Tarea 1

Juárez Torres Carlos Alberto

February 20, 2023

1 Sea $n \geq 2$ un entero. Por Algebra Superior I sabemos que el anillo de los enteros módulo $n(\mathbb{Z}_n)$ es un anillo conmutativo con unidad. Demuestre que $\mathbb{Z}_n$ es campo si y sólo si n es primo.

Para demostrar que el anillo de los enteros módulo n, denotado por Z_n, es un campo si y sólo si n es primo, necesitamos demostrar dos direcciones.

Dirección hacia adelante: Supongamos que $\mathbb{Z}_n$ es un campo. Entonces, para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{Z}_n$, existe un elemento b en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Esto implica que a y n son coprimos, es decir, $\text{MCD}(a, n) = 1$. De lo contrario, no habría un elemento b en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Entonces, si n no es primo, existen dos enteros positivos a y b tales que $a < n$, $b < n$, y $n = ab$. Entonces, $\text{MCD}(a, n) = \text{MCD}(b, n) = 1$. Pero esto significa que ab y n tienen factores comunes y por lo tanto, no puede existir un elemento b en $\mathbb{Z}_n$ tal que $ab = 1$. Esto contradice la suposición de que $\mathbb{Z}_n$ es un campo. Por lo tanto, n debe ser primo.

Dirección hacia atrás: Supongamos que n es primo. Entonces, para cualquier $a \neq 0$ en $\mathbb{Z}_n$, $\text{MCD}(a, n) = 1$. Por lo tanto, existe un entero b tal que $ab1(modn)$, que implica que $ab - 1$ es múltiplo de n. Esto significa que a tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_n$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_n$ es un campo.

$\therefore \mathbb{Z}_n$ es campo $\Leftrightarrow$ n es primo.

2 Demuestre que $\mathbb{Q}(i) = a + bi|a, b \in \mathbb{Q}$ es un subcampo de $mathbbC$.

- $\mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{Q}(i)$ contiene la identidad aditiva de $\mathbb{C}$.
- Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$.

2.1 Demostrar que $\mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$

- Suma: Sean $z_1 = a_1 + b_1 i y z_2 = a_2 + b_2 i$ dos elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su suma es $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, que es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.
- Resta: De manera similar, si z_1 y z_2 son elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su diferencia es $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, que también es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.
- Producto: Si z_1 y z_2 son elementos en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su producto es $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, que es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$

$\therefore$ $\mathbb{Q}(i)$ es un subanillo de $\mathbb{C}$

2.2 $\mathbb{Q}(i)$ contiene la identidad aditiva de $\mathbb{C}$

Es $0 + 0i$. Por lo tanto, esta condición se cumple.

2.3 Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$.

Cada elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$ tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}(i)$. Si $z = a + bi$ es un elemento no nulo en $\mathbb{Q}(i)$, entonces su inverso multiplicativo es $z^{-1} = 1/(a + bi)$. Para encontrar el inverso, podemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de z, que es $a - bi$.

$$\Rightarrow z^{-1} = (1/(a + bi)) * ((a - bi)/(a - bi)) = (a - bi)/(a^2 + b^2)$$

Como a y b son racionales, $a^2 + b^2$ es un número racional positivo. Por lo tanto, $(a - bi)/(a^2 + b^2)$ es un número complejo en $\mathbb{Q}(i)$.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}(i)$ cumple las tres condiciones para ser un subcampo de $\mathbb{C}$.

3 Sea S un conjunto y sea K^S el conjunto de todas las funciones de S en $K : K^S = \{f : S \to K | f$ es funcion$\}$. Demuestre que K^S con las operaciones usuales es un espacio vectorial sobre el campo K.

Veamos que estas propiedades se cumplen:

- La suma es cerrada: Para cualquier par de funciones f y g en K$^S, lafunciónf+gdefinidapor(f+g)(s) = f(s) + g(s)paratodosenSesunafuncióndeSenK.Lasumaesconmutativa : (f+g)(s) = f(s) + g(s) = g(s) + f(s)paratodosenS.$

- La suma es asociativa: ((f + g) + h)(s) = (f + g)(s) + h(s) = f(s) + g(s) + h(s) = f(s) + (g + h)(s) = (f + (g + h))(s) para todo s en S.

- K$^S tieneunelementoneutrodesuma : Lafuncióncero, 0 : SßKtalque0(s) = 0paratodosenSeslafunciónneutradesuma$
$Paracualquierfunciónf enK^S, lafunción-ftalque(-f)(s) = -f(s)paratodosenSeselinversoaditivodef.$

- La multiplicación por escalar es cerrada: Para cualquier función f en K$^S ycualquierescalaraenK, lafuncióna f definida$
$a*f(s)paratodosenSesunafuncióndeSenK.Lamultiplicaciónporescalaresdistributivaconrespectoalasumadevectore$
$(a * (f + g))(s) = a * (f(s) + g(s)) = af(s) + ag(s) = (af + ag)(s)paratodosenS.$

- La multiplicación por escalar es distributiva con respecto a la suma de escalares: ((a+b)f)(s) = (a+b)f(s) = af(s) + bf(s) = (af + bf)(s) para todo s en S.

- La multiplicación por escalar es asociativa: ((ab)f)(s) = abf(s) = a*(bf(s)) = (a*(b*f))(s) para todo s en S.

- K$^S tieneunelementoneutrodemultiplicación : Lafunciónidentidad, 1 : SßKtalque1(s) = 1paratodosenSeslafunción$
  Por lo tanto, K$^S cumplelasdiezpropiedadesnecesariasparaserunespaciovectorialsobreelcampoK.$

4 Consideremos el intervalo cerrado [a, b] $\subset Rydenotemospor\mathcal{C} = \mathcal{C}[a,b]alconjuntodetodaslasfuncionescontinuasde[a,b]enlosreales.Similarme$ $\mathcal{D}[a,b]e\mathcal{I} = \mathcal{I}[a,b]alosconjuntosdetodaslasfuncionesde[a,b]enlosrealesquesea$

Primero, demostraremos que C es un subespacio vectorial de R[a, b]. Sean f, g C y , R, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma f + g es continua en [a, b] ya que es la suma de dos funciones continuas en [a, b]. Por lo tanto, f + g C.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función f es continua en [a, b] ya que es una función continua multiplicada por un escalar . Por lo tanto, f C.
- Contiene al vector cero: La función cero, 0: [a, b] $\rightarrow$ R, definida como 0(x) = 0 para todo x en [a, b], es continua y pertenece a C.

Por lo tanto, C es un subespacio vectorial de R[a, b].
Luego, demostraremos que D es un subespacio vectorial de C. Sean f, g D y , R, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma f + g es derivable en [a, b] ya que es la suma de dos funciones derivables en [a, b]. Por lo tanto, f + g D. Además, como f y g son continuas en [a, b], la suma f + g es continua en [a, b], por lo que f + g C.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función f es derivable en [a, b] ya que es una función derivable multiplicada por un escalar . Por lo tanto, f D. Además, como f es continua en [a, b], la función f es continua en [a, b], por lo que f C.
- Contiene al vector cero: La función cero, 0: [a, b] $\rightarrow$ R, definida como 0(x) = 0 para todo x en [a, b], es derivable e integrable, por lo que 0 D y 0 C.

Por lo tanto, D es un subespacio vectorial de C.

Finalmente, demostraremos que C es un subespacio vectorial de I. Sean f, g C y , R, entonces tenemos que:

- Cerradura bajo la suma: La suma f + g es integrable en [a, b] ya que es la suma de dos funciones continuas en [a, b]. Por lo tanto, f + g I.
- Cerradura bajo la multiplicación por escalar: La función f es integrable en [a, b] ya que es una función continua multiplicada por un escalar . Por lo tanto, f I.
- Contiene al vector cero: La función cero, 0: [a, b] $\rightarrow$ R, definida como 0(x) = 0 para todo x en [a, b], es integrable, por lo que 0 I.

Por lo tanto, C es un subespacio vectorial de I