# Tarea 1

Juárez Torres Carlos Alberto

February 21, 2023

# 1 Sea $n \geq 2$ un entero. Por Algebra Superior I sabemos que el anillo de los enteros módulo $n(\mathbb{Z}_n)$ es un anillo conmutativo con unidad. Demuestre que $\mathbb{Z}_n$ es campo si y sólo si n es primo.

Para demostrar que el anillo de los enteros módulo $n$, denotado por $Z_n$, es un campo si y sólo si $n$ es primo, necesitamos demostrar dos direcciones.

Dirección hacia adelante:

Supongamos que $\mathbb{Z}_n$ es un campo. Entonces, para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{Z}_n$, existe un elemento $b$ en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Esto implica que $a$ y $n$ son coprimos, es decir, $\text{MCD}(a, n) = 1$. De lo contrario, no habría un elemento $b$ en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Entonces, si n no es primo, existen dos enteros positivos $a$ y $b$ tales que $a < n$, $b < n$, y $n = ab$. Entonces, $\text{MCD}(a, n) = \text{MCD}(b, n) = 1$. Pero esto significa que $ab$ y $n$ tienen factores comunes y por lo tanto, no puede existir un elemento $b$ en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Esto contradice la suposición de que $\mathbb{Z}_n$ es un campo. Por lo tanto, $n$ debe ser primo.

Dirección hacia atrás:

Supongamos que $n$ es primo. Entonces, para cualquier $a \neq 0$ en $\mathbb{Z}_n$, $\text{MCD}(a, n) = 1$. Por lo tanto, existe un entero $b$ tal que $ab \equiv 1 (mod n)$, que implica que $ab - 1$ es múltiplo de $n$. Esto significa que a tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_n$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_n$ es un campo.

$\therefore$ $\mathbb{Z}_n$ es campo $\Leftrightarrow$ $n$ es primo.

# 2 Demuestre que $\mathbb{Q}(i) = a + bi | a, b \in \mathbb{Q}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{Q}(i)$ contiene la identidad aditiva de $\mathbb{C}$.
- Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$.

## 2.1 Demostrar que $\mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$

- Suma: Sean $z_1 = a_1 + b_1 i y z_2 = a_2 + b_2 i$ dos elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su suma es $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, que es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.
- Resta: De manera similar, si $z_1$ y $z_2$ son elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su diferencia es $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, que también es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.
- Producto: Si $z_1$ y $z_2$ son elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su producto es $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, que es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$

$\therefore \mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$

## 2.2 $\mathbb{Q}(i)$ contiene la identidad aditiva de $\mathbb{C}$

Es $0 + 0i$. Por lo tanto, esta condición se cumple.

## 2.3 Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$.

Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$. Si $z = a + bi$ es un elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su inverso multiplicativo es $z^{-1} = 1/(a + bi)$. Para encontrar el inverso, podemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de $z$, que es $a - bi$.

$$\Rightarrow z^{-1} = (1/(a + bi)) * ((a - bi)/(a - bi)) = (a - bi)/(a^2 + b^2)$$

Como $a$ y $b$ son racionales, $a^2 + b^2$ es un número racional positivo. Por lo tanto, $(a - bi)/(a^2 + b^2)$ es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}(i)$ cumple las tres condiciones para ser un subcampo de $\mathbb{C}$.

## 3 Sea $S$ un conjunto y sea $K^S$ el conjunto de todas las funciones de $S$ en $K : K^S = \{f : S \to K | f \text{ es funcion}\}$. Demuestre que $K^S$ con las operaciones usuales es un espacio vectorial sobre el campo $K$.

Veamos que estas propiedades se cumplen:

- La suma es cerrada: Para cualquier par de funciones $f$ y $g$ en $K^S$, la función $f+g$ definida por $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ para todo $s$ en $S$ es una función de $S$ en $K$.
- La suma es conmutativa: $(f+g)(s) = f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$ para todo $s$ en $S$.
- La suma es asociativa: $((f+g)+h)(s) = (f+g)(s) + h(s) = f(s) + g(s) + h(s) = f(s) + (g+h)(s) = (f + (g+h))(s)$ para todo $s$ en $S$.
- $K^S$ tiene un elemento neutro de suma: La función cero, $0 : S \leftarrow K$ tal que $0(s) = 0$ para todo $s$ en $S$ es la función neutra de suma.
- $K^S$ tiene inversos de suma: Para cualquier función $f$ en $K^S$, la función $-f$ tal que $(-f)(s) = -f(s)$ para todo $s$ en $S$ es el inverso aditivo de $f$.
- La multiplicación por escalar es cerrada: Para cualquier función $f$ en $K^S$ y cualquier escalar $a$ en $K$, la función $af$ definida por $(af)(s) = a * f(s)$ para todo $s$ en $S$ es una función de $S$ en $K$.
- La multiplicación por escalar es distributiva con respecto a la suma de vectores: $(a * (f + g))(s) = a * (f(s) + g(s)) = af(s) + ag(s) = (af + ag)(s)$ para todo $s$ en $S$.
- La multiplicación por escalar es distributiva con respecto a la suma de escalares: $((a + b)f)(s) = (a+b)f(s) = af(s) + bf(s) = (af + bf)(s)$ para todo $s$ en $S$
- La multiplicación por escalar es asociativa: $((ab)f)(s) = abf(s) = a*(bf(s)) = (a*(b*f))(s)$ para todo $s$ en $S$.
- $K^S$ tiene un elemento neutro de multiplicación: La función identidad, $1 : S \leftarrow K$ tal que $1(s) = 1$ para todo $s$ en $S$ es la función neutra de multiplicación.

Por lo tanto, $K^S$ cumple las diez propiedades necesarias para ser un espacio vectorial sobre el campo $K$.

## 4 Consideremos el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y denotemos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}[a, b]$ al conjunto de todas las funciones continuas de $[a, b]$ en los reales. Similarmente, denotemos por $\mathcal{D} = \mathcal{D}[a, b]$ e $\mathcal{I} = \mathcal{I}[a, b]$ a los conjuntos de todas las funciones de $[a, b]$ en los reales que sean derivables e integrables respectivamente. Mencionando los resultados de Cálculo requeridos, demuestre que $\mathcal{C}$ , $\mathcal{D}$ e $\mathcal{I}$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathbb{R}[a, b]$ y que $\mathcal{D}$ es subespacio de $\mathcal{C}$ , que a su vez es subespacio de $\mathcal{I}$ .

Primero, demostraremos que $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[a, b]$. Sean $f, g \in \mathcal{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma $f + g$ es continua en $[a, b]$ ya que es la suma de dos funciones continuas en $[a, b]$. Por lo tanto, $f + g \in \mathcal{C}$.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función $\alpha f$ es continua en $[a, b]$ ya que es una función continua multiplicada por un escalar $\alpha$. Por lo tanto, $\alpha f \in \mathcal{C}$.
- Contiene al vector cero: La función cero, $0 : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$, definida como $0(x) = 0$ para todo $x$ en $[a, b]$, es continua y pertenece a $\mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[a, b]$.

Luego, demostraremos que $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}$. Sean $f, g \in \mathcal{D}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma $f + g$ es derivable en $[a, b]$ ya que es la suma de dos funciones derivables en $[a, b]$. Por lo tanto, $f + g \in \mathcal{D}$. Además, como $f$ y $g$ son continuas en $[a, b]$, la suma $f + g$ es continua en $[a, b]$, por lo que $f + g \in \mathcal{C}$.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función $\alpha f$ es derivable en $[a, b]$ ya que es una función derivable multiplicada por un escalar $\alpha$. Por lo tanto, $\alpha f \in \mathcal{D}$. Además, como $f$ es continua en $[a, b]$, la función $\alpha f$ es continua en $[a, b]$, por lo que $\alpha f \in \mathcal{C}$.
- Contiene al vector cero: La función cero, $0 : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$, definida como $0(x) = 0$ para todo $x$ en $[a, b]$, es derivable e integrable, por lo que $0 \in \mathcal{D}$ y $0 \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}$.

Finalmente, demostraremos que $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{I}$. Sean $f, g \in \mathcal{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma $f + g$ es integrable en $[a, b]$ ya que es la suma de dos funciones continuas en $[a, b]$. Por lo tanto, $f + g \in \mathcal{I}$.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función $\alpha f$ es integrable en $[a, b]$ ya que es una función continua multiplicada por un escalar $\alpha$. Por lo tanto, $\alpha f \in \mathcal{I}$.

- Contiene al vector cero: La función cero, $0 : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$, definida como $0(x) = 0$ para todo $x$ en $[a, b]$, es integrable, por lo que $0 \in \mathcal{I}$.

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{I}$