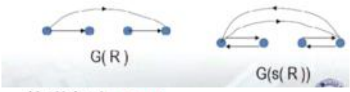
闭包、划分、等价、覆盖、相容

2018年9月9日 10:19

● 闭包

一. 闭包closure

1. 包含R中给定元素、具有某个性质的、最“小”的二元关系称为该性质的R的闭包（最小的定义1：所有该性质的关系的交集；定义2：包含于所有该性质的关系）
   1) 如
   2) • 对称闭包s(R)
      (1) $R \subseteq s(R)$
      (2) s(R)是对称的
      (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R) \subseteq S)$



   3) • 传递闭包t(R)
      (1) $R \subseteq t(R)$
      (2) t(R)是传递的
      (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S)$

2. 定理2. 19 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$, 则
   (1) R自反 $\Leftrightarrow r(R)=R$; (2) R对称 $\Leftrightarrow s(R)=R$;
   (3) R传递 $\Leftrightarrow t(R)=R$. #
   1) 证明：利用“最小”的定义，易知
3. 定理2. 20 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则
   (1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$; (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;
   (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$. #
   1) 前两条可以对比闭包求法证明，第三条似乎只能用“最小”证
4. 定理2. 21 设 $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则
   (1) $r(R_1 \cup R_2)=r(R_1) \cup r(R_2)$; (2) $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$;
   (3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.
   证明(1) $R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$ (定理2.20).
   再由$r(R_1) \cup r(R_2)$自反, 所以 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$.
   (2)可类似证明.
   (3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ (定理2.20). #
   注意: $t(R_1) \cup t(R_2)$不一定传递,
   所以没有 $t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.
5. 闭包求法
   1) • 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则
      (定理2.22) $r(R)=R \cup I_A$
      (定理2.23) $s(R)=R \cup R^{-1}$
      (定理2.24) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
      • 对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$
      R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$
      R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
      i. 自反矩阵：对角线全改成1

ii. 对称矩阵：关于对角线对称地补上1

iii. 传递矩阵：逻辑乘到循环，把一次循环得到的所有矩阵用逻辑或改成1

iv. 定理2. 22 $r(R)=R\cup I_A$

证明 (1) $R\subseteq R\cup I_A$

(2) $I_A\subseteq R\cup I_A \Leftrightarrow R\cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

(3) $R\subseteq r(R)\wedge r(R)$ 自反

$\Rightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$

$\therefore r(R)=R\cup I_A$ #

v. 定理2. 24 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明 (1) $R\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(2) $(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^2=R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Leftrightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ 传递 $\Rightarrow t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(3) $R\subseteq t(R)\wedge t(R)$ 传递

$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$

$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$ $\therefore t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ #

推论 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则 $\exists \ell\in N$, 使得

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^{\ell}$. #

6. 传递闭包$t(R)=R\cup R_2\cup$……可记作**R+**
   1) **Warshall算法**：i从1到n遍历每一列，i列中j从1到n遍历每一行，若i列j行为1，就让j行加上第i行（此处加指逻辑或）
   2) 定理：n元素的X上的关系R的传递闭包，只需求到k次幂即可，且k<=n
      i. 证明：若x R+ y，则存在k-1个z（z属于X），使$x\ R\ z_1$，$z_1\ R_2\ z_2$，……，$z_{k-1}\ R_k\ y$。假设，无重复的z时，k的最小值大于n。由于每个z都属于集合X，所以最多只有n-1种互不重复也不跟x相同的z，与假设不符，所以k一定<=n
   3) 传递闭包的图的求法：若某个顶点既是边终点，又是边起点，则给这两条边邻接的另外两点添边

- 定理2.25

7.

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√(定义)	√(2)	√(3)
s(R)	√(1)	√(定义)	×(反例)
t(R)	√(1)	√(2)	√(定义)

   1) 对称且不自反时，会导致不传递
   2) (1) $rs(R) = sr(R)$ (2) $rt(R) = tr(R)$ (3) $st(R)\subseteq ts(R)$

      说明：$rs(R)=r(s(R))$

      证明 (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R\cup R^{-1}) = I_A\cup(R\cup R^{-1})$

      $= (I_A\cup R)\cup(I_A^{-1}\cup R^{-1}) = (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^{-1}$

      $= r(R)\cup r(R)^{-1} = s(r(R)) = sr(R)$.

      (2) $rt(R)=r(t(R)) = r(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots) = I_A\cup(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)$

      $= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

      $= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^2\cup(I_A\cup R)^3\cup\ldots$

      $= r(R)\cup r(R)^2\cup r(R)^3\cup\ldots=t(r(R))$

● 集合的划分和覆盖

二. 划分partition

1. 覆盖：以A的部分**非空**子集S_i为元素的集合S，满足所有元素S_i的**并集=A**
   1) 这些子集S_i可称作A的划分块block
2. 划分/分划：覆盖的基础上，$S_i\cap S_j=\varnothing$ **(i≠j)**

1) 定义2.17 $A\neq\varnothing$的一个划分是$\mathcal{A}\subseteq P(A)$满足
(1) $\varnothing\notin\mathcal{A}$
(2) $\forall x,y(x,y\in\mathcal{A}\wedge x\neq y\Rightarrow x\cap y=\varnothing)$
(3) $\cup\mathcal{A}=A$
2) 最大划分：每个元素都只有一个元素的划分
3) 最小划分：只有一个元素，包含A的划分

3. 交叉划分：两种划分的元素互相取交集，组成的新集合（注意删去空集）
   1) 定理：交叉划分也是原集合的一种划分（用并集=A且交集为空证明）
4. 划分的加细
   1) 定义2.18 设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$都是集A的划分，若$\mathcal{A}$的每个划分块都含于$\mathcal{B}$的某个划分块中，则说$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细。
   2) 定理：交叉划分是原来两划分的加细
5. 用第二类stirling数求划分个数
   1) • 把n个不同球放到k个相同盒子，要求无空盒，不同放法的总数
      $$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$$
      称为Stirling子集数。
      • 把n元集分成k个非空子集的分法总数
   2) 递推公式
      i. （1）如果n个元素构成了m-1个集合，那么第n+1个元素单独构成一个集合。方案数$S(n,m-1)$
      （2）如果n个元素已经构成了m个集合，将第n+1个元素插入到任意一个集合。方案数 m*S(n,m)
      综合两种情况得：
      $$S(n+1,m)=S(n,m-1)+m\cdot S(n,m)$$
   3) 例
      • A={a,b,c,d}上有15种等价关系
      i. $$\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\4\end{Bmatrix}=1+(2^3-1)+C_4^2+1=1+7+6+1=15.$$

● 等价关系与等价类

三. 等价equivalence
1. 等价关系：自反、对称、传递的关系
   1) 定义2.14 设$A\neq\varnothing$且$R\subseteq A\times A$，若R是自反、对称、传递的，则说R是等价关系.

	关系	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x与y同年生	√	√	√	√
R_2	x与y同姓	√	√	√	√
R_3	x的年龄不比y小	√	×	√	×
R_4	x与y选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x的体重比y重	×	×	√	×

      i. （r4指两人课表有重复课）

2) 例2.10 设A≠∅且R⊆A×A，对R依次求三种闭包，共有6种不同顺序，其中哪些顺序一定导致等价关系？（说明：tsr(R)=t(s(r(R)))）

解 由于 sr(R)=rs(R)，tr(R)=rt(R)，st(R)⊆ts(R)，所以6种顺序至多产生两种结果：

	tsr(R)=trs(R)=rts(R)	str(R)=srt(R)=rst(R)
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√(等价闭包)	×

i. **st(R)无传递性**的例：两元素，单箭头。先求对称再求传递闭包，会比先求传递再求对称多两个环

3) 定理：A的每个划分都可确定一个等价关系

i. 证明：设同一分块内的各元素有关系（可称其为同块关系），则这种关系必有自反、对称、传递性

ii. 推论：等价关系个数=划分个数

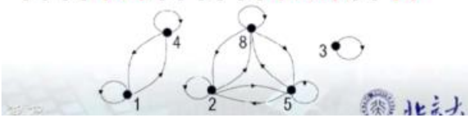
2. 等价类equivalence class

1) **定义2.15** 设 R 是A≠∅上等价关系，∀x∈A，则 x 关于R的等价类是 $[x]_R = \{ y \mid y\in A \wedge xRy \}$，简称为x的等价类，简记为[x]。

i. 即集合中按某等价关系分类而成的一组

ii. 例2.11 设 A={1,2,3,4,5,8}，A上模3同余关系 $R_3 = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3 \}$ 的等价类

[1]=[4]={1,4}，[2]=[5]=[8]={2,5,8}，[3]={3}



2) 每个等价类都可视作一个分块

3) **定理2.27** 设R是A≠∅上等价关系，则∀x,y∈A，

(1) $[x]_R\neq\emptyset$； **(2)** $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$；

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\emptyset$； **(4)** $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$.

i. **证明** (1) R自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow x\in[x]_R \Rightarrow [x]_R\neq\emptyset$.

(2) $\forall z,\ z\in[x]_R \Rightarrow zRx\wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$.

所以$[x]_R\subseteq[y]_R$. 同理 $[x]_R\supseteq[y]_R$.

(3) (反证) 假设∃z，$z\in[x]_R\cap[y]_R$，则 $z\in[x]_R\cap[y]_R$ $\Rightarrow zRx\wedge zRy \Rightarrow xRz\wedge zRy \Rightarrow xRy$，这与¬xRy矛盾！

1) 23条反推亦成立

ii. (4) 先证 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

任取 y，

$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$
$\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in[x])$
$\Rightarrow y\in A$ （因为$[x]\subseteq A$）

从而有 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$.

再证 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$.

任取 y，

iii. $y\in A \Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A$
$\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$

从而有 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$ 成立.

综合上述得 $\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

3. 商集quotient set：以某等价关系决定的各等价类的集合（是集合的集合）

1) **定义2.16** 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系，A关于R的商集（简称A的商集）是 $A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$。

   i. 即集合A按等价关系R分出的等价类组成的集合

2) **例2.12(1)**

   - $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$上等价关系有：I_A, E_A,
     $R_{ij}=I_A\cup\{\langle a_i,a_j\rangle,\langle a_j,a_i\rangle\}$, $a_i,a_j\in A$, $i\neq j$.
     $A/I_A=\{ \{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\} \}$
     $A/E_A=\{ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\} \}$
     $A/R_{ij}=A/I_A\cup\{\{a_i,a_j\}\} - \{\{a_i\},\{a_j\}\}$
     $= \{ \{a_1\},\ldots,\{a_{i-1}\}, \{a_{i+1}\},\ldots,\{a_{j-1}\},\{a_{j+1}\},\ldots,\{a_n\}, \{a_i,a_j\} \}$
     空关系∅不是A上等价关系(非自反)

3) 定理：商集A/R就是等价关系R决定的A的划分

   i. 用划分定义证：先用商集各元素是等价类证并集为A，再用等价关系自反性证都不是空集，再反证其交集为空

4) 定理：非空A上的关系$R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$

   i. 证明：商集写成等价类集合形式，对任意a属于左，a属于右；若商集相等，对任意a属于左，a属于右，R1包含于R2，同理，互为子集

- 相容关系

四. 相容compatible

1. 相容关系：自反、对称的关系（即传递性未知的低配等价关系）
2. 简化表示：矩阵只画对角线左下部分（不包括对角线）；图只画无向无环边
   1) 由定义知其矩阵主对角线全为1；矩阵关于主对角线对称、每个顶点都有环、有向边都成对出现
3. 相容类C：由相容关系r的所有a_i组成的集合
   1) 其关系图是完全图（即任两点都相连的完全多边形、线段、孤立点）
   2) 定理：A的覆盖的每个元素上的关系的集合为相容关系（即AiXAi的并集）
      i. 证：对任意x属于A，存在j使AjXAj包含<x,x>，所以自反。同理对任意xy有Aj，所以有传递性
4. 最大相容类Cr：加入任一新元素就不是相容类的相容类
   1) 定理：对每个C，必存在Cr使C⊆Cr
      i. 证：若C本身是Cr，成立。若C不是，则存在一个元素，加入C后，C'依旧是相容类，加到他最大为止，再利用包含关系的传递性
5. 完全覆盖Cr(A)：A上给定相容关系r，其最大相容类的集合称作A的~
   1) 由相容关系自反性，所有元素至少属于一个Cr，所以Cr的集合一定是A的覆盖（因为不一定有传递性，所以不一定交集为空，所以不一定是划分）
   2) 定理：完全覆盖Cr(A)与相容关系r一一对应
      i.
      ii.
      iii.
      iv.
      v. -------我是底线---------