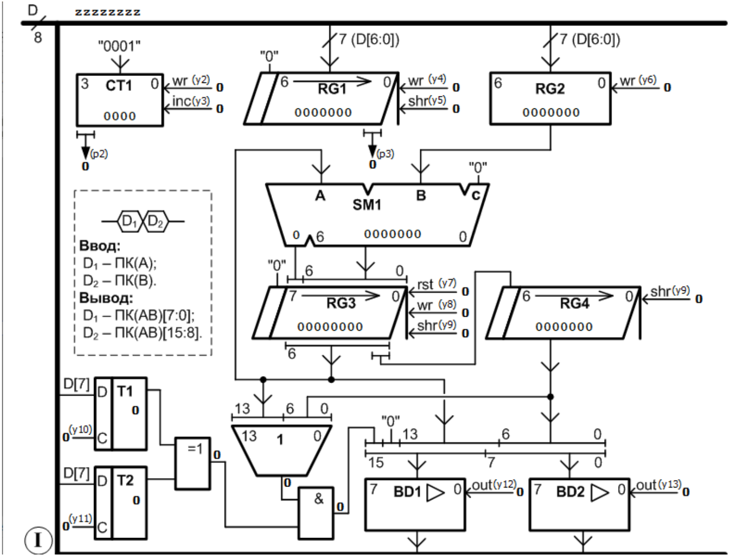
$$S_i = \begin{cases} a_n \frac{B}{2}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} \cdot 2^{-1} + a_i \frac{B}{2}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

S_1 — результат ($S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_2 \to S_1$)

I способ: реализация



I способ: реализация



II-й способ

II-й способ

$$A \equiv \ ,10111,$$
$$B \equiv \ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	1	 11001
		00000 11001

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00010 01011

II-й способ

$$A \equiv \ ,10111,$$
$$B \equiv \ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00101 01111

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
		00101 01111

II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

II способ: аналитически

$$a_n \cdot \frac{B}{2^n} + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}} + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow$$

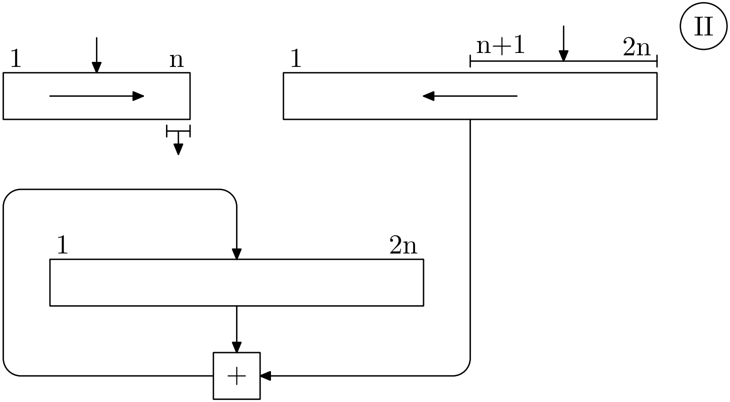
$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_n \cdot \frac{B}{2^n}\right) + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}}\right) + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}}\right) + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}\right)$$

В реккурентной форме:

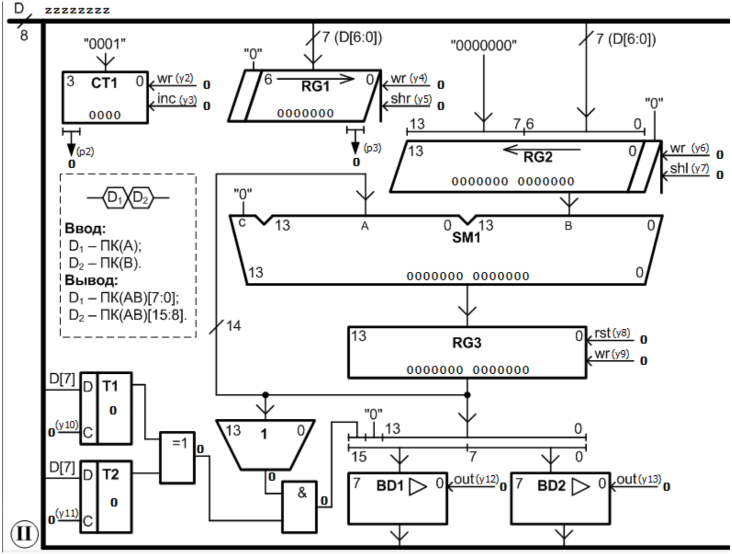
$$S_i = \begin{cases} a_n \cdot \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} + a_i \cdot \dfrac{B}{2^i}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

S_1 — результат ($S_n \to S_{n-1} \to \cdots \to S_2 \to S_1$)

II-способ: реализация



II-способ: реализация



III-й способ

III-й способ

$$A \equiv\ ,10111,$$
$$B \equiv\ ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1	 11001
		00000 11001

III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1. . . .	. . . . 1 1001 .
-2	. 0 . . .	. . . .
		00001 10010

III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	...11 001..
-2	.0...	....
-3	..1..	.....11 001
		00011 11101

III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	..110 01...
-2	.0...	....
-3	..1..	....11 001.
-4	...1.	.....1 1001
		01000 10011

III-й способ

$$A \equiv \texttt{,10111,}$$
$$B \equiv \texttt{,11001.}$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	`1....`	`.1100 1....`
-2	`.0...`	`..... .....`
-3	`..1..`	`...11 001..`
-4	`...1.`	`....1 1001.`
-5	`....1`	`..... 11001`
	Результат:	`10001 11111`

III способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + \cdots + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + a_n B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

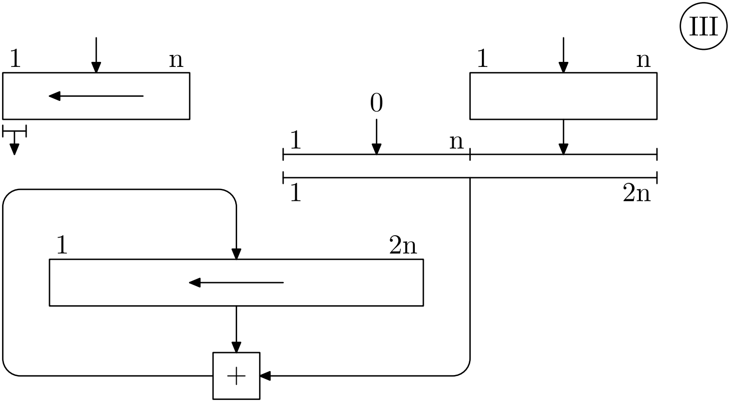
$$\left(\left(\cdots\left(\left(a_1 \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + a_2 \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + \cdots + a_{(n-1)} \frac{B}{2^n}\right) \cdot 2 + a_n \frac{B}{2^n}\right)$$

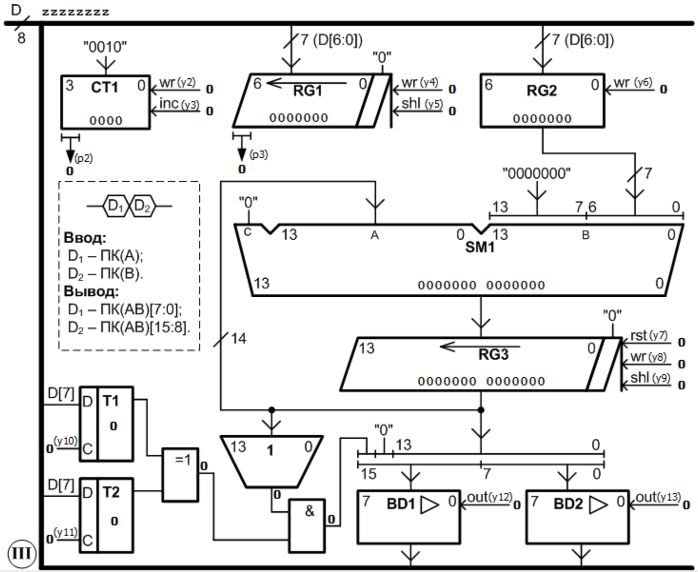
В реккурентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} \cdot 2 + a_i \dfrac{B}{2^n}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат ($S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{n-1} \to S_n$)

III-способ: реализация





D
zzzzzzzz
8
"0010"
3 CT1 0
0000
wr (y2) 0
inc (y3) 0
(p2)
7 (D[6:0])
"0"
6 RG1 0
0000000
wr (y4) 0
shl (y5) 0
(p3)
7 (D[6:0])
6 RG2 0
0000000
wr (y6) 0
"0000000"
7
13 7 6 0
"0"
C 13 A 0 13 B 0
SM1
13 0000000 0000000 0
Ввод:
D1 – ПК(A);
D2 – ПК(B).
Вывод:
D1 – ПК(AB)[7:0];
D2 – ПК(AB)[15:8].
14
"0"
13 RG3 0
0000000 0000000
rst (y7) 0
wr (y8) 0
shl (y9) 0
D[7]
D T1
0
C
(y10)
D[7]
D T2
0
C
(y11)
=1
13 1 0
&
"0"
13 0
15 7 0
7 BD1 0
out(y12) 0
7 BD2 0
out(y13) 0
III

IV способ

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
		01100 10000

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
		01100 10000

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
		01111 10100

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
		10001 00110

IV способ

$$A \equiv ,10111,$$
$$B \equiv ,11001.$$

i	Разряды a_i	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	1	 11001
	Результат:	10001 11111

IV способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_3 B \cdot 2^{-3} + \cdots + a_{(n)} B \cdot 2^{-n}$$

$$\Leftrightarrow$$

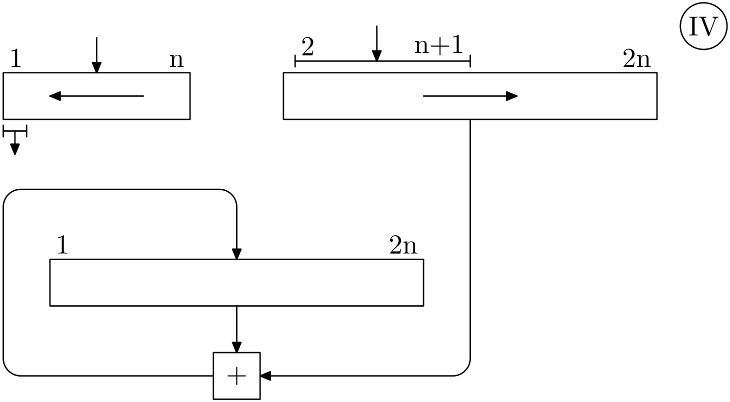
$$(\cdots(((a_1 B \cdot 2^{-1}) + a_2 B \cdot 2^{-2}) + a_3 B \cdot 2^{-3}) + \cdots + a_n B \cdot 2^{-n})$$

В реккурентной форме:

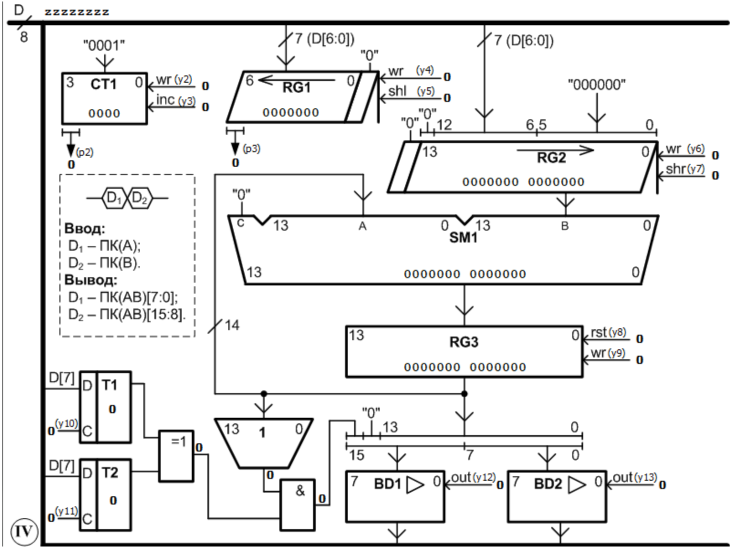
$$S_i = \begin{cases} a_1 B \cdot 2^{-1}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} + a_i B \cdot 2^{-i}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

S_n — результат $(S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{n-1} \to S_n)$

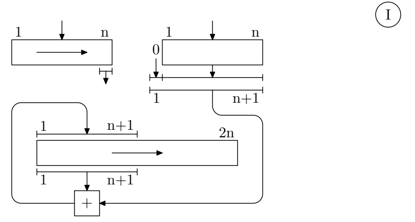
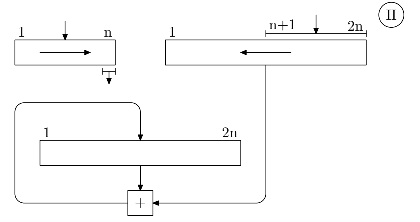
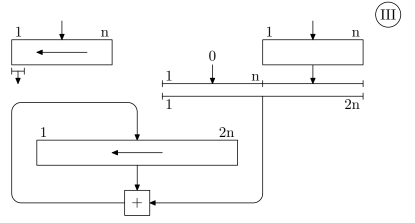
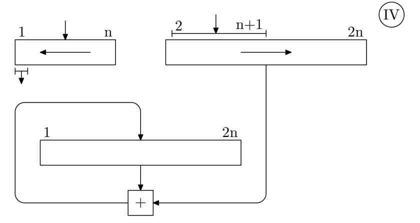
IV-способ: реализация



IV-способ: реализация



Резюме:

	Сдвиг СЧП	Сдвиг множимого
`shr`(Мн-ль)		
`shl`(Мн-ль)		

Умножение в прямом коде

При умножении в прямом коде знак результата и результат умножения модулей формируются независимо.

1. Знак результата

получается сложением «по модулю два» (XOR) знаков множителя и множимого.

2. Модуль (мантисса) результата получается беззнаковым перемножением мантисс операндов.
3. Корректируется, если нужно, запрещенная комбинация «минус ноль».

Операнды

Перемножить числа в прямом коде

Множитель:

$$-25 = (-11001)_2.$$

Множимое:

$$-23 = (-10111)_2.$$

Используем дробное масштабирование с множителем 2^5.

Знак получаем отдельно: $1 \oplus 1 = 0$. Результат положителен.

Далее показано только получение мантиссы результата разными способами. В таблицах отражаются состояния основных регистров по тактам.

I-способ

мн-ль →	СЧП →	прим.
,1100$\underline{\underline{1}}$	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е/2; сдвиг
,.110$\underline{\underline{0}}$	,00101 11000	сдвиг
,..11$\underline{\underline{0}}$	,00010 11100	сдвиг
,...1$\underline{\underline{1}}$	+ ,00001 01110 ,.1011 1.... ,01100 11110	+мн-е/2; сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е/2; Рез-т!

II-способ

множитель $\rightarrow$	мн-е $\leftarrow$	СЧП	прим.
,1100$\underline{\underline{1}}$	,..... 10111	+ ,00000 00000 ,..... 10111 ,00000 10111	+мн-е; сдвиг
,.110$\underline{\underline{0}}$	,....1 0111.		сдвиг
,..11$\underline{\underline{0}}$	,...10 111..		сдвиг
,...1$\underline{\underline{1}}$	,..101 11...	+ ,00000 10111 ,..101 11... ,00110 01111	+мн-е; сдвиг
,....$\underline{\underline{1}}$	,.1011 1....	+ ,00110 01111 ,.1011 1.... ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

III-способ

мн-ль $\leftarrow$		СЧП $\leftarrow$	прим.
$,\underline{\underline{1}}1001$	+	,00000 00000	+мн-е; сдвиг
		,..... 10111	
		,00000 10111	
$,\underline{\underline{1}}001.$	+	,00001 0111.	+мн-е; сдвиг
		,..... 10111	
		,00010 00101	
$,\underline{\underline{0}}01..$		,00100 0101.	сдвиг
$,\underline{\underline{0}}1...$		,01000 101..	сдвиг
$,\underline{\underline{1}}....$	+	,10001 01...	+мн-е; Рез-т!
		,..... 10111	
		,10001 11111	

мн-ль ←	мн-е →	СЧП	прим.
$,\underline{\underline{1}}1001$	,.1011 1....	+ ,00000 00000 ,.1011 1.... ,01011 10000	+мн-е; сдвиг;
$,\underline{\underline{1}}001.$	,..101 11...	+ ,01011 10000 ,..101 11... ,10001 01000	+мн-е; сдвиг
$,\underline{\underline{0}}01..$	,...10 111..		сдвиг
$,\underline{\underline{0}}1...$	,....1 0111.		сдвиг
$,\underline{\underline{1}}....$	,..... 10111	+ ,10001 01000 ,..... 10111 ,10001 11111	+мн-е; Рез-т!

1)

Какова минимальная разрядность результата перемножения n-разрядных прямых кодов?

2)

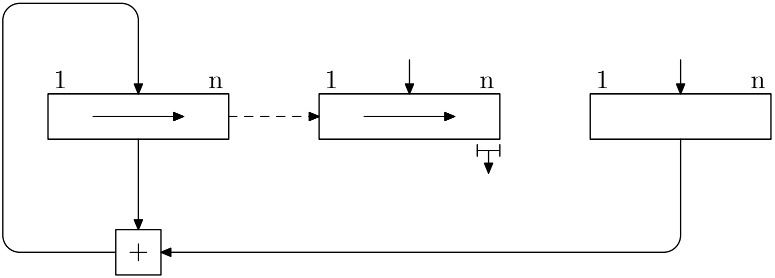
Перемножить числа -91 и 114. Самостоятельно выбрать масштаб.

3)

Выявить ситуации получения неправильных прямых кодов.

4)

Обосновать, работает ли схема умножения модулей первым способом:



- Как её модифицировать, если она работает неправильно?
- Где получается результат?

Советы самоучке

Классика жанра: [2, 3].
Рекомендуется почитать разделы, посвященные работе с суммами и рекуррентными соотношениями в книге [1].

Библиография I

- Р.Грэхем. Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. — М.: Мир, 1998.
- Б.Г.Лысиков. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысиков. — 2 изд. — Мн.: Выш. школа, 1980.
- А.Я.Савельев. Прикладная теория цифровых автоматов / А.Я.Савельев. — М.: Высшая школа, 1987.