平面图

2018年10月30日 13:01

● 平面图

一. 平面图planar graph

1. 四色问题：地图上的相邻区，涂上不同颜色，整张图只出现四种颜色
    1) 只有公共顶点没有一段公共边的不算相邻
    2) 可将每个区视作点，相邻区用边相连
2. 平面图：平面上，边与边在非顶点处不相交的图
    1) 可平面图：能画出同构图是平面图的图，也可称为平面图
    2) 平面图的子图都是平面图，非平面图母图都是非平面图
    3) 平面图**不受平行边和环影响**，增加再多环也不会变成非平面图
3. 平面嵌入：画在平面纸上，使边与边在非顶点处不相交
    1) 球面嵌入、曲面嵌入、环面嵌入，同理
    2) 定理11.1（用连续球极投影可证）
        i. 可平面嵌入 $\Leftrightarrow$ 可球面嵌入
4. 区域、外部区域、区域边界、面、面的次数
    1)
        - 区域:不含顶点与边的极大连通曲面, R
        - 外部区域: 面积无限的区域, R_0
        - 区域边界: 与R关联的边和顶点构成的子图，∂R
        - 面: 区域及其边界
        - 面的次数: deg(R)=边界长度
    2) 不被边约束的面成为无限面/外部面
    3) 悬挂点及悬挂边也视作边界，且为次数贡献了2
    4) 定理11.2：平面图的**面次数和为两倍边数**
        i. $\Sigma^{r}_{i=1}\deg(R_i) = 2m$
    5) **定理**11. 3 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面

        证明: 平面嵌入→球面嵌入→把该面旋转到北极 → 平面嵌入. #
5. 极大平面图：任两不相邻点间加一边都不再是平面图的平面图
    1) **定理**11. 4 n(≥3)阶简单连通平面图是极大平面面图 $\Leftrightarrow \forall$R, deg(R)=3

        证明: ($\Rightarrow$)简单图 $\Rightarrow$ deg(R)≥3,
        极大平面图 $\Rightarrow$ deg(R)≤3.
        ($\Leftarrow$) $\forall$R,deg(R)=3 $\Rightarrow$ 不能加边而不交叉. #
6. 极小非平面图：删除任一边就变成平面图的非平面图
    1) K5和K3,3都是极小非平面图

二. 欧拉公式

1. 平面图的欧拉公式：顶点数-边数+面数=连通分支数+1
    1)
        - 欧拉公式: 设G是连通平面图, 则
        n-m+r=2
    2)
        - 欧拉公式: 设G是平面图, 则
        n-m+r=1+p
        其中r是G的面数, p是G的连通分支数

i. • 证明:(破圈法)任选一个回路,删除回路上1边,m'=m-1,这边分隔的2个面合并,r'=r-1, 所以n-m+r=n-m'+r'. 到最后无回路时是森林, m''=n-p, r''=1, 即n-m+r=n-m''+r''=1+p. #

2. • 定理11.8 设G是连通平面图, G的各面的次数至少是l (≥3), 则
   1) $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$
      i. • 证明 r=2+m-n,
         $2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)\ge l\cdot r=l\cdot(2+m-n)$,
         所以 $m\le(n-2)l/(l-2)$. #
   2) 不适用于有环或平行边的图（环的次数l<3）
   3) 可用于证明K5和K3,3非平面图（l取3和4，k取1）
   4) 可推广至不连通平面图，将2改成分支数+1即可
      i. $m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$

3. 定理11.10 设n(≥3)阶简单平面图G有m条边, 则

   $$m \le 3n-6.$$

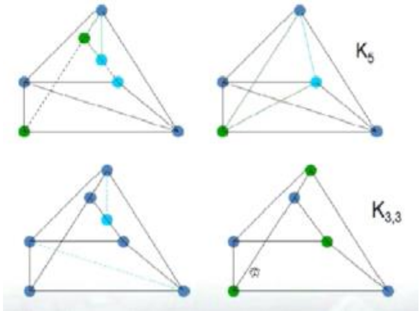
   1) 是必要非充分条件，反例：K3,3
   2) 定理11.11 设n(≥3)阶简单极大平面图G有m条边, 则 m=3n-6.

      证明 G是极大平面图, 所以 2m=3r.
      G一定连通, 所以 r=2+m-n. #
   3) 定理11.12 设G是简单平面图, 则δ(G)≤5.

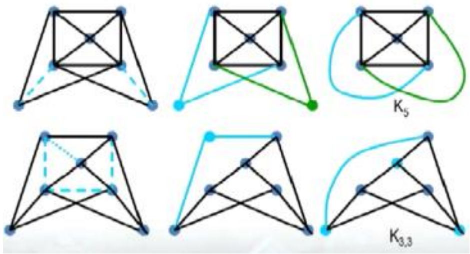
      证明 (反证) 设n≥6并且δ≥6, 则
      $2m=\sum d(v)\ge n\delta\ge 6n \Rightarrow m\ge 3n$,
      与 m≤3n-6 矛盾. #

三. 平面图的判断
1. 同胚homeomorphism、插入/删除2度顶点
   1) • 插入2度顶点: 把(u,v)变成(u,w),(w,v)
      • 删除2度顶点: deg(w)=2, 把(u,w),(w,v)变成(u,v)
      • 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构
      i. 同胚即在一条边上插入点/删除点
2. Kuratowski定理
   1) 定理11.13 图G是平面图 ⇔ G没有与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图
      i. 即删除部分点或边后，删除/插入二度顶点也不会变成K5或K3,3
   2) 定理11.14 图G是平面图 ⇔ G没有可以边收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图
      i. 即删除部分点或边后，两点并一点也不会变成K5或K3,3
   3) 例

i.

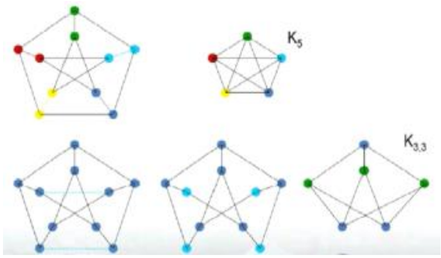


ii.



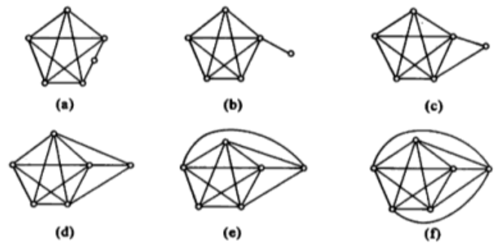
4) 可用于证明彼德森图不是平面图

i.



5) 例：对K5加点，对K3,3加边，能生成多少六阶简单连通非平面图？

i.



ii.

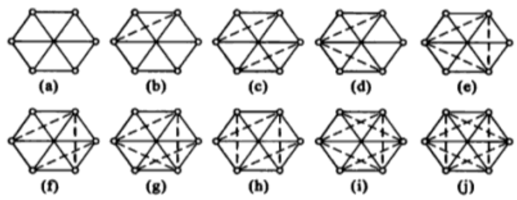
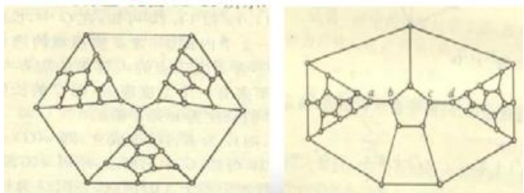


图 17.8

四. 平面图与哈密顿图

1. Tait猜想：3连通3正则平面图都是哈密顿图，可惜是假命题
   - Tutte图(1946): 46阶反例(左图)
   - Lederberg图(1967): 38阶反例(右图)

   1) 

2. Tutte定理：4连通平面图是哈密顿图
3. Grinberg定理：
   1)
   - 定理11.23(Grinberg,1968):

     n阶简单平面哈密顿图，哈密顿回路内(外)部次数为i的面数为$r_i'(r_i'')$ ⇒

     $$\Sigma^n_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$$

• 证: 设哈密顿回路C内有m_1条边, 则

$\Sigma^{n}_{i=3} r_i' = m_1+1$.

$\Sigma_{内部面}\deg(R_j) = \Sigma^{n}_{i=3} i r_i' = 2m_1+n$,

2) 所以, $\Sigma^{n}_{i=3}(i-2)r_i'=n-2$.

同理 $\Sigma^{n}_{i=3}(i-2)r_i''=n-2$. #

i. m1是绿圈围住的异于绿圈平行边的边，n是顶点

ii. • 下图中不存在过边(a,b)的哈密顿回路. (由此可证Tutte图和Lederberg图不是哈密顿图.)

• $\Sigma^{n}_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$ (定理11.23)

iii. • $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$

• $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$

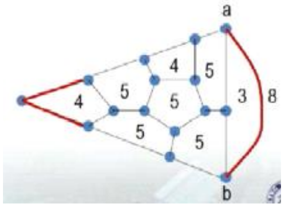
iv. • $(1-0)+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(0-1)=0$

• $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$

• $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$

v. • $2(1-1)+3(r_5'-r_5'') = 5$, 即 $3(r_5'-r_5'') = 5$

• $2(2-0)+3(r_5'-r_5'') = 5$, 即 $3(r_5'-r_5'') = 1$

vi. 

3) 可以用来证明Tait猜想的反例Tutte图和Lederberg图

i.

ii.

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

viii.

ix.

x.

xi. -----------我是底线----------