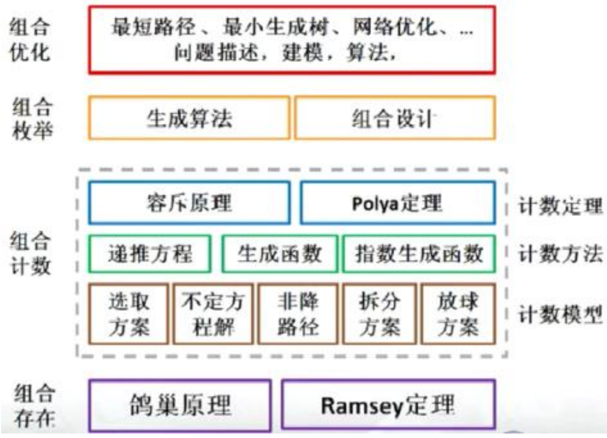
组合存在

2019年1月15日　17:59



1. 重要的组合思想：
   1) 一一对应
      i. 切割魔方至少要6次，对应正当中的小方块的6个面
      ii. n小组竞赛至少要比n-1次，对应淘汰n-1组
   2) 数学归纳

      描述一个与自然数相关的命题 $P(n)$
      证明
      归纳基础：例如 $P(0)$ 真
      归纳步骤：例如 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

      i. 第一数学归纳法：
         $n=0$ 为真
         假设对 n 为真，证对 $n+1$ 为真

         第二数学归纳法：
         $n=0$ 为真
         假设对一切小于 n 的 k 为真，证明对 n 为真

         证明命题 $P(m, n)$
         针对 m, n 两个自然数
         任意给定 m（或 n）对 n (或 m) 归纳
      ii. 多重归纳
         归纳基础 $<0, n'>$ 为真，$<m',0>$ 为真
         归纳步骤
         假设 $<m-1,n>, <m,n-1>$ 为真，证 $<m,n>$ 为真
   3) 上下界逼近

一. 鸽巢原理

1. 主观理解
   1) 鸽巢原理　设 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 是给定正整数，若把 $q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则或第一个盒子至少包含了 q_1 个物体，或者第二个盒子至少包含了 q_2 个物体，…，或者第 n 个盒子至少包含了 q_n 个物体.
   2) 推论　若 $n(r-1)+1$ 个物体放到 n 个盒子里，则存在一个盒子至少包含了 r 个物体. 令 $q_1=q_2=\ldots=q_n=r$ 即可.
2. 取整函数

顶函数（Ceiling fuction），底函数（Floor fuction）

1) 定义 对于实数 x，

顶函数 $\lceil x \rceil$：大于或等于 x 的最小整数

底函数 $\lfloor x \rfloor$：小于或等于 x 的最大整数

有时将底函数记作 $[x]$

2) 性质 (1) $x-1<\lfloor x\rfloor \le x \le \lceil x\rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+m\rfloor = \lfloor x\rfloor + m$, $\lceil x+m\rceil = \lceil x\rceil + m$， m 为整数

(3) $\lceil m/2\rceil + \lfloor m/2\rfloor = m$, m 为整数

3. 函数形式定义

1) 设 $f:A\to B$, $|A|=m$, $|B|=n$, 若 $m>n$, 则存在至少 $\lceil m/n\rceil$ 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_{\lceil m/n\rceil}$ 使得

$$f(a_1)=f(a_2)=\dots=f(a_{\lceil m/n\rceil})$$

2) 例9 $a_1,a_2,\dots,a_{n^2+1}$ 是实数序列，证明可以选出 $n+1$ 个数的子序列 $a_{k_1},a_{k_2},\dots,a_{k_{n+1}}$ 使得其为递增子序列或递减子序列

证 假设没有长为 $n+1$ 的递增子序列，设 m_k 表示从 a_k 开始的最长递增子序列长度，则

$$1\le m_k \le n,\quad m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$$

必存在 $\lceil (n^2+1)/n\rceil = n+1$ 个 m_k 取值相等，都等于 l

$$m_{k_1}=m_{k_2}=\dots=m_{k_{n+1}}=l$$

若 $a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$，则从前者开始的递增子序列长度为 $l+1$, 矛盾.

$a_{k_1}>a_{k_2}>\dots>a_{k_{n+1}}$ 是长为 $n+1$ 的递减子序列.

二. Ramsey定理

1. 简单应用

1) 用红蓝两色涂色 K_6 的边，则或有一个红色 K_3, 或有一个蓝色 K_3

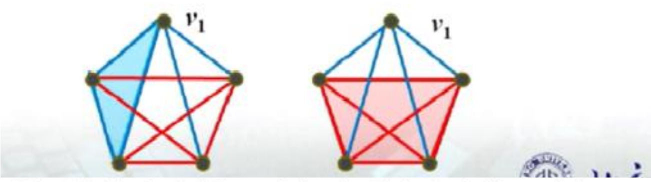
$R(3,3)=6$

2) 用红蓝两色涂色 K_9 的边，则或有一个红色 K_4，或有一个蓝色 K_3.

$R(3,4)=9$

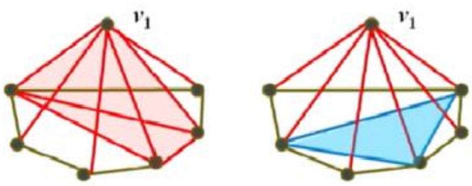
i. 证：存在一个顶点关联4条蓝边或者6条红边.
否则蓝边数<4, 红边数<6，则蓝边总数至多 $\lfloor(3\times 9)/2\rfloor=13$，红边总数至多 $\lfloor(5\times 9)/2\rfloor=22$，总共35条边，与 K_9 边数为36矛盾.
设 v_1 关联4条蓝边，若对应4个顶点没有蓝边，则构成红 K_4；有1条蓝边，则构成兰 K_3 .

ii.

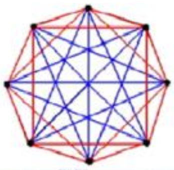


设 v_1 关联6条红边，对应6个顶点必有蓝 K_3 或红 K_3.

iii.



iv. 对于K_8，存在一种涂色方案，既没有蓝色三角形，也没有红色完全四边形.
$R(3,4)=9$.



2. Ramsey定理

1) 定理 设p, q为正整数，$p,q \ge 2$，则存在最小正整数$R(p,q)$，使得当$n \ge R(p,q)$时，用红蓝两色涂色K_n的边，则或存在一个蓝色的K_p，或存在一个红色的K_q.

2) 证明思路：归纳法
归纳基础 $R(p, 2) \le p$，$R(2, q) \le q$，
归纳步骤 $R(p-1, q)$，$R(q-1, p)$ 存在
$$\Rightarrow R(p,q) \le R(p-1, q) + R(q-1, p)$$
假设对正整数p', q'命题为真，其中$p' \le p$，$q' \le q$，
$p'+q' < p+q$，
则 $R(p-1, q)$，$R(p, q-1)$ 存在. 令
$$n \ge R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

3) case1 v_1关联$R(p-1, q)$条蓝边，
case2 v_1关联$R(p, q-1)$条红边.

对于case1，如为蓝色K_{p-1}，构成蓝色K_p；如为红色K_q，则满足要求. 对于case2可以类似分析.
$$R(p, q) \le R(p-1, q) + R(q-1, p)$$

3. 小Ramsey数（上下界）

1) http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html

p \ q	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 848	185 848	209 1461	235 1461	265 3059
6				102 165	113 298	127 495	169 780	179 1171	253 2566	262 2566	317 5033	317 5033	401 11627
7					205 540	216 1031	233 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581	511 15263	511 22116
8						282 1870	317 3583	377 6090	377 10630	377 16944	817 27490	817 41526	861 63620
9							565 6588	580 12677	22325	39025	64871	89203	
10								798 23556		81200			1265

4. Ramsey数性质

1) $$R(a,b) = R(b,a), \quad R(a,2) = R(2,a) = a$$

2) $$R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1)$$

5. 推广

1)

$R(p,q)$的图表示	$R(p,q)$的集合表述：
K_n的顶点集V	集合S
K_n的边集E	S的2元子集的集合T
用2色涂色K_n的边	将T划分成E_1, E_2
存在蓝色完全p边形	存在S的p子集其所有2元子集$\in E_1$
存在红色完全q边形	存在S的q子集其所有2元子集$\in E_2$

集合表述具有更强的表达能力.

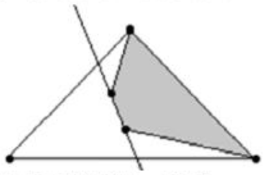
2) 对于任意给定的正整数p,q,r, $(p,q \ge r)$存在一个最小的正整数$R(p,q;r)$使得当集合S的元素数大于等于$R(p,q;r)$时，将S的r子集族任意划分成E_1, E_2，则或者S有p子集A，A的所有r元子集属于E_1，或者存在q子集B，B的所有r元子集属于E_2.

3) 设 $r, k\ge 1, q_i\ge r, i=1, 2, \dots, k$, 是给定正整数，则存在一个最小的正整数$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$，使得当$n\ge R(q_1,q_2,\dots,q_k;r)$时，当$n$元集$S$的所有$r$元子集划分成$k$个子集族$T_1, T_2, \dots, T_k$，那么存在$S$的$q_1$元子集$A_1$，其所有的$r$元子集属于$T_1$，或者在$S$的$q_2$元子集$A_2$，$A_2$的所有$r$元子集属于$T_2$，…，或者存在$S$的$q_k$元子集$A_k$，其所有的$r$元子集属于$T_k$.

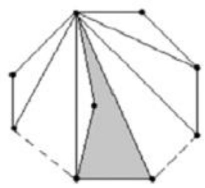
6. 应用

1) 引理1 平面上任给5点，没有3点共线，则必有4点是凸4边形的顶点.
引理2 平面上m个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这m个点构成凸m边形的顶点

i. 证 做最大的凸多边形T. 如果T是4边形或5边形，则命题为真. 如果为3边形，则3边形内存在2点，与过这2点的直线一侧的另外2点构成凸4边形.



ii. 证：假设最大的凸多边形是p边形，$p<m$. 则必有点落入这个多边形内部. 将这个多边形划分成三角形，必有点落入某个三角形，这个三角形的顶点与内部的点构成凹4边形. 与已知矛盾.



2) 例10 对于任意$m\ge 3, m\in Z^+$，存在正整数$N(m)$，使得当$n\ge N(m)$时，若平面的n个点没有三点共线，其中总有m个点构成一个凸m边形的顶点

3) $m=3, N(m)=N(3)=3,$
$m=4, N(m)=N(4)=5,$
$N(m)\le R(5, m; 4)$

i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix.
x.
xi. --------我是底线--------