ejercicio 6.

- Sea la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

inciso a.

- Manipulando la función f da cuatro variantes de ella, de tal forma que se pueda ver como una función $f(x) = g_i(x) - x$ de punto fijo para $i = 1, 2, 3, 4$.

solución.

1. $x = x^4 + 2x^2 - 3 \rightarrow g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

2. $x^4 = -2x^2 + x + 3$

$x = \sqrt[4]{-2x^2 + x + 3} \rightarrow g_2(x) = \sqrt[4]{-2x^2 + x + 3}$

3. $2x^2 = -x^4 + x + 3$

$x^2 = \frac{-x^4 + x + 3}{2}$

$x = \sqrt{\frac{(-x^4 + x + 3)}{2}} \rightarrow g_3(x) = \sqrt{\frac{(-x^4 + x + 3)}{2}}$

4. $2x^2 = -x^4 + x + 3$

$2x(x) = -x^4 + x + 3$

$x = \frac{(-x^4 + x + 3)}{2x} \rightarrow g_4(x) = \frac{(-x^4 + x + 3)}{2x}$

inciso b.

- De cada una de las funciones realizar 4 iteraciones del método de punto fijo con $x_0 = 1$.

Solución.

FUNCIÓN 1 $g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

$x_0 = 1$

ITERACIÓN 1

$g_1(x_0) = (1)^4 + 2(1)^2 - 3 = 0$

- $x_1 = 0$ error = —

ITERACIÓN 2

$g_1(x_1) = (0)^4 + 2(0)^2 - 3 = -3$

$x_2 = -3$ error = 1

ITERACIÓN 3

$g_1(x_2) = (-3)^4 + 2(-3)^2 - 3 = 96$

$x_3 = 96$ error = 1.03125

ITERACIÓN 4

$g_1(x_3) = (96)^4 + 2(96)^2 - 3 =$

$x_4 = 84953085$

error = 1

FUNCIÓN 2 $g_2(x) = \sqrt[4]{-2x^2 + x + 3}$

$x_0 = 1$

ITERACIÓN 1

$g_2(x_0) = \sqrt[4]{-2(1)^2 + 1 + 3} = 1.189$

$x_1 = 1.189$ error = 0.16

ITERACIÓN 2

$g_2(x_1) = \sqrt[4]{-2(1.189)^2 + 1.189 + 3} = 1.08$

$x_2 = 1.08$ error = 0.101

ITERACIÓN 3

$g_2(x_2) = \sqrt[4]{-2(1.08)^2 + 1.08 + 3} = 1.15$

$x_3 = 1.15$ error = 0.061

ITERACIÓN 4

$g_2(x_3) = \sqrt{-2(1.15)^2 + 1.15 + 3}$

$g_2(x_3) = 1.108$

$x_4 = 1.108$.

error = 0.038

fórmula para calcular el error

$$\text{error} = \left| \frac{x_k - x_{k+1}}{x_{k+1}} \right|$$

$\boxed{\text{FUNCIÓN 3}}$ $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{(-x^4 + x + 3)}{2}}$

$x_0 = 1$

ITERACIÓN 1

$g_3(x_0) = \sqrt{\dfrac{(-(1)^4 + (1) + 3)}{2}} = 1.225$

$x_1 = 1.225$ error $= 0.184$

ITERACIÓN 2

$g_3(x_1) = \sqrt{\dfrac{-(1.225)^4 + 1.225 + 3}{2}} = 0.994$

$x_2 = 0.994$ error $= 0.2324$

ITERACIÓN 3

$g_3(x_2) = \sqrt{\dfrac{-(0.994)^4 + 0.994 + 3}{2}} = 1.23$

$x_3 = 1.23$ error $= 0.192$

ITERACIÓN 4

$g_3(x_3) = \sqrt{\dfrac{-(1.23) + 1.23 + 3}{2}} = 0.987$

$x_4 = 0.987$ error $= 0.246$

$\boxed{\text{FUNCIÓN 4}}$ $g_4(x) = \dfrac{-x^4 + x + 3}{2x}$

$x_0 = 1$

ITERACIÓN 1

$g_4(x_0) = \dfrac{-(1)^4 + 1 + 3}{2(1)} = 1.5$

$x_1 = 1.5$ error $= 0.333$

ITERACIÓN 2

$g_4(x_1) = \dfrac{-(1.5)^4 + 1.5 + 3}{2(1.5)} = -0.1875$

$x_2 = -0.1875$ error $= 9$

ITERACIÓN 3

$g_4(x_2) = \dfrac{-(-0.1875)^4 + 3 - 0.1875}{2(-0.1875)} = -7.49$

$x_3 = -7.497$ error $= 0.975$

ITERACIÓN 4

$g_4(x_3) = \dfrac{-(-7.49)^4 - 7.49 + 3}{2(-7.49)} = 210.96$

$x_4 = 210.96$ error $= 1.04$

inciso c.

- Calcular la derivada de $g_i(x)$ y decir si el método converge para estas funciones.

solución.

$\boxed{\text{FUNCIÓN 1}}$ $g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3$, su derivada es, $g_1'(x) = 4x^3 + 4x$

→ Buscamos un intervalo en el que $|g_1'(x)| = |4x^3 + 4x| < 1$

→ $-1 < 4x^3 + 4x < 1$ → $-1 < 4(x^3 + x) < 1$

→ $-\frac{1}{4} < x^3 + x < 1$ — resolvemos → $-0.237 < x < 0.237$

→ Así que $g_1(x)$ converge en el intervalo $(-0.237, 0.237)$

- Tomamos un x_0 en el intervalo, $x_0 = 0$

  → $g_1(x_0) = (0)^4 + 2(0)^2 - 3 = -3$ → $x_1 = -3$

  Se sale del intervalo donde se cumple que $|g_1'(x)| < 1$,

→ El método no converge.

FUNCIÓN 2 $\quad g_2(x) = \sqrt[4]{-2x^2 + x + 3} = (-2x^2 + x + 3)^{1/4}$

→ Su derivada es: $g_2'(x) = \dfrac{1}{4(-2x^2+x+3)^{3/4}} \dfrac{d}{dx}(-2x^2 + x + 3)$

$$= \frac{1}{4(-2x^2 + x + 3)^{3/4}}(-4x + 1)$$

→ $g_2'(x) = \dfrac{-4x+1}{4(-2x^2+x+3)^{3/4}}$

→ Estamos buscando intervalo para el cual se cumpla que $|g_2'(x)| < 1$

→ $-1 < \dfrac{-4x+1}{4(-2x^2+x+3)^{3/4}} < 1$ (utilizamos Wolfram para resolver)

$-0.773 < x < 1.27$

→ Así que $g_2(x)$ converge en $(-0.773, 1.27)$.

→ Tomamos un valor en el intervalo, $x_0 = 1.2$

→ $g_2(x_0) = \sqrt[4]{-2(1.2)^2 + 1.2 + 3} = 1.07$ → $x_1 = 1.07$

→ $g_2(x_1) = \sqrt[4]{-2(1.07)^2 + 1.07 + 3} = 1.154$ → $x_2 = 1.154$

→ $g_2(x_2) = \sqrt[4]{-2(1.154)^2 + 1.154 + 3} = 1.104$ → $x_3 = 1.104$

Si hacemos: $f(x_3) = (1.104)^4 + 2(1.104)^2 - 1.104 - 3$

$f(x_3) = -0.18 \approx 0$

→ Vemos que el método sí converge para $g_2(x) = \sqrt[4]{-2x^2 + x + 3}$.

$\boxed{\text{FUNCIÓN 3}}$ $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{(-x^4 + x + 3)}{2}}$

→ su derivada es: $g_3'(x) = \dfrac{1}{2\left(\frac{-x^4+x+3}{2}\right)^{1/2}} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x^4 + x + 3}{2}\right)$

$g_3'(x) = \dfrac{1}{2\left(\frac{-x^4+x+3}{2}\right)^{1/2}} \dfrac{-4x^3+1}{2}$ → $g_3'(x) = \dfrac{-4x^3+1}{2\sqrt{2}\sqrt{-x^4+x+3}}$

→ Buscamos un intervalo tal que $|g_3'(x)| < 1$, para ello usamos Wolfram

para resolver $-1 < \dfrac{-4x^3+1}{2\sqrt{2}\sqrt{-x^4+x+3}} < 1$

→ $-0.862 < x < 1.11$

→ Así que $g_3(x)$ converge en el intervalo $(-0.862, 1.11)$.

→ Tomamos un x_0 inicial en el intervalo; $x_0 = 1.1$ → $f(x_0) = -0.21 \approx 0$

- $g_3(x_0) = 1.14$ → $x_1 = 1.14$, $f(x_1) = 0.22 \approx 0$

→ El método sí converge para $g_3(x)$.

$\boxed{\text{FUNCIÓN 4}}$ $g_4(x) = \dfrac{-x^4+x+3}{2x}$

→ su derivada es $g_4'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x^4+x+3}{x}\right)$

$$g_4'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d}{dx}(-x^4+x+3)x - \frac{d}{dx}(x)(-x^4+x+3)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(-4x^3+1)x - 1\cdot(-x^4+x+3)}{x^2}$$

$$g_4'(x) = \frac{-3x^4-3}{2x^2}$$

→ Buscamos intervalo tal que $|g_4'(x)| < 1$

- Usamos Wolfram para resolver:

$$-1 < \frac{-3x^4-3}{2x^2} < 1 \quad \rightarrow -0.895 < x < -0.421$$

→ Así que $g_4(x)$ converge en el intervalo $(-0.895, -0.421)$.

→ Tomamos a un punto inicial en el intervalo, $x_0 = -0.88$, $f(x_0) = 0.028 \approx 0$

→ $g_4(x_0) = -0.863 = x_1$, $f(x_1) = -0.087 \approx 0$

→ El método sí converge para $g_4(x)$, pues cada vez nos aproximamos más a $f(x) = 0$.