Notas Variable Compleja

kriptonita

February 9, 2024

Chapter 1

Presentación

1.1 Clases:

Lunes - Martes - Miercoles

1.2 Classroom:

Presentación.

1.3 Evaluación:

4 tareas examen (integrantes ≤ 5), punto extra al entregar en $\LaTeX$.

Chapter 2

Complejos

2.1 Generalidades

Definition 2.1.1 – Campo de los complejos Al campo $\mathbb{C}$ lo llamaremos el plano complejo y a sus elementos números complejos.

Además $\forall z = a + ib$ definimos:

- La parte real de z como $\mathrm{Re} \in z = a$
- La parte imaginaria de z como $\mathrm{Im} z = b$

NOTA: A los números complejos z tales que $\mathrm{Re} z = 0$, se les denominará imaginarios puros.

Definition 2.1.2 – Conjugado Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$, definimos el conjugado de z como $\underline{z} = a - ib$

2.2 Operaciones aritméticas

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ definimos:

- RESTA: $z - w = z + (-w)$
- DIVISIÓN: Si$w \neq 0$ entonces $\frac{z}{w} = zw^{-1}$

2.2.1 Proposición

Sea $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $\underline{z \pm w} = \underline{z} \pm \underline{w}$
2. $\underline{zw} = \underline{z} \cdot \underline{w}$
3. Si $z \neq 0$, $\underline{z^{-1}} = \underline{z}^{-1}$
4. Si $w \neq 0$, $\underline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\underline{z}}{\underline{w}}$
5. $\underline{\underline{z}} = z$
6. z es un número real, si y solo si $\underline{z} = z$

2.3 Campo de los número complejos

Sea $\mathbb{R}^{\not\models}, +, \circ$, donde:
$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$\cdot \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

2.3.1 Proposición

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo donde:

- Neutro aditivo $0 = (0, 0)$
- Neutro Multiplicativo $1 = (1, 0)$
- Inverso aditivo $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \to -z = (-a, -b)$
- Inverso Multiplicativo $\forall z = (a, b) \neq 0 \to z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

Observación: $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \approx a + b$, además $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \approx ab$

Si consideramos $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}\}$ entonces $(A, +, \cdot)$ es un *sub-conjunto* de $\mathbb{C}$. De esta manera la función:

$$f : \mathbb{R} \to A, f(a) = (a, 0)$$

es un isomorfismo de campos, es decir:

- f es biyectiva
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a) + f(b)$

Consecuencia:

- $f(0) = (0, 0)$
- $f(-a) = (-a, 0)$
- $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ si $a \neq 0$

Definition 2.3.1 – Unidad imaginaria Se define como $i = (0, 1)$

Observación:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Entonces:

$$i = \sqrt{-1}$$

Notación

- *Edx* real : $\mathbb{R} = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$
- *Edx* imaginario: $i\mathbb{R} = \{ia | a \in \mathbb{R}\}$

Proposición

(NOTACIÓN $a+ib$) Cada $z \in \mathbb{C}$ se puede expresar de forma unica como: $z = a+ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$

Ejercicios Extra:

- $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
- $2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| \leq |z|^2$

Observación: $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z\underline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq 0$$

Definition 2.3.2 – El módulo de z Se define como $|z| = \sqrt{z\underline{z}}$

NOTA: Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ entonces $|z|$ corresponde al valor absoluto.

Observación: $\forall z \in \mathbb{C}$

- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

$$\therefore \max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

Sea $z = a + ib$:
$|z|^2 \leq (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq |a||b|$
Observación: Como $z\underline{z} = |z|^2$ si $z \neq 0$

$$\Rightarrow z\frac{z}{|z|^2} = 1 \therefore z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}$$

Ejemplo: $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$
De lo anterior: $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\underline{w}}{|w|^2}$$

2.3.2 Propiedades de:

$\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \bar{z}, |z|$
Sea $z = a + ib$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a \Rightarrow a = \frac{z + \bar{z}}{2} \therefore \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$z - \bar{z} = a + ib - a + ib = i2b \Rightarrow b = \frac{z - \bar{z}}{2i} \therefore \mathrm{Im}(z) = -i\frac{z - \bar{z}}{2}$$

2.3.3 Proposición

$\forall z, w \in \mathbb{C}$

- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z}) = -i\frac{z-\bar{z}}{2}$
- $\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$

- La parte real e imaginarias son $\mathbb{R}$-lineales es decir $\operatorname{Re}(z+tw) = \operatorname{Re}(z) + t\operatorname{Re}(w)$ y $\operatorname{Im}(z+tw) = \operatorname{Im}(z+tw) = \operatorname{Im}(z) + t\operatorname{Im}(w)$, donde $t \in \mathbb{R}$
  $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$
  $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) - \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$

2.3.4 Propopsición

$\forall z, w \in \mathbb{C}$

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$

  Demostración: $|z+w|^2 = (z+w)(z \bar{+} w) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$ $= |z|^2 + z\bar{w} + z\bar{\bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(zw) + |w|^2$ □

Definition 2.3.3 – Ley de cosenos: Ecuación cuando el signo es menos

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2|z||w|\cos\theta + |w|^2$$

Recordando que:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

$$(\,z\bar{w}) = (\,Re)[(a+ib)(c-id)] = ac + bd$$

Definition 2.3.4 – Ley del paralelogramo $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

- $|zw| = |z||w|$ además $|zw|^2 = (zw)(z\overline{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$
- Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- Si $w \neq 0$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|} \Rightarrow |z| = |\frac{z}{w}w| = |\frac{z}{w}||w| \Rightarrow \frac{|z|}{|w|} = |\frac{z}{w}|$
- $|z^n| = |z|^n$ donde $n \in \mathbb{N}$

2.4 Clase 4

Definition 2.4.1 – Sea $z \in \mathbb{C}$ se define:

- $z^0 = 1$
- $z^1 = z$
- Si $n\ in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow z^n = z^{n-1}z$ además $z^{-n} = (z^{-1})^n$

Theorem 2.4.1 – Desigualdad del triángulo Sea $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$|z+w| \leq |z| + |w| \text{ si } w \neq 0$$

NOTA: Dicha igualdad se cumple si y solo si $\dfrac{z}{w} \geq 0$, $(\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$ y $\frac{z}{w} \geq 0)$

Demostración: Observesé $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z||\bar{w}| = |z\,\mathrm{z\bar{w}}\,|$ $(\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|)$

$$\begin{aligned} \text{Olos}\operatorname{Re}(z\bar{w}) &\leq |z||\bar{w}| = |z\bar{w}| \quad (\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|). \\ |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||\omega| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Suponiendo que $\exists t \in \mathbb{R}, z \geq 0, z = tw$
Con eso en cuenta:

$$\begin{aligned} |z+w| &= |tw+w| = |t(t+1)| = |w|(t+1) = t|w| + |w| \\ &= |tw| + |w| = |z| + |w| \end{aligned}$$

□

$\Rightarrow$ Suponiendo que $|z+w|^2 = (|z| + |w|)^2$

$$\begin{aligned} |z+w| &= |tw+w| = |t(t+1)| = |w|(t+1) = t|w| + |w| \\ &= |tw| + |w| = |z| + |w| \end{aligned}$$

Observación:
Sea $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(z) = |z|, \Delta z \geqslant 0 \\ &\big(z \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2, z \geqslant 0\big) \\ \Rightarrow &\operatorname{Im}(z) = 0 \quad \Rightarrow z \in \mathbb{R}y \quad z \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z\bar{\omega}) = |z\bar{\omega}| &\Leftrightarrow z\bar{w} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow z\frac{|w|^2}{w} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{w} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Theorem 2.4.2 – Desigualdad de Cauchy-schwarz sean $z_1, z_2 \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Entonces: $\left|\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$ y la desigualdad ocurre si y solo si:

$$\exists c \in \mathbb{C} \text{ T.Q. } \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n. \quad Z_j = cw_j.$$

Observación: Para $n = 1$ $|zw|^2 = |z|^2|w|^2 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}, z = cw \forall z, w \in \mathbb{C}$

2.5 Clase 5

Definition 2.5.1 – Formula de De Moivre Sea $z \in \mathbb{C} z \neq 0$. Tomamos $|z| = r$ el módulo de zy θ el argumento de z, entonces:

$$z^n = r^n[\cos(n\theta)\ \mathrm{i}\ \sin(n\theta)] \quad n \in \mathbb{N}$$

Convención: $\forall z \in \mathbb{C} \quad z^\circ = 1$

Demostración: Por inducción

Para $n = 0$

$$\begin{aligned} z^\circ &= r^\circ[\cos(0)\ \mathrm{i}\sin(0)] \\ &= 1[1+0] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si se cumple para $n = k$

$$z^k = r^k[\cos(k\theta)\,\mathrm{i}\sin(k\theta)]$$

P.D. $n = k+1$

$$\begin{aligned} z^{k+1} =& z^k z = \left[r^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]\right] \cdot r(\cos(\theta)\ \mathrm{ti}\sin(\theta)) \\ =& r^k \cdot r[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \cdot [\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \\ =& r^{k+1}[\cos(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta) i \sin(\theta) + i\sin(k\theta)\cos(\theta) - \sin(k\theta)\sin(\theta)] \\ =& r^{k+1}[\cos(k\theta)\cos(\theta) - \sin(k\theta)\sin(\theta) + i(\sin(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\sin(\theta))] \\ =& r^{k+1}[\cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)] \\ =& r^{k+1}[\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)] \end{aligned}$$

□

Corolario: Sea $z \neq 0 \quad z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$ el módulo de z y $\theta = \arg z$, entonces

$$\begin{aligned} &m = n(-1) \quad n \in \mathbb{N} \\ &z^m = r^m(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplo:
sea $z = \sqrt{3} + i$. Encuentre: z^7

$$\begin{aligned} |z| = r &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \arg z &= \pi/6 + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \arg z &= \pi/6, \theta = \tan^{-1}(y/x) = \arctan(1/\sqrt{3}) \\ z^7 &= 2^7[\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)] \\ &= 128[-\sqrt{3}/2 - i1/2] \\ &= -64[\sqrt{3} + i] \end{aligned}$$