

ejercicio 14.

- Supongamos que se desea desarrollar un método iterativo para calcular la raíz cuadrada de un número positivo y , de manera equivalente, resolver la ecuación no lineal

$f(x) = x^2 - y = 0$ dado y . Dadas las funciones g_1, g_2 listadas a continuación, dan un problema equivalente de punto fijo a $f(x) = 0$. Para cada función determinar si la iteración de punto fijo correspondiente dado $x_{k+1} = g_i(x_k)$ es convergente localmente a \sqrt{y} si $y = 3$. Explicar la razón en cada caso.

inciso a.

- $g_1(x) = y + x - x^2$

→ como $y = 3$, tenemos que $g_1(x) = 3 + x - x^2$

→ la derivada es $g_1'(x) = 1 - 2x$

→ buscamos intervalo tal que $|g_1'(x)| < 1$, así que

$$|1 - 2x| < 1 \rightarrow -1 < 1 - 2x < 1 \rightarrow -2 < -2x < 0 \rightarrow 1 > x > 0$$

→ Por lo que $g_1(x)$ converge en el intervalo $(0, 1)$.

→ Tomamos un x_0 en el intervalo, $x_0 = 0.5 \rightarrow g_1(x_0) = 3.25 = x_1$

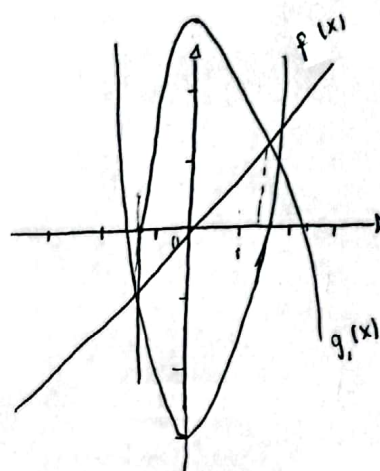
→ $x_1 = 3.25 \rightarrow g_1(x_1) = -4.31 = x_2$ ← notamos que nuestro x_2 se sale del intervalo para el cual

→ $x_2 = -4.31 \rightarrow g_1(x_2) = -19.886$ ← $|g_1'(x)| < 1$

⋮

→ Podemos afirmar que el método de punto fijo no converge para $g_1(x)$, pues no se cumple que

$x_{k+1} \rightarrow \sqrt{3} = \text{raíz de } f.$



inciso b.

$$\bullet g_2(x) = 1 + x - x^2/y$$

$$\rightarrow \text{como } y = 3, \quad g_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{3}$$

$$\rightarrow \text{su derivada es } g_2'(x) = 1 - \frac{2}{3}x$$

\rightarrow buscamos intervalo tal que $|g_2'(x)| < 1$, entonces:

$$-1 < g_2'(x) < 1 \rightarrow -1 < 1 - \frac{2}{3}x < 1 \rightarrow -2 < -\frac{2}{3}x < 0$$

$$\rightarrow 3 > x > 0$$

$\rightarrow g_2(x)$ converge en el intervalo $(0, 3)$.

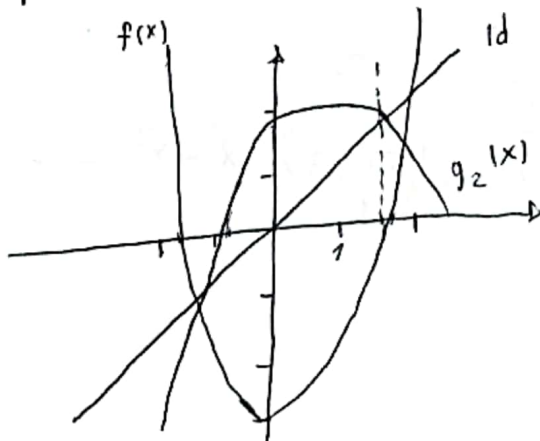
\rightarrow Tomamos un x_0 en el intervalo, por ejemplo, $x_0 = 1.5$

$$\rightarrow g_2(x_0) = 1.75 \rightarrow x_1 = 1.75$$

$$\rightarrow g_2(x_1) = 1.729 \rightarrow x_2 = 1.729$$

$$\rightarrow g_2(x_2) = 1.7324 \rightarrow x_3 = 1.7324 \approx \sqrt{3}$$

\rightarrow Así que podemos afirmar que $x_{k+1} = g_2(x_k) \rightarrow \sqrt{3}$



inciso c.

• ¿Cuál es la función de la iteración de punto dada por el método de Newton para este problema en particular?

→ Sabemos que si $f(x) = 0$ la función g está dada por $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\rightarrow f(x) = x^2 - 3 = 0 \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x$$

$$\rightarrow g(x) = x - \frac{x^2 - 3}{2x} = \frac{2x^2 - (x^2 - 3)}{2x}$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{x^2 + 3}{2x} \quad \text{es la iteración de punto fijo dada por el}$$

método de Newton.