计数公式

2019年1月15日　　20:37

一. 计数法则

1. **加法法则**：事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A或B”有$m+n$种产生方式.

   使用条件：事件A与B产生方式不重叠

   适用问题：分类选取

2. **乘法法则**：事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A与B”有mn种产生方式.

   使用条件：事件A与B的产生方式相互独立

   适用问题：分步选取

   1) 可以用加法法则与乘法法则解决n元集上关系和函数的计数问题.

      例 12.1　设A为n元集，问

      (1) A上的自反关系有多少个？

      (2) A上的对称关系有多少个？

      (3) A上的反对称关系有多少个？

      (4) A上的函数有多少个？其中双射函数有多少个？

      i. 2^{n^2-n}

      ii. $2^{(n^2+n)/2}$

      iii. $2^n 3^{(n^2-n)/2}$

      iv. n^n 个不同的函数

      v. $n!$

   2) **Ipv4协议网址计数**

      32位地址　网络标识+主机标识

      A类：最大网络；B类：中等网络；C：最小网络；

      D：多路广播；　E：备用

      限制条件：1111111 在A类中的netid 部分无效

      hostid 部分不允许全0或全1

A	0	netid (7位)	hostid (24位)				
B	1	0	netid (14位)	hostid (16位)			
C	1	1	0	netid (21位)	hostid (8位)		
D	1	1	1	0	(28位)		
E	1	1	1	1	0	(27位)	

   3) 为了找到N_A，由于1111111是无效的，故存在$2^7-1=127$个A类的网络标识，对于每个网络标识，存在$2^{24}-2=16\ 777\ 214$个主机标识，这是由于全0和全1组成的主机标识是无效的. 因此，$N_A=127\cdot 16\ 777\ 214=2\ 130\ 706\ 178$.

      为了找到N_B和N_C，首先注意到存在$2^{14}=16\ 384$个B类网络标识和$2^{21}=2\ 097\ 152$个C类网络标识. 对每个B类网络标识存在着$2^{16}-2=65\ 534$个主机标识，而对每个C类网络标识存在着$2^8-2=254$个主机标识，这也是考虑到全0和全1组成的主机标识是无效的. 因而，$N_B=1\ 073\ 709\ 056$，$N_C=532\ 676\ 608$. 我们可以断言IPv4协议中计算机的有效地址总数是$N=N_A+N_B+N_C=2\ 130\ 706\ 178+1\ 073\ 709\ 056+532\ 676\ 608=3\ 737\ 091\ 842$. 面向计算机的广泛使用，这些地址总数已经显得不够用了，正在更新的IPv6协议采用128位地址格式，这将能够提供更多的有效地址.

      在这个例题中，我们先把所有的地址分成A,B,C三类，这种分类处理对应了加法法则；而在每一类的计数中使用了分步处理的思想：第一步计数网络标识的数目，第二步计数主机标识的数目，这种分步处理对应了乘法法则. 许多计数问题都是通过分类处理和分步处理的思想来求解的.

二. 无重复集合排列组合

1. 从n元集S中有序、不重复选取的r个元素称为S的一个r排列，S的所有r排列的数目记作$P(n,r)$

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

2. 环排列

S的r环排列数$=\dfrac{P(n,r)}{r}$

3. 从n元集S中无序、不重复选取的r个元素称为S的一个r组合，S的所有r组合的数目记作$C(n,r)$

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

三. 多重集排列组合

1. 多重集的表示 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\le+\infty$

全排列 $r=n$、$n_1+n_2+\dots+n_k=n$

2. $$N=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$
   1) $$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)$$ $$=\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\ 0!}$$ $$=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$
   2) 若ni恒大于等于r，则N取k^r

3. 多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_k\cdot a_k\}$的组合数为

   $N=C(k+r-1,r)$, 当$r\le n_i$
   1) 相当于r个元素和k-1个分隔符的全排列
   2) 无重集组合分子是从n递减累乘r个数，有重集组合分子是从n递增累乘r个数

   例3 r个相同的球放到n个不同的盒子里，每个盒子球数不限，求放球方法数.

   解：设盒子的球数依次记为$x_1,x_2,\dots,x_n$，则满足

   $x_1+x_2+\dots+x_n=r$，$x_1,x_2,\dots,x_n$为非负整数

   $N=C(n+r-1,r)$

   3) 例4 排列26个字母，使得a与b之间恰有7个字母，求方法数.

   解：固定a和b中间选7个字母，有2 $P(24,7)$种方法，将它看作大字母与其余17个全排列有18！种，因此

   $N=2\,P(24,7)\,18!$

   例5 (1) 10个男孩，5个女孩站成一排，若没有女孩相邻，有多少种方法?

   (2) 如果站成一个圆圈，有多少种方法?

   解: (1) $P(10,10)\,P(11,5)$

   (2) $P(10,10)\,P(10,5)/10$

   4) 例6 把$2n$个人分成n组，每组2人，有多少分法?

   解：相当于$2n$不同的球放到n个相同的盒子，每个盒子2个，放法为

   $$N=\frac{(2n)!}{(2!)^n\,n!}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}$$

四. 恒等式

1. 二项式定理、展开/求和

1) $$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

2) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

3) $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

2. 变下项化简

1) $$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

3. 递推化简

1) $$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

4. pascal定理递推（杨辉三角）

1) $$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

5. 变系数求和

1) $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

证 （1）由二项式定理有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

i. 两边求导数得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

在上面的公式中令 $x=1$ 即可.

2) $$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

i.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}&=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} && \text{消去变系数}\\
&=\sum_{k=1}^{n}kn\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}[(k-1)+1]\binom{n-1}{k-1} && \text{常量外提}\\
&=n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} && \text{拆项}\\
&=n\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}+n2^{n-1} && \text{改变求和的下限}\\
&=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2} && \text{利用(1)的结果}
\end{aligned}$$

6. 变上项求和

1) $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

2) l<k时组合数为0

3) 主观理解：编号1-n+1的球中取k+1个，编号最大球固定为n+1时有（n k）种选法……固定为k+1时有k=（k+1 k）种，固定为k时有1=（k k）种，求和

证明方法：组合分析

$S=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数

含 a_1: $\binom{n}{k}$

4) 不含 a_1，含 a_2: $\binom{n-1}{k}$

…

不含 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含 a_{n+1} $\binom{0}{k}$

7. 两次组合的重复度

1) $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明方法：组合分析.

n 元集中选取 r 个元素，然后在这 r 个元素中再选 k 个元素. 不同的 r 元子集可能选出

2) 相同的 k 子集，其重复度为$\binom{n-k}{r-k}$.

$\{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d\} \to \{b, c, d\}$

$\{b, c, d, e\} \to \{b, c, d\}$

应用：将变下限 r 变成常数 k，求和时提到和号外面.

8. 分组组合

1) $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

i. 利用换下限得出的推论

ii. $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$

五. 多项式定理

设 n 为正整数，x_i 为实数，$i=1,2,\cdots,t$. 那么有

1. $$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{\text{满足}n_1+\cdots+n_t=n\\\text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

证：选 n_1 个因式贡献 x_1,

从 $n-n_1$ 个因式选 n_2 个因式贡献 x_2,

…

从 $n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$ 个因式中选 n_t 个因式贡献 x_t.

1) $$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1 n_2\ldots n_t}$$

2. 多项式系数即为多重集全排列数

1) $\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_t!}$

2) n 个不同的球放到 t 个不同的盒子使得第一个盒子含 n_1 个球，第二个盒子含 n_2 个球，…，第 t 个盒子含 n_t 个球的方案数

3) $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ \ n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1 \ldots n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \ldots n_t - 1}$

3. 推论1 不同的项数为方程

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$$

的非负整数解个数 $C(n+t-1, n)$

4. 推论2 $\sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = t^n$

5. **例 12.10 证明：如果 p 是素数，那么对所有的 $n \not\equiv 0 \pmod p$ 有 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.**

1) **引理** 若 $\binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} \neq 1$，则 $p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n}$.

证 由于 p 是素数，根据全排列数的定义显然有

$$\binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} = 1 \Leftrightarrow \text{存在某个 } j \text{ 使得 } k_j = p, \text{其他 } k_i = 0, i \neq j.$$

2) 于是由 $\binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} \neq 1$ 可推出 $k_1!\ k_2!\ \cdots k_n!$ 中不含 p. 由于 $\binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} = \frac{p!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_n!}$ 是整数，且 $k_1!\ k_2!\ \cdots k_n!$ 中不含 p，因此 $k_1!\ k_2!\ \cdots k_n!$ 整除 $(p-1)!$，从而证明了 $p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n}$.

3) 下面证明费马小定理.

证 根据多项式定理有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p = \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

令所有的 $x_i = 1$ 得到

$$n^p = \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n}$$

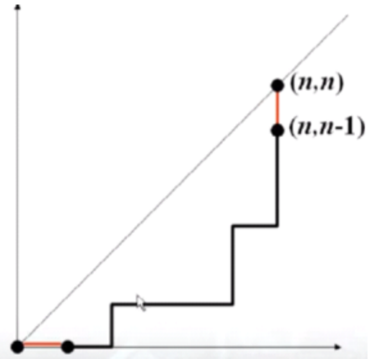
根据引理，当 $\binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n} \neq 1$，有 $p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \cdots k_n}$. 右边恰有 n 项的值等于 1，其余各项之和为 $n^p - n$. p 整除其余的每一项，因此 $p \mid (n^p - n)$.

六. 非降路径模型

1. 非降路径：只能往上或往右走的折线
2. $(0,0)$ 到 (m,n) 的非降路径数：$C(m+n,m)$
    1) 非0,0起点也可用——对应思想，通过平移，转化为该模型
    2) 即横坐标差+纵坐标差C横坐标差
3. 不接触对角线的非降路径

1) 下方从(0,0)到(n,n)不接触对角线非降路径数的2倍

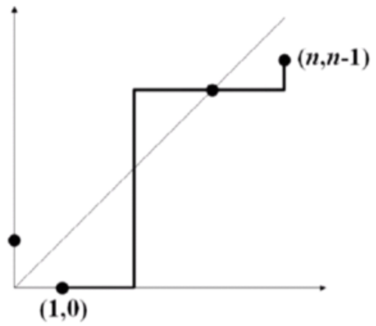
下方从(0,0)到(n,n)不接触对角线非降路径数等于从(1,0)到(n,n-1)不接触对角线非降路径数



2) 从(1,0)到(n,n-1)的不接触对角线的非降路径数

= 从(1,0)到(n,n-1)的非降路径数

– 从(0,1)到(n,n-1)的非降路径数



3) $$N=2\left[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right]=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

4. 不穿过对角线的非降路径

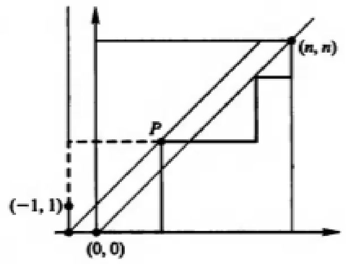
1) 

图 12.5

2) 如图 12.5 所示，任何一条从(0,0)点到(n,n)点穿过对角线的路径一定要接触直线 $y=x+1$，有可能接触多次，但最后会离开这条直线上的一点 P，沿直线 $y=x+1$ 下方的一条非降路径到达(n,n)点. 把这条路径的前半段，即(0,0)点到 P 点的部分，以直线 $y=x+1$ 为轴进行翻转，生成一段新的从$(-1,1)$点到 P 点的部分非降路径(图中虚线表示的路径). 用这段新路径替换原来路径的前半段，就得到一条从$(-1,1)$点到(n,n)点的非降路径. 容易看出这种路径与从(0,0)点到(n,n)点中间穿过对角线的非降路径之间存在一一对应. 因此从(0,0)点到(n,n)点穿过对角线的非降路径数 $N_1=\binom{2n}{n-1}$. 从(0,0)点到(n,n)点的非降路径总数为$\binom{2n}{n}$条，从而得到不同的输出序列个数是

3) $$N=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!\ n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\ (n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

4) 即n元素的出栈顺序方法，也可用生成函数求解

i.

ii.

iii.

iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix.
x. ---------我是底线--------