连通性、可达性

2018年10月25日 15:00

● 通路与回路

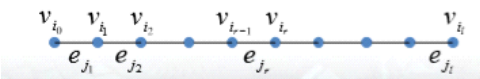
一. 路

1. 路：点边点边点……边点的交替序列（有时也直接翻译成通路，为区分，把下一种通路称做初级通路，还好这不是重点？）
2. 通路walk/初级通路/路径：无重复点的路

   • 顶点与边的交替序列

   其中 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_l}$

   1) $e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r}), r = 1, 2, \ldots, l$

   • v_{i_0} 是起点, v_{i_l} 是终点

   • 通路长度 $|\Gamma| = l$

   2)

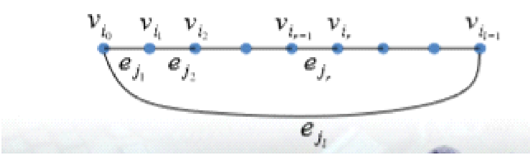
   

3. 回路closed walk：起点终点相同的路

   • 若 $v_{i_0} = v_{i_l}$

   $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_0}$

   1)

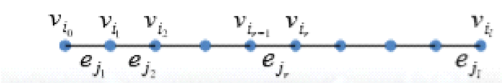
4. 初级回路/圈: 除起点终点外没有重复顶点的回路
5. 简单通路/迹: 没有重复边的通路
6. 简单回路: 没有重复边的回路
7. 复杂通路: 有重复边的通路
8. 复杂回路: 有重复边的回路

   • 可以只用边的序列来表示通(回)路

   $e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$

   • 简单图可以只用顶点的序列来表示通(回)路

9. $v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$

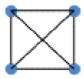
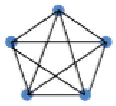
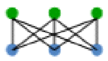
二. 圈

1. 圈

1)
- 画出的长度为l的圈
  - 如果是非标定的,则在同构意义下是唯一的
  - 如果是标定的(指定起点,终点),则是l个不同的圈

2. 圈长
   1)
      - G是含圈的无向简单图

        c(G)=最长圈的长度
   2) $c(K_n)=n\ (n\geq 3)$　　$c(K_{n,n})=2n$
3. 围长
   1)
      - G是含圈的无向简单图

        g(G)=最短圈的长度
   2)
      - $g(K_n)=3\ (n\geq 3)$, $g(K_{n,n})=4\ (n\geq 2)$
   3) 
      K_4
      
      K_5
      
      $K_{3,3}$

4. 关于n阶图最长路:
   1)
      - 定理7.6　在n阶(有向或无向)图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路, 则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的通路
        - 证: 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}, v_{i_0} = v_i, v_{i_l} = v_j$,

      i. 若l>n-1, 则Γ上顶点数l+1>n, 必存在0≤s<k≤l, 使得 $v_{i_s} = v_{i_k}$,于是Γ上有从 v_{i_s} 到自身的回路C_{sk}, 在Γ上删除C_{sk}的所有边和除 v_{i_s} 外的所有顶点,得

         $$\Gamma' = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_s} e_{j_{k+1}} v_{i_{k+1}} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

         则 |Γ'|<|Γ|,重复进行有限多步为止.#
   2)
      - 推论　在n阶图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路,则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的路径(初级通路).　#
      - 定理7.7　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的回路, 则有从v_i到自身长度小于等于n的回路.　#
   3)
      - 推论　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的简单回路, 则有从v_i到自身长度小于等于n的圈(初级回路).

三. 极大路径
1. 极大路径
   1)
      - 在无向简单图中,路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻,这样的路径称为极大路径
      - 在有向图中,路径起点的前驱,终点的后继,都在路径本身上
2. 扩大路径法
   1)
      - 任何一条路径,只要不是极大路径,则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻, 则路径还可以扩大,直到变成极大路径为止
3. 例7.6: 设G是n(n≥3)阶无向简单图, δ(G)≥2 .
   证明 G中有长度≥δ(G)+1的圈
   证明: $\forall u_0 \in V(G)$, δ(G)≥2⇒$\exists v_1 \in N_G(v_0)$,
   对$\Gamma_0 = u_0 u_1$采取扩大路径法,得到极大路径Γ= $v_0 v_1 \ldots v_k$. $d(v_k) \geq \delta(G) \Rightarrow k \geq \delta(G)$,
   $d(v_0) \geq \delta(G) \Rightarrow \exists v_i \in N_G(v_0)$, δ(G)≤i≤k.
   于是 $v_0 v_1 \ldots v_i v_0$是长度≥δ(G)+1的圈. #
   1) 如每个点的度都大于等于三，则一定有至少有四条边的圈
   2) 简单图上任一点都有n条边，都跟n个点连接，即使这n个点没有互相连起来，只要将这n+1个点扩大成极大

路径，绝对让这n+1个点间接变成通路

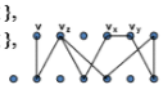
4. • D是有向简单图,
$\delta(D)\geq 2$, $\delta^-(D)>0$, $\delta^+(D)>0$,
证明D中有长度大于等于
$\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈

   1) • 证明: 分别考虑v_0,v_k:
   (1) $d^-(v_0)\geq\delta^-(D) \Rightarrow \exists v_i\in N_D^-(v_0)$, $\delta^-\leq i\leq k$.
   于是 $v_0v_1\ldots v_i v_0$是长度$\geq\delta^-+1$的圈.
   (2) $d^+(v_k)\geq\delta^+(D) \Rightarrow \exists v_j\in N_D^+(v_1)$, $0\leq j\leq k-\delta^+$.
   于是 $v_jv_{j+1}\ldots v_k v_j$是长度$\geq\delta^++1$的圈.
   较长的就是D中长度$\geq\max\{\delta^-,\delta^+\}+1$的圈. #

● 连通性和可达性

四. 连通

1. • 无向图G=<V,E>, $u\sim v \Leftrightarrow$ u与v之间有通路, 规定$u\sim u$
   • 连通关系~是等价关系
     – 自反: $u\sim u$
     – 对称: $u\sim v \Rightarrow v\sim u$
     – 传递: $u\sim v \wedge v\sim w \Rightarrow u\sim w$
2. • 连通分支: $G[V_i]$, $(i=1,\ldots,k)$
     – 设 $V/\sim = \{ V_i \mid i=1,\ldots,k \}$
     – 连通分支数: $p(G) = |V/\sim| = k$
   1) 即可连通点组成的等价类、商集、商集元素个数
3. • 连通图: $p(G)=1$; 非连通图(分离图): $p(G)>1$
   1) 任两点都能连通=连通分支数为1=是连通图
4. • 距离: $d_G(u,v)$ = u,v之间短程线的长度(或∞)
   1) 其中的短程线/测地线：uv间长度最短的通路
5. • 直径: $d(G) = \max\{ d_G(u,v) \mid u,v\in V(G) \}$
   1) 即图中最长的两点间最短通路
   2) 一阶图=0；其他阶完全图=1；其他阶零图=无穷
6. 距离函数（设自己到自己距离为0，设不可达/不连通距离为无穷）
   1) • 非负性: $d(u,v)\geq 0$,
        $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$
      • 对称性: $d(u,v) = d(v,u)$
      • Δ不等式: $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
      • 任何函数只要满足上述三条性质,就可以当作距离函数使用
7. 奇圈：长度为奇数的圈
   1) • 定理7.8 G是二部图$\Leftrightarrow$G中无奇圈
      i. • 证明: ($\Rightarrow$) 设$G=(V_1,V_2;E)$,
      设$C=v_1v_2\ldots v_{l-1}v_lv_1$是G中的任意圈, 设$v_1\in V_1$, 则
      $v_3,v_5,\ldots,v_{l-1}\in V_1$, $v_2,v_4,\ldots,v_l\in V_2$,
      于是$l=|C|$是偶数, C是偶圈.
      • 证: ($\Leftarrow$) 设G连通(否则对每个连通分支进行讨论),
      设$v\in V(G)$, 令
      $V_1=\{ u\in V(G) \mid d(u,v)$为偶数 $\}$,
      $V_2=\{ u\in V(G) \mid d(u,v)$为奇数 $\}$,
      则 $V_1\cup V_2=V(G)$, $V_1\cap V_2=\varnothing$.
      下证 $E(G)\subseteq V_1\& V_2$.



      ii. (反证)若存在$e=(v_x,v_y)$, $v_x,v_y\in V_1$, 设Γ_{vx}和Γ_{vy}是v到v_x和v_y的短程线. $|\Gamma_{vx}|$和$|\Gamma_{vy}|$都是偶数.设v_z是Γ_{vx}与Γ_{vy}的最后一个公共点, 若$v_z\in V_1$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是偶数;若$v_z\in V_2$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是奇数. 于是$\Gamma_{zx}\cup(v_x,v_y)\cup\Gamma_{zx}$是G中奇圈, 矛盾!
8. 关于n阶连通图最少边数（即树的边数）：

1) **定理7.9 若无向图G是连通的，则G的边数$m \geq n-1$**

   i. 证明：(对n归纳) 不妨设G是简单图.
      (1) $G=N_1$: $n=1$, $m=0$.
      (2) 设$n \leq k$时命题成立，下证$n=k+1$时也成立.
      - $\forall v \in V(G)$, 设$p(G-v)=s$, 则$d_G(v) \geq s$.

      对G-v的连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_s$使用归纳假设，设$|V(G_i)|=n_i$, $|E(G_i)|=m_i$，则

      $$m = m_1+m_2+\ldots+m_s+d_G(v) \geq (n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)+s = n_1+n_2+\ldots+n_s = n-1. \quad \#$$

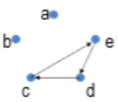
五. 可达

1. 单向可达性

1) • 有向图D=<V,E>, $u \to v \Leftrightarrow$ 从u到v有(有向)通路
2) – 规定$u \to u$，可达关系是自反，传递的

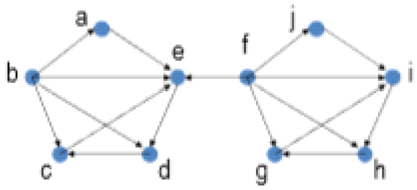
2. 双向可达性

1) • 有向图D=<V,E>, $u \leftrightarrow v \Leftrightarrow u \to v \wedge v \to u$
2) 双向可达是等价关系（比自反传递的单向可达多了对称）
3) 双向可达等价类的导出子图一定是强连通分支
   i. • 例: $b \to a \to e \to d \to c$, $c \to e \to d$, $c \leftrightarrow e \leftrightarrow d$
      强连通分支: G[{a}],G[{b}],G[{c,e,d}]



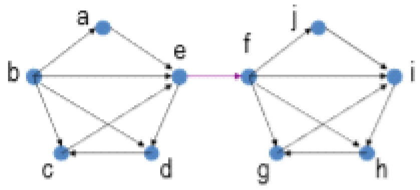
3. 弱连通

1) 基图：去掉方向后得到的图
2) 弱连通图的基图是无向连通图
   i.

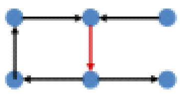


4. 单向连通：任一对顶点间至少单向可达

1)



2) • 有向图D单向连通 ⇔ D中有通路过每个顶点至少一次.#
   • 说明:不一定有简单通路,反例如下:
   i.



3) 存在出度或入度=0的点，则只能是单向连通的

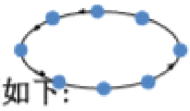
5. 竞赛图一定有初级通路(路径)过每个顶点恰好一次

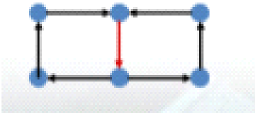
1) 即竞赛图一定是有向哈密尔顿图
2) 应用：不考虑平局时，一定能排一个队列，让每个参赛者打败后一个参赛者
3) 证明：选一条单向路径，路径外的点用扩大路径法，或补在起点前，或跟在终点后，或用传递性插中间

6. 强连通/双向连通: 有向图的任何一对顶点之间都双向可达

1) 强连通必是单连通，单连通必是弱连通

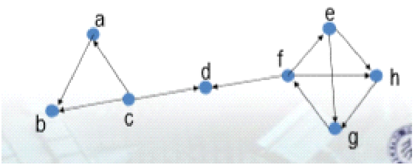
2)
- 有向图D强连通⇔D中有回路过每个顶点至少一次.
- 说明:不一定有简单回路,反例如下:



i. 

ii.
- 证明:(⇐)显然

(⇒) 设$V(D)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 设$\Gamma_{i,j}$是从$v_i$到$v_j$的有向通路, 则$\Gamma_{1,2}+\Gamma_{2,3}+\ldots+\Gamma_{n-1,n}+\Gamma_{n,1}$是过每个顶点至少一次的回路. #

7. 有向图的连通分支
   1) 双向/强连通分支: 极大强连通子图
   2) 单向连通分支: 极大单向连通子图
   3) (弱)连通分支: 极大弱连通子图
   4) 例:
      i. 强连通分支: G[{a}], G[{b}], G[{c}], G[{d}], G[{e,f,g,h}]
      ii. 单向连通分支: G[{a,b,c}], G[{c,d}], G[{d,e,f,g,h}]
      iii. (弱)连通分支: G
      iv. 

      v.
      vi.
      vii.
      viii.
      ix.
      x.
      xi.
      xii.
      xiii.
      xiv. ------我是底线---------