计数定理和反演

2019年1月16日　　16:37

一. 容斥原理

定理 设S为有穷集，$P_1,P_2,\ldots,P_m$是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质P_i的元素构成的子集，i=1,2,…, m. 则 S 中不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

1. $$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}|$$
$$=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$
$$\text{右边}=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

   1) 证明　数学归纳法、组合分析

   若 x 不具有任何性质，则对等式右边贡献为：
   $$1-0+0-0+\ldots+(-1)^m\cdot 0=1$$
   若 x 具有 n 条性质，$1\le n\le m$, 则对等式右边的贡献为：
   $$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^m\binom{n}{m}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

推论：S中至少具有一条性质的元素数为

2. $$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m|$$
$$=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1<i<j<m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1<i<j<k<m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\ldots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

3. 多重集的r组合数

   1) 例 1　$B=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的 10-组合数

   $S=\{x\,|\,x$ 是 a,b,c 任意重复的 10-组合$\}$

   $A_1=\{x\,|\,x\in S$，x 中至少含 4 个 $a\}$

   $=\{x\,|\,x$ 是 a,b,c 的任意 6 组合$\}$

   $A_2=\{x\,|\,x\in S$，x 中至少含 5 个 $b\}$

   $=\{x\,|\,x$ 是 a,b,c 的任意 5 组合$\}$

   $A_3=\{x\,|\,x\in S$，x 中至少含 6 个 $c\}$

   $=\{x\,|\,x$ 是 a,b,c 的任意 4 组合$\}$

$$|S| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = 66,\quad |A_1| = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A_2| = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{2} = 21,\quad |A_3| = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

2) $$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+1-1}{1} = 3,\ |A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = 1,$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - (28+21+15) + (3+1+0) - 0 = 6$$

注意：性质的确定与要求条件相反

性质彼此独立，具有不同性质元素计数互不影响

4. 限制元素计数

例2 求不超过120的素数个数

解：$11^2 = 121$，

不超过120的合数的素因子可能是2, 3, 5, 7，

$S = \{x \mid x \in Z,\ 1 \le x \le 120\}$，$|S| = 120$

被 2, 3, 5, 7 整除的集合分别为A_1, A_2, A_3, A_4：

1) 所求的元素数

$$N = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3$$

+3的理由是：

2, 3, 5, 7 能被 2, 3, 5 或 7 整除，但它们是素数

1 不能被 2, 3, 5 或 7 整除，但 1 不是素数.

5. 欧拉函数值

例3 欧拉函数 $\phi(n)$：小于 n 的且与 n 互素的数的个数

设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$

1) 为 n 的素因子分解式

$A_i = \{x \mid 1 \le x < n$，且 p_i 整除 $x\}$，

$|A_i| = n/p_i$，$i = 1, 2, \ldots, k$

$|A_i \cap A_j| = n/p_ip_j$，$1 \le i < j \le n$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

2) $$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

6. 证明交错和恒等式

例 4 证明 $\binom{n-m}{r-m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$，$m \le r \le n$

证：令 $S=\{1,2,\ldots,n\}$，$A=\{1,2,\ldots,m\}$，计数 S 中包含 A 的 r 子集.

P_j: 在 S 的 r 子集中不包含 j，$j=1, 2, \ldots, m$

1) $$|A_j| = \binom{n-1}{r},\ 1 < j < m,\quad |A_i \cap A_j| = \binom{n-2}{r},\ 1 < i < j < m$$

$$\ldots,\quad |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m| = \binom{n-m}{r}$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

$$= \binom{n}{r} - \binom{m}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{m}{2}\binom{n-2}{r} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}\binom{n-m}{r}$$

二. 反演定理

1. 二项式反演：（其中n和k可以上下交换，仍成立）

1) fn = Σ[k=0:n] nCk * (-1)^k * gk iff

gn = Σ[k=0:n] nCk * (-1)^k * fk

2) fn = Σ[k=0:n] nCk * gk iff

gn = Σ[k=0:n] nCk * fk * (-1)^(n-k)

2. 斯特林反演（格式同上）

   1) **fn = Σ[k=0:n] {n k} * gk iff**

      gn = Σ[k=0:n] [n k] * fk * (-1)^(n-k)

   2) 顺带一提两类斯特林数有这个性质：

      Σ[k=m:n] (-1)^(n-k) * {n k} * [k m] = n==m?1:0

      Σ[k=m:n] (-1)^(n-k) * [n k] * {k m} = n==m?1:0

3. 莫比乌斯反演

   1) **g(n)=Σ(d|n) f(d)** iff **f(n)=Σ(d|n) mu(d)*g(n/d)**

   2) **g(n)=Σ(n|d) f(d)** iff **f(n)=Σ(n|d) mu(d/n)*g(d)**

三. 对称筛公式

$$N_k = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

$$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$|S| = N,$$

1. $$N_0 = N - \binom{m}{1}N_1 + \binom{m}{2}N_2 - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}N_m$$

   $$= N + \sum_{t=1}^{m}(-1)^t \binom{m}{t} N_m$$

   1) 使用条件：不同性质对计数的影响对称，各性质的计数独立

2. 错位排列数：n个元素都不在各自原位置的排列数

   错位排列数记作 D_n，
   设 S 为{1, 2, …, n}的排列的集合，
   P_i是其中 i 在第 i 位的性质，i=1, 2, …, n.

   1) $$N = n!, \quad N_1 = (n-1)!, \quad N_2 = (n-2)!$$
      $$\dots$$
      $$N_k = (n-k)!, \quad \dots, \quad N_n = 0!$$
      $$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}0!$$
      $$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

   2) 该公式推导过程可使用二项式反演公式，即从**n! = Σ[k=0:n] nCk * Dk**能反演出

      Dn = Σ[k=0:n] nCk * k! * (-1)^(n-k) = n! * Σ[k=0:n] (-1)^k / k!

   3) 例1 8 个字母 A, B, C, D, E, F, G, H 的全排列中，
      使得 4 个元素不在原来位置的排列数。
      解：4 个元素的错排数为
      $$D_4 = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!})$$
      $$= 24(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 12 - 4 + 1 = 9$$
      $$N = C(8,4) \cdot 9 = 630$$

四. 棋盘多项式

n 个元素的排列与 n 个棋子在 $n\times n$ 棋盘的布棋方案（其中不允许两个棋子布在同行、同列）是一一对应的排列 $i_1i_2\ldots i_n$ 表示：第一行放在第 i_1 列，第二行放在第 i_2 列，…，第 n 行放在第 i_n 列.

1. $r_k(C)$表示 k 个棋子在棋盘 C 上布棋方案数，则生成函数

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n}r_k(C)x^k$$

称为 C 的棋盘多项式.

C_i ：去掉某个给定方格所在的行和列之后剩余棋盘

C_l：去掉某个给定方格之后剩余棋盘

C_1和 C_2表示两个分离的棋盘

则不难证明：

1)
$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_l)$$
$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k}r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$$
$$R(C)=xR(C_i)+R(C_l)$$
$$R(C)=R(C_1)R(C_2)$$

$R($  $)=R($  $)=1+2x$

$R($  $)=1+2x+x^2$

2) $R($  $)=xR($  $)+R($  $)$

$=x(1+2x)+x(1+x)+R($  $)$

$=2x+3x^2+1+3x+x^2=1+5x+4x^2$

2. 有禁区的排列

限制某些数字不能出现在某些位置的排列，这些位置对应于棋盘的禁区.

1) 定理：C是 $n\times n$ 的具有给定禁区的棋盘，禁区对应于$\{1,2,\ldots,n\}$的元素在排列中不允许出现的位置，则这种有禁区的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^n r_n$$

其中 r_i 是 i 个棋子布置到禁区的方案数

不考虑禁区限制，不带编号棋子的布棋方案数为 $n!$，

考虑棋子编号，布棋方案数为 $n!\ n!$

i. P_j: 第 j 个棋子落入禁区的性质，$j=1,2,\ldots,n$

给定的1个棋子落入禁区的方案数：$N_1=r_1(n-1)!(n-1)!$

给定的2个棋子落入禁区的方案数：$N_2=2!\ r_2(n-2)!(n-2)!$

…

给定的k个棋子落入禁区的方案数：$N_k=k!\ r_k(n-k)!(n-k)!$

…

n 个棋子落入禁区的方案数：　$N_n=n!\ r_n\ 0!\ 0!$

带编号的棋子不落入禁区的方案数

ii.

$$N_0 = n!n! - \binom{n}{1} r_1 (n-1)!(n-1)! + \binom{n}{2} 2! r_2 (n-2)!(n-2)!$$
$$- \dots + (-1)^k \binom{n}{k} k! r_k (n-k)!(n-k)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} n! r_n$$
$$= n!n! - r_1 n!(n-1)! + r_2 n!(n-2)! - \dots$$
$$+ (-1)^k r_k n!(n-k)! + \dots + (-1)^n r_n n!$$

$$N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^k r_k (n-k)! + \dots + (-1)^n r_n$$

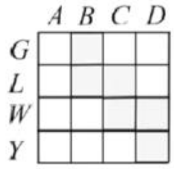
适用条件：棋盘为 $n\times n$, 小禁区

例2 G, L, W, Y 4位工作人员，A, B, C, D 为4项工作，每个人不能从事的工作如图所示. 每个人1项工作，求分配方案数.

iii.

解 禁区的棋盘多项式为

$$1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$
$$r_1 = 6, r_2 = 10, r_3 = 4$$



$$N = 4! - r_1(4-1)! + r_2(4-2)! - r_3(4-3)!$$
$$= 4! - 6\cdot 3! + 10\cdot 2 - 4\cdot 1 = 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$

2) 错排问题

$R(C)=R($  $)=(1+x)^n$

$$R(C) = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \dots + C(n,n)x^n$$

i.

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$
$$= n! - n! + \frac{1}{2!}n! - \frac{1}{3!}n! + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} n!$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

五. 关于置换群的前驱知识

1. 不动置换类Z和轨道E

1)

不动置换类：设 $N=\{1, 2, \dots, n\}$, G 为 N 上置换群，

$$Z_k = \{\ \sigma \mid \sigma\in G,\ \sigma(k)=k\ \}$$

称 Z_k 为 k 的不动置换类.

可以证明 Z_k 是 G 的子群.

i. 即：Zk是使k不动的置换的集合

2)

N, G 定义如上，R 是 N 上的二元关系，$\forall x,y\in N$,

$$xRy \Leftrightarrow \exists\sigma\ (\sigma\in G,\ \sigma(x)=y)$$
$$\forall k\in N,\ E_k=\{\ l \mid l\in N,\ kRl\ \}$$

称 E_k 为 k 的轨道.

可以证明 R 为 N 上等价关系，且 k 的轨道就是 k 的等价类.

i. 即：Ek是k可能出现的位置的集合

ii.

例 1 $N=\{1, 2, 3, 4\}$，$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$

$\sigma_1=(1)$ $\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$

$\sigma_3=(1\ 3)(2\ 4)$ $\sigma_4=(1\ 4\ 3\ 2)$

$\sigma_5=(1\ 2)(3\ 4)$ $\sigma_6=(1\ 4)(2\ 3)$

$\sigma_7=(1)(3)(2\ 4)$ $\sigma_8=(2)(4)(1\ 3)$

$Z_1=Z_3=\{\sigma_1, \sigma_7\}$，$Z_2=Z_4=\{\sigma_1, \sigma_8\}$

$E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3, 4\}$

$S_3=\{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$,

$Z_1=\{(1), (2\ 3)\}$, $E_1=\{1, 2, 3\}$,

$|S_3|=6$, $|Z_1|=2$, $|E_1|=3$, $6=2\times3$.

2. 定理 1 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, G 为 N 上置换群，则$\forall k\in N$,

$$|Z_k|\cdot|E_k|=|G|.$$

1) 证：Z_k 是子群，根据 Lagrange 定理

$$|G| = |Z_k|\ [G:Z_k]$$

下面证明 $[G:Z_k]=|E_k|$.

令 S 是 Z_k 的所有左陪集的集合，

定义 $f: S\to E_k$, $f(\sigma Z_k)=\sigma(k)$,

良定义及单射性：

$$\sigma Z_k=\tau Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\in Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau(k)=k$$

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(\tau(k))=k \Leftrightarrow \sigma(k)=\tau(k)$$

满射性：$\forall t\in E_k$, $\exists\sigma\in G$，使得$\sigma(k)=t$,

因此 $f(\sigma Z_k)=\sigma(k)=t$.

六. Burnside引理

1. Burnside引理：对于每个置换σ，定义**C1(σ)为在置换σ下保持不变的方案数。**则：本质不同的排列**方案数=各置换中不变方案数C1(σ)的平均数**

1) 引理 设 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, G 是 N 上置换群.

令 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_g\}$,

$c_1(\sigma_k)$ 是 σ_k 的轮换表示中 1-轮换的个数，

M 为不同的轨道个数，则

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)$$

证：$c_1(\sigma_k)$是σ_k的作用下保持不变的N中元素数。做下表

i.

$G \backslash N$	1	2	……	n	$c_1(\sigma_k)$
$\sigma_1=(1)$	S_{11}	S_{12}	……	S_{1n}	$c_1(\sigma_1)$
σ_2	S_{21}	S_{22}	……	S_{2n}	$c_1(\sigma_2)$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
σ_g	S_{g1}	S_{g2}	……	S_{gn}	$c_1(\sigma_n)$
合计	$\lvert Z_1\rvert$	$\lvert Z_2\rvert$	……	$\lvert Z_n\rvert$	$\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)=\sum_{j=1}^{n}\lvert Z_j\rvert$

1) $S_{kl}=1 \Leftrightarrow \sigma_k(l)=l$

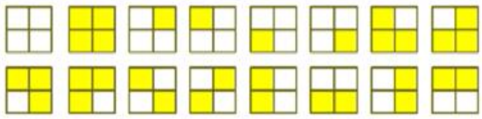
$$\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k)=\sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{n} S_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{g} S_{kj}=\sum_{j=1}^{n}|Z_j|$$

ii. $$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k)=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{n}|Z_j|=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|E_j|}=M$$

$$\{i_1,i_2,\dots,i_l\}=E_{i_1}=E_{i_2}=\dots=E_{i_l}$$

$$\Rightarrow |E_{i_1}|=l \text{ 且} \sum_{j=i_1}^{i_l}\frac{1}{|E_j|}=1$$

2) 例2 用2色涂色2×2方格棋盘，则方案数为16



作用在16个方案上的置换群 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$,

$\sigma_1=(1)$

$\sigma_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$

$\sigma_3=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$

$\sigma_4=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$

i. $M=\frac{1}{4}(16+2+4+2)=6$

ii. 其中，σ1是不动，有16个1-轮换，σ3是转180°，有4个1-轮换，σ2、σ4是顺逆时针转90°，各2个1-轮换，平均有6个1-轮换，所以6个本质不同

iii. 所以允许旋转任意次90°的棋盘涂色有6种

3) 例3 涂色立方体使得各个面颜色不同的方案数.

解：以过一对面的轴

旋转0度：1个

旋转90度，270度：6个

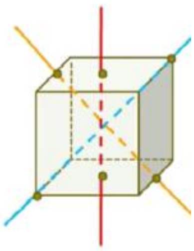
旋转180度：3个

以过一对顶点的轴

旋转120度，240度：8个

以过一对棱的的轴

旋转180度：6个



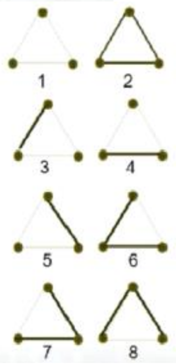
$|G|=24$, $M=1/24\cdot 6!=30$

4) 例 4 3 个顶点的不同构的图的个数

$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$

$\sigma_1=(1)$	0 度
$\sigma_2=(1)(2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)$	120 度
$\sigma_3=(1)(2)(3\ 5\ 4)(6\ 8\ 7)$	240 度
$\sigma_4=(1)(2)(3\ 5)(4)(6\ 7)(8)$	翻 180 度
$\sigma_5=(1)(2)(4\ 5)(3)(6\ 8)(7)$	翻 180 度
$\sigma_6=(1)(2)(3\ 4)(5)(7\ 8)(6)$	翻 180 度

$M=\frac{1}{6}(8+2+2+4+4+4)=4$



七. Polya定理：定义**C(σ)为σ的不相交循环节的数量**，m为颜色数。则**m^C(σ)=C1(σ)**，代入Burnside引理后得到：本质不同**方案数=各置换中(颜色数m^循环节数C(σ))的平均数**

1. 定理 1 设 $N=\{1,2,\dots,n\}$,

令 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_g\}$为 N 上置换群,

用 m 种颜色涂色 N 中的元素,

$c(\sigma_k)$是 σ_k 的轮换表示中轮换的个数,

则在 G 作用下不同的涂色方案数为

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{c(\sigma_k)}$$

(1)令$\overline{G}=\{\tau_{\sigma_k} \mid \sigma_k \in G\}$， $\tau_{\sigma_k}(f)=f\sigma_k$， f为方案

(2)证明 G 与$\overline{G}$同构

1) (3)证明$c_1(\tau_{\sigma_k})=m^{c(\sigma_k)}$

(4)证明$M=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\tau_{\sigma_k})=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}m^{c(\sigma_k)}$

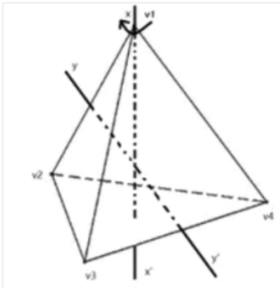
- **Burnside**引理的群作用于方案集合
  Polya定理的群作用于元素的集合

2.
- 如果有n个元素，m种颜色，将有m^n种方案.一般使用**Polya**定理的群要简单得多.
- 一般情况使用**Polya**定理，但在某些特殊情况只能直接计数不变的方案，必须使用**Burnside**引理

甲烷CH4的支链结构为正四面体，若4个H键用H,CL,CH3，C2H5之一取代，问有几种不同的化学结构？

解：

问题相当于对正四面体的4个顶点用4种颜色着色，求不同的方案数目，使正四面体v1，v2，v3，v4重合的刚体运动有两类，一类是绕过顶点的中心线XX'旋转120度，240度；另一类是绕过v1v2，v3v4中点的连线yy'旋转180度，如下图旋转群G的元素为：



3.

(v1)(v2)(v3)(v4)，(v1)(v2v3v4)，(v1)(v4v3v2)，(v2)(v1v3v4)，

(v2)(v4v3v1)，(v3)(v1v2v4)，(v3)(v4v2v1)，(v4)(v1v2v3)，

(v4)(v3v2v1)，(v1v2)(v3v4)，(v1v3)(v2v4)，(v1v4)(v2v3)，

故不同的化学结构数目为：

$$\frac{1}{12}\times\left[4^4+8\times4^2+3\times4^2\right]=\frac{1}{12}\times[256+128+48]=36$$

例 5　考虑例 1，群 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$

4.

σ_1= (1) (2) (3) (4)	旋转 0 度
σ_2= (1 2 3 4)	旋转 90 度
σ_3 = (1 3) (2 4)	旋转 180 度
σ_4= (1 4 3 2)	旋转 270 度

$$M=\frac{1}{4}(2^4+2^1+2^2+2^1)=6$$

例6 **Fermat小定理：**设p为素数，则$p \mid (n^p-n)$

证：考虑p个珠子的手镯，用n种颜色的珠子穿成.

考虑旋转，则

$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p\}$

5.

σ_1=(•)(•)…(•)

σ_2=(• • … •)

…

σ_p=(• • … •)

$$M=\frac{1}{p}[n^p+(p-1)n^1]=\frac{1}{p}(n^p-n+pn)$$

i.

ii.

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

viii. ---------我是底线--------