

# Умножение с фиксированной точкой (прямой код)

А. С. Коржавина  
[as\\_korzhavina@vyatsu.ru](mailto:as_korzhavina@vyatsu.ru)

Лекция по дисциплине «информатика»  
(22 февраля 2018 г.)

- 1 Процесс умножения в 2СС
  - Умножение «столбиком»
  - Пример умножения
- 2 Основные способы умножения
  - I способ
  - II способ
  - III способ
  - IV способ
- 3 Примеры умножения в прямом коде
  - I способ
  - II способ
  - III способ
  - IV способ
- 4 Задания на практику
  - Проходное
- 5 Самообучение

# Дробно-нормализованные числа

Для обоснований выкладок мы используем дробное масштабирование

$$x = y \cdot M$$

Для обоснования выкладок будут использоваться  $y$ .

$y$  — дробное число, его целая часть  $y$  равна нулю.

Разрядная сетка хранит разряды дробной части  $y$ .

$$0. \overset{n-1}{\boxed{\text{ууууу} \cdots \text{ууууу}}}^0$$

Чтобы зафиксировать запятую между  $k$  и  $(k - 1)$  разрядами  $n$ -разрядной сетки, выбирается масштаб

$$M = 2^{(n-k)}.$$

Пусть для положительных чисел  $A$  и  $B$  имеются дробно-масштабированные представления в двоичной системе счисления. Пусть

$$A \equiv (0, a_1 \cdots a_n)_2.$$

Тогда результат произведения  $A \times B$  в двоичной системе счисления будет определяться по формуле:

$$A \times B = B \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=1}^n (B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i = \sum_{i=1}^n (B \gg i) \cdot a_i.$$

# Пример умножения

## Операнды

Требуется найти произведение  $A \times B$ , где  $A = 23$  и  $B = 25$ . Дробные представления (с масштабирующим множителем  $M = 2^5$ ) будут:

$$A \equiv 0,10111,$$

$$B \equiv 0,11001.$$

Результатом произведения будет дробное число, но с масштабом

$$M^2 = 2^{10}$$

# Пример умножения «столбиком» чисел без знака

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001

Результат: ,10001 11111

$$(\text{,10001 11111})_2 \cdot 2^{10} = (10001 \text{ 11111,})_2 = 575 = 23 \cdot 25.$$

I-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	....1	.1100 1.... 01100 10000



$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	.1100 1....
-5	....1	..110 01...
		10010 11000

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	.1100 1....
-4	...1.	..110 01...
-5	....1	...11 001..
		10101 11100

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	.....
-3	..1..	..110 01...
-4	...1.	...11 001..
-5	....1	....1 1001.
		01010 11110

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
Результат:		10001 11111

# I способ: аналитически

$$a_n B \cdot 2^{-n} + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + \dots + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_1 B \cdot 2^{-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left( \left( \dots \left( \left( a_n \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + a_{(n-1)} \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + \dots + a_2 \frac{B}{2} \right) \cdot 2^{-1} + a_1 \frac{B}{2} \right)$$

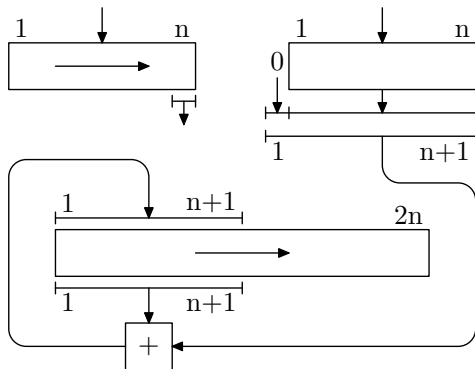
В рекуррентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_n \frac{B}{2}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} \cdot 2^{-1} + a_i \frac{B}{2}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

$S_1$  — результат ( $S_n \rightarrow S_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$ )

## 1 способ: реализация

I



## II-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-5	.....1	..... 11001 00000 11001



$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
		00010 01011

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
		00101 01111

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
		00101 01111

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
Результат:		10001 11111

## II способ: аналитически

$$a_n \cdot \frac{B}{2^n} + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}} + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}}$$

$\Leftrightarrow$

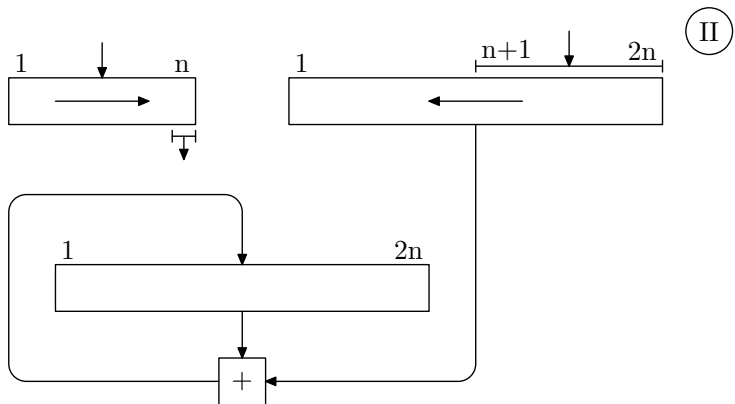
$$\left( \cdots \left( \left( \left( a_n \cdot \frac{B}{2^n} \right) + a_{(n-1)} \cdot \frac{B}{2^{(n-1)}} \right) + a_{(n-2)} \cdot \frac{B}{2^{(n-2)}} \right) + \cdots + a_1 \cdot \frac{B}{2^{-1}} \right)$$

В рекуррентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_n \cdot \frac{B}{2^n}, & \text{если } i = n, \\ S_{(i+1)} + a_i \cdot \frac{B}{2^i}, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

$S_1$  — результат ( $S_n \rightarrow S_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$ )

## II-способ: реализация



### III-й способ

### III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	..... 11001
		00000 11001



### III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	....1 1001.
-2	.0...	.....
		00001 10010

### III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	...11 001..
-2	.0...	.....
-3	..1..	.....11 001
		00011 11101

### III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	..110 01...
-2	.0...	.....
-3	..1..	....11 001.
-4	...1.	.....1 1001
		01000 10011

### III-й способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
Результат:		10001 11111

### III способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + \dots + a_{(n-1)} B \cdot 2^{-(n-1)} + a_n B \cdot 2^{-n}$$

$\Leftrightarrow$

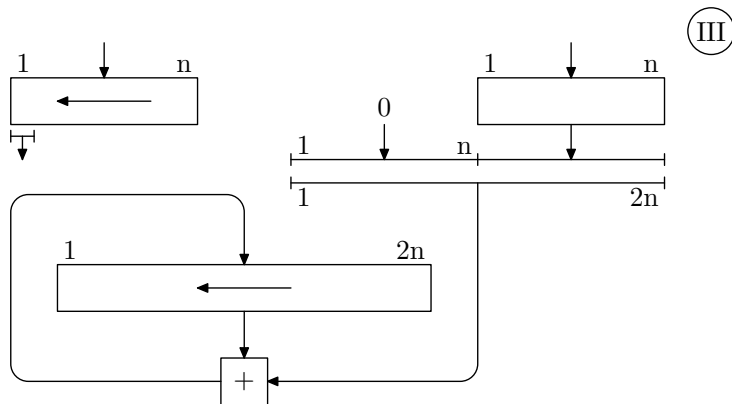
$$\left( \left( \dots \left( \left( a_1 \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + a_2 \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + \dots + a_{(n-1)} \frac{B}{2^n} \right) \cdot 2 + a_n \frac{B}{2^n} \right)$$

В рекуррентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 \frac{B}{2^n}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} \cdot 2 + a_i \frac{B}{2^n}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

$S_n$  — результат ( $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{n-1} \rightarrow S_n$ )

### III-способ: реализация



## IV способ

## IV способ

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
		01100 10000



$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
		01100 10000

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
		01111 10100

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
		10001 00110

$$A \equiv ,10111,$$

$$B \equiv ,11001.$$

$i$	Разряды $a_i$	$(B \cdot 2^{-i}) \cdot a_i$
-1	1....	.1100 1....
-2	.0...	.....
-3	..1..	...11 001..
-4	...1.	....1 1001.
-5	....1	..... 11001
Результат:		10001 11111

## IV способ: аналитически

$$a_1 B \cdot 2^{-1} + a_2 B \cdot 2^{-2} + a_3 B \cdot 2^{-3} + \dots + a_{(n)} B \cdot 2^{-n}$$

$\Leftrightarrow$

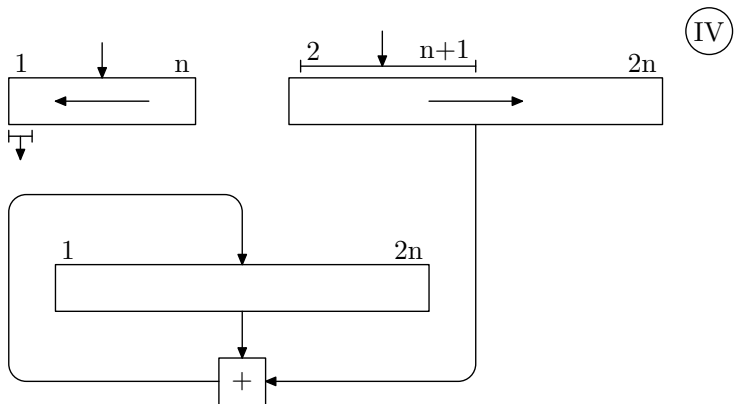
$$(\dots(((a_1 B \cdot 2^{-1}) + a_2 B \cdot 2^{-2}) + a_3 B \cdot 2^{-3}) + \dots + a_n B \cdot 2^{-n})$$

В рекуррентной форме:

$$S_i = \begin{cases} a_1 B \cdot 2^{-1}, & \text{если } i = 1, \\ S_{(i-1)} + a_i B \cdot 2^{-i}, & \text{если } i > 1. \end{cases}$$

$S_n$  — результат ( $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{n-1} \rightarrow S_n$ )

## IV-способ: реализация



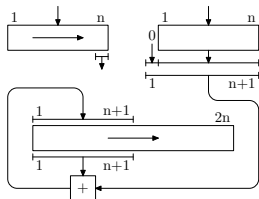
# Резюме:

## Сдвиг СЧП

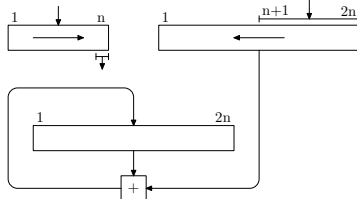
## Сдвиг множимого

shr(МН-ль)

Ⓘ

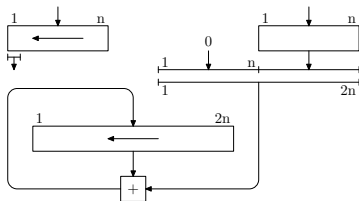


Ⓜ

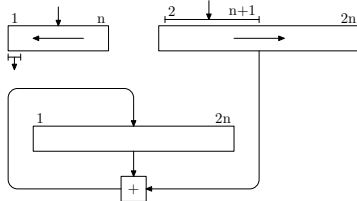


shl(МН-ль)

ⓂⓂ



ⓂⓂ



При умножении в прямом коде знак результата и результат умножения модулей формируются независимо.

## 1 Знак результата

получается сложением «по модулю два» (XOR) знаков множителя и множимого.

- 2 Модуль (мантисса) результата получается беззнаковым перемножением мантисс операндов.
- 3 Корректируется, если нужно, запрещенная комбинация «минус ноль».



Перемножить числа в прямом коде

Множитель:

$$-25 = (-11001)_2.$$

Множимое:

$$-23 = (-10111)_2.$$

Используем дробное масштабирование с множителем  $2^5$ .

Знак получаем отдельно:  $1 \oplus 1 = 0$ . Результат положителен.

Далее показано только получение мантиссы результата разными способами. В таблицах отражаются состояния основных регистров по тактам.

мн-ль →	СЧП →	прим.
,1100 <u>1</u>	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00000 00000} \\  \text{ ,.1011 1....} \\  \hline  \text{ ,01011 10000}  \end{array}  $	+мн-е/2; сдвиг
,.1100 <u>0</u>	,00101 11000	сдвиг
,..110 <u>0</u>	,00010 11100	сдвиг
,...11 <u>0</u>	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00001 01110} \\  \text{ ,.1011 1....} \\  \hline  \text{ ,01100 11110}  \end{array}  $	+мн-е/2; сдвиг
,....1 <u>0</u>	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00110 01111} \\  \text{ ,.1011 1....} \\  \hline  \text{ ,10001 11111}  \end{array}  $	+мн-е/2; Рез-т!

множитель →	мн-е ←	СЧП	прим.
,1100 <u>1</u>	,..... 10111	$  \begin{array}{r}  + ,00000\ 00000 \\  ,.....\ 10111 \\  \hline  ,00000\ 10111  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг
,.1100	,....1 0111.		сдвиг
,..11 <u>0</u>	,...10 111..		сдвиг
,...1 <u>1</u>	,..101 11...	$  \begin{array}{r}  + ,00000\ 10111 \\  ,..101\ 11... \\  \hline  ,00110\ 01111  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг
,.... <u>1</u>	,.1011 1....	$  \begin{array}{r}  + ,00110\ 01111 \\  ,.1011\ 1.... \\  \hline  ,10001\ 11111  \end{array}  $	+мн-е; Рез-т!

# III-способ

мн-ль ←	СЧП ←	прим.
, <u>1</u> 1001	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00000 00000} \\  \text{ ,..... 10111} \\  \hline  \text{ ,00000 10111}  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг
, <u>1</u> 001.	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00001 0111.} \\  \text{ ,..... 10111} \\  \hline  \text{ ,00010 00101}  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг
, <u>0</u> 01..	,00100 0101.	сдвиг
, <u>0</u> 1...	,01000 101..	сдвиг
, <u>1</u> ....	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,10001 01...} \\  \text{ ,..... 10111} \\  \hline  \text{ ,10001 11111}  \end{array}  $	+мн-е; Рез-т!

# IV-способ

мн-ль ←	мн-е →	СЧП	прим.
, <u>1</u> 1001	,.1011 1....	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,00000 00000} \\  \text{ ,.1011 1....} \\  \hline  \text{ ,01011 10000}  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг;
, <u>1</u> 001.	,..101 11...	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,01011 10000} \\  \text{ ,..101 11...} \\  \hline  \text{ ,10001 01000}  \end{array}  $	+мн-е; сдвиг
, <u>0</u> 01..	,...10 111..		сдвиг
, <u>0</u> 1...	,....1 0111.		сдвиг
, <u>1</u> ....	,..... 10111	$  \begin{array}{r}  + \text{ ,10001 01000} \\  \text{ ,..... 10111} \\  \hline  \text{ ,10001 11111}  \end{array}  $	+мн-е; Рез-т!

1)

Какова минимальная разрядность результата перемножения  $n$ -разрядных прямых кодов?

2)

Перемножить числа  $-91$  и  $114$ . Самостоятельно выбрать масштаб.

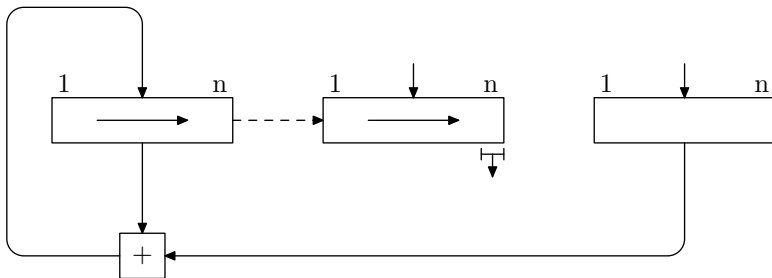
3)

Выявить ситуации получения неправильных прямых кодов.



4)

Обосновать, работает ли схема умножения модулей первым способом:



- Как её модифицировать, если она работает неправильно?
- Где получается результат?

Классика жанра: [2, 3].

Рекомендуется почитать разделы, посвященные работе с суммами и рекуррентными соотношениями в книге [1].

# Библиография I



Р.Грэхем. Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. — М.: Мир, 1998.



Б.Г.Лысов. Арифметические и логические основы цифровых автоматов / Б.Г.Лысов. — 2 изд. — Мн.: Выш. школа, 1980.



А.Я.Савельев. Прикладная теория цифровых автоматов / А.Я.Савельев. — М.: Высшая школа, 1987.