Notas Variable Compleja

kriptonita

February 4, 2024

Chapter 1

Complejos

1.1 Generalidades

Definition 1.1.1 – Campo de los complejos Al campo $\mathbb{C}$ lo llamaremos el plano complejo y a sus elementos números complejos.

Además $\forall z = a + ib$ definimos:

- La parte real de z como $\text{Re} \in z = a$
- La parte imaginaria de z como $\text{Im}z = b$

NOTA: A los números complejos z tales que $\text{Re}z = 0$, se les denominará imaginarios puros.

Definition 1.1.2 – Conjugado Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$, definimos el conjugado de z como $\underline{z} = a - ib$

1.2 Operaciones aritméticas

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ definimos:

- RESTA: $z - w = z + (-w)$
- DIVISIÓN: Si$w \neq 0$ entonces $\frac{z}{w} = zw^{-1}$

1.2.1 Proposición

Sea $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $\underline{z \pm w} = \underline{z} \pm \underline{w}$
2. $\underline{zw} = \underline{z} \cdot \underline{w}$
3. Si $z \neq 0$, $\underline{z^{-1}} = \underline{z}^{-1}$
4. Si $w \neq 0$, $\underline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\underline{z}}{\underline{w}}$
5. $\underline{\underline{z}} = z$
6. z es un número real, si y solo si $\underline{z} = z$

1.3 Campo de los número complejos

Sea $\mathbb{R}^{\nvDash}, +, \circ$, donde:
$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$\cdot \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

1.3.1 Proposición

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo donde:

- Neutro aditivo $0 = (0, 0)$
- Neutro Multiplicativo $1 = (1, 0)$
- Inverso aditivo $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \to -z = (-a, -b)$
- Inverso Multiplicativo $\forall z = (a, b) \neq 0 \to z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

Observación: $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \approx a + b$, además $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \approx ab$

Si consideramos $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}\}$ entonces $(A, +, \cdot)$ es un *sub-conjunto* de $\mathbb{C}$. De esta manera la función:

$$f : \mathbb{R} \to A, f(a) = (a, 0)$$

es un isomorfismo de campos, es decir:

- f es biyectiva
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a) + f(b)$