序、函数

2018年11月29日 15:54

● 序关系

一. 偏序、全序、拟序

1. 偏序partial order
   1) 定义2.19 设A≠∅，R⊆A×A，若R是自反、反对称、传递的，则称R为A上的偏序关系。常用≼表示偏序关系，读作“小于等于”

      $$<x,y>\in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x\preccurlyeq y$$

      i. 如大小于等于、（无零）整除、包含，都是偏序
   2) 定义2.20 设≼是A上偏序关系，称<A,≼>为偏序集。
      i. 即一个集合中所有符合该偏序关系的元素的序偶的集合
2. 可比comparable、覆盖cover
   1) 定义2.21 设<A,≼>是偏序集，x,y∈A。

      若 $x\preccurlyeq y \lor y\preccurlyeq x$，则称x与y可比。

      若x与y可比且不相等，则说x严格小于y，即

      $$x\preccurlyeq y \land x\neq y \Leftrightarrow x\prec y$$

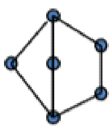
      若x严格小于y，且不存在z，使得x严格小于z、z严格小于y，则称y覆盖x，即

      $$x\prec y \land \neg\exists z(z\in A\land x\prec z\prec y)$$
3. 哈斯图hasse diagram
   1) • 设<A,≼>是偏序集，x,y∈A。

      • 哈斯图：

      (1) 用顶点表示A中元素

      (2) 当且仅当y覆盖x时，y在x上方，在x与y之间画无向边

      
4. 全序total order/线序linear order
   1) 定义2.22 设<A,≼>是偏序集，若A中任意元素x,y都可比，则称≼为A上的全序关系(线性关系)，称<A,≼>为全序集(线序集)。
   2) 是一种特殊的偏序
   3) 其哈斯图是直线（即“链”）
5. 拟序
   1) 定义2.23 设A≠∅，R⊆A×A。若R是反自反、传递的，则称R为A上的拟序关系，常用≺表示拟序关系，称<A,≺>为拟序集。
      i. 反自反且传递时必有反对称（所以拟序是反自反的偏序）
      ii. 严格大小于，（无零）整除且不相等，真包含都是拟序

定理2.29 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上偏序关系，$\prec$ 是 A 上拟序关系，则

2) (1) $\prec$ 是反对称的；

   (2) $\preccurlyeq - I_A$ 是A上拟序关系；

   (3) $\prec \cup I_A$ 是A上偏序关系。 #

定理2.30 设 $\prec$ 是非空集合A上拟序关系，则

3) (1) $x \prec y,\ x=y,\ y \prec x$ 中至多有一式成立

   (2) $(x \prec y \vee x=y) \wedge (y \prec x \vee x=y) \Rightarrow x=y$

6. 三歧性、拟线序/拟全序

   定义2.24 设 $A \neq \varnothing$，$\prec$ 是 A 上拟序关系，若

   $x \prec y,\ x=y,\ y \prec x$

   1) 中有且仅有一式成立，则称 $\prec$ 具有**三歧性**，同时称 $\prec$ 为 A 上的**拟线序关系（拟全序关系）**，称 $\langle A, \prec \rangle$ 为**拟线序集**。

二. 偏序的特殊元素

1. 极大/小元：当前子集中找不到比他大/小的其他元
   1)
      - **y是B的极大元(maximal element)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x=y\ )$
      - **y是B的极小元(minimal element)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x=y\ )$

      i. 数量为任意个
      ii. 非空有穷集中一定存在
      iii. 孤立结点既是极大元又是极小元
2. 最大/小元：当前子集中所有元都比他小/大的元
   1)
      - **y是B的最大元(maximum/greatest element)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y\ )$
      - **y是B的最小元(minimum/least element)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x\ )$

      i. 最大/小元y本身是属于B的
      ii. 只有0个或1个
      iii. 最大元一定是极大元；最小元一定是极小元
3. 上/下界：全集中的、所有当前子集的元都比他小/大的元
   1)
      - **y是B的上界(upper bound)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y\ )$
      - **y是B的下界(lower bound)** $\Leftrightarrow$ $\forall x(\ x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x\ )$

      i. 上/下界y是**可以不属于B**的，注意看集合范围
      ii. 上下界数量为任意个
4. 上确界LUB：最小上界；下确界GLB：最大上界
   1) 上确界一定是上界；下确界一定是下界
   2) **最大元一定是上确界；最小元一定是下确界**（反之不成立，因为界不一定在B中）
   3) 上界属于B⇔上确界；下界属于B⇔下确界

三. 良序、链、反链

1. 良序well order

定义2. 28 设<A,<>为(拟)全序集，若 A 的任
1) 何非空子集 B 均有最小元，则称 ≺ 为 A 上的
良序关系，称 <A,<> 为良序集 。

i. 元素有限的全序一定是良序

1) 如自然数集是良序，(0,1)之间的实数是全序，不是良序

ii. 良序一定是全序

iii. 可以用数学归纳法的题都是定义在良序上的

2. 链chain、反链anti chain

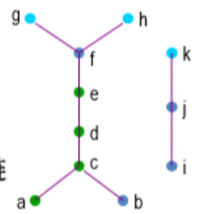
1)
- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A,
- B是A中的链(chain)⇔

  ∀x∀y(x∈B∧y∈B → x与y可比)
- B是A中的反链(antichain)⇔

  ∀x∀y(x∈B∧y∈B∧x≠y → x与y不可比)
- |B|称为(反)链的长度

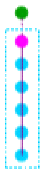
i. 单元素集既是链又是反链

ii.
- A={a,b,…,k}.
- 链: {a,c,d,e}, {a,e,h}, {b,g}
- 反链: {g,h,k}, {e,j}, {a,k}
- {a}既是链, 也是反链
- {a,b,g,h}既非链, 亦非反链



3. 定理2. 31 设<A,≼>为偏序集, A中最长链长度为n, 则(1) A中存在极大元; (2) A存在n个划分块的划分, 使得每个划分块都是反链。

证明 (1)设B是A中最长链, |B|=n, 则B有最大元y, y是A的极大元, 否则A中还有比y "大"的元素z, B就不是最长链.



(2) 令 A_1={ x | x是A中的极大元 },

A_2={ x | x是($A-A_1$)中的极大元 }, ……

A_n={ x | x是($A-A_1-\ldots-A_{n-1}$)中的极大元 },

$\mathcal{A}$={$A_1,A_2,\ldots,A_n$}是所求的划分. #

1) 推论 设<A,≼>为偏序集, 若|A|=mn+1, 则A中要么存在长度为m+1的反链, 要么存在长度为n+1的链

● 函数的概念

四. 函数/映射

1. 单值single valued

1) 对任意集合F, 可以定义:
- 单值(single valued): F是单值的⇔

  ∀x(x∈dom F → ∃!y(y∈ran F ∧ xFy))

  ⇔ (∀x∈dom F)(∃!y∈ran F)(xFy)

2) 单值即F关系中每个x只能找到一个对应y，单值是F为函数的必要条件

2. 函数function/映射mapping定义

1) **定义 4-1.1** 设 X 和 Y 是任何两个集合，而 f 是 X 到 Y 的一个关系，如果对于每一个 $x \in X$，有唯一的 $y \in Y$，使得 $\langle x, y\rangle \in f$，称关系 f 为函数，记作：

   $$f: X \to Y \text{ 或 } X \xrightarrow{f} Y$$

   假如 $\langle x, y\rangle \in f$，则 x 称为自变元，y 称为在 f 作用下 x 的象，$\langle x, y\rangle \in f$ 亦可记作 $y = f(x)$，且记

   $$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

2) 函数关系**定义域domf必须严格=X**，而普通关系前域domf可以是X的子集
3) **函数关系必须是单值关系**，但可以不是单根关系
4) 象image、原象preimage
   i.
      - 设 $f:A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$
      - A'的象(image)是
        $f(A') = \{ y \mid \exists x(x \in A' \wedge f(x)=y) \} \subseteq B$
      - B'的原象(preimage)是
        $f^{-1}(B') = \{x \mid \exists y(y \in B' \wedge f(x)=y)\} \subseteq A$
5) 值域/象集合 R_f=ranf可以是Y的子集，称Y为f的共域
6) 函数相等：**前域、共域都相等，且对任意x都有相同的象**
7) 空集也可视作定义在空集上的空函数
8) 从A到B的函数的集合可记作B^A，读作B上A

3. 单根single rooted/单射/入射/一对一映射injection
   1) 对任意集合F, 可以定义：
      - 单根(single rooted)：F是单根的⇔
        $\forall y(y \in \text{ran } F \to \exists! x(x \in \text{dom } F \wedge xFy))$
        $\Leftrightarrow (\forall y \in \text{ran } F)(\exists! x \in \text{dom } F)(xFy)$
      - $\exists!$表示“存在唯一的”
      - $\forall x(x \in A \to B(x))$缩写为$(\forall x \in A)B(x)$
      - $\exists x(x \in A \wedge B(x))$缩写为$(\exists x \in A)B(x)$
   2) 入射即F关系中每个y只能找到一个对应x
   3) **x不同则y不同，y相同则x相同**

4. 满射surjection/上映射onto：ranf=Y，即值域=共域，即对任意属于Y的y，存在属于X的x使f(x)=y
   1) **满射可记为f(X)=Y**
   2) **入射可记为|X|=|f(X)|**
   3) 定理：|X|=|Y|时，入射⇔满射（证明通过上述简记）
   4) 既满射又入射可称为双射bijection/一一对应1-1mapping

5. A到B的全体函数，记作：
   1) $B^A = A \to B = \{ F \mid F:A \to B \}$
      i. A的每个元素都有|B|种象，因而不同函数的数量为重复排列数，即
      ii.
         - $|B^A| = |B|^{|A|}$
         - 当 $A=\varnothing$ 时，$B^A=\{\varnothing\}$
      iii.
         - 当 $A \neq \varnothing \wedge B=\varnothing$ 时，
           $B^A = A \to B = \varnothing$， $A \to B = \{\varnothing\}$.

iv.
- 设|A|=n, |B|=m
- n<m时, A→B中无满射, 无双射, 单射个数为 m(m-1)...(m-n+1)
- n>m时, A→B中无单射, 无双射, 满射个数为

$$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$$

- n=m时, A→B中双射个数为 n!

1) 单射/入射数为从m取n的不重复排列数
2) 满射数为从m取m的不重复排列数乘以m到n的二类stirling数
3) m=n时以上入射数和满射数相等，均为m!=n!

6. 偏函数partial function、真偏函数proper partial function
   1) 一般默认讨论的都是定义域=X的全函数total function，简称为函数，也可定义定义域为X子集、真子集的“函数”为偏函数、真偏函数

i.
- A到B的偏函数(partial function)

$$\mathrm{dom}F \subseteq A \wedge \mathrm{ran}F \subseteq B$$

- 从A到B的偏函数F记作

$$F:A \nrightarrow B$$

ii.
- A到B的全体偏函数记为

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

- 显然 $A \nrightarrow B \subseteq P(A \times B)$
- 真偏函数(proper partial function)：

$$\mathrm{dom}F \subset A$$

iii.
- 真偏函数记作 $F:A \nrightarrow B$
- A到B的全体真偏函数记为

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

7. 特殊函数

1)
- 常数函数:

$$f:A \to B,\ \exists b \in B,\ \forall x \in A,\ f(x)=b$$

- 恒等函数:

$$I_A:A \to A,\ I_A(x)=x$$

2)
- 特征函数:

$$\chi_A:E \to \{0,1\},\ \chi_A(x)=1 \Leftrightarrow x \in A$$

- 当 $\varnothing \subset A \subset E$ 时, χ_A 是满射

3)
- 设 $f:A \to B$, $<A,\leq_A>$, $<B,\leq_B>$ 是偏序集
- 单调增:

$$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$$

- 单调减:

$$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(y) \leq_B f(x)$$

- 严格单调: 把≤换成<, 是单射

4)
- 设R为A上等价关系
- 自然映射, 典型映射:

$$f:A \to A/R,\ f(x)=[x]_R$$

- 当 $R=I_A$ 时, f是单射.

- 逆函数和复合函数

五. 复合函数composite function

1. 左复合（称G在F的左边可复合）
    1) $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$
    2) 自变元在左边的F，象在右边的G，复合函数和教材默认的复合关系是反的
2. 定理：函数关系的复合关系也是函数关系，且f∘g(x)=f(g(x))

    证明思路

    1) (1) fog单值 (即fog是函数)

       (2) dom fog = A, ran fog $\subseteq$ C

       (3) fog(x)=f(g(x))

    2) • fog是单值的, 即fog是函数.

       • $\forall x \in dom(fog)$, 若$\exists z_1,z_2 \in ran(fog)$, 使得 $x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$, 则

       $x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$

       $\Leftrightarrow \exists y_1(y_1 \in B \wedge xgy_1 \wedge y_1fz_1) \wedge \exists y_2(y_2 \in B \wedge xgy_2 \wedge y_2fz_2)$

       $\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1 \in B \wedge y_2 \in B \wedge xgy_1 \wedge xgy_2 \wedge y_1fz_1 \wedge y_2fz_2)$

       $\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge yfz_1 \wedge yfz_2) \Rightarrow z_1=z_2$

    3) • dom(fog) = A, ran(fog)$\subseteq$C.

       • 显然dom(fog)$\subseteq$A, ran(fog)$\subseteq$C.

       下证A$\subseteq$dom(fog), $\forall x$,

       $x \in A \Rightarrow \exists! y(y \in B \wedge xgy)$

       $\Rightarrow \exists! y \exists! z(y \in B \wedge z \in C \wedge xgy \wedge yfz)$

       $\Rightarrow \exists! z(z \in C \wedge x(fog)z)$

       $\Rightarrow x \in dom(fog)$.

    4) • fog(x)=f(g(x)).

       • $\forall x$,

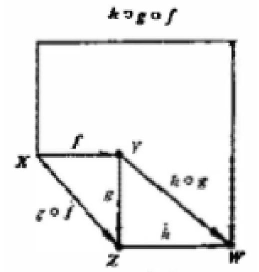
       $x \in A$

       $\Rightarrow \exists! z(z \in C \wedge z=fog(x))$

       $\Leftrightarrow \exists! z \exists! y(z \in C \wedge y \in B \wedge y=g(x) \wedge z=f(y))$

       $\Leftrightarrow \exists! z(z \in C \wedge z=f(g(x)))$

       所以对任意$x \in A$, 有fog(x)=f(g(x)). #

    5) 定义这种F∘G为复合函数。当ranG不包含于domF时，该函数为空
3. 复合函数的性质
    1) 结合性，即多个函数复合可以按任意次序打括号（矢量加法证明如图）
        i. 

    2) 满、单、双射性质的传递
        i. **定理3.4** 设 g:A→B, f:B→C, fog:A→C,则

           (1) 若 f,g 均为满射, 则 fog 也是满射.

           (2) 若 f,g 均为单射, 则 fog 也是单射.

           (3) 若 f,g 均为双射, 则 fog 也是双射. #

           定理3.5 设 g:A→B, f:B→C, 则

           (1) 若 fog 为满射, 则 f 是满射.

           (2) 若 fog 为单射, 则 g 是单射.

           (3) 若 fog 为双射, 则 g 是单射, f 是满射. #
    3) 定理：F∘Ix=F；Iy∘F=F（由恒等关系定义证）

六. 逆函数/反函数inverse function

1. 定理：双射函数关系的逆关系也是双射函数关系
    1) 先从定义证是函数、是满射，再反证入射：
    2) 证明　设 $f=\{\langle x, y\rangle \mid x\in X \wedge y\in Y \wedge f(x)=y\}$

       $$f^c=\{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$$

       因为 f 是满射的，故每一 $y\in Y$ 必存在 $\langle x, y\rangle\in f$，因此必有 $\langle y, x\rangle\in f^c$，即 f^c 的前域为 Y。又因为 f 是入射，对每一个 $y\in Y$ 恰有一个 $x\in X$，使 $\langle x, y\rangle\in f$，因此仅有一个 $x\in X$，使 $\langle y, x\rangle\in f^c$，即 y 对应唯一的 x，故 f^c 是函数。

       又因 $\operatorname{ran} f^c=\operatorname{dom} f=X$，故 f^c 是满射。又若 $y_1\neq y_2$ 有

       $$f^c(y_1)=f^c(y_2)$$

       因为 $f^c(y_1)=x_1$，$f^c(y_2)=x_2$，即 $x_1=x_2$，故 $f(x_1)=f(x_2)$，即 $y_1=y_2$，得出矛盾。因此 f^c 是一个双射函数。 □
    3) 定义：**双射函数的逆关系**为其逆函数，记为f^-1（不是双射函数就不能定义）
2. 定理：F逆∘F=Ix；F逆∘F=Iy（由双射函数定义证）
    1) 如果F不是双射函数，也可用以上两个式子定义单边左逆/右逆，此时：
    2) (1) f 存在左逆 ⇔ f 是单射;
       (2) f 存在右逆 ⇔ f 是满射;
       (3) f 存在左逆, 右逆 ⇔ f 是双射
       ⇔ f 的左逆和右逆相等. #
3. 定理：逆函数的逆函数是其本身（用相等的定义证，注意要证前域、共域相等）
4. 复合求逆的逆穿脱定理：(F∘G)逆=G逆∘F逆
    1) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

       证明　a) 因 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 均为一一对应函数，故 f^{-1} 和 g^{-1} 均存在，且 $f^{-1}: Y\to X$，$g^{-1}: Z\to Y$，所以 $f^{-1}\circ g^{-1}: Z\to X$。

       根据定理4-2.2，$g\circ f: X\to Z$ 是双射的，故 $(g\circ f)^{-1}$ 存在且 $(g\circ f)^{-1}: Z\to X$。

       $$\operatorname{dom}(f^{-1}\circ g^{-1})=\operatorname{dom}(g\circ f)^{-1}=Z$$

       b) 对任意 $z\in Z \Rightarrow$ 存在唯一 $y\in Y$，使得 $g(y)=z \Rightarrow$ 存在唯一 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，故

       $$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(y)=x$$

       但　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$

       故　$(g\circ f)^{-1}(z)=x$
5. 定理3.7 设 f:R→R, g:R→R, 且f,g按≤都是单调增的, 则fog也是单调增的.

   证明　x≤y ⇒ g(x)≤g(y) ⇒f(g(x))≤f(g(y)). #

   - 若f,g都是单调减的, 则fog也是单调增的
        - i.
        - ii.
        - iii.
        - iv. ------我是底线---------