着色、对偶

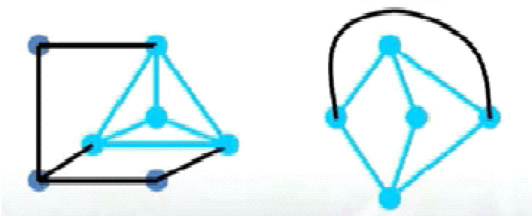
2018年10月30日 13:01

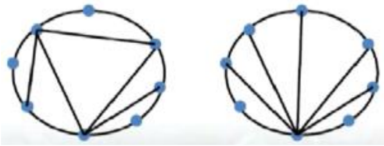
● 对偶图、外平面图

一. 对偶图dual graph

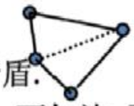
1. • 平面图G=<V,E>，G的面集合是R
   • 对偶图G*=<V*,E*>，G*的面集合是R*，则V*与R，E*与E，都是一一对应的
   1) 
   2) 即每个面里挑一个点，相邻面间用一根过公共边的边连起来
2. 平面图对偶图性质
   1) 平面图的对偶图一定是连通平面图；连通平面图的对偶图一定是平面图
   2) 环与桥对偶
   3) 平行边与两个面间多条边界对偶
   4) • $n^*=r,\ m^*=m$
      • $r^*=n-p+1$ $\quad (n-m+r=1+p,\ n^*-m^*+r^*=2)$
      • $d_{G^*}(v_i^*)=\deg_G(R_i)$
   5) 平面图同构与对偶图同构无关
3. 自对偶图：与自己的对偶图同构的图
   1) 连通图一定和其对偶图的对偶图同构，但与对偶图不一定同构
   2) 

二. 外平面图

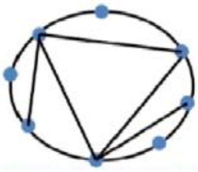
1. 外平面图：所有顶点都可在一个面的边界上
   1) • G是外平面图 ⇔ G不含与K_4或$K_{2,3}$同胚子图
      #
      • (G是平面图 ⇔ G不含与K_5或$K_{3,3}$同胚子图)
   2) 
2. 极大外平面图：任两不相邻顶点间加边就不再是外平面图的图
   1) • 设G是n(≥3)阶外平面图，所有顶点在外部面边界上，则 G 是极大外平面图 ⇔ G外部面边界是n-圈，所有内部面边界是3-圈.

i. 

ii. • (⇒) 反证, 分情形讨论.
(1)有4次以上内部面 ⇒ 可加边, 矛盾.
(2)外部面边界不是圈 ⇒ 有割点 ⇒ 可加边, 矛盾.



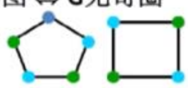
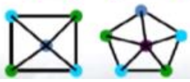
2) • $n(\geq 3)$阶极大外平面图G所有顶点在外部面边界上
⇒ G有$n-2$个内部面
⇒ $m=2n-3$
⇒ 至少有3个顶点度数≤ 3
⇒ 至少有2个顶点度数$=2$
⇒ $\kappa=2$.



● 点着色和色多项式

一. 着色

1. （点）着色：给无环图每个顶点指定一种颜色，使相邻顶点有不同颜色
   1) • 颜色集$C=\{1,2,\ldots,k\}$,
      $f: V \to C$,
      $\forall u \forall v(\ u,v \in V \wedge u$与$v$相邻 $\to f(u) \neq f(v)\ )$
   2) • k-着色: $|C|=k$
   3) 边着色：有公共顶点的边不同色；面着色：有公共边的面不同色
2. (点)色数χ：点着色所需最少颜色数(边、面色数分别用χ'、χ*表示)
   1) k-色图：色数为k的图
   2) 完全图色数=点数n
3. 其他性质
   1) • $\chi(G)=1 \Leftrightarrow$ G是零图
      • $\chi(K_n)=n$
      • $\chi(G)=2 \Leftrightarrow$ G是非零图二部图
      • G可2-着色 ⇔ G是二部图 ⇔ G无奇圈
      • $\chi(C_n)=\begin{cases}2, & n偶数\\ 3, & n奇数\end{cases}$
      • $\chi(W_n)=\begin{cases}4, & n偶数\\ 3, & n奇数\end{cases}$

      i. Cn是圈图，Wn是轮图
4. 点色数上界
   1) • 定理12.5: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$
   2) • 定理12.6(Brooks):
      n阶($n\geq 3$)连通非完全图G非奇圈 ⇒
      $\chi(G) \leq \Delta(G)$. #
5. 定理12.7：同色关系是等价关系

1) • 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$V_i = \{v \mid v \in V(G) \wedge v\text{着颜色}i\},\quad i=1,2,\ldots,\chi(G),$$

则$\Pi=\{V_1,V_2,\ldots,V_{\chi(G)}\}$是V(G)的划分. #

• 说明: V_i中的点构成“独立集”

2) • 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$R =\{ (u,v) \mid u,v\in V(G) \wedge u,v\text{着同色} \},$$

则R是V(G)上等价关系. #

6. Welch Powell着色法
    1) 按度数给点排降序
    2) 给队首点着色，并找不相邻点着相同的色
    3) 重复2)

二. 色多项式

1. • 色多项式

    f(G,k)=图G的不同的k-着色的总数

    1) 其中不同的着色：至少一个顶点的着色不同
    2) • 完全图 $f(K_n,k)=k(k-1)\ldots(k-n+1)=f(K_{n-1},k)(k-n+1)$
       • 零图 $f(N_n,k)=k^n$
2. 递推公式
    1) • 若(u,v)不是G中的边

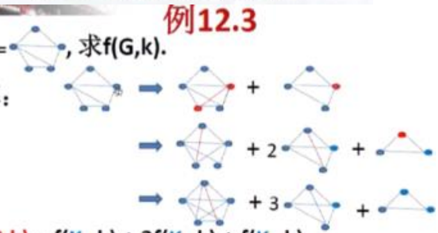
       $f(G,k)=f(G\cup(u,v),k)+f(G\backslash(u,v),k)$
    2) 移项，变形
        i. • 若e=(u,v)是G中的边

           $f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k)$
    3) 推论：色多项式最小值
        i. $f(G,k)=f(K_{n1},k)+ f(K_{n2},k)+\ldots+ f(K_{nr},k)$,

           $\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$
        ii. 例12.3

            • G= , 求f(G,k).

            • 解:



$f(G,k) = f(K_5,k) + 3f(K_4,k) + f(K_3,k)$

$= k(k-1)(k-2)^3 = k^5 - 7k^4 +18k^3 -20k^2 +8k.$

所以$\chi(G) = \min\{5,4,3\} = 3$, 且 $f(G,3)=6$. #
3. 性质
    1) • f(G,k)是n次多项式,系数正负号交替

       • k^n系数为1, k^{n-1}系数为-m, m为边数, 常数项为0
    2) • 最低非零项为k^p, p为连通分支数

       • 不同连通分支相乘
    3) • T是n阶树 ⇔ $f(T,k) = k(k-1)^{n-1}$. (用归纳法证明)

       • C是n阶圈 ⇒ $f(C,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.
4. 例

1) • 有n门课程要期末考试，每个学生每天只能参加一门课程的考试，至少需要几天才能考完？在最少天数下最多有几种安排方案？

• 解：以课程为顶点，如果有同一个学生同时选两门课程，则用边连接这两门课程，得到图G.

最少考试天数= $\chi(G)$；方案数=$f(G,\chi(G))$。

5. 定理12.10

定理12.10

1) • 设V_1是G的点割集，且$G[V_1]$是G的完全子图$K_{|V_1|}$，若$G-V_1$有p个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_p$（p≥2），

且$H_i=G[V_1 \cup V(G_i)]$，则 $f(G,k)=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}$.

i. 找点割集为顶点的完全子图，其余点轮流和它并，得到p种导出子图，把p种导出子图的色多项式相乘，除以完全子图色多项式的p-1次方

ii. 即让完全子图多项式，乘以其他点并上完全子图后多出的多项式

2) 证: 对$G[V_1]$的每种k着色, H_i有$f(H_i,k)/f(G[V_1],k)$种k着色,

$$f(G,k)=f(G[V_1],k)\prod_{i=1}^{p}\frac{f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)}=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}. \ \#$$

3) 例: $f(G,k) = f(K_3,k)(k-1)^2=k(k-1)^3(k-2)$.

- 面着色、边着色

三. 面着色

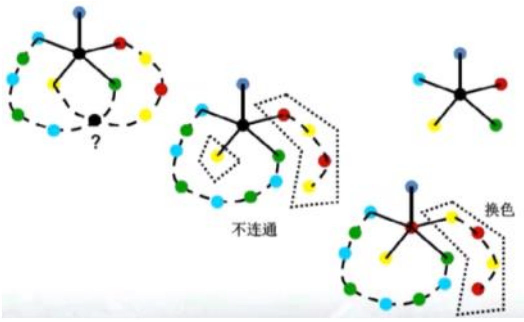
1. （平面）地图：连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面
   1) 每个面都是一块区域，有公共边的区域是“相邻”的
   2) k色地图：可以用k种颜色着色的地图
   3) 地图可k面着色等价于其对偶图可以k点着色
2. 定理12.15：任何平面图都可以6着色

1) • 证明: (归纳法) (1) n≤7: 结论为真.
(2) 设n=k(≥7)时结论为真.
n=k+1时, ∃v∈V(G), d(v)≤5.
令G_1=G-v, 对G_1用归纳假设, G_1可6-着色.
模仿G_1对G着色, 与v相邻的点不超过5个, 至少剩1种颜色给v着色, 所以G可6-着色. #

i. 即递归删五度点

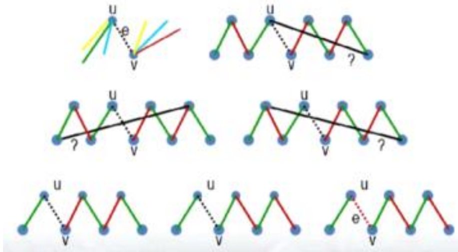
3. 定理：任何平面图都可以5着色

1)



i. 从红色出发尝试红-黄-红-黄连通到黄色，从水色出发尝试水-绿-水-绿连通到绿色，一定会交叉，于是红黄链就孤儿了，就可以交换红黄次序，于是五度点就可以着成红色，然后递归删五度点

四. 边着色

1. Vizing定理12.17：简单图的边色数一定是最大度或最大度+1
    1) G是简单图 $\Rightarrow \Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$
    2) 二部图的边色数一定是最大度
        i. 
        ii. 依旧是用矛盾反证一条分支可以换色，换成e边左右两点是相同的Δ-1种颜色，e本身是第Δ种颜色
2. 完全图的边着色：
    1) • n为奇数时, $\chi'(K_n)=n$.
        i. • 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有(n-1)/2条, 至少需要n种颜色, $\chi'(K_n) \ge n$. 又存在n-边着色, $\chi'(K_n) \le n$. 所以$\chi'(K_n)=n$.

           
        ii. 因为同色不相邻，所以最多(n-1)/2条同色边（见图），再由等差求和公式知色数>=n；蓝色圈孤立了蓝点，绿色圈孤立了绿点（见图）所以色数<=顶点数n；所以色数=n
    2) • n为偶数时, $\chi'(K_n)=n-1$.
        i. • 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有n/2条, 至少需要n-1种颜色, $\chi'(K_n) \ge n-1$. 又存在(n-1)-边着色, $\chi'(K_n) \le n-1$. 所以$\chi'(K_n)=n-1$. #

           
3. 同色边、边独立集/匹配
    1) • 无环图G=<V,E>进行k-边着色, $k \ge \chi'(G)$. 令

       $$R = \{ (e_i,e_j) \mid e_i\text{与}e_j\text{着同色} \}$$

       则R是E上等价关系, 商集合

       $$E/R = \{E_1,E_2,\ldots,E_k\}$$

       是E的划分, 划分块中元素着同色

       • 说明: 同色边构成“边独立集”, 或“匹配”
4. 应用：教师集和教室集组成二部图，最小边色数为最小节数，最大匹配元素数为最小教室数
    1) • 某一天内有n个教师给m个班上课.每个教师在同课时只能给一个班上课.

       (1) 这一天内至少排多少节课?

       (2) 不增加节数情况下至少需要几个教室?

       (3) 若n=4,m=5. 教师是t_1,t_2,t_3,t_4, 班是c_1,c_2,c_3,c_4,c_5. 已知t_1给c_1,c_2,c_3上2节,1节,1节课, t_2给c_2,c_3各上1节课, t_3给c_2,c_3,c_4各上1节课, t_4给c_4,c_5上1节,2节课. 求最省教室的课表.
        i.
        ii.
        iii.
        iv.
        v.
        vi.
        vii.
        viii.
        ix.
        x.

xi.

xii. -----------我是底线----------