Notas Variable Compleja

kriptonita

February 4, 2024

Chapter 1

Presentación

1.1 Clases:

Lunes - Martes - Miercoles

1.2 Classroom:

Presentación.

1.3 Evaluación:

4 tareas examen (integrantes ≤ 5), punto extra al entregar en LaTeX.

Chapter 2

Complejos

2.1 Generalidades

Definition 2.1.1 – Campo de los complejos Al campo $\mathbb{C}$ lo llamaremos el plano complejo y a sus elementos números complejos.

Además $\forall z = a + ib$ definimos:

- La parte real de z como $\mathrm{Re} \in z = a$
- La parte imaginaria de z como $\mathrm{Im} z = b$

NOTA: A los números complejos z tales que $\mathrm{Re} z = 0$, se les denominará imaginarios puros.

Definition 2.1.2 – Conjugado Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$, definimos el conjugado de z como $\underline{z} = a - ib$

2.2 Operaciones aritméticas

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ definimos:

- RESTA: $z - w = z + (-w)$
- DIVISIÓN: Si$w \neq 0$ entonces $\frac{z}{w} = zw^{-1}$

2.2.1 Proposición

Sea $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $\underline{z \pm w} = \underline{z} \pm \underline{w}$
2. $\underline{zw} = \underline{z} \cdot \underline{w}$
3. Si $z \neq 0$, $\underline{z^{-1}} = \underline{z}^{-1}$
4. Si $w \neq 0$, $\underline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\underline{z}}{\underline{w}}$
5. $\underline{\underline{z}} = z$
6. z es un número real, si y solo si $\underline{z} = z$

2.3 Campo de los número complejos

Sea $\mathbb{R}^{\nvDash}, +, \circ$, donde:
$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$\cdot \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

2.3.1 Proposición

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo donde:

- Neutro aditivo $0 = (0, 0)$
- Neutro Multiplicativo $1 = (1, 0)$
- Inverso aditivo $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C} \to -z = (-a, -b)$
- Inverso Multiplicativo $\forall z = (a, b) \neq 0 \to z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

Observación: $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \approx a + b$, además $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \approx ab$

Si consideramos $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}\}$ entonces $(A, +, \cdot)$ es un *sub-conjunto* de $\mathbb{C}$. De esta manera la función:

$$f : \mathbb{R} \to A, f(a) = (a, 0)$$

es un isomorfismo de campos, es decir:

- f es biyectiva
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a) + f(b)$

Consecuencia:

- $f(0) = (0, 0)$
- $f(-a) = (-a, 0)$
- $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ si $a \neq 0$

Definition 2.3.1 – Unidad imaginaria Se define como $i = (0, 1)$

Observación:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Entonces:

$$i = \sqrt{-1}$$

Notación

- *Edx* real : $\mathbb{R} = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$
- *Edx* imaginario: $i\mathbb{R} = \{ia | a \in \mathbb{R}\}$

Proposición

(Notación $a+ib$) Cada $z \in \mathbb{C}$ se puede expresar de forma unica como: $z = a+ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$

2.4 Ejercicios Extra:

- $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
- $2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| \leq |z|^2$

Observación: $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z\underline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq 0$$

Definition 2.4.1 – El módulo de z Se define como $|z| = \sqrt{z\underline{z}}$

NOTA: Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ entonces $|z|$ corresponde al valor absoluto.

Observación: $\forall z \in \mathbb{C}$

- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

$$\therefore \max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

Sea $z = a + ib$:
$|z|^2 \leq (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq |a||b|$
Observación: Como $z\underline{z} = |z|^2$ si $z \neq 0$

$$\Rightarrow z\frac{\underline{z}}{|z|^2} = 1 \therefore z^{-1} = \frac{\underline{z}}{|z|^2}$$

Ejemplo: $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$
De lo anterior: $\forall z, w \in \mathbb{C},\ w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\underline{w}}{|w|^2}$$

2.4.1 Propiedades de:

$\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \bar{z}, |z|$
Sea $z = a + ib$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a \Rightarrow a = \frac{z + \bar{z}}{2} \therefore \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$z - \bar{z} = a + ib - a + ib = i2b \Rightarrow b = \frac{z - \bar{z}}{2i} \therefore \mathrm{Im}(z) = -i\frac{z - \bar{z}}{2}$$

2.4.2 Proposición

$\forall z, w \in \mathbb{C}$

- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z}) = -i\frac{z-\bar{z}}{2}$

- $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$
- La parte real e imaginarias son $\mathbb{R}$-lineales es decir $\operatorname{Re}(z + tw) = \operatorname{Re}(z) + t\operatorname{Re}(w)$
  y $\operatorname{Im}(z + tw) = \operatorname{Im}(z + tw) = \operatorname{Im}(z) + t\operatorname{Im}(w)$, donde $t \in \mathbb{R}$
  $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$

  $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) - \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$