Tarea 3 EDO

Chávez Granados Santiago
Juárez Torres Carlos Alberto
León Martínez Guadalupe
Márquez López Anayely
Ramírez Corona Isabel

May 2022

Ejercicio 1. **Ecuación de Duffing.** En el estudio de un resorte no lineal con forzamiento periódico surge la ecuación:

$$y'' + ky + ry^3 = A\cos(\omega t)$$

Sean $k = r = A = 1$ y $\omega = 10$. Determine los tres primeros términos no nulos de las aproximaciones mediante polinomios de Taylor a la solución con valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$-

Tenemos que:

$$y'' + y + y^3 = \cos(10t)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$y''(0) = -y(0) - y(0)^3 + \cos(10 * 0) = -0 - (0)^3 + \cos(0) = 1$$

Diferenciando:

$$y''' = (-y - y^3 + \cos 10t)' = -y' - 3y^2y' - 10sen(10t)$$

donde en $t = 0$

$$y'''(0) = -y'(0) - 3y(0)^2 \times y'(0) - 10\sin(10 \times 0) = -1 - 3(0)^2 \times (1) - 10\sin(0) = -1$$

ASi que los primeros términos distintos de cero, en las aproximaciones polinómicas de Taylor a la solución de problema son:

$$y(t) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \times t + (\frac{y''(0)}{2!}) \times t^2 + (\frac{y'''(0)}{3!}) \times t^3 + ... = t + (\frac{1}{2})t^2 - (\frac{1}{6})t^3 + ...$$

Ejercicio 2. Encuentre una solución en serie de potencias de x alrededor de $x = 0$, para la ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0$$

$-\infty < x < \infty$

Sol: Como x es un punto ordinario, entonces supongamos que la solución es de la siguiente forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

De donde $y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, haciendo un cambio de variable puede escribirse cómo:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Sustituyendo en la ecuación se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Por otro lado, la segunda suma puede reescribirse como:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n = 0$$

Sacando el primer término de la primera suma tenemos:

$$2a_2 \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

Igualando a cero los términos se debe tener que:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

Notemos que se tienen pasos de a tres en la sucesión de los términos. Para $n = 1, 4, 7$, se tiene que:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

$$a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

Así la primer sucesión está dada por la fórmula:

$$a_{3n} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}[4+3(k-1)]a_0}{(3n)!}, n = 1, 2, \cdots$$

Para $n = 2, 5, 8$, se tiene que:

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3};$$

$$a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7};$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}$$

Entonces, estos términos están dados por:

$$a_{3n+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} [2+3k] a_1}{(3n+1)!}$$

Finalmente, como $a_2 = 0$, entonces $n = 3, 6, 9, ...$, se tiene que $a_5 = a_8 = a_1 1 = ... = 0$, es decir que $a_{3n+2} = 0$, para toda n. Así la solución general de la ecuación de Airy es:

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} [4 + 3(k-1)]}{(3n)!} \cdot x^{3n} \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} [2+3k]}{(3n+1)!} \cdot x^{3n+1} \right]$$

Ejercicio 3. Determine 2 soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias de la ecuación diferencial

$$(x^2+2)y''+3xy'-y=0 \tag{1}$$

en torno al punto ordinario x=0.

Ya que tenemos un punto ordinario, proponemos que $y(x)$ sea de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{2}$$

Por lo que se tiene que

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \qquad y \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2} \tag{3}$$

Si sustituimos y, y', y'' en 1, tenemos que:

$$(x^2+2)\left[\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\right]+3x\left[\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\right]-\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

$$x^2\left[\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\right]+2\left[\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\right]+3x\left[\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}\right]-\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n}\right]+2\left[\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\right]+3\left[\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n}\right]-\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

Ahora bien, si para la primera suma establecemos que $k=n$, para la segunda $k=n-2$, para la tercera y cuarta que $k=n$, se tiene que:

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+2-1)c_{k+2}x^k+3\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k+3\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k+2(0+2)(0+1)c_{0+2}x^0+2(1+2)(1+1)c_{1+2}x^1+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k$$

$$+3(1)c_1x^1+3\sum_{k=2}^{\infty}kc_kx^k-c_0x^0-c_1x^1-\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k+4c_2+12c_3x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k+3c_1x+3\sum_{k=2}^{\infty}kc_kx^k-c_0-c_1x-\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k=0$$

Ahora bien podemos juntar la suma y eliminar términos semejantes, entonces

$$4c_2+12c_3x+2c_1x-c_0+\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}+3kc_k-c_k\right]x^k=0$$

Si comparamos los coeficientes tenemos que:

$$\begin{aligned}
&4c_2 - c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}c_0 \\
&12c_3 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{6}c_1 \\
&k(k-1)c_k + 2(k+2)(k+1)c_{k+2} + 3kc_k - c_k = 0 \\
&2\left(k^2+3k+2\right)c_{k+2} = \left(-k^2+k-3k+1\right)c_k \\
&2\left(k^2+3k+2\right)c_{k+2} = \left(-k^2-2k+1\right)c_k \\
&\Rightarrow c_{k+2} = \frac{-k^2-2k+1}{2\left(k^2+3k+2\right)}c_k, k = 2,3,4
\end{aligned}$$

Ahora calculando para $k = 2,3,4$, se tiene que

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{-7}{24}c_2 = \frac{-7}{24}(\frac{1}{4}c_0) = -\frac{7}{96}c_0 \\
c_5 &= \frac{7}{120}c_1 \\
c_6 &= \frac{161}{5760}c_0
\end{aligned}$$

Debido a la ecuación 2, entonces

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

Entonces observando el comportamiento de los coeficientes, podemos ver que si k es par, entonces lo acompañara c_0 mientras que si es impar, se tendrá a c_1, entonces factorizando:

$$y(x) = c_0 + c_1x + \frac{1}{4}c_0x^2 - \frac{1}{6}c_1x^3 - \frac{7}{96}c_0x^4 + ...$$

$$y(x) = c_0(\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{96}x^4 + \frac{161}{5760}x^6 + ...) + c_1(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + ...)$$

$$y_1(x) = c_0(\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{96}x^4 + \frac{161}{5760}x^6 + ...) \tag{4}$$

$$y_2(x) = c_1(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + ...) \tag{5}$$

Debido a que no comparten potencias, son linealmente independientes las ecuaciones 4 y 5,siendo soluciones.

Ejercicio 4. . La ecuación diferencial de Chebyshev es:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \tag{6}$$

Determine dos soluciones linealmente independientes en potencias de x para $|x| < 1$
Reescribiendo a su forma estandar tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda^2}{1-x^2}y = 0$$

de donde obtenemos:

$$P(x) = -\frac{x}{1-x^2} \qquad y \qquad Q(x) = \frac{\lambda^2}{1-x^2}$$

podemos ver que las funciones P y Q no se definen bajo $x = 1, -1$ aunque el punto: $x_0 = 0$ si por lo tanto tenemos:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Derivando tenemos:

$$[2]\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \tag{7}$$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$(1-x^2)\left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}\right] - x\left[\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}\right] + \lambda^2\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Sea la primera serie con $k = n-2$ y el resto como $k = n$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

extrayendo los primeros dos terminos para $k = 0$ tenemos:

$$2c_2 + \lambda^2 c_0 = 0$$

donde se tiene que : $c_2 = -\dfrac{\lambda^2}{2}c_0$ y para $k = 1$ se tiene que

$$6c_3x - c_1x + \lambda^2 c_1 x = 0$$
$$[6c_3 - c_1 + \lambda^2 c_1]x = 0$$
$$6c_3 - c_1 + \lambda^2 c_1 = 0$$

donde se tiene que : $c_3 = \dfrac{1-\lambda^2}{6}c_1$
Ahora tengamos la ecuación:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^k + \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Y juntandolo en una sola serie queda:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}-k(k-1)c_k-kc_k+\lambda^2c_k\right]x^k=0$$

Asi que tenemos:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k-1)+k-\lambda^2]c_k=0$$

Despejando c_{k+2} se tiene:

$$c_{k+2}=\frac{k^2-\lambda^2}{(k+1)(k+2)}c_k, \qquad k=0,1,2,3,\cdots$$

Como para $k=0\Rightarrow c_2=-\dfrac{\lambda^2}{2!}c_0$ y para $k=1\Rightarrow c_3=\dfrac{1-\lambda^2}{3!}c_1$ Para $k=2$ tenemos:

$$c_4=\frac{2^2-\lambda^2}{(4)(3)}c_2=\frac{2^2-\lambda^2}{(4)(3)}\left(-\frac{\lambda^2}{2}c_0\right)=\frac{(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{4!}c_0$$

Para $k=3$:

$$c_5=\frac{3^2-\lambda^2}{(5)(4)}c_3=\frac{3^2-\lambda^2}{(5)(4)}\left(\frac{1-\lambda^2}{3!}c_1\right)=\frac{(3^2-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{5!}c_1$$

Para $k=4$:

$$c_6=\frac{4^2-\lambda^2}{(6)(5)}c_4=\frac{4^2-\lambda^2}{(6)(5)}\left(\frac{(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{4!}c_0\right)=\frac{(4^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{6!}c_0$$

donde podemos obtener que:

$$c_{2k}=\frac{[(2k-2)^2-\lambda^2][(2k-4)^2-\lambda^2]\cdots(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{(2k)!}c_0$$

y

$$c_{2k+1}=\frac{[(2k-1)^2-\lambda^2][(2k-3)^2-\lambda^2]\cdots(3^2-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{(2k+1)!}c_1$$

Así la solución general parte de tomar $C_1=c_0$ y $C_2=c_1$ como factores comunes, entonces:

$$y_1=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

tal que:

$$\begin{aligned}y_1(x)=1-\frac{\lambda^2}{2!}x^2+\frac{(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{4!}x^4+\frac{(4^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{6!}x^6+\cdots\\ \cdots+\frac{[(2k-2)^2-\lambda^2][(2k-4)^2-\lambda^2]\cdots(2^2-\lambda^2)(-\lambda^2)}{(2k)!}+\cdots\end{aligned} \tag{10}$$

y

$$\begin{aligned}y_2(x)=x+\frac{1-\lambda^2}{3!}x^3+\frac{(3^2-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{5!}x^5+\cdots\\ \cdots+\frac{[(2k-1)^2-\lambda^2][(2k-3)^2-\lambda^2]\cdots(3^2-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{(2k+1)!}+\cdots\end{aligned} \tag{11}$$

Ejercicio 5. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales usando la Transformada de Laplace

$$\begin{gathered} y' + 3y + z' + 2z = e^{-2t} \\ 2y' + 2y + z' + z = 1 \end{gathered}$$

con $y(0) = z(0) = 0$

Sol : Sean $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$, al restar la segunda ecuación de la primera obtenemos:

$$i) : -y' + y + z = e^{-2t} - 1$$

Ahora, multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando la primera tenemos:

$$ii) : -3y' - y - z' = e^{-2t} - 2$$

Aplicando la transformada a estas dos ecuaciones, como $y(0) = z(0) = 0$ se obtiene:

$$a) : -sY(s) + Y(s) + Z(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s}$$

$$b) : -3sY(s) - Y(s) - sZ(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s}$$

A su vez la ecuación $b)$ puede dividirse netre s y así obtenemos:

$$b) : -3Y(s) - \frac{Y(s)}{s} - Z(s) = \frac{1}{s(s+2)} - \frac{2}{s^2}$$

Si sumamos $a)$ y $b)$ se obtiene:

$$c) : (1 - s - 3 - \frac{1}{s})Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s+2)} - \frac{2}{s^2}$$

$$-\frac{(s+1)^2}{s}Y(s) = \frac{s^2 - s(s+2) + s - 2(s+2)}{s^2(s+2)}$$

$$-\frac{(s+1)^2}{s}Y(s) = \frac{s^2 - s^2 - 2s + s - 2s - 4}{s^2(s+2)}$$

$$\frac{(s+1)^2}{s}Y(s) = \frac{3s+4}{s^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s(s+2)(s+1)^2}$$

Podemos reescribir $Y(s)$ por medio de fracciones parciales como sigue:

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Para hallar $y(t)$ usamos la transformada inversa y obtenemos lo que sigue:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1^2)}\right\}$$

$$y(t) = 2 + e^{-2t} - 3e^{-t} - te^{-t}$$

Notemos que:

$$y'(t) = te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Con los resultados obtenidos anteriormente, podemos sustituir en $i)$ como sigue:

$$-te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} + 2 + e^{-2t} - 3e^{-t} - te^{-t} + z = e^{-2t} - 1$$

$$z - 5e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-2t} + 3 = 0$$

$$z(t) = 5e^{-t} + 2te^{-t} - 2e^{-2t} - 3$$

Y las soluciones del sistema son:

$$y(t) = e^{-2t} - (3 + t)e^{-t} + 2;$$

$$z(t) = -2e^{-2t} + (5 + 2t)e^{-t} - 3$$

Ejercicio 6. Considere la función

$$f(t) = e^{-3t} \int_0^t u\sin(2u)du \tag{8}$$

Encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

Primero resolvemos la integral por partes donde $f = u \Rightarrow df = du$ y $dg = \sin(2u)du \Rightarrow g = -\frac{1}{2}\cos(2u)$de forma que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t u\sin(2u)du = -u\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2u)du \\
&= \left[-u\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{4}\sin(2u)\right]\Big|_0^t \\
&= -\frac{t\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando propiedades de la Transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{e^{-3t}(-\frac{t\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4})\} \\
&= \mathscr{L}\{-e^{-3t}\frac{t\cos(2t)}{2}\} + \mathscr{L}\{-e^{-3t}\frac{\sin(2t)}{4}\} \\
&= -\frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-3t}t\cos(2t)\} - \frac{1}{4}\mathscr{L}\{e^{-3t}\sin(2t)\}
\end{aligned}$$

Sabemos que $\mathscr{L}\{e^{at}cos(wt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$ y $\mathscr{L}\{e^{at}sin(wt)\} = \frac{w}{(s-a)^2+w^2}$ y $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}t\cos(2t)\} = -\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}sin(2t)\} = \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Por lo tanto, juntando

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{s+3}{2(s+3)^2+8} - \frac{2}{4(s+3)^2+16}. \tag{9}$$

Ejercicio 7. Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}$$

Por teorema de convolución tenemos:

$$y(t) = 3t^2 - e^{-t} - (y(t) * e^t)$$

Aplicando la transformada de laplace.

$$\mathscr{L}\{y(s)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \left[\mathscr{L}\{y(s)\}\frac{1}{s-1}\right]$$

Despejando: $\mathscr{L}\{y(s)\}$

$$\mathscr{L}\{y(s)\} + \frac{\mathscr{L}\{y(s)\}}{s-1} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{s\mathscr{L}\{y(s)\}}{s-1} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathscr{L}\{y(s)\} = \frac{s-1}{s}\left[\frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}\right]$$

Simplificando:

$$\mathscr{L}\{y(s)\} = \frac{(s-1)\left(6s+6-s^3\right)}{s^4\,(s+1)}$$

Transformando a una suma el lado derecho:

$$\frac{(s-1)\left(6s+6-s^3\right)}{s^4\,(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s+1}$$

de donde se obtiene:

$$-s^4 + s^3 + 6s^2 - 6 = As^3(s+1) + Bs^2(s+1) + Cs(s+1) + D(s+1) + Es^4$$

Para la raiz 0:

$$D = -6$$

Para la raiz -1

$$E = -2$$

Sustituyendo:

$$-s^4 + s^3 + 6s^2 - 6 = As^3(s+1) + Bs^2(s+1) + Cs(s+1) + (-6)(s+1) + (-2)s^4$$

de donde obtenemos:

$$C - 6 = 0$$

$$B + C = 6$$

$$A + B = 1$$

$$A - 2 = -1$$

y de allí:

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = 6$$

Por lo tanto queda:

$$\mathscr{L}\{y(s)\} = \frac{(s-1)\left(6s+6-s^3\right)}{s^4\,(s+1)} = \frac{1}{2} + \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s+1}$$

Aplicando la inversa de Laplace:

$$y(t) = H(t) + 3t^2 - t^3 - 2e^{-t}$$

Ejercicio 8.La función Gamma se denota por $\Gamma(p)$ y se define por la siguiente integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx$$

La integral converge cuando $x \to \infty$ para todo p. Si $p < 0$, el integrando no es acotado, cuando $x \to 0^+$.

Sin embargo se puede demostrar que la integral converge en $x = 0$ para todo $p > -1$

1. Pruebe que para todo $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

Dem : Por definición:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx$$

Si $u = x^p \Rightarrow du = px^{p-1}$ y $dv = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$, integrando por partes tenemos:

$$\Gamma(p+1) = -e^{-x} x^p \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

Ahora el término $-x^p e^{-x}$ tiende a cero cuando $x \to \infty$.Además, como $p > 0$, entonces $-x^p x^{-x}$ es cero valuado en cero, entonces:

$$\Gamma(p+1) = p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = p\Gamma(p)$$

2. Muestre que $\Gamma(1) = 1$

Dem : Sea $f(p) = \Gamma(p+1)$. Entonces $f(0)$ es:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^0 dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^b} + \frac{1}{e^0} = 0 + 1 = 1$$

3.Pruebe que si p es un número positivo n entonces $\Gamma(n+1) = n!$

Dem : Procedemos por inducción sobre n

Base de inducción: Para $n = 1$ tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

Para $n = 2$:

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

Finalmente, para $n = 3$:

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir $\Gamma(k+1) = k!$

Paso inductivo: Queremos demostrarlo para $n = k+1$. Por el primer inciso tenemos:

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1)$$

Por la hipótesis de inducción:

$$\Gamma(k+2) = (k+1)k! = (k+1)!$$

Y así queda demostrado por inducción que: $\Gamma(k+1) = k!$

4. Demuestre que si $p > 0$ entonces:

$$p(p+1)(p+2)...(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

Dem : Lo haremos por inducción sobre n

Base de inducción: Para $n = 1$, por el inciso 1, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, entonces:

$$p = p+1-1 = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)}$$

Para $n = 2$ (por el inciso 1) se tiene que $\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1) = (p+1)p\Gamma(p)$ de donde:

$$p(p+1) = p(p+2-1) = \frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)}$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir:

$$p(p+1)(p+2)...(p+k-1) = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}$$

Paso inductivo Buscamos demostrar para $n = k+1$. Por el inciso 1 se tiene que $\Gamma(p+k+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$, así mismo por la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\Gamma(p+k+1) = (p+k)p(p+1)(p+2)...(p+k-1)\Gamma(p)$$

De ahí podemos reescribirlo como:

$$\frac{\Gamma(p+k+1)}{\Gamma(p)} = p(p+1)(p+2)...(p+k-1)(p+(k+1)-1)$$

Y así, por inducción se ha demostrado que $p(p+1)(p+2)...(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$

Tomando $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, por lo demostrado anteriormente tenemos que:

$$\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}+1\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De manera similar se tiene que:

$$\Gamma\Big(\frac{11}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}+5\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{945\sqrt{\pi}}{32}$$

Ejercicio 9. Considera la Transformada de Laplace de t^p, donde p¿-1.

- En referencia al problema 8, prueba que

$$\mathscr{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0 \tag{10}$$

En clase se demostró que si p es un entero positivo n, se tiene que $\mathscr{L}\{t^p\} = \frac{n!}{s^{s+1}}$

Demostración : Por definición tenemos que:

$$\mathscr{L}\{t^p\} = \int_0^\infty t^p e^{-st} dt$$

Hacemos un ca,bio de variable, de forma que los límites de integración se mantienenya que $s > 0$ y $u = st \Rightarrow t = \frac{u}{s}$ entonces $du = sdt \Rightarrow dt = \frac{du}{s}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty t^p e^{-st} dt = \int_0^\infty (\frac{u}{s})^p e^{-u} (\frac{du}{s})$$

$$= \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty u^p e^{-u} du$$

Observamos que la integral es la función gamma de forma que $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-u} x^p du$, por lo tanto

$$\mathscr{L}\{t^p\} = \frac{1}{s^{p+1}} \Gamma(p+1) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \tag{11}$$

■

- Pruebe que:

$$\mathscr{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0 \tag{12}$$

Hint :Puede asumir que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Prueba : Por el inciso anterior tenemos que

$$\mathscr{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \tag{13}$$

Por definición de la función Γ tenemos que:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

Hacemos un cambio de variable, de forma que $x = u^2$ y $dx = 2udu$ y usando el hint tenemos que:

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} = 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{14}$$

Sustituyendo 14 en 13

$$\mathscr{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

■