Examen 3

Juárez Torres Carlos Alberto

April 27, 2023

1 Sean A, B matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ demuestre que $AB - BA \neq I_n$

Para demostrar que $AB - BA \neq I_n$ para matrices A y B de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$, podemos considerar un contraejemplo.

Supongamos que A y B son matrices que satisfacen $AB - BA = I_n$, es decir, la diferencia entre AB y BA es la matriz identidad I_n. Vamos a demostrar que esta suposición lleva a una contradicción.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por A, obtenemos:

$$A(AB - BA) = AI_n$$
$$AAB - ABA = A$$

Ahora, multiplicamos por B en ambos lados de la ecuación:

$$(AAB - ABA)B = AB$$
$$AABB - ABAB = AB$$

En este punto, podemos reescribir la ecuación en términos de trazas:

$$\mathrm{tr}(AABB) - \mathrm{tr}(ABAB) = \mathrm{tr}(AB)$$

Aplicando la propiedad cíclica de la traza, podemos reorganizar el lado izquierdo de la ecuación:

$$\mathrm{tr}(AABB) - \mathrm{tr}(ABAB) = \mathrm{tr}(AB)$$
$$\mathrm{tr}(ABAB) - \mathrm{tr}(AABB) = -\mathrm{tr}(AB)$$

Sin embargo, esto implica que $-\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(AB)$, lo cual es una contradicción, ya que la traza de una matriz no nula no puede ser igual a su negativo.

Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción a partir de nuestra suposición inicial. Por lo tanto, podemos concluir que $AB - BA \neq I_n$ para matrices A y B de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$.

2 Sean A, B matrices de $n \times n$ con entradas en un campo K, demuestra que $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}BA$

Comencemos demostrando que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Primero, consideremos la matriz AB. La traza de AB se calcula como $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}$, donde $(AB)_{ii}$ es el elemento en la posición (i, i) de la matriz AB.

Observemos que $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki}$, es decir, el elemento (i, i) de la matriz AB es el resultado de la multiplicación de la fila i de A por la columna i de B.

Ahora, podemos reescribir la traza de AB como $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki})$.

Intercambiemos el orden de las sumas en la expresión anterior:

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}B_{ki} \right).$$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} A_{ik}B_{ki}$ corresponde al elemento (k, k) de la matriz BA. Por lo tanto, podemos reescribir la traza de AB como $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk}$, donde $(BA)_{kk}$ es el elemento en la posición (k, k) de la matriz BA.

Finalmente, la traza de BA se calcula como $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk}$, lo cual es equivalente a la expresión obtenida en el paso anterior.

$\therefore \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3 Sean A, B matrices de $n \times n$ con entradas en un campo K. Si A y B son simétricas demuestra que ${}^t(AB) = BA$

Si A es una matriz simétrica, esto implica que $A_{ij} = A_{ji}$ para todos los elementos de la matriz. Del mismo modo, para una matriz simétrica B, se tiene $B_{ij} = B_{ji}$.

Ahora, consideremos el producto de matrices AB. La entrada $(AB)_{ij}$ está dada por el producto punto entre la fila i de A y la columna j de B. Es decir,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

Por otro lado, si calculamos la entrada $({}^t(AB))_{ij}$, estamos tomando la fila j de ${}^t(AB)$. Entonces

$$({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji}$$

Usando la definición de entrada del producto de matrices, tenemos:

$$({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}$$

Ahora, comparemos esto con la entrada $(BA)_{ij}$. En este caso, estamos tomando la fila i de B y la columna j de A. Por lo tanto,

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{kj}$$

Observamos que las expresiones para $({}^t(AB))_{ij}$ y $(BA)_{ij}$ son idénticas:

$$({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{kj} = (BA)_{ij}$$

$\therefore {}^t(AB) = BA$ es verdadero cuando A y B son matrices simétricas de tamaño $n \times n$ con entradas en un campo K.

4 Elije λ de tal modo que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución:

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda$$

Podemos representar el sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices de la siguiente manera:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que la matriz de coeficientes A sea una matriz invertible, es decir, su determinante debe ser distinto de cero.

Entonces, para encontrar el valor de lambda que hace que el sistema tenga solución, podemos calcular el determinante de la matriz A y resolver la ecuación:

$$\det(A) \neq 0$$

Si el determinante de A es diferente de cero, entonces para cualquier valor de lambda, el sistema tendrá una única solución. Si el determinante es igual a cero, entonces existen valores particulares de lambda que hacen que el sistema tenga múltiples soluciones o no tenga solución.

Vamos a calcular el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Utilizando operaciones elementales de filas, podemos simplificar la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 2{\cdot}5{\cdot}1+(-1){\cdot}(-3){\cdot}1+1{\cdot}3{\cdot}0-1{\cdot}5{\cdot}0-(-1){\cdot}3{\cdot}0-2{\cdot}(-3){\cdot}1 = 10+3+0-0-0-(-6) = 19$$

El determinante de la matriz A es igual a 19. Como el determinante es diferente de cero, podemos concluir que para cualquier valor de lambda, el sistema tendrá una única solución. Podemos representar el sistema de ecuaciones lineales utilizando matrices de la siguiente manera:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que la matriz de coeficientes A sea una matriz invertible. Entonces

$$\det(A) \neq 0$$

Calculando el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Simplificando la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 2{\cdot}5{\cdot}1+(-1){\cdot}(-3){\cdot}1+1{\cdot}3{\cdot}0-1{\cdot}5{\cdot}0-(-1){\cdot}3{\cdot}0-2{\cdot}(-3){\cdot}1 = 10+3+0-0-0-(-6) = 19$$

El determinante de la matriz A es igual a 19. Como el determinante es diferente de cero. Se puede ver como la tercera ecuación es redundante o no factible dado que es combinación de las dos primeras. Concretamente es la combinacion de 3 veces la segunda fila menos la primera.

Siguiendo esto podemos decir que $\lambda = 3(2) - 1 = 5$.

5 Sea:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Determine la forma de la matriz A^n para $n \geq 1$

Primero, como base, encontraremos la forma de A^2, y luego demostraremos que la fórmula que encontramos se cumple para cualquier valor de $n \geq 1$.

Para $n = 2$, tenemos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Ahora, supongamos que para un valor de $n \geq 2$, la forma de A^n es:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

Luego, podemos encontrar la forma de A^{n+1} como:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices, obtenemos:

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) & \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Luego, utilizando las identidades trigonométricas $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ y $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, podemos simplificar la expresión:

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{bmatrix}$$

Hemos demostrado que, si la fórmula se cumple para n, entonces también se cumple para $n+1$. Por lo tanto, por inducción, la fórmula se cumple para todos los valores de $n \geq 1$. Por lo tanto, podemos concluir que la forma de la matriz A^n es:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$