

命题逻辑入门

2018年11月9日 21:54

● 命题及其表示法

一. 命题proposition

1. 命题：有**确定真值的陈述句**
2. 命题标识符：表示命题的符号，一般是大写字母，偶尔是[数字]
3. 命题常量：表示确定命题的命题标识符
4. 命题变元：表示任意命题的命题标识符
 - 1) 命题变元不是命题，被**指派/代入/赋值**了特定命题后才有真值
5. 原子命题：不能分割的，最简单的命题
 - 1) 原子命题的命题变元又称原子变元
6. 复合命题：由原子命题，符号，联结词复合构成

● 联结词

二. 联结词connective

1. 析取 \vee 、合取 \wedge 、否定 \neg / \neg （即：与或非）
 - 1) 析取的两个运算元都可取真，因而又称作可兼或
 - 2) 不可兼或/排斥或/异或相当于 $\neg A \leftrightarrow B$
2. 条件/蕴涵/蕴含联结词 \rightarrow / \supset / if-then
 - 1) 可读做：若P则Q，**P仅当Q，只有Q才P，除非Q否则非P，Q每当P**
 - 2) P是充分条件，又称前件；Q是必要条件，又称后件
 - 3) 条件式 $p \rightarrow q$ ：仅当p真q假时取假（p假时取真，p真时取q）
3. 双条件/等价联结词 \leftrightarrow / \Leftrightarrow / iff / if and only if
 - 1) 可读做：P当且仅当Q
 - 2) 双条件式 $p \leftrightarrow q$ ：相同时取真，不同时取假

● 命题公式与翻译

三. 命题公式/命题形式/公式/合式公式well formed formula/wff

1. 合式公式递归定义：
 - 1) 基础：单个命题变元或常量是合式公式（不过变元被指派前不是命题）
 - 2) 归纳：由 $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ 按顺序联结的合式公式也是合式公式
 - 3) 界限：归纳有限次得到的字符串还是合式公式
2. 合式公式中的命题变元称为其分量
3. 联结优先级：**非、且、或、条件、双条件**
 - 1) 高优先级先做运算，就无需括号（但最好还是标一下右侧高优先级的括号）
 - 2) 同优先级偏左的先做运算，也无需括号
4. 翻译：把自然语言的语句符号化成数理逻辑的字符串

● 真值表与等价公式

四. 真值表truth table: 由各分量的真值指派的各种可能组合情况汇列出的表

五. 等值式/等价公式

1. A, B等价/逻辑相等: 任一组真值指派都使AB真值相同
2. 子公式: 合式公式A的一部分X如果也是合式公式, 称X为A的~
3. 等价置换/等价代换定理: A的子公式 $X \Leftrightarrow Y$, X替换成Y得到B, 则 $A \Leftrightarrow B$
 - 1) 证: $X \Leftrightarrow Y$, 所以任意指派情况下X和Y真值相同, 则AB也真值相同
 - 2) 这个替换过程又称作等值演算

4. 重要等值式

① **幂等律** $A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$

② **交换律** $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

③ **结合律** $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
 $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

④ **分配律** $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1) 德摩根率括号内可推广至多个, 形式不变

⑤ **德·摩根律** $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

⑥ **吸收律** $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

⑦ **零律** $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

⑧ **同一律** $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

⑨ **排中律** $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

⑩ **矛盾律** $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

1) 16最好还是只记住结论, 慢慢推吧.....书上没有

⑪ **双重否定律** $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

⑫ **蕴涵等值式** $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

⑬ **等价等值式** $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

⑭ **等价否定等值式** $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

⑮ **假言易位** $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

⑯ **归谬论** $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

5. 零元: 不管与谁运算都得其本身的运算元, 如零律中的数字
6. 单位元/幺元: 不管与谁运算, 取值都是另一运算元, 如同一律的数字
7. 对偶原理: 与非互换, 01互换, 是等值的

● 重言式与蕴含式

六. 重言式Equivalence

1. 可满足式contingency: 有至少一种取真情况的公式, 如 $p \rightarrow q$
2. 矛盾式/永假式contradiction: 只能取假的公式, 如 $p \wedge \neg p$
3. 重言式/永真式tautology: 只能取真的公式, 如 $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
4. 定理: 任两重言式的合取或析取都是重言式

5. 定理：重言式的任一分量（变元）用任何合式公式置换，结果仍为重言式

6. 重新定义等值式： $A \leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是重言式

七. 蕴含式implication

1. 蕴含式： $P \Rightarrow Q$ 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是重言式

1) 逆换式inverse: $Q \rightarrow P$

2) 反换式converse: $\neg P \rightarrow \neg Q$

3) 逆反式contra-positive: $\neg Q \rightarrow \neg P$

2. 蕴涵式证明/条件式永真证明方法:

1) 正推：假定前件为真，推出后件为真

2) 逆反式逆推：假定后件为假，推出前件为假

0Conjunction

3. 重要蕴含式:

1Addition

0 连接律

$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

2Simplification

① 附加律

$A \Rightarrow (A \vee B)$

② 化简律

$(A \wedge B) \Rightarrow A$

3Modus ponens

$(A \wedge B) \Rightarrow B$

4Modus Tollens

③ 假言推理

$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

④ 拒取式

$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

4: 假设检验中拒绝原假设

5Disjunctive Syllogism

⑤ 析取三段论

$(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

6Hypothetical Syllogism

$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

7Equivalent Syllogism

⑥ 假言三段论

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

⑦ 等价三段论

$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

8Constructive Dilemma

⑧ 构造性两难

$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

9Destructive Dilemma

⑨ 破坏性二难 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

(由拒取 \wedge 构造性二难可推出)

5例：已知A或B是嫌疑人，排除A以后确定B是

8例：若开发经济 \rightarrow 环境污染，环保 \rightarrow 变穷，且经济环保至少挑一个，则被污染和变穷至少发生一个

9例：如果不想变穷或污染，就选择经济环保都不发展

4. 定理： $A \leftrightarrow B$ 当且仅当 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$

5. 定理： $P \Rightarrow Q$ 且 P 永真 则 Q 永真（推理）

6. 定理： $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow C$ （传递性）

7. 定理： $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$

8. 定理： $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$ 则 $(A \vee C) \Rightarrow B$

i.

ii.

iii.

iv.

- v.
- vi.
- vii.
- viii.
- ix.
- x.
- xi.
- xii. -----我是底线-----