Tarea 2 EDO

Juárez Torres Carlos Alberto
León Martínez Guadalupe
Ramírez Corona Isabel

9 de Abril 2022

1 Escriba los primeros términos del esquema de iteración de Picard para cada uno de los siguientes PVI y cuando sea posible encuentre explicitamente la solución:

a) $x' = x + 2, x(0) = 2$

Iniciamos la iteración con la condición inicial:

$x_0(t) = 2$

$x_1(t) = 2 + \int_0^t (2+2)ds = 2 + 4t = 4\left(\frac{1}{0!} + \frac{t}{1!}\right) - 2$

$x_2(t) = 2 + \int_0^t (4s+4)ds = 2t^2 + 4t + 2 = 4\left(\frac{1}{0!} + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}\right) - 2$

$x_3(t) = 2 + \int_0^t \left(2s^2 + 4s + 2\right) ds = \frac{2t^3}{3} + 2t^2 + 2t + 2 = 4\left(\frac{1}{0!} + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) - 2$

El término n-ésimo es:

$$x_n(t) = 4\sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} - 2$$

El límite es entonces:

$$\lim_{t\to\infty} x_n(t) = 4\lim_{t\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} - 2 = 4e^t - 2$$

Así obtenemos la solución de PVI dada por:

$x(t) = 4e^t - 2.$

b) $x' = x^{4/3}, x(0) = 0$

Iniciamos la iteración con la condición inicial:

$x_0(t) = 0$

$x_1(t) = 0 + \int_0^t 0^{4/3} ds = 0 + 0 = 0$

$x_2(t) = 0 + \int_0^t 0^{4/3} ds = 0 + 0 = 0$

$\vdots$

$x_n(t) = 0 + \int_0^t 0^{4/3} ds = 0 + 0 = 0$

Entonces, al hacer tender n al infinito, la solución es:

$y(t) = 0$

c)$x' = x^{4/3}, x(0) = 1$

Iniciamos la iteración con la condición inicial:
$x_0(t) = 1$

$x_1(t) = 1 + \int_0^t 1^{4/3} ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$

$x_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)^{4/3} ds = 1 + \frac{3(1+t)^{7/3}}{7} = \frac{7+3(1+t)^{4/3}}{7}$

$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left(\frac{7+3(1+s)^{4/3}}{7} \right)^{4/3} ds = 1 + t + \int_0^t \left(\frac{3(1+s)^{4/3}}{7} \right) ds = 1 + t + \frac{3^{\frac{10}{3}} \left((t+1)^{\frac{7}{9}} \left(t^2+2t+1 \right) - 1 \right)}{25 \cdot 7^{\frac{4}{3}}}$

2 Ejercicio 2: ¿Tiene solución el PVI $x' = t^2x - x^5$, con $x(2) = -3$?

Observemos que para $f = t^2x - x^5$ es continua, además se tiene que

$$\frac{f}{dx} = t^2 - 5x^4$$

también es continua, en particular si t=2.
Entonces podemos afirmar que existe un rectángulo $R = \{(t,x)|a < t < b, c < x < d\}$ que contiene al punto (2,-3) en su interior dentro del cual f y f' son continuas, por lo tanto, por el Teorema de Existencia y Unicidad (Picard-Lindelöf) el PVI tiene una única solución.

3 Investigar sobre la cuantificación del error en los iterados de Picard.

Es un método desarrollado por Charles Émile Picard, es un metodo de caracter iterativo que se emplea para obtener una solucion a una ecuación diferencial, esto significa que se emplea un valor/condición inicial x_0 mediante el cual desencadenara las aproximaciones para cada iteración con x_i donde $i \geq 0$, entonces para el metodo iterativo de Picard se considera generalmente una ecuación diferencial como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

donde $f(x,t) : \|x - x_0\| \leq a \cdot \|t - t_0\| \leq \mathcal{T} \to \mathcal{R}$

De este modo la idea principal es optener un proceso que tiende a una solución del PVI.

de esta forma para una función solución tal que:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^{t} f\left(x\left(t'\right), t'\right) dt'$$

si se elabora un despeje de $x(t)$ tenemos:

$$x\left(t\right) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x\left(t'\right), t'\right) dt'$$

Aunque no se resuelve el problema se obtiene una sucesión tal que:

$$x_{l+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_l(t'), t')dt'$$

4 Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at+bx+c$ en una eucación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones:

a) $x' = (x+t)^2$

Solución: Tenemos que:

$y = x + t$

Así tenemos:

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{df}{dx}$

$\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{df}{dx}$

$\frac{dy}{dx} - 1 = y^2$

$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$

$\frac{dy}{y^2+1} = dx$

Ahora integramos como sigue:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx$$

Resolviendo por sustitución trignonométrica nos queda:

$tan(\alpha) = y$

$sec(\alpha) = \sqrt{y^2+1} \Rightarrow sec^2(\alpha) = y^2 + 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = sec^2(\alpha) \Rightarrow dy = sec^(\alpha)d\alpha$

Ahora haciendo un cambio de variable nos queda:

$\frac{dy}{y^2+1} = dx \Rightarrow \frac{sec^2(\alpha)d\alpha}{sec^2(\alpha} = dx \Rightarrow d\alpha = dx$

$\int d\alpha = \int dx \Rightarrow \alpha = x + c$

Ya que $tan(\alpha) = y$ entonces $tan(\alpha) = tan(x+c)$ y así $y = tan(x+c)$

Así $t = tan(x+c) - x$

5 Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $x = Uh, y = Vk$ reducen la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

Por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dV}\frac{dV}{dU}\frac{dU}{dx}$$

Pero, como $dx = dU$ y $dy = dV$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{dV}{dU} \cdot 1 = \frac{dV}{dU}$$

Sustituyendo en la función:

$$\frac{dV}{dU} = f\left(\frac{aU - ah + bV - bk + c}{dU - dh + eV - ek + f}\right)$$

Si tomamos tales contantes como aquellas que cumplen el sistema:

$$\begin{aligned} ah + bk = c \\ dh + ek = f \end{aligned}$$

Que tiene solución, pues:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$

por la hipóteis.

Luego:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{aU + bV}{dU + eV}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{V}{U}}{d + e\frac{V}{U}}\right)$$

que es una ecuación homogénea.

Ejercicio $5a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2y + 4}{x + y - 1}$$

Notemos que el sistema que estamos buscando es:

$$\begin{aligned} -h + 2k = 4 \\ h + k = -1 \end{aligned}$$

La solución, por la regla de Cramer, es:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -2; \quad k = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

La sustituación adecuada es:

$$x = U + 2; y = V - 1$$

De aquí que, haciendo la substitución:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-U + 2V}{U + V} = \frac{-1 + 2\frac{V}{U}}{1 + \frac{V}{U}}$$

Sea $z = \frac{V}{U} \Rightarrow V = zU \Rightarrow V' = z + z'U$ y sustituimos:

$$z + z'U = \frac{2z - 1}{z + 1} \Rightarrow z'U = \frac{2z - 1}{z + 1} - z \Rightarrow z' \frac{z + 1}{-z^2 + z - 1} = \frac{1}{U}$$

Integrando de ambos lados:

$$\int \frac{z + 1}{-z^2 + z - 1} dz = \int \frac{dU}{U} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{2z - 1}{z^2 - z + 1} dz - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} = \ln U$$

De donde:

$$-\frac{1}{2} \ln \left(z^2 - z + 1\right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2z - 1}{\sqrt{3}}\right) = \ln U$$

$$e^{-\sqrt{z^2 - z + 1}} - e^{\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2z - 1}{\sqrt{3}}\right)} = U$$

4

$$e^{-\sqrt{\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2 - \frac{y+1}{x-2} + 1}} - e^{\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\left(\frac{y+1}{x-2}\right) - 1}{\sqrt{3}}\right)} = x - 2$$

Ejercicio 5 b

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$$

Notemos que el $ae = 1$ y $bd = 1$ y por lo tanto, no se puede resolver por el método anterior.

6 Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln(x)\right)dy = 0$$

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \ln(x)\right)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} + \left(y^3 - \ln(x)\right)y' = 0$$

Teniendo que:

$$\mu'(y) = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}\mu(y) \Rightarrow \mu'(y) = -\frac{2}{y}\mu(y)$$

entonces: resolviendo mediante variables separadas:

$$\frac{1}{\mu(y)}\mu'(y) = -\frac{2}{y}$$

$$\frac{1}{\mu(y)}\mu'(y) = -\frac{2}{y}$$

$$\int \frac{1}{\mu(y)}d\mu(y) = \int -\frac{2}{y}dy$$

$$\ln(\mu(y)) = -2\ln(y) + c_1$$

$$\mu(y) = \frac{e^{c_1}}{y^2} \Rightarrow \mu(y) = \frac{c_1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando por $\frac{1}{y^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{y^3 - \ln(x)}{y^2}y' = 0$$

Lo cual está de la forma:

$$\Psi_x(x,\ y) = M(x,\ y) = \frac{1}{xy}, \quad \Psi_y(x,\ y) = N(x,\ y) = \frac{y^3 - \ln(x)}{y^2}$$

donde si se dan las condiciones se tendrá:

$$\Psi_x + \Psi_y * y' = \frac{d\Psi(x,y)}{dx} = 0$$

y la solución general es: $\Psi(x, y) = 0$
verificando:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Calculando:

-
$$\frac{\partial M}{y}$$

$$\left(\frac{1}{xy}\right)'$$

Si x es una constante

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right)'$$

$$\frac{1}{x}\left(-1 \cdot y^{-1-1}\right)$$

$$-\frac{1}{xy}$$

- $$\frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\left(\frac{y^3 - \ln(x)}{y^2}\right)'$$
$$\frac{1}{y^2}\left(y^3 - \ln(x)\right)'$$
$$\frac{1}{y^2}\left(\left(y^3\right)' - (\ln(x))'\right)$$
como tratamos a y constante entonces:
$$\frac{1}{y^2}\left(0 - \frac{1}{x}\right)$$
$$-\frac{1}{xy^2}$$

Verdadero

Ahora solo queda encontrar:
$$\Psi(x, y)$$

así tenemos
$$\int N dy = \int \frac{y^3 - \ln(x)}{y^2} dy$$
$$\int -\frac{\ln(x)}{y^2} + y dy \Rightarrow -\int \frac{\ln(x)}{y^2} dy + \int y dy$$
$$-\left(-\frac{\ln(x)}{y}\right) + \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2}$$

Por lo tanto queda:
$$\Psi(x,\ y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} + \mu(x)$$

y para encontrar a μ
$$\left(\frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} + (x)\right)' \Rightarrow \left(\frac{\ln(x)}{y}\right)' + \left(\frac{y^2}{2}\right)' + \mu'(x) \Rightarrow \frac{1}{yx} + 0 + \mu'(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy} + \mu'(x)$$
$$\mu'(x) = 0 \Rightarrow\Rightarrow (x) = c_1$$
$$\Psi(x,\ y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} + c_1$$

Entonces:
$$\frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} + c_1 = c_2 \Rightarrow \frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} = c_1$$
$$\Rightarrow$$

Ec implicita
$$f(x,y)\frac{\ln(x)}{y} + \frac{y^2}{2} = c_1$$

7 Encuentre el valor de b para el cual la ecuación es exacta y resuélvala para ese valor de b.

$$(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$$

Solución: Sea $M = xy^2 + bx^2y$ y $N = (x + y)x^2$. Las derivadas parciales deben ser iguales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 2xy + bx^2 = 3x^2 + 2xy$$

De donde:

$$bx^2 = 3x^2 \Rightarrow b = 3$$

Tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xy^2 + 3x^2y \quad (*); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2y \quad (**)$$

Integrando la ecuación (*) respecto a x, tenemos:

$$F = y^2\frac{x^2}{2} + yx^3 + h(y)$$

Luego, al derivar respecto a y la función F e igualando a N :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = yx^2 + x^3 + h'(y) = x^3 + x^2y$$

Como $h'(y) = 0$, entonces h es constante. La solución es entonces:

$$F(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + yx^3 + C$$

8 Ejercicio 8

Demuestre que cualquier ecuación separable, es decir, de la forma

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

también es exacta.
Consideremos y,f, g funciones de tal forma que

$$f(x) + g(y)y' = 0$$

Al ser una ecuación separable se puede expresar como

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dy}$$

Tomamos la función F(x,y) tal que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy}$$

Dado a que f y g son funciones en una variable, entonces se cumple que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ por lo que se tiene una ecuación exacta.

9 Considere la ecuación

$$ty'' + 2y' + ty = 0$$

donde $y_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ es una solución, utilice el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución linealmente independiente y así obtenga la solución general.

Así tenemos lo siguiente:

$$y_2 = uy_1(t)$$
$$y_2' = u'y_1(t) + uy_1(t)'$$
$$y_2'' = u''y_1(t) + u'y_1(t)' + u'y_1(t)' + uy_1(t)''$$

Sustituyendo tenemos:

$$y_2 = u\left(\frac{sin(t)}{t}\right)$$
$$y_2' = u'\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + u\left(\frac{sin(t)}{t}\right)'$$
$$y_2'' = u''\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + 2\left[u'\left(\frac{sin(t)}{t}\right)'\right] + u\left(\frac{sin(t)}{t}\right)''$$

Y queda como:

$$y_2 = u\left(\frac{sin(t)}{t}\right)$$
$$y_2' = u'\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + u\left(\frac{t\cos\ (t) - \sin\ (t)}{t^2}\right)$$
$$y_2'' = u''\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + 2\left[u'\left(\frac{t\cos\ (t) - \sin\ (t)}{t^2}\right)\right] + u\left(-\frac{t^2\sin\ \ (t) + 2\,(t\cos\ \ (t) - \sin\ \ (t))}{t^3}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$t\left(u''\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + 2\left[u'\left(\frac{t\cos\ (t) - \sin\ (t)}{t^2}\right)\right] + u\left(-\frac{t^2\sin\ \ (t) + 2\,(t\cos\ \ (t) - \sin\ \ (t))}{t^3}\right)\right)$$
$$+2\left(u'\left(\frac{sin(t)}{t}\right) + u\left(\frac{t\cos\ (t) - \sin\ (t)}{t^2}\right)\right) + t\left(u\left(\frac{sin(t)}{t}\right)\right) = 0$$

Ahora reduciendo la ecuación tenemos:

$$u''\sin(t) + \frac{2u'(t\cos(t) - \sin(t))}{t} - \frac{u\left(t^2\sin(t) + 2\,(t\cos(t) - \sin(t))\right)}{t^2} + 2\left(\frac{u'\sin(t)}{t} + \frac{u\,(t\cos(t) - \sin(t))}{t^2}\right) + t\frac{u\sin(t)}{t}$$
$$+\frac{2u''\sin(t)}{t} + \frac{2u\,(t\cos(t) - \sin(t))}{t^2} + t\frac{u\sin(t)}{t}$$

factorizando: $\frac{2u'(t\cos(t) - \sin(t))}{t} + \frac{2u'\sin(t)}{t}$

$$u''\sin(t) + 2u'\cos(t) - \frac{u\left(t^2\sin(t) + 2\,(t\cos(t) - \sin(t))\right)}{t^2} + \frac{2u\,(t\cos(t) - \sin(t))}{t^2} + u\sin(t)$$

y finalmente factorizando: $-\frac{u\left(t^2\sin(t) + 2(t\cos(t) - \sin(t))\right)}{t^2} + \frac{2u(t\cos(t) - \sin(t))}{t^2}$

$$u'' \sin(t) + 2u' \cos(t) - u \sin(t) + u \sin(t) = 0$$
$$u'' \sin(t) + 2u' \cos(t) = 0$$

Así tenemos una ecuación más simple

$$u'' = -\frac{2\cos(t)\, u'}{\sin(t)}$$

$\Rightarrow$

$$v' = -\frac{2\cos(t)\, v}{\sin(t)}$$
$$\frac{1}{v} v' = -2\cot(t)$$
$$\int \frac{1}{v} dv = \int -2\cot(t)\, dt$$
$$\ln(v) = -2\ln(\sin(t)) + c_1$$
$$v = \frac{e^{c_1}}{\sin^2(t)}$$

Pero e^{c_1} es una constante en si misma por lo tanto

$$v = \frac{c_1}{\sin^2(t)}$$

entonces queda la ecuación principal:

$$u' = \frac{c_1}{\sin^2(t)}$$
$$u = \int \frac{c_1}{\sin^2(t)} dt$$
$$u = -c_1 \cot(t) + c_2$$

Finalmente queda:

$$y_2 = (c_1 \cot(t) + c_2)\,\frac{\sin(t)}{t}$$

Pero como c_1 y c_2 se pueden cumplir para la general de las soluciones entonces:

$$y = (C_1 \cot(t) + C_2)\,\frac{\sin(t)}{t}$$

10 Resuelva el PVI:

a) $y'' + 2y' + 2y = 0, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = 2$

Solución El problema es uno de coeficientes constantes. Si proponemos la solución $y = e^{rt}$, tenemos que:

$$e^{rt}\left(r^2 + 2r + 2\right) = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 + i; \quad r_2 = -1 - i$$

Las soluciones son entonces:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(-1+i)t} = e^{-t}[\cos(t) + i\sin(t)] \\ y_1 &= e^{(-1-i)t} = e^{-t}[\cos(t) - i\sin(t)] \end{aligned}$$

Al considerar las partes reales, la solución general es:

$$y = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\sin(t)$$

Para el PVI, sutituimos los valores que queremos:

$$2 = c_1 e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots(1)$$

La derivada de la función es:

$$y' = c_1 e^{-t}\sin(t) - c_2 e^{-t}\cos(t)$$

Al sustituir:

$$-2 = c_1 e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} - c_2 e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots(2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2):

$$0 = c_1 e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c_1 = 0$$

Con este valor, sustituyéndolo en (1), llegamos a que:

$$2 = c_2 e^{-\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}}e^{\pi/4} = c_2$$

La solución al PVI, es entonces:

$$y = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}e^{-t}\sin(t)$$

b) $9y'' - y, y(0) = 1, y'(0) = \frac{2}{3}$

Podemos componer la ecuación característica como sigue gracias a que es una ecuación lineal con coeficientes constantes:

$9\lambda^2 - 1 = 0$

Factorizando tenemos:

$(3\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} y \lambda_2 = \frac{1}{3}$

Así tenemos la solución general dada de la siguiente manera:

$$y = Ce^{\frac{x}{3}}, \frac{C_1}{e^{\frac{x}{3}}}$$

Resolviendo el PVI tenemos:

$$y = Ce^{\frac{x}{3}} | \frac{C_1}{c^{\frac{x}{3}}}$$
$$y' = \frac{Ce^{\frac{x}{3}}}{3} \frac{C_1}{3e^{\frac{x}{3}}}$$

Con $x = 0, y = 1y' = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{2e^{\frac{0}{3}}} C_4 = \frac{e^{\frac{0}{3}}}{2}$$
$$y = \frac{3e^{\frac{2}{3}\,\frac{0}{3}}}{2} = \frac{c^{\frac{0}{3}\,\frac{2}{3}}}{2}$$

11 Ejercicio 11

La ecuación de un Oscilador Armónico Simple está dada por

$$\frac{d^2s}{dt^2} + w^2 s = 0$$

- Encuentre la solución general de la forma s(t)=$C_1 s_1 + C_2 s_2$

  Se propone la solución $x(t) = e^{rt}$, evaluando en $L[x(t)]$ se tiene que:

$$r^2 e^{rt} + w^2 e^{rt} = 0 \rightarrow (e^{rt}(r^2 + w^2) = 0$$

  $\rightarrow r^2 = -w^2 \rightarrow r = iw$

  Por la ecuación de Euler ($e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$), setiene que el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{iwt}, e^{-iwt}\}$$

Entonces se tiene que:

$$Y_1(t) = e^{iwt} = \cos(wt) + i\sin(wt)$$
$$Y_2(t) = e^{iwt} = \cos(-wt) + i\sin(-wt) = \cos(wt) - i\sin(wt)$$

Tomando la parte real e imaginaria de cada YY_1 y Y_2 se obtiene que

$$gen(Y_1) = gen(Y_2) = \{\cos(wt), (wt)\}$$

Por lo que la solución general es

$$x(t) = C_1 \cos(wt), +C_2(wt) \tag{1}$$

- Muestre que al hacer $C_1 = A\sin(\delta)$ y $C_2 = A\cos(\delta)$ la solución se reduce a

$$S(t) = A\sin(wt + \delta)$$

Hacemos la sustitución en la ecuación 1 recordando que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ y se tiene que:

$$C_1 \cos(wt), +C_2(wt) = A\sin(\delta)\cos(wt), +A\cos(\delta)\sin(wt)$$
$$= A(\sin(\delta)\cos(wt) + \cos(\delta)\sin(wt)) = A\sin(wt + \delta)$$

12 Utilizando variación de parámetros determine una solución particular y escriba la solución general de la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1, -2$$
$$y_c = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

Solución Particular:

$$\Rightarrow y_1 = e^{-2t}\ ,\ y_2 = e^{-4t}\ ,\ g(t) = \frac{1}{1+e^{2t}}$$

$$W(y_1, y_2) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ -2e^{-2t} & -4e^{-4t} \end{pmatrix} = -e^{-2t} \cdot\ 4e^{-4t} + e^{-4t} \cdot\ 2e^{-2t}$$
$$= -2e^{-2t}e^{-4t} = -2e^{-6t}$$

$$W_1 = det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & e^{-4t} \\ \frac{1}{1+e^{2t}} & -4e^{-4t} \end{pmatrix} = 0 \cdot \left(-4e^{-4x}\right) - e^{-4t}\frac{1}{1+e^{2t}} = -\frac{e^{-4t}}{e^{2t}+1}$$

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & \frac{1}{1+e^{2t}} \end{pmatrix} = e^{-2t}\frac{1}{1+e^{2t}} - 0 \cdot \left(-2e^{-2t}\right) = \frac{e^{-2t}}{e^{2t}+1}$$

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dt = \frac{-1}{-2} \cdot \int \frac{\frac{e^{-4t}}{e^{2t}+1}}{e^{-6t}}dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}dt$$

sea $o = e^{2t} + 1$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}+1\right) = 2e^{2t}$$
$$\Rightarrow\ do = 2e^{2t}dt$$
$$\Rightarrow\ dt = \frac{1}{2e^{2t}}do$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2t}}{o} \cdot \frac{1}{2e^{2t}}do = \int \frac{1}{2o}do = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{o}do = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{o}do = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ln|o| = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x}+1\right|$$

$$u_2 = \int \frac{\frac{e^{-2t}}{e^{2t}+1}}{-2e^{-6t}}dt = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \int \frac{\frac{e^{-2t}}{e^{2t}+1}}{e^{-6t}}dt$$

sea $0 = e^{2t} + 1$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}+1\right) = 2e^{2t}$$
$$\Rightarrow\ do = 2e^{2t}dt$$
$$\Rightarrow\ dt = \frac{1}{2e^{2t}}do$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{4t}}{o} \cdot \frac{1}{2e^{2t}}do = \int \frac{e^{2t}}{2o}do = \int \frac{o-1}{2o}do = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} \cdot \int \frac{o-1}{o}du = -\frac{1}{4}\left(e^{2t}+1-\ln\left|e^{2t}+1\right|\right)$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (\frac{1}{4}\ln\left|e^{2t}+1\right|)e^{-2t} + (-\frac{1}{4}\left(e^{2t}+1-\ln\left|e^{2t}+1\right|\right))e^{-4t}$$

Solución General

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \left[(\frac{1}{4}\ln\left|e^{2t}+1\right|)e^{-2t} + (-\frac{1}{4}\left(e^{2t}+1-\ln\left|e^{2t}+1\right|\right))e^{-4t}\right]$$

$$y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\ln\left|e^{2t}+1\right| - \frac{1}{4}e^{-4t}\left(e^{2t}+1-\ln\left|e^{2t}+1\right|\right)$$

13 Determine la solución general de:

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin(m\pi x)$$

donde $\lambda > 0$ y $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, 2, \ldots .N$.

Solución. La ecuación homogénea es la misma que la del oscilador del ejercicio 11. La solución es entonces, la misma.

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Sea $g_m(x) = a_m \sin(m\pi x)$, para $m = 1, \ldots, N$. Ahora, encontramos una solución particular para cada m. Como $\lambda \neq m\pi$, podemos suponer que:

$$y_m = A_m \sin(m\pi x) + B_m \cos(m\pi x) \quad \ldots (1)$$

Derivando (1), se tiene que:

$$\begin{aligned} y'_m &= m\pi A_m \cos(m\pi x) - m\pi B_m \sin(m\pi x) \\ y''_m &= -m^2\pi^2 A_m \sin(m\pi x) - m^2\pi^2 B_m \cos(m\pi x) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos que:

$$-m^2\pi^2 A_m \sin(m\pi x) - m^2\pi^2 B_m \cos(m\pi x) + \lambda^2 \left(A_m \sin(m\pi x) + B_m \cos(m\pi x)\right) = a_m \sin(m\pi x)$$

Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -m^2\pi^2 A_m + \lambda^2 A_m & = a_m \\ -m^2\pi^2 B_m + \lambda^2 B_m & = 0 \end{cases}$$

Ahora, como $\lambda \neq m\pi \Rightarrow \lambda^2 \neq m^2\pi^2$, entonces:

$$A_m = \tfrac{a_m}{\lambda^2 - m^2\pi^2}; \quad B_m = 0$$

para todo $m = 1, \ldots, N$. Por lo tanto la solución particular es:

$$y_m = \tfrac{a_m}{\lambda^2 - m^2\pi^2} \sin(m\pi x)$$

Ahora, al sumar cada una de las N soluciones particuales, tenemos que la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t) + \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{\lambda^2 - m^2\pi^2} \sin(m\pi x)$$