

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Тихоокеанский государственный университет»

Динамическое и стохастическое программирование

Методические указания к изучению курса и выполнению прак-
тических занятий для студентов математических
и экономических специальностей

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

Динамическое и стохастическое программирование : методические указания к изучению курса и выполнению практических занятий для студентов математических и экономических специальностей / сост. В. Д. Власенко. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2008. – 35 с.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики. В методических указаниях изложены некоторые теоретические сведения о динамическом и стохастическом программировании, рассмотрены примеры решения задач по динамическому и стохастическому программированию, даны задания для самостоятельного решения. Издано при поддержке фонда РФФИ, грант № 08-01-98500.

Печатается в соответствии с решениями кафедры «Прикладная математика и информатика» и методического совета факультета математического моделирования и процессов управления.

Ученый должен идти прямой и узкой тропой между Западными Переупрощения и Болотом Переусложнения.

Ричард Эрнст Беллман

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящее время практически нет области интересов человека, в которой не существовало бы в той или иной степени потребности в обработке данных. В силу этого задача выбора оптимального метода обработки данных зачастую является очень важной, особенно в тех случаях, когда необходима экспресс-оценка данных, приходящих из различных источников (например, в социологии, метеорологии и т. д.) Тем более, что зачастую в подобных задачах поступающие данные могут отличаться как по объему, так и по характеру.

Раздел математики, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимизации, носит название *динамического программирования*. К многошаговым относятся такие задачи, в которых процесс принятия оптимального решения разбивается на ряд последовательных этапов (шагов). В ряде случаев многошаговость проистекает из существа процесса, но она может вводиться искусственно для того, чтобы обеспечить возможность применения метода динамического программирования.

Раздел математического программирования, в котором изучаются теория и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о целях и ограничениях задачи, называется *стохастическим программированием*. Особенность задач стохастического программирования состоит в том, что некоторые параметры, входящие в целевую функцию и ограничения, накладываемые на решение, представляют собой случайные величины. Эти задачи более отражают реальные условия выбора решения, чем задачи в условиях полной определенности.

1. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод динамического программирования – это инструмент, позволяющий быстро находить оптимальное решение в задачах математического программирования с дискретным множеством допустимых управлений, т. е. в ситуациях, когда имеется некоторое количество различных вариантов поведения, приносящих разные результаты, среди которых необходимо выбрать наилучший. Любая задача такого рода может быть решена путём перебора всех возможных вариантов и выбора среди них наилучшего. Однако часто такой перебор весьма затруднителен. В этих случаях процесс принятия оптимального решения может быть разбит на шаги и исследован методом динамического программирования.

Пусть процесс оптимизации разбит на n шагов. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных – переменную состояния s и переменную управления x . Переменная s определяет, в каких состояниях может оказаться система на данном k -м шаге. В зависимости от s на этом шаге можно применить некоторые управления, которые характеризуются переменной x_k . Применение управления x на k -м шаге приносит некоторый результат $w_k(s, x_k)$ и переводит систему в некоторое новое состояние $s'(s, x_k)$. Для каждого возможного состояния на k -м шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x_k^* , такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k -го по n -й, оказался оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется функцией Беллмана $F_k(s)$ и зависит от номера шага k и состояния системы s .

На первом этапе решения задачи, который называется условной оптимизацией, отыскивается функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего. На последнем, n -м шаге, найти оптимальное управление x_n^* и значение функции Беллмана $F_n(s)$ совсем не сложно ($F_n(s) = \max \{w_n(s, x_n)\}$ (иногда \max заменяется на \min), где максимум ищется по всем возможным значениям x_n). Дальнейшие же вычисления производятся согласно уравнению Беллмана – рекуррентному уравнению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с функцией Беллмана, вычисленной на предыдущем шаге. В общем виде это уравнение имеет вид

$$F_k(s) = \max \{w_k(s, x_k) + F_{k+1}(s'(s, x_k))\}$$

(в некоторых случаях \max заменяется на \min).

Этот максимум (или минимум) отыскивается по всем возможным для данных k и s значениям переменной управления x_k .

После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n -го по первый, производится второй этап решения задачи, который называется безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге ($k = 1$) состояние системы нам известно – это её начальное состояние s_0 – можно найти оптимальный результат за все n шагов (это, очевидно, $F_1(s_0)$) и, кроме того, оптимальное управление на первом шаге x_1^* , которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдёт в некоторое новое состояние $s'(s, x_1^*)$, зная которое можно, пользуясь результатами, полученными на этапе условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_2^* , и так далее вплоть до n -го шага.

Чтобы пояснить эту общую схему, рассмотрим решение задач, содержание которых требует выбора переменных состояния и управления самых различных типов.

1.1. Примеры типовых задач динамического программирования

1.1.1. Задача оптимального распределения ресурсов

Планируется деятельность двух промышленных предприятий Π_1 и Π_2 на период в n хозяйственных лет. В начале периода направляются средства в T единиц, которые должны быть распределены между предприятиями. В процессе работы предприятия вложенные в него средства частично расходуются, и оставшиеся средства после завершения года вновь перераспределяются между предприятиями. Известно, что если в начале года в предприятие Π_1 вложено x единиц, то к концу года это предприятие получит прибыль в размере $f_1(x)$, а остаток средств к концу года составит величину $g_1(x)$. Если в начале года в предприятие Π_2 вложено y единиц, то к концу года это предприятие получит прибыль $f_2(y)$, а остаток средств составит $g_2(y)$. Будем считать, что дополнительные вложения средств в эти предприятия не производятся, а весь остаток средств распределяется между предприятиями в начале года. Требуется определить оптимальное распределение ресурсов между предприятиями на каждый год планируемого периода таким образом, чтобы в конце n -го года была получена наибольшая прибыль от обоих предприятий.

Рассматриваемый здесь процесс носит многошаговый характер. На каждом шаге оптимальное планирование ресурсов осуществляется в зависимости от того, какие средства направляются в предприятия в начале соответствующего года. Пусть в начале k -го года в предприятия направлены средства в размере t единиц. Обозначим через $w_k(t)$ наибольшую прибыль за k -й и последующие годы и найдем рекуррентное соотношение, связывающее между собой функции w_k и w_{k+1} .

Проще всего обстоит дело с последним n -м годом, когда можно не заботиться о последующих годах и распределить средства таким образом, чтобы получить наибольшую выгоду только за последний год. Максимальная прибыль за n -й год равна наибольшему значению суммы $f_1(x_n) + f_2(y_n)$ при условии, что $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ и $x_n + y_n = t$. Таким образом,

$$w_n(t) = \max_{0 \leq x_n \leq t} \{f_1(x_n) + f_2(t - x_n)\}. \quad (1)$$

Максимальная прибыль, получаемая за k -й и последующие годы, определяется значением средств t , направленных в предприятия в начале k -го года. Предположим, что в предприятие Π_1 направлено x_k , а в предприятие Π_2 — y_k единиц. Тогда по прошествии k -го года будет получена прибыль $f_1(x_k) + f_2(y_k)$, а остаток составит величину $t' = g_1(x_k) + g_2(y_k)$, который будет направлен в оба предприятия в начале $(k+1)$ -го года. Поэтому

$$w_k(t) = \max \{f_1(x_k) + f_2(y_k) + w_{k+1}(t')\},$$

где максимум вычисляется по всем $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$ таким, что $x_k + y_k = t$. Отсюда получается требуемое рекуррентное соотношение

$$w_k(t) = \max_{0 \leq x_k \leq t} \{f_1(x_k) + f_2(t - x_k) + w_{k+1}(g_1(x_k) + g_2(t - x_k))\}. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) при $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$ образуют функциональные уравнения в задаче распределения ресурсов. Используя эти соотношения, можно, начиная с последнего этапа, последовательно найти для всякого t , $0 \leq t \leq T$, значения функций $w_k(t)$ и соответствующие значения $x_k(t)$, для которых достигается наибольшее значение функции $f_1(x_k) + f_2(t - x_k) + w_{k+1}(g_1(x_k) + g_2(t - x_k))$ равное $w_k(t)$.

Если f_i и g_i – линейны, то определение функций $w_k(t)$ и $x_k(t)$ для каждого значения t ($0 \leq t \leq T$) является достаточно простой задачей. В общем же случае указанная задача оказывается сложной, и, как правило, она не поддается аналитическому решению. Здесь можно использовать приближенные методы, если разбить интервал $[0, T]$ на m равных частей и определить значения функций w_k и x_k лишь в соответствующих узлах. Пусть точками деления являются $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$. Тогда на каждом k -м шаге решение задачи сводится к заполнению табл. 1.

Таблица 1

t	$w_k(t)$	$x_k(t)$
t_0	$w_k(t_0)$	$x_k(t_0)$
t_1	$w_k(t_1)$	$x_k(t_1)$
\dots	\dots	\dots
t_m	$w_k(t_m)$	$x_k(t_m)$

Чтобы для каждого значения t_i ($i = \overline{0, m}$) вычислить $w_k(t_i)$ и $x_k(t_i)$, надо решить задачу одномерной оптимизации

$$z = f_1(x) + f_2(t_i - x) + w_{k+1}(g_1(x) + g_2(t_i - x)) \rightarrow \max$$

при ограничении $0 \leq x \leq t_i$. Значения функции w_{k+1} между узлами можно найти интерполированием. На последнем шаге, соответствующем $k = 1$, нет необходимости вычислять значения функции $w_1(t)$ в каждой точке t_i , а надо определить лишь одно значение $w_1(T)$ и соответствующее оптимальное решение $x_1^* = x_1(T)$, $y_1^* = T - x_1^*$. Нахождение величины $w_1(T)$, равной максимальному значению прибыли за все этапы планирования, представляет собой путь прямой прогонки. Этот путь происходит в обратном по времени направлении. Теперь, разворачивая процесс в естественном по времени направлении (путь обратной прогонки), найдем оптимальное решение на каждом шаге. Остаток средств после первого года составит $t^{(2)} = g_1(x_1^*) + g_2(y_1^*)$ и, пользуясь таблицей значений функции $x_2(t)$, найдем оптимальное распределение средств на втором этапе $x_2^* = x_2(t^{(2)})$ и $y_2^* = t^{(2)} - x_2^*$. Аналогично, остаток после второго года равен $t^{(3)} = g_1(x_2^*) + g_2(y_2^*)$, и из таблицы значений функции $x_3(t)$

найдем оптимальное распределение средств на третьем этапе $x_3^* = x_3(t^{(3)})$ и $y_3^* = t^{(3)} - x_3^*$. Продолжая далее указанный процесс, мы можем найти оптимальное распределение средств на каждом году и записать решение задачи в виде таблицы распределения средств по предприятиям на каждый год планируемого периода (табл. 2).

Таблица 2

Этапы	Средства, направляемые			Прибыль
	в оба предприятия	в предприятие Π_1	в предприятие Π_2	
1	T	x_1^*	y_1^*	$w^{(1)}$
2	$t^{(2)}$	x_2^*	y_2^*	$w^{(2)}$
...
n	$t^{(n)}$	x_n^*	y_n^*	$w^{(n)}$

Для вычислений вручную указанный алгоритм является очень утомительным. Однако он легко программируется для ЭВМ. При этом в оперативной памяти ЭВМ необходимо предусмотреть место для хранения лишь двух массивов $w_{k+1}(t)$ и $w_k(t)$ при $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ и место для хранения всех значений функций $x_k(t)$.

Пример 1. Решить задачу распределения ресурсов для следующих исходных данных: $n = 3, T = 100, f_1(x) = 2\sqrt{x}, f_2(y) = 5\sqrt{y}, g_1(x) = 0,8x, g_2(y) = 0,3y$.

С помощью написанной программы метода динамического программирования решаем задачу распределения ресурсов. В результате расчетов при $m = 20$ получим распределение средств, представленное табл. 3.

Таблица 3

Этапы	Средства, направляемые			Прибыль
	в оба предприятия	в предприятие Π_1	в предприятие Π_2	
1	100	65	35	45,7
2	62,5	27,5	35	40,1
3	32,5	5	27,5	30,7

Максимальная общая прибыль составит при этом $W_{\max} = 116,5$.

1.1.2. Задача оптимального резервирования

Рассмотрим задачу надежности технической системы, состоящей из n узлов, функционирующих независимо друг от друга. Предположим, что поломка (отказ) любого узла приводит к выходу из строя всей системы. С целью повышения надежности системы в каждом узле может применяться резервирование устройств идентичными блоками, причем так, что все устройства находятся под нагрузкой (схема нагруженного резервирования), и отказ узла происходит только при отказе всех его устройств (рис. 1).

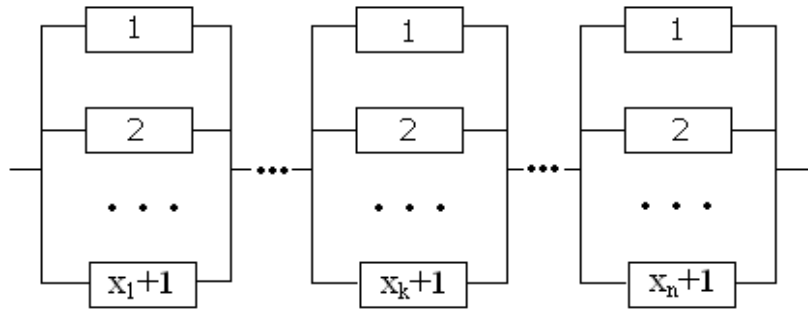


Рис. 1

В качестве количественной меры надежности примем вероятность безотказной работы системы, т. е. вероятность, что система не выйдет из строя в течение заданного промежутка времени. Кроме того, предположим, что суммарные затраты на конструирование системы не должны превосходить величины C . Введем следующие обозначения: c_j – затраты на конструирование устройства j -го узла; $p_j = F_j(t)$ – вероятность отказа устройства j -го узла в течение заданного времени, m_j – максимально допустимое число резервных устройств j -го узла, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через x_j количество резервных устройств j -го узла, подлежащих включению в систему, $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вероятность безотказной работы системы в течение заданного времени. Поскольку вероятность безотказной работы j -го узла при наличии x_j резервных устройств равна $f_j(x_j) = 1 - p_j^{x_j+1}$, то математическая модель задачи состоит в максимизации функции

$$z = \prod_{j=1}^n f_j(x_j), \quad (3)$$

при условии, что x_j удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq C, \quad (4)$$

$$0 \leq x_j \leq m_j, \quad x_j - \text{целые числа}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Будем далее считать все c_j и C целыми. Это требование не является существенным, так как его выполнение всегда может быть достигнуто с любой степенью точности. Сделанное допущение ограничивает лишь размерность указанных величин. Если c_j и C измеряются в рублях, то для того, чтобы эти коэффициенты были целыми, часто бывает достаточно измерить их в копейках.

Рассмотрим решение задачи в более общей ситуации, когда ограничения (4), (5) имеют вид

$$\sum_{j=1}^n g_j(x_j) \leq T, \quad x_j = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

причем функции $g_j(x_j)$ принимают только целые неотрицательные значения и число T – целое.

Опишем схему вычислительной процедуры метода динамического программирования для задачи (3), (6).

Введем вспомогательные функции w_k , характеризующие надежность подсистемы от 1-го до k -го узла (см. рис. 1), а именно, положим

$$w_k(t) = \max \left\{ \prod_{j=1}^k f_j(x_j) : \sum_{j=1}^k g_j(x_j) \leq t, \quad x_j = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = \overline{1, k} \right\}. \quad (7)$$

Выражение (7) означает, что $w_k(t)$ представляет собой максимальное значение функции $\prod_{j=1}^k f_j(x_j)$, вычисленное по всем целым значениям x_1, x_2, \dots, x_k таким, что

$$\sum_{j=1}^k g_j(x_j) \leq t, \quad 0 \leq x_j \leq m_j, \quad j = \overline{1, k}. \quad (8)$$

Будем вычислять функции $M_k(t)$, определенные при целых значениях t ($0 \leq t \leq T$), рекуррентно по $k = 1, 2, \dots, n$. При $k = 1$ получим

$$w_1(t) = \max \{ f_1(x_1) : g_1(x_1) \leq t, \quad x_1 = 0, 1, \dots, m_1 \}. \quad (9)$$

Для каждого фиксированного t это есть задача максимизации функции одной переменной x_1 при целочисленных значениях аргумента.

Далее предположим, что при всех целых значениях t ($0 \leq t \leq T$) получены значения функции $w_{k-1}(t)$. Покажем, как можно определить значения функции $w_k(t)$. При фиксированном t функция $w_k(t)$ есть наибольшее значение произведения $\prod_{j=1}^k f_j(x_j)$ при всех целых x_1, x_2, \dots, x_k , удовлетворяющих условиям (8). Возьмем произвольное целое x_k удовлетворяющее неравенствам

$$g_k(x_k) \leq t, \quad 0 \leq x_k \leq m_k, \quad (10)$$

и вычислим сначала наибольшее значение указанного произведения по всем целым значениям остальных аргументов, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{k-1} g_j(x_j) \leq t - g_k(x_k), \quad 0 \leq x_j \leq m_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (11)$$

Тогда получим, что $w_k(t)$ равно наибольшему значению величины $\prod_{j=1}^{k-1} f_j(x_j) \cdot f_k(x_k)$, вычисленному сначала по всем x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , удовлетворяющим (11), а затем по всем x_k удовлетворяющим (10). Однако наибольшее значение произведения $\prod_{j=1}^{k-1} f_j(x_j)$ при всех x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , для которых справедливо (11), есть $w_{k-1}(t - g_k(x_k))$. Таким образом,

$$w_k(t) = \max \{ w_{k-1}(t - g_k(x_k)) \cdot f_k(x_k) : g_k(x_k) \leq t, \quad x_k = 0, 1, \dots, m_k \}. \quad (12)$$

Уравнение (12) представляет собой рекуррентное соотношение, позволяющее определить значения функции $w_k(t)$ по известным значениям функции $w_{k-1}(t)$. Рекуррентные соотношения (9) и (12) носят название функциональных уравнений в задаче оптимального резервирования. Заметим, что последняя функция $w_n(t)$ дает возможность определить наибольшее значение целевой функции, а именно $z_{max} = w_n(T)$.

Опишем алгоритм решения задачи (3), (6) с помощью функциональных уравнений (9), (12). На первом шаге с помощью равенства (9) составляется таблица значений функции $w_1(t)$ при любых целых t , $0 \leq t \leq T$. Обозначим через $x_1(t)$ то значение x_1 , которое максимизирует $f_1(x_1)$ при условиях $g_1(x_1) \leq t$, $x_1 = 0, 1, \dots, m_1$. Это значение может быть не единственным, т. е. соотношение (9) может выполняться более чем для одного значения $x_1(t)$. Построим теперь табл. 4.

Таблица 4

t	$w_1(t)$	$x_1(t)$
0	$w_1(0)$	$x_1(0)$
1	$w_1(1)$	$x_1(1)$
...
T	$w_1(T)$	$x_1(T)$

Если $x_1(t)$ не единственно и мы хотим найти все оптимальные решения, то для каждого t в табл. 4 следует выписывать все x_1 , для которых выполняется (9).

На втором шаге с помощью уравнения (12) при $k = 2$ составляется таблица значений функции $w_2(t)$ при любых целых t , $0 \leq t \leq T$. С этой целью для каждого t надо решить задачу одномерной максимизации функции $w_1(t - g_2(x_2)) \cdot f_2(x_2)$ при ограничениях $g_2(x_2) \leq t$, $x_2 = 0, 1, \dots, m_2$. Наибольшее значение этой функции и есть $w_2(t)$, а соответствующее оптимальное решение обозначим $x_2(t)$. Заметим, что для каждого целого x_2 из промежутка от 0 до m_2 значение $g_2(x_2)$ является целочисленным, и поэтому функция w_1 вычисляется при целом неотрицательном значении аргумента. Это вычисление сводится просто к определению значения функции w_1 по табл. 4 при значении аргумента $t - g_2(x_2)$. Затем строится таблица, аналогичная табл. 4 для функций $w_2(t)$ и $x_2(t)$. Далее, используя функциональное уравнение (12) при $k = 3$ и таблицу функции $w_2(t)$, строим таблицу для функции $w_3(t)$, и соответствующих ей значений $x_3(t)$ при всех t , $0 \leq t \leq T$.

Этот процесс повторяется вплоть до вычисления функций $w_{n-1}(t)$ и $x_{n-1}(t)$. Функции $w_n(t)$ и $x_n(t)$ можно не табулировать, так как достаточно знать их значения только при $t = T$. Наибольшее значение функции z совпадает со значением $w_n(T)$.

Для определения оптимального решения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ задачи (3), (6) воспользуемся функциями $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t)$ и $x_n(T)$. При этом будем дви-

гаться в обратном направлении. Очевидно, что $x_n^* = x_n(T)$. Поэтому остальные переменные должны удовлетворять неравенствам $\sum_{j=1}^{n-1} g_j(x_j) \leq T - g_n(x_n^*)$,

$x_j = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$. При указанных условиях выражение $\prod_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$

должно достигать максимума, равного $w_{n-1}(T - g_n(x_n^*))$, а значение, при котором этот максимум достигается, есть $x_{n-1}^* = x_{n-1}(T - g_n(x_n^*))$. Далее аналогично

находим $x_{n-2}^* = x_{n-2}(T - g_n(x_n^*) - g_{n-1}(x_{n-1}^*))$ и т. д., $x_1^* = x_1(T - \sum_{j=2}^n g_j(x_j^*))$. Этим

завершается вычислительная процедура, позволяющая найти решение задачи оптимального резервирования.

Описанная процедура является очень трудоемкой для ручных расчетов, однако она легко программируется для ЭВМ, так как ее алгоритм состоит из повторяющихся действий, основанных на решении функциональных уравнений (9), (12). Заметим, что в оперативной памяти ЭВМ нет необходимости хранить значения всех функций $w_k(t)$, а надо знать лишь две из них – предыдущую и последующую. Тем не менее надо хранить всю информацию об условных оптимальных решениях $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(T)$.

Пример 2. Решить задачу оптимального резервирования для следующих исходных данных: $n = 3$; $C = 14$; $c_1 = 3$; $c_2 = 4$; $c_3 = 6$; $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,35$; $m_1 = m_2 = m_3 = 2$.

Математическая модель задачи в этом случае имеет вид

$$z = (1 - 0,5^{x_1+1})(1 - 0,4^{x_2+1})(1 - 0,35^{x_3+1}) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 14, \quad x_j = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для решения задачи методом динамического программирования составим функциональные уравнения, используя соотношения (9) и (12):

$$w_1(t) = \max \{ (1 - 0,5^{x_1+1}) : 3x_1 \leq t, \quad x_1 = 0, 1, 2 \},$$

$$w_2(t) = \max \{ w_1(t - 4x_2)(1 - 0,4^{x_2+1}) : 4x_2 \leq t, \quad x_2 = 0, 1, 2 \},$$

$$w_3(t) = \max \{ w_2(t - 6x_3)(1 - 0,35^{x_3+1}) : 6x_3 \leq t, \quad x_3 = 0, 1, 2 \}.$$

Вычисляя последовательно значения функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$ при всех целых t , $0 \leq t \leq 14$ и $w_3(14)$, а также значения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(14)$, для которых достигается максимум, получим расчетную табл. 5.

Из табл. 5 находим максимальное значение вероятности безотказной работы системы $z_{\max} = w_3(14) = 0,553$ и оптимальное число резервных устройств. Так как $x_3^* = x_3(14) = 1$, то $x_2^* = x_2(14 - 6 \cdot 1) = 1$ и $x_1^* = x_1(14 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 1$. Таким образом, чтобы обеспечить максимальную вероятность безот-

казной работы, необходимо в каждом узле иметь по одному резервному устройству.

Таблица 5

t	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$	
	$w_1(t)$	$x_1(t)$	$w_2(t)$	$x_2(t)$	$w_3(t)$	$x_3(t)$
0	0,5	0	0,3	0	—	—
1	0,5	0	0,3	0	—	—
2	0,5	0	0,3	0	—	—
3	0,75	1	0,45	0	—	—
4	0,75	1	0,45	0	—	—
5	0,75	1	0,45	0	—	—
6	0,875	2	0,525	0	—	—
7	0,875	2	0,63	1	—	—
8	0,875	2	0,63	1	—	—
9	0,875	2	0,63	1	—	—
10	0,875	2	0,735	1	—	—
11	0,875	2	0,735	1	—	—
12	0,875	2	0,735	1	—	—
13	0,875	2	0,735	1	—	—
14	0,875	2	0,819	2	0,553	1

1.1.3. Задача об инвестировании предприятий

Требуется вложить имеющиеся a единиц средств в n предприятий, прибыль от которых в зависимости от количества x вложенных средств определяется табл. 6 так, чтобы суммарная прибыль со всех предприятий была максимальна ($g_i(x_j)$ – прибыль i -го предприятия при вложении в него (x_j) средств).

Таблица 6

x	g_1	g_2	...	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$...	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$...	$g_n(x_2)$
...
x_m	$g_1(x_m)$	$g_2(x_m)$...	$g_n(x_m)$

Данная задача может быть решена просто перебором всех возможных вариантов распределения a единиц средств по n предприятиям. Однако ее можно решить более эффективным способом. Разобьем процесс оптимизации на n шагов, и на k -м шаге будем оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с k -го по n -е. При этом, естественно, считать, что в остальные предприятия (с 1-го по $(k-1)$ -е) тоже вкладываются некоторые средства, и потому на инвестирование предприятий с k -го по n -е остаются не все средства, а некоторая сумма $c_k \leq a$. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k -м шаге

назовем величину x_k средств, вкладываемых в k -е предприятие. В качестве функции Беллмана $F_k(c_k)$ на k -м шаге в этой задаче можно выбрать максимально возможную прибыль, которую можно получить с предприятий с k -го по n -е при условии, что на их инвестирование осталось x_k средств. Очевидно, что при вложении в k -е предприятие x_k средств, мы получим прибыль $g_k(x_k)$, а система к $(k+1)$ -му шагу перейдет в состояние $c_{k+1} = c_k - x_k$, т. е. на инвестирование предприятий с $(k+1)$ -го до n -го останется c_{k+1} средств.

Итак, на первом шаге условной оптимизации при $k = n$ функция Беллмана представляет собой не что иное, как прибыль только с n -го предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств c_n , $0 \leq c_n \leq a$. Очевидно, чтобы получить максимум прибыли с этого последнего предприятия, надо вложить в него все эти средства, т. е. $F_n(c_n) = g_n(c_n)$, $x_n^* = c_n$.

На каждом из последующих шагов для вычисления функции Беллмана приходится использовать результаты, полученные на предыдущем шаге. Пусть на k -м шаге для инвестирования с k -го по n -е осталось c_k средств ($0 \leq c_k \leq a$). Тогда от вложения в k -е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$ средств, а на инвестирование остальных предприятий (с k -го по n -е) останется $c_{k+1} = c_k - x_k$ средств. Максимально возможная прибыль, которая может быть получена с предприятий $k \dots n$ будет равна

$$F_k(c_k) = \max_{x_k \leq c_k} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(c_k - x_k)\}.$$

Максимум этого выражения достигается на некотором значении x_k^* , которое и является оптимальным управлением на k -м шаге для состояния системы c_k .

Действуя таким образом, можно отыскать функции Беллмана и оптимальные управления вплоть до шага $k = 1$. Функция Беллмана $F_1(a)$ представляет собой максимально возможную прибыль со всех предприятий (с 1-го по n -е), а значение x_1^* , на котором достигается максимум прибыли, является оптимальным количеством средств, которые необходимо вложить в 1-е предприятие. Далее, для всех последующих шагов вычисляется величина $c_k = c_{k-1} - x_{k-1}$ и оптимальным управлением на k -м шаге является то значение x_k , которое доставляет максимум прибыли при соответствующем состоянии системы c_k .

Пример 3. Распределить $a = 80$ единиц средств по трем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Прибыль с предприятий задается следующими значениями:

x	g_1	g_2	g_n
0	0	0	0
20	34	21	33
40	47	23	40
60	67	34	50

80	70	90	80
----	----	----	----

Решение. I этап. Условная оптимизация

1-й шаг. $k = 3$.

$$F_3(c_3) = g_3(c_3).$$

$c_3 \setminus x_3$	0	20	40	60	80	$F_3(c_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	0	0
20	–	33	–	–	–	33	20
40	–	–	40	–	–	40	40
60	–	–	–	50	–	50	60
80	–	–	–	–	80	80	80

2-й шаг. $k = 2$.

$$F_2(c_2) = \max_{x_2 \leq c_2} \{g_2(x_2) + F_3(c_2 - x_2)\}.$$

$c_2 \setminus x_3$	0	20	40	60	80	$F_2(c_2)$	x_2^*
0	0+0	–	–	–	–	0	0
20	0+33	21+0	–	–	–	33	0
40	0+40	21+33	23+0	–	–	54	20
60	0+50	21+40	23+33	34+0	–	61	20
80	0+80	21+50	21+40	34+33	90+0	90	80

3-й шаг. $k = 1$.

$$F_1(c_1) = \max_{x_1 \leq c_1} \{g_1(x_1) + F_2(c_1 - x_1)\}.$$

$c_1 \setminus x_3$	0	20	40	60	80	$F_1(c_1)$	x_1^*
0	0+0	–	–	–	–	0	0
20	0+33	34+0	–	–	–	34	20
40	0+54	34+33	47+0	–	–	67	20
60	0+61	34+54	47+33	67+0	–	88	20
80	0+90	34+61	47+54	67+33	70+0	101	40

II этап. Безусловная оптимизация

1-й шаг. $c_1 = a = 80$, $F_1(c_1) = 101$, $x_1^* = 40$.

2-й шаг. $c_2 = c_1 - x_1 = 80 - 40 = 40$, $F_2(c_2) = 54$, $x_2^* = 20$.

3-й шаг. $c_3 = c_2 - x_2 = 40 - 20 = 20$, $F_3(c_3) = 33$, $x_3^* = 20$.

Итак, оптимальный план инвестирования предприятий (40, 20, 20) принесет прибыль $V = F_1(80) = 101$.

1.1.4. Задача о замене оборудования

Планируется эксплуатация оборудования в течение некоторого периода времени продолжительностью n лет. Оборудование имеет тенденцию с течением времени стареть и приносить всё меньшую годовую прибыль $r(t)$ (t – возраст оборудования). При этом есть возможность в начале любого года

продать устаревшее оборудование за цену $s(t)$, которая, разумеется, тоже зависит от возраста, и купить новое оборудование за цену P . Требуется найти оптимальный план замены оборудования с тем, чтобы суммарная прибыль за все n лет была максимальной, учитывая, что к началу эксплуатационного периода возраст оборудования составляет t_0 лет.

Входными данными в этой задаче являются прибыль $r(t)$ от эксплуатации в течение одного года оборудования возраста t лет

t	0	1	...	n
r	$r(0)$	$r(1)$...	$r(n)$

и остаточная стоимость $s(t)$ оборудования возраста t лет

t	0	1	...	n
s	$s(0)$	$s(1)$...	$s(n)$

а также цена нового оборудования P и начальный возраст оборудования t_0 .

Выберем в качестве шага оптимизацию плана замены оборудования за годы с k -го по n -й. Очевидно, что прибыль от эксплуатации оборудования за эти годы будет зависеть от того, насколько оптимально производится его замена. Однако максимально возможная прибыль зависит ещё и от того, каков возраст оборудования к началу рассматриваемого периода (т. е. k -го года). Поскольку процесс оптимизации ведётся с последнего шага ($k = n$), на k -м шаге мы не знаем, в какие из лет с 1-го по $(k-1)$ -й должна осуществляться замена, соответственно, не знаем и возраста оборудования к началу k -го года. Про эту величину, которую мы обозначим t , можно лишь сказать, что она не может превышать $t_0 + k - 1$ (такого возраста достигнет оборудование за $k-1$ год эксплуатации, учитывая, что к началу 1-го года его возраст составлял t_0 лет), и не может быть меньше 1 (этот возраст оборудование будет иметь к началу k -го года, если заменить его в начале предыдущего $(k-1)$ -го года). Переменная t в данной задаче является переменной состояния системы на k -м шаге. Переменной управления на k -м шаге является логическая переменная, которая может принимать только два значения – «С» или «З» – сохранить или заменить оборудование в начале k -го года. Функцию Беллмана $F_k(t)$ определим как максимально возможную прибыль от эксплуатации оборудования за годы с k -го по n -й, если к началу k -го года возраст оборудования составлял t лет. Применяя то или иное управление, мы переводим систему в некоторое новое состояние, а именно, если в начале k -го года оборудование сохранить, то к началу следующего $(k+1)$ -го года его возраст увеличится на 1 (состояние системы станет $t+1$), а если мы продадим старое оборудование и купим новое, к началу $(k+1)$ -го года оно достигнет возраста 1 (состояние системы станет 1).

Исходя из всего вышесказанного, мы приходим к уравнению Беллмана, которое позволяет рекуррентно вычислять шаг за шагом функции Беллмана, опираясь на результаты предыдущего шага. Именно для каждого варианта

управления прибыль вычисляется как сумма двух слагаемых – непосредственного результата управления и его последствий. Если мы сохраняем в начале k -го года оборудование, возраст которого t лет, оно за этот год принесёт прибыль $r(t)$. К началу $(k+1)$ -го года его возраст достигнет $(t+1)$ -го года, и максимально возможная прибыль за оставшиеся годы (с $(k+1)$ -го по n -й) составит $F_{k+1}(t+1)$. Если же в начале k -го года принимается решение заменить оборудование, то прежде всего мы продаём старое оборудование возраста t лет за $s(t)$ (это первая прибыль на k -м году), покупаем новое оборудование за P единиц (эта сумма вычитается из прибыли) и эксплуатируем в течении k -го года новое оборудование, что приносит нам за этот год прибыль $r(0)$. К началу следующего года возраст оборудования составит 1 год, и за все годы с $(k+1)$ -го по n -й максимально возможная прибыль будет $F_{k+1}(1)$. Из этих двух вариантов управления выбираем тот, который приносит большую прибыль, и таким образом находим функцию Беллмана $F_k(t)$. Уравнение Беллмана имеет вид

$$F_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (3) \end{cases}.$$

На каждом шаге нужно вычислить эту функцию для всех $1 \leq t \leq t_0 + k - 1$. Управление, на котором достигается максимум прибыли, является оптимальным.

Функцию Беллмана для первого шага ($k = n$) легко вычислить – это максимально возможная прибыль только за последний n -й год, т. е.

$$F_k(t) = \max \begin{cases} r(t) & (C) \\ s(t) - P + r(0) & (3) \end{cases}.$$

Зная эту функцию, можно посчитать $F_{n-1}(t)$, затем $F_{n-2}(t)$ и т. д. вплоть до $F_1(t)$. $F_1(t_0)$ представляет собой максимально возможную прибыль за все годы (с 1-го по n -й). Этот максимум достигается при некотором управлении, применяя которое на первом году, мы определяем возраст оборудования к началу второго года (в зависимости от того, какое управление является для первого года оптимальным, это будет 1 или $t_0 + 1$). Для данного возраста оборудования по результатам, полученным на этапе условной оптимизации, мы смотрим, при каком управлении достигается максимум прибыли за годы со 2-го по n -й и т. д. Таким образом, на этапе безусловной оптимизации отыскиваются годы, в начале которых следует произвести замену оборудования.

Пример 4. Найти оптимальный план замены оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовая прибыль и остаточная стоимость в зависимости от возраста задаются значениями:

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	12	11	11	10	8	6	3
$s(t)$	11	10	8	7	5	3	1

Стоимость нового оборудование равна 13, а возраст оборудования к началу эксплуатационного периода 1 год.

Решение. *I этап. Условная оптимизация*

1-й шаг. $k = 6$.

$$F_6(t) = \max \begin{cases} r(t) & (C) \\ s(t) - P + r(0) & (3) \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 6,$$

$$F_6(1) = \max \begin{cases} 11 \\ 10 - 13 + 12 \end{cases} = 11 \text{ (C)}, \quad F_6(2) = \max \begin{cases} 11 \\ 8 - 13 + 12 \end{cases} = 11 \text{ (C)},$$

$$F_6(3) = \max \begin{cases} 10 \\ 7 - 13 + 12 \end{cases} = 10 \text{ (C)}, \quad F_6(4) = \max \begin{cases} 8 \\ 5 - 13 + 12 \end{cases} = 8 \text{ (C)},$$

$$F_6(5) = \max \begin{cases} 6 \\ 3 - 13 + 12 \end{cases} = 6 \text{ (C)}, \quad F_6(6) = \max \begin{cases} 3 \\ 1 - 13 + 12 \end{cases} = 3 \text{ (C)}.$$

2-й шаг. $k = 5$.

$$F_5(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_6(t+1) & (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_6(1) & (3) \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 5,$$

$$F_5(1) = \max \begin{cases} 11 + 11 \\ 10 - 13 + 12 + 11 \end{cases} = 22 \text{ (C)}, \quad F_5(2) = \max \begin{cases} 11 + 10 \\ 8 - 13 + 12 + 11 \end{cases} = 21 \text{ (C)},$$

$$F_5(3) = \max \begin{cases} 10 + 8 \\ 7 - 13 + 12 + 11 \end{cases} = 18 \text{ (C)}, \quad F_5(4) = \max \begin{cases} 8 + 6 \\ 5 - 13 + 12 + 11 \end{cases} = 15 \text{ (3)},$$

$$F_5(5) = \max \begin{cases} 6 + 3 \\ 3 - 13 + 12 + 11 \end{cases} = 13 \text{ (3)}.$$

3-й шаг. $k = 4$.

$$F_4(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_5(t+1) & (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_5(1) & (3) \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 4,$$

$$F_4(1) = \max \begin{cases} 11 + 21 \\ 10 - 13 + 12 + 22 \end{cases} = 32 \text{ (C)}, \quad F_4(2) = \max \begin{cases} 11 + 18 \\ 8 - 13 + 12 + 22 \end{cases} = 29 \text{ (C)},$$

$$F_4(3) = \max \begin{cases} 10 + 15 \\ 7 - 13 + 12 + 22 \end{cases} = 28 \text{ (3)}, \quad F_4(4) = \max \begin{cases} 8 + 13 \\ 5 - 13 + 12 + 22 \end{cases} = 26 \text{ (3)}.$$

4-й шаг. $k = 3$.

$$F_3(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_4(t+1) & (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_4(1) & (3) \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 3,$$

$$F_3(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 11+29 \\ 10-13+12+32 \end{array} \right\} = 41 \quad (3), \quad F_3(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 11+28 \\ 8-13+12+32 \end{array} \right\} = 39 \quad (C),$$

$$F_3(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} 10+26 \\ 7-13+12+32 \end{array} \right\} = 38 \quad (3).$$

5-й шаг. $k = 2$.

$$F_2(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) + F_3(t+1) \quad (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_3(1) \quad (3) \end{array} \right\} \quad 1 \leq t \leq 2,$$

$$F_2(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 11+39 \\ 10-13+12+41 \end{array} \right\} = 50 \quad (C), \quad F_2(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 11+38 \\ 8-13+12+41 \end{array} \right\} = 49 \quad (C).$$

6-й шаг. $k = 1$.

$$F_1(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) + F_2(t+1) \quad (C) \\ s(t) - P + r(0) + F_2(1) \quad (3) \end{array} \right\} \quad 1 \leq t \leq 1, \quad F_1(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 11+49 \\ 10-13+12+50 \end{array} \right\} = 60 \quad (C).$$

II этап. Безусловная оптимизация

Результаты вычислений сводим в табл. 7 (k – год эксплуатации, t – возраст оборудования, элементы таблицы – функции Беллмана $F_k(t)$):

Таблица 7

k/t	0	1	2	3	4	5	6
1		60					
2		50	49				
3		41	39	38			
4		32	29	28	26		
5		22	21	18	15	13	
6		11	11	10	8	6	3

Примечание: Выделены и подчеркнуты значения функции Беллмана, соответствующие замене.

Максимально возможная прибыль от эксплуатации оборудования за годы с 1-го по 6-й $V = F_1(1) = 60$ достигается, если на 1-м году не производить замену. Тогда к началу 2-го года возраст оборудования будет равен 2 годам. В этом случае максимум прибыли за годы со 2-го по 6-й достигается также, если оборудование сохранить. К началу третьего года его возраст станет 3 года. При этом для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо оборудование заменить. К началу следующего, четвёртого года возраст оборудования станет равным 1 году, и т. д. Таким образом, замену надо произвести один раз – в начале 3-го года эксплуатации.

1.1.5. Кратчайший путь через сеть

Транспортная сеть состоит из n узлов, некоторые из которых соединены магистралями. Стоимость проезда по каждой из таких магистралей известна и отмечена на схеме. Найти оптимальный маршрут проезда из 1-го пункта в n -й.

Решение данной задачи в общем случае сопряжено с достаточно большим объёмом вычислений. Поэтому рассмотрим метод, не являющийся универсальным, однако вполне применимый к данному конкретному примеру.

Пусть сеть состоит из 10 узлов (будем называть их также городами), соединённых магистралями согласно рис. 2.

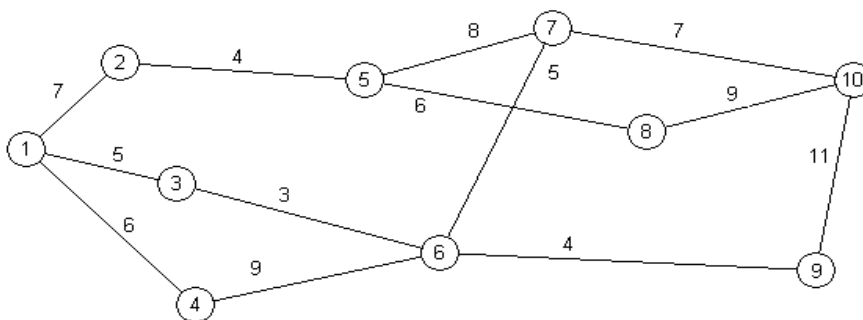


Рис. 2

Стоимость проезда из пункта i в пункт j равна t_{ij} , и элементы этой матрицы занесены в схему.

Требуется найти оптимальный маршрут из 1-го пункта в 10-й.

В данной задаче имеется серьёзное ограничение – двигаться по изображенным на схеме магистралям можно только слева направо, т. е. попав, например, в 7-й пункт, мы имеем право переместиться только в 10-й и не можем возвратиться в 5-й или 6-й. Это (в совокупности с особенностями данной схемы) даёт нам право отнести каждый из десяти пунктов к одному из четырёх поясов. Будем говорить, что пункт принадлежит k -му поясу, если из него можно попасть в конечный (10-й) пункт ровно за k шагов, т.е. с заездом ровно в $(k-1)$ -й промежуточный пункт. Таким образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 – ко второму, 2, 3 и 4 – к третьему и 1 – к четвертому. На k -м шаге будем находить оптимальные маршруты из городов k -го пояса до конечного пункта. При этом, как всегда, оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, добравшись до k -го шага, мы не можем знать, в какой именно из городов k -го пояса мы попадём, двигаясь из пункта 1. Поэтому для каждого из этих городов мы должны будем найти оптимальный маршрут до конечного пункта. Очевидно, что минимально возможная стоимость проезда из городов k -го пояса до пункта 10 будет зависеть только от того, в каком из городов этого пояса мы оказались. Номер S города, принадлежащего k -му поясу, и будет называться переменной состояния данной системы на k -м шаге. Нужно помнить, что добравшись до k -го шага, мы уже осуществили предыдущие шаги, в частности, нашли оптимальные маршруты по перемещению из любого города $(k-1)$ -го пояса в конечный пункт. Таким образом, находясь в некотором городе S k -го пояса, мы должны при-

нять решение о том, в какой из городов $(k-1)$ -го пояса следует отправиться, а направление дальнейшего движения уже известно нам из предыдущих шагов. Номер J города $(k-1)$ -го пояса будет являться переменной управления на k -м шаге. Функцией Беллмана на k -м шаге решения задачи $F_k(S)$ назовём минимально возможную стоимость проезда из города S (k -го пояса) до конечного пункта. Для первого шага ($k = 1$) эту величину отыскать совсем не сложно – это стоимость проезда из городов 1-го пояса непосредственно до конечного пункта: $F_1(S) = t_{S10}$. Для последующих же шагов стоимость проезда складывается из двух слагаемых – стоимости t_{SJ} проезда из города S k -го пояса в город J $(k-1)$ -го пояса и минимально возможной стоимости проезда из города J до конечного пункта, т. е. $F_{k-1}(J)$. Таким образом, перебрав все возможные на данном шаге управления, можно найти минимально возможную стоимость проезда до конечного пункта

$$F_k(S) = \min_J \{t_{SJ} + F_{k-1}(J)\}.$$

Минимум стоимости достигается на некотором значении J^* , которое и является оптимальным направлением движения из пункта S в сторону конечного пункта.

На четвёртом шаге мы попадаем на 4-й пояс, и состояние системы становится определённым – $S = 1$. Функция Беллмана $F_4(1)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению из 1-го пункта в 10-й. Оптимальный маршрут можно найти, просмотрев результаты всех шагов в обратном порядке, учитывая, что выбор некоторого управления J на k -м шаге приводит к тому, что состояние системы на $(k-1)$ -м шаге становится определённым.

Пример 5. Решим сформулированную выше задачу.

1 этап. Условная оптимизация

1-й шаг. $k = 1$.

$$F_1(S) = t_{S10}.$$

S / J	10	$F_1(S)$	J^*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

2-й шаг. $k = 2$.

$$F_2(S) = \min_J \{t_{SJ} + F_1(J)\}$$

S / J	7	8	9	$F_2(S)$	J^*
5	8+7	6+9	—	15	7, 8
6	5+7	—	4+11	12	7

3-й шаг. $k = 3$.

$$F_3(S) = \min_J \{t_{SJ} + F_2(J)\}$$

S / J	5	6	$F_3(S)$	J^*
2	4+15	–	19	5
3	–	3+12	15	6
4	–	9+12	21	6

4-й шаг. $k = 4$.

$$F_4(S) = \min_J \{t_{SJ} + F_3(J)\}$$

S / J	2	3	4	$F_3(S)$	J^*
1	7+19	5+15	6+21	20	3

II этап. Безусловная оптимизация

Минимально возможная стоимость проезда из пункта 1 в пункт 10 $V = F_4(1) = 20$. Она достигается, если из 1-го пункта отправиться в 3-й. Попад в него, необходимо, как видно из предыдущей таблицы, двигаться в пункт 6, затем – в пункт 7 и из него – в конечный пункт, т. е. оптимальный маршрут $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 10$.

1.2. Основные черты метода динамического программирования

Перечислим общие свойства, присущие динамическому программированию. Прежде всего, задача оптимизации должна быть представлена как многошаговая задача. Некоторые процессы распадаются на шаги естественным образом, например, процесс планирования хозяйственной деятельности предприятия на период, состоящий из нескольких лет, а некоторые процессы – искусственным образом, например, задача оптимального резервирования, задача о загрузке, задача нахождения наилучшего способа прокладки железнодорожных путей между двумя пунктами. Сущность подхода динамического программирования состоит в возможности заменить решение всей данной задачи решением последовательности оптимизационных задач более простого вида. Именно идея постепенной, пошаговой оптимизации и лежит в основе метода динамического программирования. Однако метод динамического программирования не предполагает, что каждый шаг оптимизируется отдельно, независимо от других. Напротив, пошаговое решение должно выбираться дальновидно, с учетом всех его последствий в будущем. Сформулируем общий принцип, лежащий в основе решения всех задач динамического программирования: оптимальное решение на данном шаге надо выбирать таким образом, чтобы выигрыш, полученный на данном шаге вместе с оптимальным выигрышем на всех последующих шагах, был максимальным. Это положение носит название принципа оптимальности Р. Беллмана.

Итак, при решении задачи методом динамического программирования необходимо на каждом шаге учитывать последствия, к которым приведет в будущем решение, принятое на данном шаге. Исключением является последний шаг, которым заканчивается процесс. Здесь можно принять решение, чтобы этот шаг сам по себе приносил максимальный выигрыш. Поэтому

процесс принятия решения обычно разворачивается от конца к началу: прежде всего планируется последний n -й шаг при всевозможных предположениях о том, чем закончился $(n-1)$ -й шаг. Для каждого из этих предположений находится условное оптимальное решение на n -м шаге. Далее, делая всевозможные предположения об окончании $(n-2)$ -го шага, для каждого из них определяется условное оптимальное решение на $(n-1)$ -м шаге таким образом, чтобы был максимальным выигрыш за последние два шага. Этот процесс продолжается до тех пор, пока мы не дойдем до 1-го шага. После того как при движении от конца к началу определены условные оптимальные решения для каждого шага и вычислен выигрыш, для определения просто оптимального решения остается пройти весь процесс в прямом направлении. Заметим, что, вообще говоря, процесс решения задачи может разворачиваться сначала в прямом, а затем в обратном направлении. Это обычно бывает в тех случаях, когда известно состояние процесса после последнего шага.

Рассмотренные выше методы оптимизации были основаны на составлении и решении функциональных уравнений. Для каждой задачи, решаемой методом динамического программирования, функциональные уравнения имеют свой специфический вид, но в них непременно должен сохраняться рекуррентный характер, т. е. каждая из функций выражается через предыдущую функцию. Составление функциональных уравнений в каждой конкретной задаче требует определенного навыка, что представляет собой одну из трудностей применения метода. Несмотря на это, метод функциональных уравнений является важнейшим методом решения задач динамического программирования.

2. МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Проблема выбора решения в условиях риска и неопределенности

Оптимизационные задачи и их математические модели в предположении, что вся исходная информация однозначно задана, называются детерминированными. В действительности же детерминированные модели часто неадекватны реальным процессам, поскольку в практических задачах бывает трудно определить точные значения параметров модели. Это объясняется неполнотой и неточностью данных, на основе которых формируется модель. Наличие неопределенных факторов переводит задачу в новое качество: она из задачи нахождения оптимального решения превращается в задачу выбора решения в условиях неполной информации и неопределенности, обеспечивающего по возможности максимальное значение показателя эффективности.

В некоторых случаях параметры носят вероятностный характер и представляют собой случайные величины, характеристики которых нам известны или в принципе могут быть получены. Оптимизационные задачи, в которых отдельные или все параметры являются случайными величинами, называются стохастическими. Ограниченность и неточность информации о задаче

приводит к ситуации, в которой приходится принимать решение в условиях риска. Теория и методы решения экстремальных задач в условиях неполной информации изучается в разделе стохастического программирования.

В других случаях имеющаяся информация не позволяет составить представление о характере изменения параметров математической модели и не имеет смысла говорить об их законах распределения или других вероятностных характеристиках. В таких ситуациях приходится принимать решение в состоянии неопределенности. С точки зрения исходных данных задачи стохастического программирования являются промежуточными между оптимизационными задачами, поставленными в условиях полной определенности и в условиях неопределенности.

Основой для построения всех моделей стохастического программирования служит преобразование исходной задачи в вероятностной постановке в эквивалентную задачу, обладающую детерминированной структурой.

В стохастическом программировании исследуются одношаговые и многошаговые задачи. Задачи, в которых решение выбирается один раз и оно не изменяется при поступлении информации о реализациях случайных параметров, называются одношаговыми. В задачах этого класса целевая функция и ограничения могут быть выбраны разными способами. В качестве целевой функции могут быть приняты:

- математическое ожидание некоторой функции от решения,
- комбинация математического ожидания и среднего квадратического отклонения,
- вероятность попадания функции от решения в некоторую область.

Ограничения задачи в одних случаях могут выполняться при всех возможных значениях случайных параметров (жесткая постановка), а в других случаях требуется, чтобы вероятность попадания решения в допустимую область была не меньше заданной (модель с вероятностными ограничениями). В каждой конкретной задаче приходится специально оговаривать, что понимается под допустимым и оптимальным решениями.

В многошаговых задачах по мере получения дополнительной информации о развитии процесса имеется возможность неоднократной корректировки решений, принятых ранее. Естественно, что для нужд практики многошаговые задачи более предпочтительны, чем одношаговые. Их исследование, вообще говоря, представляет более сложную задачу, и здесь не рассматриваются.

2.2. Задачи стохастического программирования со случайными параметрами в целевой функции

Рассмотрим задачи стохастического программирования, в которых случайные параметры содержатся только в целевой функции. Пренебрегая случайностью ряда параметров и заменяя их средними значениями, такие задачи часто сводятся к обычным детерминированным задачам. Как правило, такая замена может быть осуществлена, если случайные параметры мало отлича-

ются от своих математических ожиданий, однако, если влияние случайности на интересующий нас процесс существенно, то будет опрометчиво использовать данный критерий. Оптимизация «в среднем» будет законной, если процесс обладает свойством повторяемости и недостаток показателя эффективности в одних случаях компенсируется его избытком в других. Использование критерия среднего значения предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчетные формулы. Математически это утверждение выражается следующим образом. Пусть x – случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Если (x_1, x_2, \dots, x_n) – случайная выборка объема n , то выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ имеет дисперсию σ^2/n . Поэтому при $n \rightarrow \infty$ $\sigma^2/n \rightarrow 0$,

и значит $\bar{x} \rightarrow m$ по вероятности. Другими словами, при достаточно большом объеме выборки разница между выборочным средним и математическим ожиданием стремится к нулю. Следовательно, использование критерия среднего значения допустимо лишь в случае, когда одно и то же решение приходится принимать большое число раз. Напротив, если необходимость в принятии некоторого решения встречается редко, то среднее значение может значительно отличаться от математического ожидания, и ориентация на среднее значение будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз. Это означает целесообразность введения критерия, в котором учитывается не только среднее значение, но также разброс возможных значений относительно среднего, т. е. дисперсия или среднее квадратическое отклонение. Возможным критерием, отвечающим этой цели, является комбинация математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

2.2.1. Задача о проведении профилактических работ

В процессе эксплуатации станка могут возникать неисправности, и станок останавливается для их устранения. Время устранения неисправности постоянно и равно T_{B1} . После ремонта станок вновь включается и продолжает свою работу. Предположим, что в течение времени t станок $n(t)$ раз выходит из строя, и пусть эта величина имеет порядок $n(t) = at^a$, где a – случайная величина с математическим ожиданием $m = M(a)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sigma(a)$. Показатель $a > 1$, так как с течением времени станок вырабатывает свой ресурс, и его надежность уменьшается (значение $a = 1$ означает, что отказы станка растут пропорционально времени и «старение» не происходит). Через определенное время проводится профилактика станка, продолжающаяся время T_{B2} , и он восстанавливает все свои характеристики надежности до первоначального состояния. Требуется определить оптимальное время между соседними профилактиками, при котором коэффициент простоя K_{Π} станка был бы минимальным. Под коэффициентом простоя будем понимать долю времени, в течение которого станок не работает.

В течение периода длительности t станок простаивает время $n(t) \cdot T_{B1} + T_{B2}$, и, следовательно, коэффициент простоя станка равен

$$K_{\Pi} = \frac{n(t)T_{B1} + T_{B2}}{t} = \frac{aT_{B1}t^{\alpha} + T_{B2}}{t}. \quad (13)$$

Задача минимизации функции (13) является задачей стохастического программирования, поскольку параметр α случаен.

Для решения задачи применимы два критерия, позволяющие свести задачу к детерминированной: критерий среднего значения и комбинированный критерий среднего значения и среднего квадратического отклонения. Согласно первому критерию в качестве целевой функции берется математическое ожидание коэффициента простоя, т. е.

$$z_1 = M(K_{\Pi}) = \frac{mT_{B1}t^{\alpha} + T_{B2}}{t} = mT_{B1}t^{\alpha-1} + \frac{T_{B2}}{t}.$$

Оптимальное решение t_1^* находится из уравнения $(\alpha-1)mT_{B1}t^{\alpha-2} - \frac{T_{B2}}{t^2} = 0$ или $z_1' = 0$, откуда

$$t_1^* = \left(\frac{T_{B2}}{(\alpha-1)mT_{B1}} \right)^{1/\alpha}. \quad (14)$$

Согласно комбинированному критерию в качестве целевой функции берется $z_2 = M(K_{\Pi}) + C\sigma(K_{\Pi})$, где C – заданная постоянная, определяющая «степень важности» среднего квадратического отклонения по отношению к математическому ожиданию. Так как $\sigma(K_{\Pi}) = \sigma T_{B1} \cdot t^{\alpha-1}$, то

$$z_2 = (m + C\sigma)T_{B1}t^{\alpha-1} + \frac{T_{B2}}{t}.$$

Как и в случае первого критерия находим оптимальное время между профилактиками

$$t_2^* = \left(\frac{T_{B2}}{(\alpha-1)(m + C\sigma)T_{B1}} \right)^{1/\alpha}. \quad (15)$$

Пример 6. В задаче о проведении профилактических работ примем следующие данные: $T_{B1} = 1$ ч, $T_{B2} = 10$ ч, $\alpha = 1,2$, $m = 0,05$, $\sigma = 0,02$, $C = 1$. Тогда в соответствии с формулами (14) и (15) получим $t_1^* \approx 316$ ч, $t_2^* \approx 240$ ч. Таким образом, оптимальное время между профилактиками зависит от выбранного критерия, и если таких станков много, то целесообразно проводить профилактику через 316 ч, а при малом числе станков время между проведением профилактики следует сократить до 240 ч.

2.2.2. Задача об оптимальном уровне образования запасов

На складе требуется разместить определенное количество товара при неопределенном состоянии спроса на него. Будем считать, что величина спроса x представляет собой случайную величину с плотностью распределения $f(x)$ и строго монотонной функцией распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$.

Если уровень запаса t недостаточен для удовлетворения спроса, т. е. $t < x$, то возникают потери, связанные с появившимся дефицитом товара. Если уровень запаса велик и превышает спрос на него, т. е. $t > x$, то увеличиваются издержки, связанные с приобретением товара, а также затраты на складирование. Возможный компромисс состоит в выборе такого уровня образования запасов, который уравнивал бы два вида указанных потерь.

Пусть c_1 и c_2 – затраты на единицу товара в первом и во втором случаях соответственно. Тогда разумным представляется выбрать такой уровень запасов t , при котором общие затраты

$$C = C(x) = \begin{cases} c_1(x-t), & \text{при } x > t, \\ c_2(t-x), & \text{при } x < t, \end{cases} \quad (16)$$

были бы наименьшими. Так как целевая функция (16) зависит от случайного спроса x , то это есть задача стохастического программирования. В такой постановке задача является некорректной, поскольку нельзя минимизировать функцию, которая неизвестна. Задача может быть сведена к детерминированной, если воспользоваться, например, критерием среднего значения затрат от неудовлетворенного спроса и от излишков товара:

$$z = M(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)f(x)dx = \int_t^{+\infty} c_1(x-t)f(x)dx + \int_{-\infty}^t c_2(t-x)f(x)dx \rightarrow \min.$$

Нетрудно показать, что целевая функция z имеет единственный минимум, который можно определить из уравнения $z' = 0$. Дифференцируя функцию по t , получим уравнение

$$-c_1 \int_t^{+\infty} f(x)dx + c_2 \int_{-\infty}^t f(x)dx = 0,$$

или $-c_1(1 - F(t)) + c_2F(t) = 0$. Отсюда находим, что оптимальное решение t^* должно удовлетворять уравнению

$$F(t^*) = \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \quad (17)$$

Пусть величина спроса подчинена нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ . Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{c_1}{c_1 + c_2}.$$

В результате замены переменных $\frac{x-m}{\sigma} = u$, получим

$$\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{t^* - m}{\sigma}\right) = \frac{c_1}{c_1 + c_2},$$

где $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ – табличная функция Лапласа.

Пример 7. В задаче образования запасов примем следующие данные: $m = 25$ ед., $\sigma = 10$ ед., $c_1 = 90$ руб., $c_2 = 10$ руб. Тогда $\Phi_0\left(\frac{t^* - 25}{10}\right) = 0,4$. По таблице функции Лапласа получим $\frac{t^* - 25}{10} = 0,155$, и значит $t^* = 26,55$ ед. Таким образом, оптимальная величина запаса составит 26,55 ед. товара.

Выбирая в качестве показателя эффективности средние затраты $M(C)$, мы должны быть уверены, что значения затрат от дефицита c_1 и от излишков c_2 нам известны. Однако определить эти затраты очень трудно, и поэтому лицо, принимающее решение, может установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина дефицита не превосходила предельного значения A , а величина излишков не превосходила предельного значения B . Поскольку эти величины случайны, то можно только потребовать, чтобы указанные события выполнялись бы с некоторыми вероятностями α и β соответственно, т. е.

$$P(x - t \leq A) \geq \alpha, \quad P(x - t \leq B) \geq \beta. \quad (18)$$

Неравенства типа (18) называются вероятностными (стохастическими) ограничениями. Эти ограничения могут быть противоречивыми. Тогда их надо ослабить, установив, например, более высокие предельные значения A и B , или назначив меньшие доверительные вероятности α и β .

Для нормального распределения спроса из неравенств (18) получим

$$\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{t + A - m}{\sigma}\right) \geq \alpha, \quad \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{t - B - m}{\sigma}\right) \geq \beta.$$

Назначим, например, предельные значения $A = 4$, $B = 8$, доверительные вероятности $\alpha = \beta = 0,7$. Тогда получим

$$\Phi_0\left(\frac{t - 21}{10}\right) \geq 0,2, \quad \Phi_0\left(\frac{33 - t}{10}\right) \geq 0,2,$$

откуда

$$\frac{t - 21}{10} \geq 0,53, \quad \frac{33 - t}{10} \geq 0,53, \quad \text{или} \quad t \geq 26,3, \quad t \leq 27,7.$$

Таким образом, вероятностные ограничения (18) будут выполнены, если уровень запаса товара находится в пределах $26,3 \leq t \leq 27,7$.

Рассмотренный метод сведения целевой функции со случайными параметрами к вероятностным ограничениям носит название критерия предельного уровня. Этот критерий не дает оптимального решения задачи. Он соответствует лишь нахождению приемлемого способа действий.

2.3. Задачи стохастического программирования со случайными параметрами в системе ограничений

2.3.1. Преобразование задачи в детерминированную

Ограничимся изучением только задач линейной оптимизации с вероятностными ограничениями. Модель с вероятностными ограничениями состоит в определении неотрицательных значений x_1, x_2, \dots, x_n , для которых

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (19)$$

при ограничениях

$$P\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right) \geq \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Название «вероятностное ограничение» обусловлено тем обстоятельством, что каждое ограничение $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ может выполняться не всегда, а с некоторой вероятностью, не меньшей α_i ($0 < \alpha_i < 1$). Предполагается, что параметры a_{ij} и b_i являются случайными величинами с известными законами распределения. Для простоты будем считать, что эти параметры независимы и обладают нормальными распределениями с математическими ожиданиями $M(a_{ij})$, $M(b_i)$ и дисперсиями $D(a_{ij})$, $D(b_i)$ соответственно.

Ограничения (20) можно записать в виде

$$P(h_i \leq 0) \geq \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (21)$$

где функция h_i определяется равенством $h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i$. Известно, что сумма независимых нормально распределенных случайных величин также имеет нормальное распределение. Следовательно, случайная величина h_i имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$M(h_i) = \sum_{j=1}^n M(a_{ij}) x_j - M(b_i) \quad (22)$$

и дисперсией

$$D(h_i) = \sum_{j=1}^n D(a_{ij}) x_j^2 + D(b_i). \quad (23)$$

Так как для случайной величины h_i , имеющей нормальное распределение, справедливо соотношение

$$P(h_i \leq 0) = \frac{1}{2} + \Phi_0 \left(\frac{-M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \right),$$

где Φ_0 – функция Лапласа, то ограничения (21) принимают вид

$$\Phi_0 \left(-\frac{M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \right) \geq \alpha_i - \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, m}.$$

По таблицам функции Лапласа можно найти квантиль $\gamma_{\alpha_i - \frac{1}{2}}$, соответствующий значению $\alpha_i - \frac{1}{2}$, и тогда $-\frac{M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \geq \gamma_{\alpha_i - \frac{1}{2}}$. Используя (22) и (23), получим

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + \gamma_{\alpha_i - \frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2 + D(b_i)} \leq M(b_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (24)$$

Тем самым линейные ограничения превратились в ограничения, содержащие квадраты неизвестных величин. Ограничения (24) могут быть записаны в несколько иной форме, если ввести новые переменные

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2 + D(b_i)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда при сделанных допущениях вероятностные ограничения (20) будут эквивалентны неравенствам:

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + \gamma_{\alpha_i - \frac{1}{2}} y_i \leq M(b_i)$$

и уравнениям

$$\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2 + D(b_i) - y_i^2 = 0,$$

где

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

2.3.2. Задача об оптимальном выпуске продукции при случайном спросе

Небольшое предприятие выпускает три вида продукции A , B и C . Величина спроса b_1 и b_2 на продукцию видов A и B заранее неизвестна, она носит случайный характер, имеющий нормальное распределение с математическими ожиданиями $M(b_1) = 20$, $M(b_2) = 15$ и средними квадратическими отклонениями $\sigma(b_1) = 4$, $\sigma(b_2) = 2$ соответственно. Для изготовления единицы продукции A , B , C используется соответственно 3 кг, 4 кг и 2 кг сырья. Суточный запас сырья ограничен и не превосходит 200 кг. Готовая продукция поступает в продажу и реализуется по следующим ценам: 5 руб. за единицу продукции A , 6 руб. за единицу продукции B и 8 руб. за единицу продукции C . Требуется определить оптимальный план выпуска продукции с наибольшим до-

ходом при условии, чтобы спрос на продукцию A и B был бы удовлетворен с вероятностью 0,9.

Для составления математической модели обозначим через x_1, x_2, x_3 – объемы производства продукции A, B, C . Тогда общий доход от выпуска этой продукции составит

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3. \quad (25)$$

Ограничения задачи учитывают величину спроса на продукцию и ресурсы сырья:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & \geq & b_1, \\ & x_2 & \geq b_2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 200. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Таким образом, математическая модель состоит в определении неотрицательных значений x_1, x_2, x_3 , максимизирующих целевую функцию (25) и удовлетворяющих системе ограничений (26). При этом первые два ограничения случайны и должны выполняться с вероятностью, не меньшей 0,9. Данная задача стохастического программирования сводится к детерминированной задаче, если воспользоваться вероятностными ограничениями вида $P(x_1 \geq b_1) \geq 0,9, P(x_2 \geq b_2) \geq 0,9$. Согласно (24) вероятностные ограничения эквивалентны неравенствам $x_1 \geq M(b_1) + \gamma_{0,4} \cdot \sigma(b_1), x_2 \geq M(b_2) + \gamma_{0,4} \cdot \sigma(b_2)$, где значение $\gamma_{0,4} \approx 1,3$ определяется по таблице функции Лапласа. Следовательно, детерминированный эквивалент стохастической задачи (25), (26) состоит в максимизации функции (25) при ограничениях

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 25,2 \\ & x_2 & \geq 17,6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 200 \end{array} \right\}.$$

Определив оптимальное решение этой задачи, получим $x_1^* = 25,2, x_2^* = 17,6, x_3^* = 27, z_{max} = 447,6$. Таким образом, с учетом случайного характера спроса на продукцию ее надо выпускать в следующих количествах: 25,2 ед. продукции A , 17,6 ед. продукции B и 27 ед. продукции C . При этом будет получен доход 447,6 руб.

Если ориентироваться только на среднее значение спроса, то оптимальный план будет следующий: $x_1 = 20, x_2 = 15, x_3 = 40, z = 510$ руб. Конечно, в этом случае величина дохода оказывается больше, однако при этом можно гарантировать, что потребности в продукции A и B будут удовлетворены лишь с вероятностью 0,5, а не с заданной вероятностью 0,9.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решение заданий по данному курсу направлено на усиление связи обучения студентов с практикой совершенствования управления и организации современного производства.

Цель – подготовить студента к самостоятельному проведению операционного исследования, основными этапами которого являются построение математической модели, решение управленческой задачи при помощи модели и анализ полученных результатов.

В процессе работы студент не только закрепляет и углубляет теоретические знания, полученные на лекциях и практических занятиях, но и учится применять методы динамического и стохастического программирования при постановке и решении конкретных экономических и управленческих задач.

Ниже приведено несколько оптимизационных задач, соответствующих рассмотренному в тексте теоретическому материалу. Число N в заданиях означает номер студента по списку в журнале преподавателя.

Задание 1. Задача о загрузке самолета

Самолет загружается предметами трех различных типов, причем количество предметов каждого типа не должно превышать 10 штук. Каждый предмет первого типа имеет вес $\left\lfloor \frac{N+5}{6} \right\rfloor$ тонн и стоимость N руб., предмет второго типа имеет вес $\left\lfloor \frac{110-N}{10} \right\rfloor$ тонн и стоимость $N+10$ руб., предмет третьего типа имеет вес $\left\lfloor \frac{70-N}{4} \right\rfloor$ тонн и стоимость $N+15$ руб. Допустимая грузоподъемность самолета равна 100 тонн. Требуется определить оптимальный план загрузки самолета с максимальной стоимостью груза. Решить задачу методом динамического программирования.

Задание 2. Задача об инвестировании предприятий

Производственное объединение состоит из четырех предприятий ($n=4$). Общая сумма капитальных вложений равна 700 тыс. руб. ($b=700$), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 тыс. руб. Если j -е предприятие получает инвестиции в объеме ξ тыс. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ тыс. руб. в год. Значения функций $f_j(\xi)$, задаваемых таблицей, известны и для каждого варианта компактно записаны в следующем виде:

$f_1(0)$	$f_1(100)$	$f_1(200)$	$f_1(300)$	$f_1(400)$	$f_1(500)$	$f_1(600)$	$f_1(700)$
$f_2(0)$	$f_2(100)$	$f_2(200)$	$f_2(300)$	$f_2(400)$	$f_2(500)$	$f_2(600)$	$f_2(700)$
$f_3(0)$	$f_3(100)$	$f_3(200)$	$f_3(300)$	$f_3(400)$	$f_3(500)$	$f_3(600)$	$f_3(700)$
$f_4(0)$	$f_4(100)$	$f_4(200)$	$f_4(300)$	$f_4(400)$	$f_4(500)$	$f_4(600)$	$f_4(700)$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи распределения инвестиций и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса.

Исходные данные для динамической задачи распределения инвестиций

Вариант 1

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	44	55	63	67	70	70
$f_2(\xi)$	0	18	29	49	72	87	100	108
$f_3(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Вариант 2

0 15 24 30 36 40 43 45
 0 18 26 34 39 42 44 46
 0 16 27 37 44 48 50 56
 0 10 17 23 29 34 38 41

Вариант 10

0 6 11 15 18 19 24 29
 0 7 14 19 22 25 20 15
 0 5 17 21 26 28 29 30
 0 6 19 27 31 34 36 39

Вариант 18

0 8 12 25 31 45 57 66
 0 2 13 31 47 51 74 96
 0 3 15 22 54 66 88 89
 0 6 20 80 75 60 45 32

Вариант 3

0 42 58 71 80 89 95 98
 0 30 49 63 68 69 65 60
 0 22 37 49 59 68 76 82
 0 50 68 82 88 91 95 97

Вариант 11

0 29 49 67 79 91 94 98
 0 20 40 54 66 77 88 89
 0 11 22 42 53 69 75 88
 0 29 32 40 49 57 58 59

Вариант 19

0 4 14 15 32 49 32 36
 0 5 28 19 22 64 84 45
 0 7 36 84 70 85 41 53
 0 9 10 14 19 34 37 40

Вариант 4

0 10 20 30 38 43 49 52
 0 13 25 37 47 55 61 66
 0 6 13 20 27 33 38 41
 0 24 36 42 46 48 48 49

Вариант 12

0 4 14 15 18 19 22 23
 0 22 35 46 51 45 30 30
 0 16 25 32 39 47 56 59
 0 29 31 34 41 48 49 50

Вариант 20

0 3 18 59 66 64 72 81
 0 8 24 26 40 42 51 57
 0 6 15 17 31 33 45 67
 0 9 30 45 67 70 72 74

Вариант 5

0 37 64 87 105 120 134 145
 0 48 75 98 120 132 144 156
 0 85 90 111 118 124 129 132
 0 47 70 80 86 91 94 98

Вариант 13

0 18 45 55 57 62 65 80
 0 20 25 30 35 36 36 35
 0 9 28 38 48 55 58 68
 0 3 26 28 35 45 46 47

Вариант 6

0 3 5 7 8 9 10 10
 0 5 8 10 12 13 14 15
 0 8 13 17 20 23 25 27
 0 6 10 13 15 16 16 16

Вариант 14

0 24 29 39 82 94 102 117
 0 19 22 36 45 64 87 100
 0 34 39 54 59 78 98 110
 0 41 45 49 58 87 88 98

Вариант 7

0 5 10 14 17 19 21 22
 0 8 13 18 21 23 21 17
 0 10 16 21 24 27 29 30
 0 11 19 26 30 33 35 36

Вариант 15

0 13 24 26 27 29 45 46
 0 17 34 35 45 46 59 60
 0 21 43 65 67 77 88 99
 0 34 36 37 41 35 34 20

Вариант 8

0 28 45 65 78 90 102 113
 0 25 41 55 65 75 80 85
 0 15 25 40 50 62 73 82
 0 20 33 42 48 53 56 58

Вариант 16

0 70 75 80 88 78 65 43
 0 54 67 78 79 80 85 93
 0 46 49 51 55 58 89 95
 0 27 48 49 52 64 65 90

Вариант 9

0 28 42 51 57 61 64 66
 0 20 27 30 31 32 32 33
 0 8 26 37 47 53 58 61
 0 5 20 29 36 41 45 47

Вариант 17

0 51 52 47 66 72 64 72
 0 28 19 22 64 84 45 36
 0 84 70 85 52 91 85 97
 0 19 45 48 50 51 54 80

Задание 3. Задача о замене оборудования

Найти оптимальный план замены оборудования на период продолжительностью 6 лет, если годовая прибыль и остаточная стоимость в зависимости от возраста задаются табл. 8. Если возраст t превышает 6 лет, прибыль и остаточная стоимость оборудования считаются равными 0 ($r(t) = 0$ и $s(t) = 0$ при $t > 6$).

Таблица 8

Номер варианта	$r(t): t = 0-6$	$s(t): t = 0-6$	P
1	9 8 7 5 3 3 2	9 8 7 5 3 3 2	10
2	11 11 10 10 9 8 7	10 8 5 4 3 1 1	10
3	9 9 9 8 8 7 7	10 9 9 8 8 7 6	12
4	10 9 8 7 6 5 4	8 7 6 5 4 3 2	9
5	8 8 8 8 7 7 7	6 5 5 5 5 4 4	8
6	12 12 11 10 8 6 4	12 11 11 10 8 4 2	13
7	12 11 10 9 7 5 3	10 9 9 8 6 4 2	10
8	7 7 7 6 6 5 4	7 6 6 5 4 3 2	7
9	10 9 9 8 8 7 6	9 8 8 7 6 6 4	9
10	12 12 12 11 11 10 9	10 10 9 9 8 7 6	11
11	10 9 8 8 6 4 2	8 8 8 7 6 5 4	9
12	8 7 7 6 6 6 5	9 8 8 8 7 6 4	10
13	10 9 7 5 4 3 2	11 9 8 6 5 5 3	11
14	9 8 7 7 7 6 6	7 6 5 4 4 3 2	7
15	10 9 8 7 7 6 5	9 8 7 5 3 3 2	11
16	11 10 9 9 8 8 7	11 8 5 4 3 2 1	12
17	10 9 8 8 8 7 7	10 9 8 8 7 7 6	11
18	11 9 8 7 5 6 4	10 7 6 5 4 4 3	12
19	8 8 8 7 7 7 6	7 6 6 5 5 4 4	9
20	12 12 11 10 8 6 3	13 12 11 10 8 4 2	14

Задание 4. Кратчайший путь через сеть

Применяя рис. 2, найти оптимальный путь из 1-го пункта в 10-й. Стоимость проезда задана в табл. 9.

Таблица 9

Номер варианта	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{25}	t_{36}	t_{46}	t_{57}	t_{58}	t_{67}	t_{69}	t_{710}	t_{810}	t_{910}
1	9	10	14	8	7	7	6	5	14	9	12	10	7
2	8	11	13	7	6	8	7	14	13	8	11	11	6
3	7	12	12	6	5	9	8	13	12	7	10	12	5

4	6	13	11	5	14	10	9	12	11	6	9	13	14
5	5	14	10	14	13	11	10	11	10	5	8	14	13
6	14	15	9	13	12	12	11	10	9	14	7	15	12
7	13	16	8	12	11	13	12	11	8	13	6	16	11
8	12	17	7	11	10	14	13	12	7	12	5	17	10
9	11	18	6	10	11	15	14	13	6	11	14	18	11
10	10	19	5	11	12	16	15	14	5	10	13	19	12

Окончание табл. 9

Номер варианта	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{25}	t_{36}	t_{46}	t_{57}	t_{58}	t_{67}	t_{69}	t_{710}	t_{810}	t_{910}
11	11	10	14	12	13	17	16	5	14	11	12	20	13
12	12	21	13	13	14	18	17	6	13	12	11	21	14
13	13	22	1	14	5	19	18	7	12	13	10	22	5
14	14	23	11	5	6	20	19	8	11	14	11	23	6
15	5	24	10	6	7	21	20	9	10	5	12	24	7
16	6	25	11	7	8	22	21	10	11	6	13	25	8
17	7	26	12	8	9	23	22	11	12	7	14	26	9
18	8	27	13	9	10	24	23	12	13	8	5	27	10
19	9	28	14	10	11	25	24	13	14	9	6	28	11
20	10	29	5	11	12	28	25	14	5	10	7	19	12

Задание 5. Задача об оптимальном уровне запаса товаров

Решить задачу об оптимальном уровне образования запасов при условии, что величина спроса имеет одно из следующих распределений: нормальное, логарифмически-нормальное, Эрланга с математическим ожиданием $10N$ и средним квадратическим отклонением, равным N . Затраты за единицу товара от дефицита составляют $c_1 = 8N + 5$ руб., а от излишков – $c_2 = 2N + 3$ руб. Найти оптимальный уровень запаса товара и установить его зависимость от вида законов распределения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : ИЛ, 1960. – 400 с.
2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 460 с.
3. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1987. – 176 с.
4. Калихман И. Л. Динамическое программирование / И. Л. Калихман, М. А. Войтенко. – М. : Высш. шк., 1979. – 125 с.
5. Карандаев И. С. Прикладная математика : учеб. пособие / И. С. Карандаев, В. И. Малыхин, В. И. Соловьев. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 256 с.
6. Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
7. Колемаев В. А. Математические методы принятия решений в экономике / В. А. Колемаев [и др.]. – М. : Финстатинформ, 1999. – 386 с.

8. *Кузнецов А. В.* Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск : «Вышэйш. шк.», 1984. – 284 с.
9. *Таха Х.* Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.
10. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Хедли. – М. : Мир, 1967. – 506 с.
11. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование / Р. А. Ховард. – М. : Сов. радио, 1964. – 190 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	3
1. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	3
1.1. Примеры типовых задач динамического программирования	5
1.1.1. Задача оптимального распределения ресурсов	5
1.1.2. Задача оптимального резервирования	7
1.1.3. Задача об инвестировании предприятий	12
1.1.4. Задача о замене оборудования	14
1.1.5. Кратчайший путь через сеть	18
1.2. Основные черты метода динамического программирования	21
2. МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	22
2.1. Проблема выбора решения в условиях риска и неопределенности ...	22
2.2. Задачи стохастического программирования	
со случайными параметрами в целевой функции	23
2.2.1. Задача о проведении профилактических работ	24
2.2.2. Задача об оптимальном уровне образования запасов	25
2.3. Задачи стохастического программирования со случайными	
параметрами в системе ограничений	28
2.3.1. Преобразование задачи в детерминированную	28
2.3.2. Задача об оптимальном выпуске продукции	
при случайном спросе	29
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	30

ДИНАМИЧЕСКОЕ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания к изучению курса и выполнению практических занятий для студентов математических и экономических специальностей

Власенко Виктор Дмитриевич

Главный редактор *Л. А. Суевалова*

Редактор *Н. Г. Петряева*

Компьютерная верстка *В. Д. Власенко*

Подписано в печать 13.03.2008. Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.

Усл. печ. л. 2,1. Тираж 80 экз. Заказ 71.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.

680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства
Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.