Tarea 4 EDO

Juárez Torres Carlos Alberto
León Martínez Guadalupe
Ramírez Corona Isabel

29 de Mayo de 2022

Ejercicio 1. Verifique que la matriz

$$\Phi = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix},\ t > 0$$

es una matriz fundamental del sistema $y' = A(t)y$, con

$$A\left(t\right) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -3 & 3t \end{pmatrix},\ t > 0$$

PRIMERAMENTE $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}$

Si Φ es una matriz fundamental entonces para cada columna tenemos:

1.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}'$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}'$$

Verificando 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}'$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot\ t + 1 \cdot\ 1 \\ \left(-\frac{3}{t^2}\right)t + \frac{3}{t} \cdot\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por otro lado

$$\begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SE CUMPLE

Verificando a 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot\ t^3 + 1 \cdot\ 3t^2 \\ \left(-\frac{3}{t^2}\right)t^3 + \frac{3}{t} \cdot\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

y por otro lado

$$\begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

SE CUMPLE

Por lo tanto $\Phi(t)$ si es una matriz fundamental para el sistema descrito

Ejercicio 2. Pruebe que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) & -sin(t) \\ e^{-2t}sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo, no autónomo $y' = A(t)y$ donde:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2cos^2(t) & 1 - sin(2t) \\ 1 - sin(2t) & -2sin^2(t) \end{pmatrix}$$

Encuentre la inversa $\Phi(t)$ y use el método de variación de parámetros para resolver el sistema no homogéneo $y' = A(t)y + f(t)$ donde

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Con condición inicial $y(0) = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$

Sol : Veamos que $\Phi(t)$ es fundamental, con ayuda de las identidades trigonométricas reescribiremos a A como sigue:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -cos(2t) - 1 & -sin(2t) \\ 1 - sin(2t) & cos(2t) - 1 \end{pmatrix}$$

Para el primer vector columna se tiene:

$$y' = \begin{pmatrix} -e^{-2t}sin(t) - 2e^{-2t}cos(t) \\ e^{-2t}cos(t) - 2e^{-2t}sin(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -sin(t) - 2cos(t) \\ cos(t) - 2sin(t) \end{pmatrix}$$

Para la multiplicación $A(t)y$ y recordando que cos(2t)= $2cos^2(t) - 1$ y $sin(2t) = 2sin(t)cos(t)$, obtenemos:

$$A(t)y = \begin{pmatrix} -cos(2t) - 1 & -sin(2t) \\ 1 - sin(2t) & cos(2t) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) \\ e^{-2t}sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} -cos(t)cos(2t) - cos(t) - sin(2t)sin(t) \\ cos(t) - cos(t)sin(2t) + sin(t)cos(2t) - sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \left(2cos(t)cos^2(t) - 2sin^2(t)cos(t) - 2cos(t)\right)$$

$$= e^{-2t} \left(2cos(t)(cos^2(t) - sin^2(t)) - 2cos(t)\right)$$

Ahora para el segundo vector columna se tiene que:

$$y' \begin{pmatrix} -cos(t) \\ -sin(t) \end{pmatrix}$$

Mientras que la multiplicación $A(t)y$, nos da:

$$A(t)y = \begin{pmatrix} -cos(2t) - 1 & -sin(2t) \\ 1 - sin(2t) & cos(2t) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -cos(t) \\ -sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cos(t)cos(2t) + cos(t) + sin(t)sin(2t) \\ -cos(t) + cos(t)sin(2t) + sin(t) - sin(t)cos(2t) \end{pmatrix}$$

Notemos que $det(\Phi) = e^{-2t}cos^2(t) + e^{-2t}sin^2(t) = e^{-2t}$. Luego la inversa está dada por:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -e^{-2t}sin(t) & e^{-2t}cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}cos(t) & e^{2t}sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Entonces, $\Phi^{-1}(t)f(t)$ es:

$$\Phi^{-1}(t)f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}cos(t) & e^{2t}sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}cos(t) + sin(t) \\ e^{-2t}cos(t) - sin(t) \end{pmatrix}$$

La integral entonces es:

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds \begin{pmatrix} \int_0^t e^{2s}cos(s)ds + \int_0^t sin(s)ds \\ \int_0^t e^{-2s}cos(s)ds - \int_0^t sin(s)ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}sin(t)+(2e^{2t}-5)cos(t)+3}{5} \\ \frac{e^{-2t}(sin(t)+(5e^{2t}-2)cos(t))-3}{5} \end{pmatrix}$$

Siguiendo los cálculos obtenemos $\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$:

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) & -sin(t) \\ e^{-2t}sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}sin(t)+(2e^{2t}-5)cos(t)+3}{5} \\ \frac{e^{-2t}(sin(t)+(5e^{2t}-2)cos(t))-3)}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}(3cos(t)-2cos(2t)+sin(2t)-3)+cos(2t)+3sin(t)-2sin(2t)+1}{5} \\ \frac{e^{-2t}(3sin(t)-cos(2t)-2sin(2t)-1)-3cos(t)+2cos(2t)+sin(2t)+3}{5} \end{pmatrix}$$

Ahora para calcular la primer parte de la fórmula, la evaluación $\Phi^{-1}(0)$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} e^{2t}cos(t) & e^{2t}sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} e^{0}cos(0) & e^{0}sin(0) \\ -sin(0) & cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos que:

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0 = \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) & -sin(t) \\ e^{-2t}sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) \\ e^{-2t}sin(t) \end{pmatrix}$$

Así la solución al problema del valor inicial es:

$$x = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$x = \begin{pmatrix} e^{-2t}cos(t) \\ e^{-2t}sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}(3cos(t)-2cos(2t)+sin(2t)-3)+cos(2t)+3sin(t)-2sin(2t)+1}{5} \\ \frac{e^{-2t}(3sin(t)-cos(2t)-2sin(2t)-1)-3cos(t)+2cos(2t)+sin(2t)+3}{5} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}(8cos(t)-2cos(2t)+sin(2t)-3)+cos(2t)+3sin(t)-2sin(2t)+1}{5} \\ \frac{e^{-2t}(8sin(t)-cos(2t)-2sin(2t)-1)-3cos(t)+2cos(2t)+sin(2t)+3}{5} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Encuentre la solución general de:

- $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x$

Determinamos los valores propios de A, entonces

$$|A - \lambda I| = |\begin{pmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{pmatrix}| = (-3-\lambda)(-2-\lambda) - (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda+4)(\lambda+1) = 0$$

Entonces $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -1$

Caso con $\lambda_1 = -4$

$$A - (-4)I = A + 4I = \begin{pmatrix} -3+4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos $ker(A + 4I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 + \sqrt{2}v_2 = 0$$
$$\sqrt{2}v_1 + 2v_2 = 0$$

Por lo tanto $u_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces $x_1 = e^{-4t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$

Caso con $\lambda_1 = -1$

$$A - (-1)I = A + I = \begin{pmatrix} -3+1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Buscamos $ker(A + I)$

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2v_1 + \sqrt{2}v_2 = 0$$
$$\sqrt{2}v_1 - 1v_2 = 0$$

Podemos tomar que $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces $x_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-4t} & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \\ e^{-4t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Y la solución es

$$X = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1\begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$

Determinamos los valores propios de A, entonces

$$|A - \lambda I| = |\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}| = (3-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(4) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Usando la fórmula general obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 - \sqrt{-16}}{2} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 1 - 2i \\ \lambda_2 &= 1 + 2i \end{aligned}$$

Caso con $\lambda_1 = 1 - 2i$

$$A - (1-2i)I = \begin{pmatrix} 3-(1-2i) & -2 \\ 4 & -1-(1-2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i & -2 \\ 4 & -2+2i \end{pmatrix}$$

Buscamos $ker(A - (1-2i)I)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2+2i & -2 \\ 4 & -2+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (2+2i)v_1 - 2v_2 &= 0 \\ 4v_1 + (-2+2i)v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos tomar que $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces $x_1 = e^{1-2i}\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(2t) - i\sin(2t))$

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^t\frac{1-i}{2}\cos(2t) - e^t\frac{1-i}{2}i\sin(2t) \\ e^t\cos(2t) - e^t i\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t(\cos(2t) + \sin(2t)) \\ e^t\cos(2t) \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} e^t(\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t)) \\ e^t\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Por lo que encontramos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(2t) + \sin(2t)) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \\ x_2 &= e^t\begin{pmatrix} -(\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t)) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t\frac{1}{2}(\cos(2t) + \sin(2t)) & -e^t(\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t)) \\ e^t\cos(2t) & -e^t\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Y la solución es

$$X = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1\begin{pmatrix} e^t\frac{1}{2}(\cos(2t) + \sin(2t)) \\ e^t\cos(2t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^t(\frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t)) \\ -e^t\sin(2t) \end{pmatrix}$$

- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$

Determinamos los valores propios de A, entonces

$$|A - \lambda I| = |\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}| = (3-\lambda)(-1-\lambda) - (1)(-4) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$= (\lambda - 1)^2 = 0$$

Entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Tomamos $\lambda = 1$

$$A - (1)I = A - I = \begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Buscamos $ker(A - I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2v_1 - 4v_2 = 0$$
$$v_1 - 2v_2 = 0$$

Podemos tomar que $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces $x_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

Debido a que $\lambda_1 = \lambda_2$, buscamos el vector propio generalizado.

$$(A - I)u_2 = u_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2v_1 + \sqrt{2}v_2 = 2$$
$$\sqrt{2}v_1 + 3v_2 = 1$$

Podemos tomar que $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces

$$x_2 = e^t \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 2t + 3 \\ t + 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t + 3e^t \\ e^t & te^t + e^t \end{pmatrix}$$

Y la solución es

$$X = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2te^t + 3e^t \\ te^t + e^t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Considere el sistema que describe un circuito electrico:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}$$

- Demuestre que los valores propios son reales e iguales si $L = R^2C$ Calculando el determinante de $\|A - \lambda I\| = 0$

  $\Rightarrow$

  $$det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

  $$\Rightarrow = \lambda(\lambda + \frac{1}{RC}) + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda^2 \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

  $$\lambda = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

  donde tenemos que los valores propios son Reales e iguales entonces tenemos:

  $$\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}} = 0 \Rightarrow L = 4R^2C$$

- Suponga que $R = 1\Omega$, $C = 1F$, y $L = 4Hz$ Suponga también que $i(0) = 1$ ampere y $v(0) = 2$V, encuentre $I(t)$ y $V(t)$ Tengamos que:

  $$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v \Rightarrow \int di = \frac{v}{L}\int dt \Rightarrow i\,(t) = \frac{v}{L}t + C$$

  Sustituyendo tenemos:

  $$i(t) = 1 + 0.25t$$

  $$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-i}{c} - \frac{v}{RC} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{-i}{C} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + v = -i$$

  Lo cual es una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer orden y con factor integral:

  F.I=$e^{\int dt} = e^t$

  $$\Rightarrow v(F.I) = \int -i(F.I)dt + c \Rightarrow ve^t = \int -i(e^t)dt + c$$

  $$\Rightarrow ve^t = -ie^t + C, v(0) = 1 \Rightarrow 1 = -i + c$$

  $$v) - i + ce^{-t}, i(0) = 1 \Rightarrow C = 2$$

  $$v(t) = -1 + 2e^{-t}$$

Ejercicio 5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Encuentre A^2, A^3 y A^4

  Usando la definición:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda + \lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 + 2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 + 3\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

- Demuestre que:

$$A^n \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

  Demostraremos por inducción.

  Para el caso base podemos usar lo demostrado en el inciso anterior, supongamos que se cumple para $k \geq 1$, finalmente por definición y por la hipótesis inductiva tenemos que:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & \lambda^k + k\lambda^k \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

- Determine e^{At}

  Por definición y el inciso anterior:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \frac{t^0}{0!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1} t^k}{k!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & t \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & t \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$