# Universidad Nacional Autónoma de México

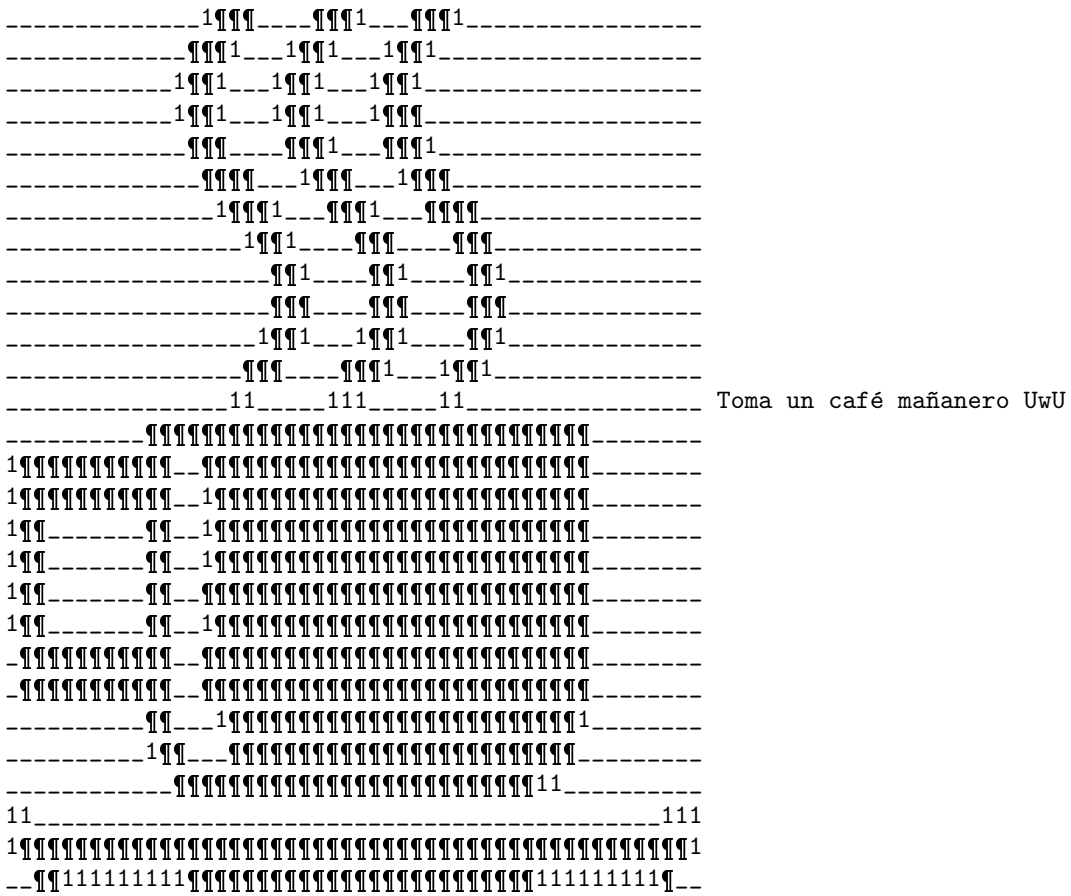
## Facultad de Ciencias

# Tarea 2

*Análisis de Algoritmos*

| Información del curso | |
|---|---|
| Profesor | María de Luz Gasca Soto |
| Ayudante | Brenda Margarita Becerra Ruíz |
| Ayudante | Enrique Ehecatl Hernández Ferreiro |

*Autor: Juárez Torres Carlos Alberto*




Fecha de entrega: March 22, 2023

## 1 Sea $P$ un problema. El desempeño computacional en el peor de los casos para $P$ es $O(n^2)$ y tambien es $\Omega(n \log_2 n)$ sea $A$ un algoritmo que soluciona a $P$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones resultan consistentes con la información sobre $P$?

Las afirmaciones consistentes con la información sobre P son:

- $\Theta(n^2)$ es consistente con la información sobre $P$, ya que se sabe que el desempeño computacional en el peor de los casos para $P$ es $O(n^2)$
- $\Theta(n \log n)$ es consistente con la información sobre $P$, ya que se sabe que el desempeño computacional en el peor de los casos para $P$ es $\Omega(n \log n)$
- Sobre $O(n^{3/2})$, $O(n)$, $O(n^3)$ no son consistentes con la información de $P$, ya que ninguna de ellas está incluida en el rango de complejidad de P en el peor de los casos para $P$

## 2 Proporcionar un problema que satisfaga la Hipótesis del Ejercicio 1 y que cumpla al menos tres de los cinco incisos. Debe indicar el problema y enunciar los algoritmos.

El problema es tan simple como el de la ordenación de números y los algoritmos que tomaremos en cuestión

- Bubble Short. En el peor de los casos su desempeño computacional es de $O(n^2)$
- Merge Short. En el peor de los casos su desempeño computacional es de $\Theta(n \log n)$
- Quick Short. En el peor de los casos su desempeño computacional es de $O(n^2)$, aunque en la practica generalmente se tiene el desempeño computacional de $\Theta(n \log n)$

## 3 Usando la definición formal de $O$, $o$, $\omega$ y $\Omega$ justificar si los siguientes argumentos son correctos o dar un contraejemplo.

- $2n \in O(n^2)$ & $2n^2 \notin o(n^2)$:
  El argumento es correcto. Para justificarlo, podemos utilizar la definición formal de la notación o (pequeña o).

  Decimos que $f(n) \in o(g(n))$ si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $n$ suficientemente grande, se cumple que $f(n) \leq c * g(n)$. En este caso, podemos tomar $c = 1$ y vemos

que $2n \leq n^2$ para $n \geq 2$, lo cual implica que $2n \in o(n^2)$.

Por otro lado, decimos que $f(n) \notin o(g(n))$ si para cualquier constante $c > 0$, no existe un valor de n suficientemente grande tal que $f(n) \leq c * g(n)$. En este caso, podemos tomar $c = 1$ y ver que $2n^2 > n^2$ para todo $n \geq 1$, lo que implica que $2n^2$ no pertenece a $o(n^2)$. Por lo tanto, el argumento es correcto.

- $2n$ es $\Omega(5 \log n)$
  Decimos que $f(n)$ es $\Omega(g(n))$ si existe una constante $c > 0$ y un valor $n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que $f(n) \geq c \cdot g(n)$. En este caso, podemos tomar $c = 1$ y ver que $2n \geq 5 \log n$ para todo $n \geq 2$. Sin embargo, la definición de $\Omega$ también requiere que exista un valor $n_0$ tal que $f(n) \geq c \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0$, y esto no es cierto en este caso.

  Para demostrar esto, podemos utilizar el límite de la razón. La razón entre $2n$ y $5 \log n$ tiende a infinito cuando $n$ tiende a infinito. Esto significa que no hay un valor de $n_0$ tal que $2n \geq c \cdot 5 \log n$ para todo $n \geq n_0$ y cualquier constante $c > 0$. Por lo tanto, el argumento es incorrecto.

- $\log 3^n$ es $\Omega(\log 4^n)$
  El argumento es correcto. Para justificarlo, podemos utilizar la definición formal de la notación $\Omega$ (Omega).

  Decimos que $f(n)$ es $\Omega(g(n))$ si existe una constante $c > 0$ y un valor $n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que $f(n) \geq c \cdot g(n)$. En este caso, podemos utilizar la propiedad de logaritmos que dice que $\log a^n = n \cdot \log a$ para cualquier base $a$. Entonces, $\log 3^n = n \cdot \log 3$ y $\log 4^n = n \cdot \log 4$.

  Podemos tomar $c = 1/2$ y ver que $\log 3^n \geq (1/2) \cdot \log 4^n$ para todo $n \geq 1$. Esto se puede demostrar tomando logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad:

$$\log 3^n \geq (1/2) \cdot \log 4^n$$

$$n \cdot \log 3 \geq (1/2) \cdot n \cdot \log 4$$

$$\log 3 \geq (1/2) \cdot \log 4$$

$$\log 3^2 \geq \log 4$$

$$2 \cdot \log 3 \geq \log 4$$

  Esta última desigualdad es cierta porque $\log 3$ es aproximadamente 1.585 y $\log 4$ es aproximadamente 1.386, por lo que $2 \cdot \log 3 > \log 4$. Por lo tanto, el argumento es correcto.

- $5^n$ es $O(3^n)$
  El argumento es incorrecto. Para justificarlo, podemos utilizar la definición formal de la notación $O$ (grande o).

  Decimos que $f(n)$ es $O(g(n))$ si existe una constante $c > 0$ y un valor $n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que $f(n) \leq c \cdot g(n)$. En este caso, podemos tomar $c = 5$ y ver que $5^n \leq 5 \cdot 3^n$ para todo $n \geq 1$.

Sin embargo, la definición de $O$ también requiere que exista un valor $n_0$ tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0$, y esto no es cierto en este caso. Podemos demostrar esto tomando el límite de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty$$

Esto significa que no hay un valor de $n_0$ tal que $5^n \leq c \cdot 3^n$ para todo $n \geq n_0$ y cualquier constante $c > 0$. Por lo tanto, el argumento es incorrecto.

- Si $f(n) = 4n^2 \log n + 7n^2 + 10n$
  Podemos analizar la complejidad asintótica de la función $f(n)$ mediante la notación O (grande o). Para esto, necesitamos encontrar una función $g(n)$ tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para una constante $c > 0$ y $n$ suficientemente grande.

  Podemos observar que el término dominante en la función $f(n)$ es $4n^2 \log n$. Por lo tanto, podemos elegir $g(n) = n^2 \log n$ y $c = 5$, por ejemplo. Entonces, para $n \geq 1$, se cumple:

$$\begin{aligned} f(n) &= 4n^2 \log n + 7n^2 + 10n \leq 4n^2 \log n + 7n^2 \log n + 10n^2 \\ &= (4 + 7 + 10)n^2 \log n = 21n^2 \log n \leq 5n^2 \log n = c \cdot g(n) \end{aligned}$$

  Por lo tanto, concluimos que $f(n) \in O(n^2 \log n)$. Esto significa que la función $f(n)$ tiene una complejidad asintótica no peor que $n^2 \log n$, es decir, que $f(n)$ crece a una tasa no mayor que $n^2 \log n$ para valores suficientemente grandes de $n$.

- Si $f(n) = 4n^2 \log n + 7n^2 + 10n$ entonces $f(n) \in \Theta(n^3)$ Para verificar si $f(n) \in \Theta(n^3)$, debemos demostrar que existen constantes $c_1$, $c_2$ y $n_0$ tales que se cumpla:

$$c_1 n^3 \leq f(n) \leq c_2 n^3 \quad \forall n \geq n_0.$$

  Empecemos por la primera desigualdad:

$$4n^2 \log n + 7n^2 + 10n \geq c_1 n^3$$

  Dividimos ambos lados por $n^3$:

$$\frac{4}{\log n} + \frac{7}{n} + \frac{10}{n^2} \geq c_1$$

  El lado izquierdo de la desigualdad anterior tiende a 0 cuando $n$ se acerca a infinito. Por lo tanto, no podemos encontrar una constante $c_1$ que satisfaga la primera desigualdad para todo $n \geq n_0$.

  Por lo tanto, la afirmación "$f(n) \in \Theta(n^3)$" es falsa. En otras palabras, $f(n)$ no está acotada superior e inferiormente por una función de la forma $cn^3$ para todo $n$ suficientemente grande.

# 4 Resuelve con sumo detalle uno de los siguiente ejercicios

## 4.1 Ejercicio elegido: El Algoritmo $A$ realiza $30n^2$ y el algoritmo $B$ ejecuta $500 \ln n$ operaciones elementales. ¿Para que valor de $n$ el Algoritmo $B$ empieza a mostrar un mejor desempeño?

Primero, establecemos una ecuación que iguale el tiempo de ejecución de ambos algoritmos:

$$30n^2 = 500 \ln n \tag{1}$$

Podemos resolver esta ecuación utilizando el método de Newton-Raphson o cualquier otro método numérico, pero en este caso podemos resolverla analíticamente para obtener una solución exacta.

Primero, dividimos ambos lados de la ecuación por $n^2$ y luego aplicamos la función exponencial a ambos lados:

$$e^{30/n^2} = e^{500 \ln n/n^2} \tag{2}$$

A continuación, tomamos la raíz cuadrada de ambos lados y simplificamos:

$$e^{15/n} = n^5 \tag{3}$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\frac{15}{n} = 5 \ln n \tag{4}$$

Despejamos $n$:

$$n = \frac{e^{15/5}}{\ln(e^{15/5})} \approx 164.72 \tag{5}$$

Por lo tanto, para valores de $n$ mayores a 164.72, el Algoritmo B tendrá un mejor desempeño que el Algoritmo A.

# 5 Clasificar las siguientes funciones de complejidad:

1. $6n^5 + 27$ Pertenece a $O(n^5)$, $\Omega(1)$, $\Theta(n^5)$ y $\omega(1)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.
2. $\frac{2n}{7} + \log n$
   Pertenece a $O(n)$, $\Omega(\log n)$, $\Theta(n)$ y $\omega(\log n)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.
3. $2n + \ln n$
   Pertenece a $O(n)$, $\Omega(\ln n)$, $\Theta(n)$ y $\omega(\ln n)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.
4. $3n \log \log n$
   Pertenece a $O(n \log \log n)$, $\Omega(n)$, $\Theta(n \log \log n)$ y $\omega(1)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.
5. $5 \ln n + 8$
   Pertenece a $O(\ln n)$, $\Omega(1)$, $\Theta(\ln n)$ y $\omega(1)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.
6. $5n^2 + n \log n$
   Pertenece a $O(n^2)$, $\Omega(n \log n)$, $\Theta(n^2)$ y $\omega(\log n)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.

7. $7n^3 + 3n^2 + 5n$

   Pertenece a $O(n^3)$, $\Omega(n^3)$, $\Theta(n^3)$ y $\omega(1)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.

8. $2^n + 8n^2 + 5n + \log\log n$

   Pertenece a $O(2^n)$, $\Omega(n^2)$, $\Theta(2^n)$ y $\omega(\log n)$, pero no pertenece a $o(n^2)$ ni a $\omega(n^2)$.

Table 1: Tabla de pertenencia de funciones

| Conjunto de funciones | Funciones |
|---|---|
| O($n^2$) | $6n^5$ + 27, $5n^2$ + n log $n$, $7n^3$ + $3n^2$ + 5n |
| $\Omega(n^2)$ | $2^n$ + $8n^2$ + 5n + log log n |
| $\Theta(n^2)$ | Ninguna de las funciones |
| o($n^2$) | Ninguna de las funciones |
| $\omega(n^2)$ | 3n log log n |

# 6 Ejercicio Opcional

**Supongamos que tenemos una computadora que requiere un minuto para resolver ejemplares de tamaño $n = 1000$. ¿Qué ejemplares pueden ser ejecutados en un minuto si compramos una nueva computadora mil veces más rápida que la anterior, suponiendo las siguientes complejidades $T(n)$?**

1. Si $T(n)$ es $\Theta(n)$, entonces la computadora tarda $n$ segundos en resolver un problema de tamaño $n$. Si la nueva computadora es mil veces más rápida, entonces tardará $n/1000$ segundos en resolver el mismo problema. Para resolver el problema en un minuto (60 segundos), podemos resolver problemas de tamaño $n \leq 60,000$. En otras palabras, la nueva computadora puede resolver problemas 60 veces más grandes que la computadora original.

2. Si $T(n)$ es $\Theta(n^3)$, entonces la computadora tarda $n^3$ segundos en resolver un problema de tamaño $n$. Si la nueva computadora es mil veces más rápida, entonces tardará $(n/10)^3$ segundos en resolver el mismo problema. Para resolver el problema en un minuto (60 segundos), podemos resolver problemas de tamaño $n \leq 215$. En otras palabras, la nueva computadora puede resolver problemas aproximadamente 5.5 veces más grandes que la computadora original.

3. Si $T(n)$ es $\Theta(10^n)$, entonces la computadora tarda $10^n$ segundos en resolver un problema de tamaño $n$. Si la nueva computadora es mil veces más rápida, entonces tardará $10^{n-3}$ segundos en resolver el mismo problema. Para resolver el problema en un minuto (60 segundos), podemos resolver problemas de tamaño $n \leq 3$. En otras palabras, la nueva computadora puede resolver problemas de tamaño pequeño, con $n$ no mayor a 3.