命题逻辑送命题

2018年11月10日 22:47

● 其他联结词

一. 其他联结词

1. 不可兼析取/异或/非等价：xor / ▿（可兼析取上加一横，本应是断开的，并找不到这个符号）
    1) **交换、结合、分配**律
    2) 不可兼性质1：$P \triangledown Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$（主析取范式）
    3) 不可兼性质2：$P \triangledown Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$（主合取范式）
    4) 异或性质：$P \triangledown Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$
    5) $P \triangledown P \Leftrightarrow F$、$P \triangledown F \Leftrightarrow P$、$P \triangledown T \Leftrightarrow \neg P$即：异或自己清零，异或0不变，异或1取反
    6) 定理：$P \triangledown Q \Leftrightarrow R$ 则 $R \triangledown P \Leftrightarrow Q$、$Q \triangledown R \Leftrightarrow P$、$P \triangledown Q \triangledown R \Leftrightarrow F$
        i. 证1：$R \triangledown P \Leftrightarrow (P \triangledown Q) \triangledown P \Leftrightarrow Q \triangledown (P \triangledown P) \Leftrightarrow Q \triangledown F \Leftrightarrow Q$
        ii. 证2：$Q \triangledown R \Leftrightarrow Q \triangledown (P \triangledown Q) \Leftrightarrow (Q \triangledown Q) \triangledown P \Leftrightarrow F \triangledown P \Leftrightarrow P$
        iii. 证3：$P \triangledown Q \triangledown R \Leftrightarrow R \triangledown R \Leftrightarrow F$
        iv. 应用：$\mathbf{P \triangledown Q \triangledown P = Q} = P \triangledown P \triangledown Q$
2. 条件否定/非条件：→（条件联结词上加一c，这符号更找不到……还好这联结词没什么性质）
    1) $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
3. 与非/非合取：↑
    1) $P \uparrow P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$
    2) $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$
    3) $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
4. 或非/非析取：↓
    1) $P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$
    2) $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
    3) $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$
5. 九个联结词足够表示所有真值情况
    1) 证：无序二元联结词x6+一元联结词x1x2+有序二元联结词x2x2+TF常量x2+命题变元PQ本身x2=所有16种情况（非P非Q是两种，条件和非条件有四种）
    2) 联结词完备集：可以表示任何真值函数的联结词的集合
6. 其他联结词组
    1) 最常用的联结词组：{¬,∨,∧}（非最小完备集）
    2) “非且或”的最小联结词完备集：{¬,∨},{¬,∧}
    3) 很难用的联结词完备集：{¬,→},{¬,条件否定}
    4) 联结词数最少的联结词完备集：{↑},{↓}（详见与非、或非性质）

● 对偶与范式

二. 对偶duality

1. 对偶式：∨∧互换，TF互换得到的式子，互为~。一般记作A和A*
2. 定理：$\neg A(P_1,P_2,\dots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\dots,\neg P_n)$
   1) 其中各P_i为A的原子变元，证明：由德摩根律易知
   2) 另一种形式：$\neg A^*(P_1,P_2,\dots,P_n) \Leftrightarrow A(\neg P_1,\neg P_2,\dots,\neg P_n)$（利用$A^{**} \Leftrightarrow A$）
3. 定理：$A \Leftrightarrow B$则$A^* \Leftrightarrow B^*$
   1) 证明：利用定理六.5，将左右两边的每个原子变元替换成其否定，再用上一条定理的另一种形式，把左右两边都换成对偶式，再把变元换回去

三. 范式normal forms

1. **合取范式**conjunctive normal form：$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$（**n≥1**）
   1) 其中各A_i都是命题变元及其否定组成的**析取式**
   2) 注：P∨Q就是析取式，P∨P也是析取式，**¬P也是析取式，P也是析取式**
2. **析取范式**disjunctive normal form：$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$（**n≥1**）
   1) 其中各A_i都是命题变元及其否定组成的**合取式**
   2) 注：上一条的对偶
3. 求合取/析取范式的步骤：
   1) 化归成只有{¬,∨,∧}的公式
   2) 用德摩根律把每个¬深入到原子变元前
   3) 用分配律结合律来打括号，尝试划归成合取/析取范式
4. **布尔合取/小项/m**：n个变元的合取式，每个变元出现且仅出现一次
   1) 即各变元不能跟自己的否定同时出现（但求主析时经常用到Q∧(P∨¬P)分配律）
   2) 编码：用下标**10**表示各变元的**TF**。如**m_{10}表示P∧¬Q**
   3) **编码与真值指派对应时小项取T**，否则取F
   4) 任两不同小项的合取为F
   5) 全体小项的析取为T（即$_{(i:0\to 2n-1)}\Sigma m_i \Leftrightarrow T$）
5. 主析取范式：（与原式等价的）小项的析取式
   1) 定理：真值表中**真值取T的指派对应的小项**的析取即为主析取范式
      i. 其中的对应参考4.2)编码，**即指派F的变元前加上¬**
      ii. 证明：原式中取T指派能使对应小项取T，即能使主析取范式也取T；而原式中取F指派不能使任何小项取T，即能使主析取范式也取F
   2) 从析取范式求主析取范式的步骤：
      i. 划掉∨永假项
      ii. 划掉重复项
      iii. 若括号中未出现P，则添加∧(P∨¬P)，再分配律展开成两项
6. **布尔析取/大项/M**：n个变元的析取式，每个变元出现且仅出现一次
   1) 即各变元不能跟自己的否定同时出现（但求主合时经常用到Q∨(P∧¬P)分配律）
   2) 编码：用下标**10**表示各变元的**FT**。如**M_{10}表示¬P∨Q**

3) **编码与真值指派对应时大项取F**，否则取T
4) 任两不同大项的析取为T
5) 全体大项的合取为F（即$_{(i:0\to 2n-1)}\Pi m_i \Leftrightarrow F$）

7. 主合取范式：（与原式等价的）大项的合取式
   1) 定理：真值表中**真值取F的指派对应的大项**的合取即为主合取范式
      i. 其中的对应参考6.2)编码，**即指派T的变元前加上¬**
      ii. 证明：原式中取F指派能使对应大项取F，即能使主合取范式也取F；而原式中取T指派不能使任何大项取F，即能使主析取范式也取T
   2) 从析取范式求主析取范式的步骤：
      i. 划掉∧永真项
      ii. 划掉重复项
      iii. 若括号中未出现P，则添加∨(P∧¬P)，再分配律展开成两项
8. 简记约定：
   1) $\sum_{i,j,k} = m_i \vee m_j \vee m_k$。如：$\sum_{1,3} = m_{01} \vee m_{10}$
   2) $\Pi_{i,j,k} = M_i \wedge M_j \wedge M_k$。如：$\Pi_{0,2} = M_{00} \wedge M_{11}$
   3) 其中ijk是十进制数，但编码是二进制数
9. 技巧：主析取范式和主合取范式的下标是0~(2^n)-1的划分
   1) 即，下标互不重复，且都属于(0,(2^n)-1)
   2) 但并不意味着主析取范式和主合取范式对偶
      i. 因为**大项编码是¬取1，小项编码是¬取0**

- # 推理理论

四. 推理理论rules of inference

1. 论证：把定律定理条件作为前提，假设取T，从公认的规则，得到新命题作为结论
2. 有效结论：A⇒B，则称B是A的有效结论
3. 逻辑推出：A⇒B，则称B可由A逻辑推出
4. 推理的形式结构：前提∧前提→结论
   1) 之后尝试用等价式替换，即做等值演算，推出永真即完成证明，但考试考的推理理论要用下面的方法

五. 推理方法

1. 真值表法：列真值表证明真值相同
2. 直接证法：从前提、推理规则、重要等价式蕴涵式，推演得出有效结论
   1) 推理规则：
      i. 前提引入规则Premise：任何时候都可以引入前提
      ii. 置换规则Transformation：利用重言式或蕴涵式可推导出新公式（设φ(A)是含公式A的公式， 用公式B置换φ(A)中的A，得公式φ(B)， 如果A⇔B，则φ(A)⇔φ(B)）
   2) 容易忘的重要等价式：（不容易忘的见前面红字图）
      i. P→(Q→R)⇔(P∧Q)→R//条件式的转换写得越详细越好，小心扣分
      ii. P∨Q⇔¬¬P∨Q⇔¬P→Q
      iii. P→Q⇔¬Q→¬P
      iv. P↔Q⇔(P∧Q)∨(¬P∧¬Q)

v. ¬(P↔Q)⇔P↔¬Q

3) 容易忘的重要蕴含式：（不容易忘的见前面红字图）

i. ¬A⇒A→B

ii. B⇒A→B

iii. A→B⇒(A∧C)→(B∧C)

iv. A→B⇒(A∨C)→(B∨C)

3. 间接证法1：反证法：证明前提和<u>结论的否定</u>不相容

1) 相容：存在一些真值指派能使一组公式的合取为T，称它们相容

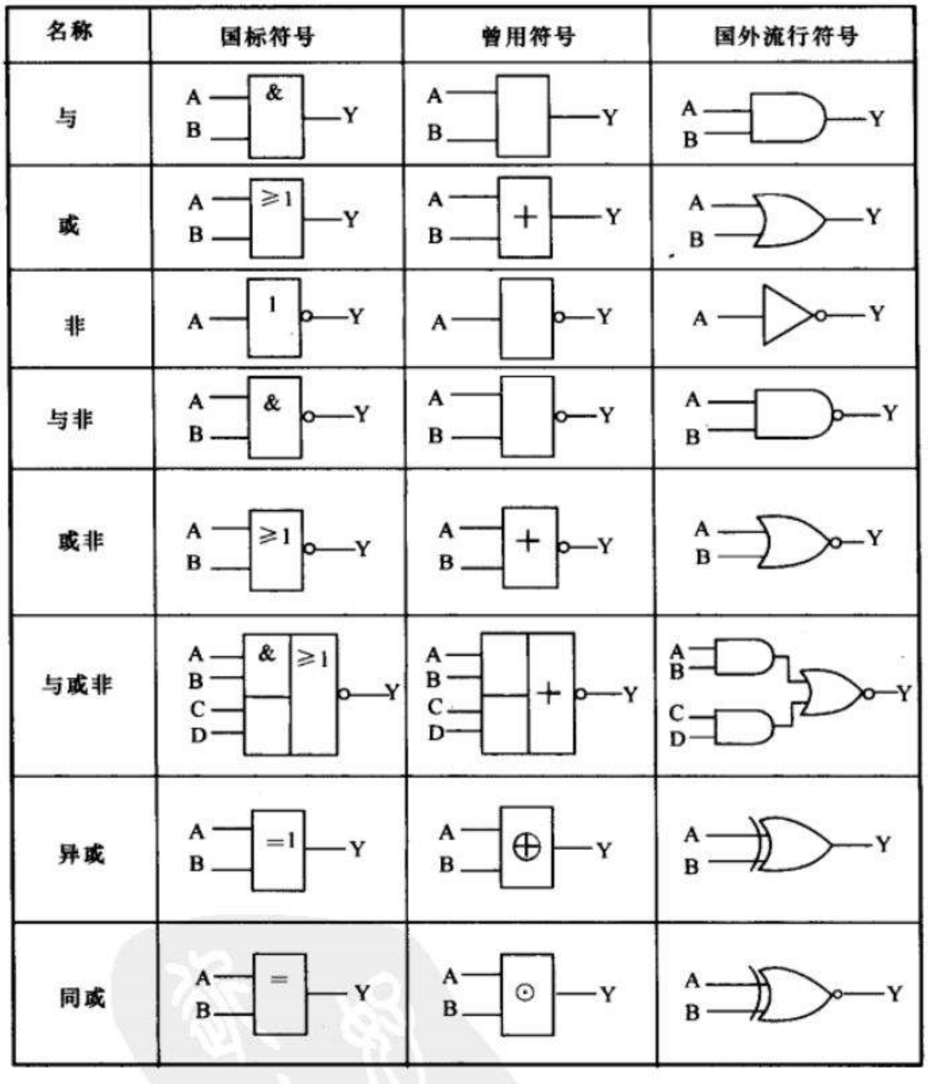
2) 不相容：任意真值指派都使一组公式的合取为F，称它们不相容

4. 间接证法2：附加前提法Conclusion Premise

1) 只适用于形式为：S⇒(R→C)的证明

2) CP规则：将R用P规则引入(作为附加前提)，从S和R推出C

● 应用



i.

ii.

iii.

iv.

v.

vi.
vii.
viii.
ix.
x.
xi. ---------我是底线----------