生成函数

2019年1月16日　　2:30

一. 生成函数/母函数generating function

设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

1. $$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

称 $G(x)$为$\{a_n\}$的生成函数.

2. 牛顿二项式系数（n为整数，r为实数）

1) $$\binom{r}{n}=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}, & n>0\end{cases}$$

3. 生成函数性质（线性、乘积、移位、求和、换元、微积分）

1) **1.** $b_n=\alpha a_n$，则 $B(x)=\alpha A(x)$

2. $c_n=a_n+b_n$，则 $C(x)=A(x)+B(x)$

2) **3.** $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$，则$C(x)=A(x)\cdot B(x)$

3) 4. $b_n=\begin{cases}0 & n<l\\ a_{n-l} & n\geq l\end{cases}$，则$B(x)=x^lA(x)$

$$\begin{aligned}&a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n,\ldots\\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{l\text{个}0},\ &b_l,\ b_{l+1},\ldots,b_{l+n},\ldots\end{aligned}$$

5. $b_n=a_{n+l}$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{l-1}a_nx^n}{x^l}$

$$\begin{aligned}a_0,a_1,\ldots,a_l,\ &a_{l+1},\ldots\\ &b_0,b_1,\ldots\end{aligned}$$

4) 6. $b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$

$$b_0=a_0$$
$$b_1x=a_0x+a_1x$$
$$\ldots$$
$$b_nx^n=a_0x^n+a_1x^n+\ldots+a_nx^n$$
$$\ldots$$
$$B(x)=a_0\frac{1}{1-x}+a_1x\frac{1}{1-x}+\ldots+a_nx^n\frac{1}{1-x}+\ldots$$

7. $b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$，且 $A(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_i$收敛，则$B(x)=\dfrac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

5) **8.** $b_n=\alpha^na_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$

9. $b_n=na_n$，则 $B(x)=xA'(x)$

6) **10.** $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，则$B(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^xA(x)dx$

二. 生成函数应用

1. 解递推方程

1)

例 1　$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$，$a_0=1, a_1=-2$

$$
\begin{array}{rl}
G(x) = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5x\,G(x) = & \quad -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2\,G(x) = & \qquad\quad +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots \\
\hline
(1-5x+6x^2)G(x) = & a_0 + (a_1 - 5a_0)x
\end{array}
$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n$$

2)

例 13.14　求解递推方程

$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, n \geqslant 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解　设 $\{h_n\}$ 的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$，两边平方得

$$H^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k h_l x^{k+l}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

这是一个关于 $H(x)$ 的一元二次方程，利用求根公式得到

$$H_1(x) = \frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2},\ H_2(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

由于 $H(0)=0$，因此取 $H(x) = H_2(x)$。将 $H(x)$ 展开得

$$H(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n 2^{2n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n$$

因此 $h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

2. 多重集r组合数（各元素重复度都<r时）

1)

$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$ 的 r 组合数就是不定方程

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$

$x_i \le n_i$

的非负整数解的个数

生成函数

$$G(y) = (1+y+\ldots+y^{n_1})(1+y+\ldots+y^{n_2})\ldots(1+y+\ldots+y^{n_k})$$

的 y^r 的系数

2)

例 3　$S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 10 组合数

解：生成函数 $G(y)$

$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1 + \ldots + 3y^{10} + 2y^{10} + y^{10} + \ldots)$

$N = 6$

3. 不定方程解的个数

1) $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$

x_i 为自然数

$$G(y)=(1+y+\ldots)^k=\frac{1}{(1-y)^k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r$$

$$N=\binom{k+r-1}{r}$$

2) **带限制条件**

$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$，$l_i\le x_i\le n_i$

生成函数

$$G(y)=(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\ldots+y^{n_1})(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\ldots+y^{n_2})\ldots(y^{l_n}+y^{l_n+1}+\ldots+y^{n_k})$$

3) **带系数**

$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k=r$，$x_i\in N$

生成函数

$$G(y)=(1+y^{p_1}+y^{2p_1}+\ldots)(1+y^{p_2}+y^{2p_2}+\ldots)\ldots(1+y^{p_k}+y^{2p_k}+\ldots)$$

i. 例 4　1 克砝码 2 个，2 克砝码 1 个，4 克砝码 2 个，问能称出哪些重量，方案有多少?

解：$x_1+2x_2+4x_3=r$

$0\le x_1\le 2$，$0\le x_2\le 1$，$0\le x_3\le 2$

$$G(y)=(1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$$
$$=1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

ii. 如果重物放右边，允许砝码放在天平两边（同种砝码放一侧），则

$$G(y)=(y^{-2}+y^{-1}+1+y+y^2)(y^{-2}+1+y^2)(y^{-8}+y^{-4}+1+y^4+y^8)$$
$$=5+3y+4y^2+3y^3+5y^4+3y^5+4y^6+3y^7+4y^8+2y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

称 0 克：　|　　1,1 | 2　　1,1,2 | 4

4 | 1,1,2　　2 | 1,1

称 1 克：　1 | 1　　2 | 1,1　　4 | 1,2,1

称 2 克：　1,1 | 2　　2 | 2　　4 | 1,1,2　　4 | 2,2

4. 正整数拆分

将 N 无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=N$

不允许重复　$G(y)=(1+y^{a_1})(1+y^{a_2})\ldots(1+y^{a_n})$

1) 允许重复

$$G(y)=(1+y^{a_1}+y^{2a_1}+\ldots)(1+y^{a_2}+y^{2a_2}+\ldots)\ldots(1+y^{a_n}+y^{2a_n}+\ldots)$$
$$=\frac{1}{(1-y^{a_1})(1-y^{a_2})\ldots(1-y^{a_n})}$$

例 5 证明任何正整数都可以唯一表示成 2 进制数.

对应于将任何正整数 N 拆分成 2 的幂，

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots,$

且不允许重复.

i.

$$G(y)=(1+y)(1+y^2)(1+y^4)(1+y^8)\ldots$$
$$=\frac{1-y^2}{1-y}\frac{1-y^4}{1-y^2}\frac{1-y^8}{1-y^4}\ldots$$
$$=\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n$$

例 6 给定 r,求 N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k<r$）的方法数

解 N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k\le r$）的方案

$\Leftrightarrow$ N 允许重复无序拆分成正整数 k（$k\le r$）的方案

做下述 Ferrers 图

将图以 $y=x$ 对角线翻转 180 度,

得到共轭的 Ferrers 图,

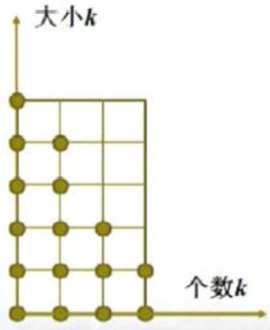
ii. $16=6+5+3+2$ （$k\le 4$）

对应每个数不超过 4 的拆分.

$16=4+4+3+2+2+1$

这种拆分数的生成函数为

$$G(y)=\frac{1}{(1-y)(1-y^2)\ldots(1-y^r)}$$



将 N 允许重复地有序拆分成 r 个部分的方案数为 $C(N-1,r-1)$

方法一：一一对应.

设 $N=a_1+a_2+\ldots+a_r$ 是满足条件的拆分，则令

2)

$$S_i=\sum_{k=1}^{i}a_i,\quad i=1,2,\ldots r$$
$$0<S_1<S_2<\ldots<S_r=N$$

r-1 个 S_i 取值为 1,2,…,N-1，方法数为 $C(N-1,r-1)$.

推论：对 N 做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^{N}\binom{N-1}{r-1}=2^{N-1}$$

方法二：生成函数.

$G(y)=(y+y^2+y^3+\ldots)^r$ 中 y^N 项的系数.

$$G(y)=(y+y^2+\ldots)^r=\frac{y^r}{(1-y)^r}$$

3)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-r+r-1}{n-r}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{n-r}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}y^n$$

所求的方法数为 $\binom{N-1}{r-1}$

(2) 不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分 + 全排列

三. 指数生成函数（用于将排列转化为组合）

定义 设$\{a_n\}$为序列，称

1.

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的指数生成函数.

例 1 给定正整数 m, $a_n=P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

1)

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例 2 $b_n=1$，则$\{b_n\}$的指数生成函数为

2) $$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的指数生成函数分别为 $A_e(x)$和 $B_e(x)$，则

2. $$A_e(x)\cdot B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}\quad ,其中\ c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$$

证：

1) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}=A_e(x)\cdot B_e(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!})\cdot(\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{x^l}{l!})$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{n!b_{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$$

3. 计算多重集的r排列

设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，

则 S 的 r 排列数$\{a_r\}$的指数生成函数为

1) $$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$
$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!}\quad i=1,2,\ldots,k$$

考察指数生成函数展开式中x^r的项，

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!},$$

其中 $m_1+m_2+\ldots+m_k=r$

$0\le m_i\le n_i,\quad i=1,2,\ldots,k$ （*）

i. 即 $$\frac{x^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!}=\frac{x^r}{r!}\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!},\quad a_r=\sum\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

其中求和是对满足方程（*）的一切非负整数解来求.

一个非负整数解对应了$\{m_1\cdot a_1, m_2\cdot a_2, \ldots, m_k\cdot a_k\}$，即 S 的 r 组合

而该组合的全排列数是 $\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$，因此 a_r代表了 S 的 r 排列数.

例 3 由 1,2,3,4 组成的五位数中，要求

1 出现不超过 2 次，但不能不出现，2 出现不超过 1 次，

3 出现可达 3 次，4 出现偶数次.求这样的五位数个数.

解：

2) $$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$
$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$N=215$

例 4 红、白、兰涂色 $1\times n$ 的方格，要求偶数个为白色，

问有多少方案？

解 设方案数为 a_n

3) $$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\ldots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2$$
$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+1}{2}\frac{x^n}{n!}$$
$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$

i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii. ---------我是底线--------