支配、独立、覆盖

2018年11月7日　　23:54

● 支配、点独立、点覆盖

一. （点）支配

1. 点点相邻关系可视作“支配”关系；点支配集外的点都与点支配集的点相邻（都被点支配集上的点所支配）；支配数：最小支配集的顶点数
   - G=<V,E> , e=(u,v) ⇔ u支配v ⇔ v支配u
   - 支配集: $V^*\subseteq V$, $\forall v\in V-V^*$, $\exists u\in V^*$, u支配v

   1)
      - 极小支配集: 真子集都非支配集的支配集
      - 最小支配集: 顶点数最少的支配集
      - 支配数: $\gamma_0(G)$ = 最小支配集的顶点数

   2) 例：公共服务站应该在点支配集上，支配待服务的点

      在图 18.1(a)中，$\{v_1,v_5\}$，$\{v_3,v_5\}$，$\{v_3,v_6\}$，$\{v_2,v_4,v_7\}$都是极小支配集，$\{v_1,v_5\}$，$\{v_3,v_5\}$，$\{v_3,v_6\}$是最小支配集，$\gamma_0=2$.（b）为 7 阶星形图，$\{v_0\}$，$\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$为极小支配集，$\{v_0\}$是最小支配集，$\gamma_0=1$.（c）为轮图 W_6，$\{v_0\}$，$\{v_1,v_3\}$，$\{v_1,v_4\}$等都是极小支配集，$\{v_0\}$是最小支配集，$\gamma_0=1$.

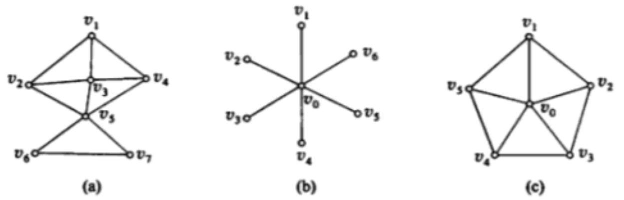
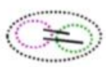
      i. 

      图 18.1

2. 定理13.1：无孤立点的图的各极小支配集的交集为空
   - 无向图G无孤立点, V_1^*是极小支配集, 则存在V_2^*也是极小支配集, 且$V_1^*\cap V_2^*=\varnothing$.

   1) 

      - 说明: 支配集要包含所有孤立点

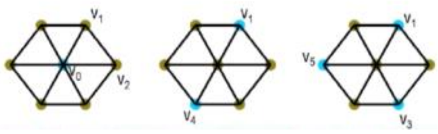
   2) 孤立点一定会出现在任一支配集上
   3) 无孤立点的图的极小支配集的补集也是支配集（但补集不一定极小）

二. （点）独立

1. 独立集中任两点互不相邻
   - 无向图G=<V,E>
   - 独立集: $V^*\subseteq V$, $\forall u,v\in V^*$, u与v不相邻

   1)
      - 极大独立集: 真母集都非独立集的独立集
      - 最大独立集: 顶点数最多的独立集
      - 点独立数: $\beta_0(G)$ = 最大独立集的顶点数

   2) 例：无线通信网络，有边表示发生频段干扰，独立集是适合的信号发生器
      - $\{v_0\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$, $\beta_0=3$

      i. 

2. 定理13.2：无向简单图的极大点独立集都是极小点支配集（反之不然）
   1) 推论：无向简单图的最大点独立集都是最小点支配集

i. 即：点支配数γ_0 小于等于 点独立数β_0

3. 团：完全子图的顶点的集合

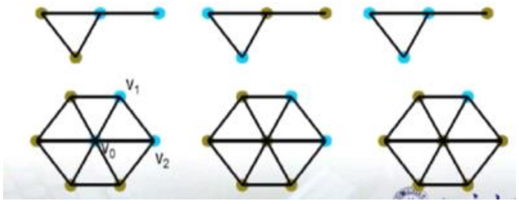
- 无向图$G=<V,E>$
- 团：$V^*\subseteq V$，$G[V^*]$是完全子图

1)
- 极大团：真母集都不是团的团
- 最大团：顶点数最多的团
- 团数：$\nu_0(G)$ = 最大团的顶点数

2) 例：社交网络中互相认识的一班人

- $\{v_0,v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1\}$, $\nu_0=3$

i.



4. 定理13.3：团是补图的独立集

1)
- 无向图G，
  V^*是G的团 $\Leftrightarrow$ V^*是$\overline{G}$的独立集.

2)
- 推论：无向图G，
  (1) $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$
  (2) V^*是G的极(最)大团
  $\Leftrightarrow$ V^*是$\overline{G}$的极(最)大独立集.

三. （点）覆盖cover

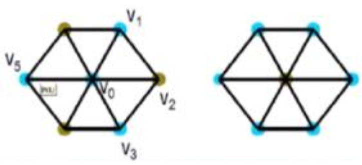
1. 点边关联关系可视作“覆盖”关系

1)
- 无向图$G=<V,E>$
- 点覆盖：$V^*\subseteq V$，$\forall e\in E$，$\exists v\in V^*$，v关联e
  - 说明：点覆盖要含所有带环点
- 极小点覆盖：真子集都非点覆盖的点覆盖
  - 说明：极小点覆盖不含任何孤立点
- 最小点覆盖：顶点数最少的点覆盖
- 点覆盖数：$\alpha_0(G)$ = 最小点覆盖的顶点数

2) 例：摄像头在点覆盖集上，可监控每条边对应的走廊

- $\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$, $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $\alpha_0=4$

i.



2. 定理13.6：无孤立点图中，点覆盖集的补集是点独立集

1) 推论：无孤立点图中，极小点覆盖是极大点独立集，且最小点覆盖是最大点独立集，即：

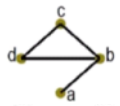
2) $\alpha_0+\beta_0=n$

四. 总结：

1. 数的关系

1)
- $\alpha_0+\beta_0=n$ (无孤立点, 定理13.3推论).
- $\gamma_0 \le \beta_0$ (定理13.2补充推论)
- $\gamma_0 \le \alpha_0$ (无孤立点, 补充定理)
- $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$ (定理13.4推论)
- α_0, β_0, ν_0都是难解的(intractable, hard)
  - 目前都没有多项式时间算法
  - 与哈密顿回路问题, 着色问题等"一样难"

2. 逻辑运算求各种集：加视作或，乘视作与
   - 求全体极小支配集, 极小点覆盖, 极大独立集

1) 

i.
- $\prod_{v\in V}(v+\sum_{u\in\Gamma(v)}u)$
$= (a+b)(b+a+c+d)(c+b+d)(d+c+b)$
$= ac+ad+b.$
(幂等: a+a=a, a•a=a, 逻辑加乘)
- {a,c}, {a,d}, {b}是全体极小支配集.
- $\gamma_0=1$.

a) 每个括号都挑出一个点，巧用吸收率把前两项化成a+b，后两项化成b+c+d

ii.
- $\prod_{(u,v)\in E}(u+v)$
$= (a+b)(b+c)(b+d)(c+d)$
$= bc+bd+acd.$
(幂等: a+a=a, a•a=a, 逻辑加乘)
- {b,c}, {b,d}, {a,c,d}是全体极小点覆盖.
- $\alpha_0=2$.
- G无孤立点,
  V*是极小点覆盖 ⇔ V-V*是极大独立集.

iii.
- {b,c}, {b,d}, {a,c,d} 是全体极小点覆盖,
- {a,d}, {a,c}, {b} 是全体极大独立集.
- $\beta_0=2$. #

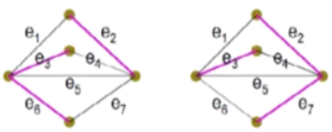
● 边覆盖和匹配

一. 边覆盖

1. 边覆盖：关联所有点的边的集合
   - (无孤立点)无向图G=<V,E>
   - 边覆盖(集): $E^*\subseteq E$, $\forall v\in V$, $\exists e\in E^*$, e关联v

1)
- 极小边覆盖: 真子集都非边覆盖的边覆盖
- 最小边覆盖: 边数最少的边覆盖
- 边覆盖数: $\alpha_1(G)$ = 最小边覆盖的边数

i.
- $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_2,e_3,e_7\}$, $\alpha_1=3$



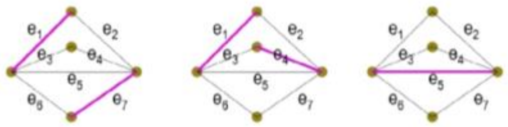
2. 有孤立点的图无边覆盖集
3. 点集的下标是0，边集的下标是1

二. 边独立/匹配match

1. 匹配/边独立集中的边互不相邻（无公共端点）
   - 无向图$G=\langle V,E\rangle$
   - 匹配(边独立集): $E^*\subseteq E$,
     $\forall e,f\in E^*$, e,f不相邻

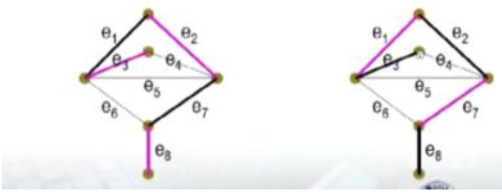
   1)
   - 极大匹配: 真母集都非匹配的匹配
   - 最大匹配: 边数最多的匹配
   - 匹配数: $\beta_1(G)$ = 最大匹配的边数

      i. • $\{e_1,e_7\}$, $\{e_1,e_4\}$, $\{e_5\}$, $\beta_1=2$



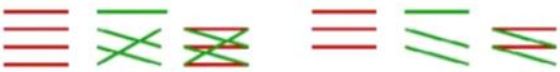
   2) （非）匹配边：（不）在匹配中的边
   3) （非）饱和点：（不）与匹配边关联的顶点
2. 完美匹配：使原图每个点都是饱和点的匹配
   1) 肯定是偶数阶图，肯定没有孤立点
   2) 存在交错路径可覆盖全部顶点
3. 交错路径（圈）：匹配边和非匹配边交替构成的路径（圈）
   - 例: $e_3\,e_1\,e_2\,e_7\,e_8$,　　$e_3\,e_1\,e_2\,e_7\,e_8$

   1)



4. 定理13.7
   - 设M_1,M_2是G中2个不同匹配, 则$G[M_1\oplus M_2]$的每个连通分支是M_1和M_2中的边组成的交错圈或交错路径

   1)



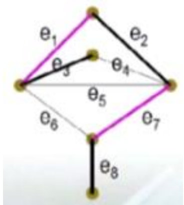
   - 证: 设G_1是$G[M_1\oplus M_2]$的1个连通分支,
     $\forall v\in V(G_1)$,

      i. $0 < d_{G1}(v) = d_{G[M1\oplus M2]}(v) \le 2$,
     即　$d_{G1}(v) = 1$ 或 2,
     所以G_1是交错圈或交错路径.　#

三. 其他条件

1. 可增广（交错）路径：起点终点都是非饱和点的交错路径
   i. 可增广路径上的非匹配边，可以组成比原匹配多一边的新匹配

   ii.



   1) 定理13.4（E(γ)指伽马路径上的边组成的集合）
   - 设M是G中匹配, Γ是M的可增广路径, 则

      i. $M' = M \oplus E(\Gamma)$
     也是G中匹配, 且 $|M'| = |M|+1$

ii. 

2) 贝尔热定理

i. M是G中最大匹配 ⇔ G中无M可增广路径

ii. 证　必要性. 设 M 为 G 中最大匹配,若 G 中存在 M 的可增广的交错路径 Γ,在 Γ 中匹配边比非匹配边少 1,将 Γ 中的非匹配边变成匹配边,匹配边变成非匹配边,得到 M',即 $M'=(M\cup E(\Gamma))-(M\cap E(\Gamma))=M\oplus E(\Gamma)$,$M'$中的边彼此不相邻且比 M 多一条边,即 M'是比 M 多一条边的匹配,这与 M 是最大匹配相矛盾,所以 M 不含可增广的交错路径.

充分性. 设 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径,M_1 是 G 的最大匹配,要证明 $|M|=|M_1|$. 为此,考虑 M_1 和 M 的对称差的导出子图,设 $H=G[M_1\oplus M]$. 当 $H=\varnothing$(空图)时,$M=M_1$,于是 M 为 G 中最大匹配. 若 $H\neq\varnothing$,由于 M,M_1 都是匹配,所以 H 各连通分支要么是由 M 和 M_1 中的边组成的交错圈,在交错圈上 M 和 M_1 中的边数相等,要么为由 M 和 M_1 中的边组成的交错路径. 由已知条件可知 M 不含可增广的交错路径,M_1 是最大匹配,由必要性可知,M_1 中也无可增广的交错路径,于是在由 M 和 M_1 组成的交错路径上,M 和 M_1 的边也相等,总之 M 与 M_1 的边数相同,所以 M 为最大匹配.

2. 完美匹配的充要条件

1) 删除几个顶点后，奇数阶连通分支数不大于删除顶点数

i. • 定理13.10(Tutte,1947):

G有完美匹配 ⇔

$\forall V'\subset V(G),\ p_{奇}(G-V')\le |V'|$.

ii. • 证: (⇒) 设M是G的完美匹配, $V'\subset V$,

设G_1是$G-V'$的奇阶连通分支,

则 $\exists u_1\in V(G_1)$, $\exists v_1\in V'$, $(u_1,v_1)\in M$,

所以 $p_{奇}(G-V')\le |V'|$.

iii. • 证: (⇐) (对G阶数归纳)

由于$\forall V'$, $p_{奇}(G-V')\le|V'|$,

取$V'=\varnothing$, 得G是偶阶,

取$V'=\{u\}$, 得$G-\{u\}$恰有1个奇阶连通分支.

设 $S_0\subset V$ 是使$p_{奇}(G-S_0)=|S_0|=s$的最大集合,

$C_1,C_2,\ldots,C_s$ 是 $G-S_0$ 所有奇阶连通分支,

$D_1,D_2,\ldots,D_t$ 是 $G-S_0$ 所有偶阶连通分支.

iv. • (1) 每个D_i内部有完美匹配.

$\forall S\subseteq V(D_i)$,

$p_{奇}(G-S_0)+p_{奇}(D_i-S)$

$=p_{奇}(G-(S_0\cup S))\le|S_0\cup S|$

$=|S_0|+|S|$,

所以 $p_{奇}(D_i-S)\le|S|$.

由归纳假设, D_i内部有完美匹配.

2) 边覆盖数α1＝匹配数β1

3. 对无孤立点的n阶图G，令N为含非饱和点的关联边的集合，有：

1) 最大匹配M并上任一单元素N即为最小边覆盖W

2) 最小边覆盖W删除任一单元素N即为最大匹配M

3) 边覆盖数α1＋匹配数β1＝n

i. 证　因为 M 为最大匹配,$|M|=\beta_1$,所以 G 有 $n-2\beta_1$ 个 M－非饱和点. 所做出的 $W=M\cup N$ 显然为 G 中的边覆盖,且

$$|W|=|M|+|N|=\beta_1+n-2\beta_1=n-\beta_1$$

M_1 显然是 G 的一个匹配. 由 W_1 是最小边覆盖可知,W_1 中任何一条边的两个端点不可能都与 W_1 中其他边相关联,因而在由 W_1 构造 M_1 时,每移去相邻两条边中的一条时,产生并只产生一个 M－非饱和点,于是

$$|N_1|=|W_1|-|M_1|=\text{“}M_1\text{ 的非饱和点数”}$$
$$=n-2|M_1|$$
$$\alpha_1=|W_1|=n-|M_1|$$

ii. 又因为 M_1 是匹配,W 是边覆盖,有

$$|M_1|\leqslant\beta_1$$
$$|W|\geqslant\alpha_1$$

于是

$$\alpha_1=n-|M_1|\geqslant n-\beta_1=|W|\geqslant\alpha_1$$

4) 推论见三.1.2）：对任意W和M，当且仅当元素数相等时，M是完美匹配

● 二部图中的匹配

四. 完备匹配

1. 完备匹配：二部图<V1,V2,E>中，与V1边数相同匹配数的匹配即从V1到V2的~
   1) 完美匹配一定是完备匹配
2. 霍尔定理/相异性条件
   1) **定理 18.5(Hall 定理)** 设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$，其中 $|V_1|\le|V_2|$，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 $k(k=1,2,\cdots,|V_1|)$ 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.
      - 证: (⇒) 显然

      (⇐) (反证) 设 $G=<V_1,V_2,E>$ 是极小反例,

      则存在 $a_1,a_2\in V_1$, $x\in V_2$, $(a_1,x),(a_2,x)\in E$.

      i. 删除任一个 (a_i,x) 将破坏条件,

         则存在 $A_1,A_2\subseteq V_1$, $a_i\in A_i$,

         在 A_i 中只有 a_i 与 x 相邻,

         $|\Gamma(A_i)|=|A_i|$.

         - $|\Gamma(A_1)\cap\Gamma(A_2)|$

         $\ge|\Gamma(A_1-\{a_1\})\cap\Gamma(A_2-\{a_2\})|+1$

         $\ge|\Gamma(A_1\cap A_2)|+1\ge|A_1\cap A_2|+1$.

         $|\Gamma(A_1\cup A_2)|=|\Gamma(A_1)\cup\Gamma(A_2)|$

         $=|\Gamma(A_1)|+|\Gamma(A_2)|-|\Gamma(A_1)\cap\Gamma(A_2)|$

         $\le|A_1|+|A_2|-(|A_1\cap A_2|+1)$

         $=|A_1\cup A_2|-1$, 矛盾! #

         
      ii. 证法2

         必要性显然,下面证明充分性. 设 M 为 G 的最大匹配,若 M 不是完备匹配,必存在非饱和点 $v_x\in V_1$. 根据相异性条件,必存在 $e\in E_1=E-M$ 与 v_x 关联. 并且 V_2 中与 v_x 相邻的顶点都是饱和点,否则与 M 是最大匹配矛盾. 考虑从 v_x 出发的尽可能长的所有交错路径,由于 M 是最大匹配,又由定理 18.4 可知这些交错路径都不是可增广的,因此每条路径的另一个端点一定是饱和点,从而这些端点全在 V_1 中. 令

         $$S=\{v\mid v\in V_1 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\}$$

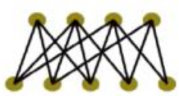
         $$T=\{v\mid v\in V_2 \text{ 且 } v \text{ 在从 } v_x \text{ 出发的交错路径上}\}$$

         注意到,除 v_x 外,S 和 T 中的顶点都是饱和点,且由匹配边给出两者之间的一一对应,因而 $|S|=|T|+1$. 这说明 V_1 中有 $|T|+1$ 个顶点只与 V_2 中 $|T|$ 个顶点相邻,与相异性条件矛盾. 因此,V_1 中不可能存在非饱和点,故 M 是完备匹配.

         图 18.4(c) 中,V_1 中有两个顶点只与 V_2 中的一个顶点相邻,不满足相异性条件,因而(c)不存在完备匹配. 而(a),(b)均满足相异性条件,都有完备匹配.
3. t条件（是充分非必要条件）
   - 二部图 $G=<V_1,V_2,E>$, $t\ge1$

     V_1 中每个顶点至少关联t条边 ∧

     V_2 中每个顶点至多关联t条边

   1) 

      t=3

      i. 即一部的最大度跟另一部的最小度一样
      ii. V_1 中任意 k 个顶点至少关联 kt 条边,

          这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点,

          即相异性条件成立. #
4. 定理13.13
   1) 对k-正则二部图，一定存在k种边不重的完美匹配

i.
- 证: G满足$t=k$的t条件, 所以有完备匹配M_1,又$|V_1|=|V_2|$, 所以完备匹配就是完美匹配. $G-M_1$是$(k-1)$-正则二部图,又有完美匹配M_2, $G-M_1-M_2$是$(k-2)$-正则二部图, ..., 一共可得k个完美匹配. 显然这些匹配是边不重的. #

5. 定理13.14：无孤立点二部图：
   1) 点覆盖数α1=边独立数β1

i.
- 证: 设M是最大匹配, X是V_1非饱和点集, $S = \{ u \in V_1 \mid \exists v \in X$, 从$v$到$u$有交错路径 $\}$, $T = \{ u \in V_2 \mid \exists v \in X$, 从$v$到$u$有交错路径 $\}$. 则 $N = (V_1-S) \cup T$是点覆盖, $|N|=|M|$, 由定理13.6知 N 是最小覆盖. #

ii.

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

viii.

ix.

x. ------我是底线---------