谓词逻辑

2018年11月10日　17:13

● 谓词的概念与表示

一. 谓词predicate

1. 个体词：研究对象中可独立存在的客体，可具体可抽象
   1) 客体常元/个体常项：表示具体指定客体的个体词
   2) 客体变元/个体变项：表示抽象泛指客体的个体词
2. 谓词：用于刻划客体的性质或关系的词，常用大写字母表示
   1) 一元谓词描述性质，多元谓词描述关系
3. 谓词表达命题需要谓词和客体两部分
4. 一般会约定好谓词后的客体的出现次序，不同次序视作两个命题。偶尔不约定次序
5. 谓词填式：谓词字母后填上客体得到的式子，是一个命题

● 命题函数与量词

二. 命题函数proposition function

1. 简单命题函数：一个谓词和一些客体变元组成的表达式。即谓词填式
   1) 客体变元取了特定客体后才能确定命题
2. **命题可视作0元谓词的命题函数**
3. 个体域/论域：客体变元的论述范围
   1) 默认的个体域称为全总个体域

三. 量词quantifier

1. 存在量词existential quantifier：∃：存在一些/至少一个/对于某些
2. 全称量词universal quantifier：∀ ：对所有的/任意的/每一个都
   1) (∀ x)有时可简记成(x)
3. 一般把特性谓词当作全称量词后的蕴含前件、存在量词后的合取项
   1) 如$\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$，$\exists x(F(x)\wedge M(x))$

● 谓词公式与翻译

四. 谓词公式predicate formula

1. 原子谓词公式：形如$A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$。即简单命题函数
2. 谓词演算的合式公式/谓词公式的递归定义：
   1) 基础：原子谓词公式是合式公式
   2) 归纳1：由¬∧∨→↔联结的合式公式也是合式公式
   3) 归纳2：由∃∀ 修饰的合式公式也是合式公式
   4) 界限：归纳有限次得到的公式还是合式公式
3. 最外层括号可以省略，量词后若有括号则不能省

● 变元的约束

五. 约束quantified by

1. 约束：作用域中指导变元的每次出现称为约束出现，亦称被该指导变元所约束

1) 指导变元/作用变元：量词后紧跟的客体变元
2) 作用域/辖域：量词的作用变元后的公式是该量词的~
3) 自由变元/参数：不受相应量词的指导变元约束的变元

2. n元谓词的n个独立自由变元中，若有k个变元被约束，就变成了n-k元谓词，约束到没有自由变元时，它就变成了命题
3. 为防止变元符号相同引起混乱：
   1) 约束变元的换名规则：将指导变元及作用域中的该字母换成一个作用域中没出现过的字母（公式中其余部分的不变）
   2) 自由变元的代入规则：将公式中该自由变元的每次出现进行更换，与原公式中已有的变元不能相同
4. 枚举：有限个体域D={a1,a2,...,an}中可消去量词：
   1) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$
   2) $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

● 谓词演算中的等价式与蕴含式

六. 新等值式和新蕴含式

1. 赋值/解释：用确定的<u>命题/客体</u>取代<u>命题/客体变元</u>（然后谓词公式变成了命题）
   1) 谓词公式等价：同个体域上的公式AB任意赋值都获得相同真值，记作$A\Leftrightarrow B$
   2) 谓词公式有效/永真：任意赋值都取T
   3) 谓词公式不可满足：任意赋值都取F
   4) 谓词公式可满足：至少一种赋值能取T
2. 命题公式的推广：用谓词公式代替命题演算中的等价式/蕴含式，得到的新谓词公式也是有效的，即第一章的所有常用式都可以在推理题以外的地方直接套
3. 量词否定等值式：
   1) $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$
   2) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$
4. 作用域<u>扩张/收缩</u>等值式（左向右是收缩）
   1) $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$
   2) $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$
   3) $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$
   4) $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$
   5) $\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$
   6) $\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$
   7) $\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$
   8) $\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$
      i. 78换前件量词的原因参考蕴含等值式和量词否定等值式
      ii. 后件量词不会变，B可以用B(x)替换，量词取未收缩时的量词
5. 量词分配
   1) $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
   2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$
      i. ∀对“∧”有分配律，但∃没有
   3) $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

i. 推论：$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

4) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

i. ∃对"∨"有分配律，但∀没有

ii. 推论：$\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

6. 嵌套量词换序（量词作用域都是A(x,y)）
   1) $\forall x\forall y\Leftrightarrow\forall y\forall x$
   2) $\exists x\exists y\Leftrightarrow\exists y\exists x$
   3) $\forall x\forall y\Rightarrow\exists y\forall x$
   4) $\exists y\forall x\Rightarrow\forall x\exists y$
   5) $\forall x\exists y\Rightarrow\exists y\exists x$
7. 还有一些不常用式子姑且先记着吧……
   1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$
   2) $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\leftrightarrow\forall xB(x)$
   3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

● 前束范式

七. 前束范式premex normal function

1. 前束范式：量词全在左边，作用域一直延伸到末尾的公式（作用域里无量词）
   1) 形如：$\square x_1\square x_2\ldots\square x_nB$，□是∃或∀，B是无∃或∀的谓词公式，各$x_i$是客体变元
2. 定理：任意一个谓词公式都有等价前束范式。定理证明/演算过程：
   1) 把作用域中无指导变元的量词及其指导变元划掉
   2) 用换名规则/代入规则让不同作用域中无重名变元
   3) 用各种等值式让公式中只剩下¬,∨,∧
   4) 用量词否定等值式和德摩根律把¬深入到命题变元/谓词填式前
   5) 用作用域扩张等值式把量词及其指导变元直接推到最左
3. 前束合取/析取范式：作用域内是主合取/析取范式的前束范式
   1) 定理：每个谓词公式都能转换成等价前束合取/析取范式
4. 求前束范式前**一定要化简**

● 谓词演算的推理理论

八. 推理理论新规则

1. 全称指定规则Universal Specify：
   1) ∀xP(x)推出P(c)，c是论域中某任意客体
2. 全称推广规则UG：
   1) P(c)推出∀xP(x)，c是论域中某任意客体
3. 存在指定规则ES：
   1) ∃ xP(x)推出P(c)，c是论域中某满足P的客体
4. 全称推广规则Existential Generalize：
   1) P(c)推出∃xP(x)，c是论域中某满足P的客体
5. 没有给出英语全称的两个比较难用，需要考虑c的范围
   1) 如：**ES一定要先于US用**，以保证两次指定的是同一个c

2) 虽然在量词作用域中，直接对无量词的公式套前一章的等值式和蕴含式，是没有逻辑上错误的，但并不能这么推理，正确写法应该是**先用指定规则推出无量词的具体命题，再对该命题套等值式和蕴含式，再用推广规则推回去**

6.

表 1-8.3

I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$
I_5	$\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_6	$Q\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_7	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$
I_8	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$
I_9	$P, Q\Rightarrow P\wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P\vee Q\Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P\rightarrow Q\Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P$
I_{13}	$P\rightarrow Q, Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$
I_{14}	$P\vee Q, P\rightarrow R, Q\rightarrow R\Rightarrow R$
I_{15}	$A\rightarrow B\Rightarrow(A\vee C)\rightarrow(B\vee C)$
I_{16}	$A\rightarrow B\Rightarrow(A\wedge C)\rightarrow(B\wedge C)$

7.

表 1-8.4

E_1	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$
E_3	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$
E_4	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$
E_5	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$
E_6	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
E_7	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$
E_8	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
E_9	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
E_{10}	$P\vee P\Leftrightarrow P$
E_{11}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$
E_{12}	$R\vee(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{13}	$R\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{14}	$R\vee(P\vee\neg P)\Leftrightarrow T$
E_{15}	$R\wedge(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow F$
E_{16}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
E_{17}	$\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$
E_{18}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$
E_{19}	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$
E_{20}	$P\rightleftarrows Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
E_{21}	$P\rightleftarrows Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
E_{22}	$\neg(P\rightleftarrows Q)\Leftrightarrow P\rightleftarrows\neg Q$

表 2-5.1

8.

E_{25}	$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
E_{26}	$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$
E_{27}	$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$
E_{28}	$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$
E_{29}	$(\forall x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)B(x)$
E_{30}	$(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$
E_{31}	$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
E_{32}	$(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
E_{33}	$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$
E_{34}	$A \rightarrow (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$
E_{35}	$A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$
I_{15}	$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$
I_{16}	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
I_{17}	$(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix.
x. --------我是底线----------