高级计数

2019年1月16日 15:39

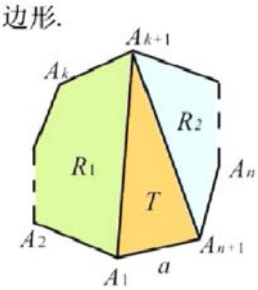
一. Catalan数：凸n边形可通过对角线拆分出的三角形个数

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, ...

1. 递推公式（Cn或h(n)）
   1) $C_{n+1} = C_1C_n + C_2C_{n-1} + \cdots + C_nC_1$
   2) $(n-3)C_n = \frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + C_5C_{n-3} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3)$
   3) **h(n)=h(n-1)*(4*n-2)/(n+1)**
      i. **h(n)=C(2n,n)/(n+1) (n=0,1,2,...)**
      ii. **h(n)=c(2n,n)-c(2n,n-1)(n=0,1,2,...)**
2. 定义 一个凸 $n+1$ 边形，通过不相交于n边形内部的对角线把n边形拆分成的三角形个数，记作h_n，称为Catalan数.

   考虑 $n+1$ 条边的多边形，端点 A_1, A_{n+1} 的边记为 a，以 A_{k+1}（k=1, 2,..., n-1）A_1 为边，$A_{n+1}A_{k+1}$ 为另一边，构成三角形 T, T 将多边形划分成 R_1 和 R_2 两个部分，分别为 $k+1$ 边形和 $n-k+1$ 边形.

   1) $$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, \quad n \ge 2$$
   $$h_1 = 1$$
   $$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$



   $$H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

3. 对应的组合问题

   （1） 从(0,0)到(n,n)的除了端点以外不接触对角线的非降路径数$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

   （2） $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$，不改变因子顺序，加括号的方法数 h_n

   （3） n 片树叶的有序三度根树个数

   （4） $2n$ 个点均匀分布在圆周上，用 n 条不相交的弦配对的方法数

4. 矩阵乘法：设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为矩阵序列，A_i为$P_{i-1}\times P_i$阶矩阵，$i=1,2,\ldots,n$. 确定乘法顺序使得元素相乘的总次数最少.
输入：向量$P=<P_0, P_1, \ldots, P_n>$
实例：$P=<10, 100, 5, 50>$
$A_1: 10\times 100$, $A_2: 100\times 5$, $A_3: 5\times 50$,
$(A_1A_2)A_3$: $10\times 100\times 5+10\times 5\times 50=7500$
$A_1(A_2A_3)$: $10\times 100\times 50+100\times 5\times 50=75000$
一般算法：n-1次运算加括号方法有$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$种，
1) Stirling公式 $n!=\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n}))$
方法数 $W(n)=\Omega(\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!})=\Omega(2^{2n}/n^{\frac{3}{2}})$
2) 此处Ω指至少的方法数

5. $1, 2, \ldots, n$ 放入堆栈后的不同的输出个数
分析：
1．1 进栈；
2．k 个数（k=0,1, … , n-1）进栈并且出栈；
3．1 出栈；
4．处理 k+2, … , n 的进栈问题；
步 2：子问题规模 k
步 4：子问题规模 n-k-1

1)
$$\begin{cases} T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k) \\ T(1)=1 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k) \\ T(0)=1,\quad T(1)=1 \end{cases} \qquad G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n,$$
$$G^2(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}T(k)x^k)(\sum_{l=0}^{\infty}T(l)x^l)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k))$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}T(n)x^{n-1}=\frac{G(x)-1}{x}$$
$$xG^2(x)-G(x)+1=0\Rightarrow 2xG(x)=1\pm\sqrt{1-4x},$$
由于 $x\to 0, G(0)\to 0$, $\quad 2xG(x)=1-\sqrt{1-4x}$
$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

二. 第一类Stirling数：n不同元素的k个非空循环排列方法数

1. 定义 多项式 $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$的展开式为
$$S_nx^n-S_{n-1}x^{n-1}+S_{n-2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}S_1x$$
将 x^r 的系数的绝对值 S_r 记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$，
称为第一类 Stirling 数

1) 实例
n=2，$x(x-1)=x^2-x$
n=3，$x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}=1$$
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=2, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=3, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=1$$

2. 递推方程

1)
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

2)

n=1	1				
n=2	1	1			
n=3	2	3	1		
n=4	6	11	6	1	
n=5	24	50	35	10	1
	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = (5-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. 生成函数

   1) $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$

4. 恒等式

   1)
   (1) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$

   (2) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

   (3) $\sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

   2) n 元对称群 S_n，在表示式中具有 r 个不交轮换的置换个数是$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$

   证明：设这样的置换为$\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$个，得到这种置换的方法有两种：

   从 S_{n-1} 的含 r-1 个轮换的置换中加入(n)，方法有$\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$种；

   从 S_{n-1} 含有 r 个轮换的置换中加入 n，方法有$(n-1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle$种.

   $$\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle = (n-1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$$
   $$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = (n-1)!$$

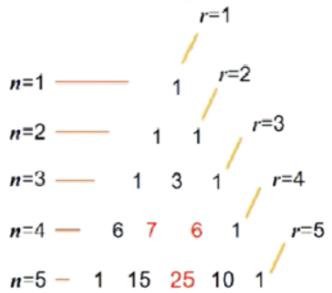
三. 第二类Stirling数：n不同物品放入m无差盒子的方案数

定义：n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的

1. 方法数称为第二类 Stirling 数，记作$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$

2. 递推方程

1) $\begin{cases} \left\{ {n \atop r} \right\} = r\left\{ {n-1 \atop r} \right\} + \left\{ {n-1 \atop r-1} \right\} \\ \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \end{cases}$

2) 

$\left\{ {5 \atop 3} \right\} - 3\left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\}$

3. 恒等式

1) (1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

(3) $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$

(4) $\sum \binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_m} - m!\left\{ {n \atop m} \right\}$,

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

(5) $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$

(6) $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\{ {i \atop r-1} \right\}$

i. (1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

a_1 先放在一个盒子里，

剩下的 n-1 个球每个有 2 种选择，

但是全落入 a_1 的盒子的方法不符合要求，减去.

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

n 个球放到 n-1 个盒子，必有一个盒子含 2 个球，

其余每个盒子 1 个球.选择两个球有 $C(n,2)$种方法.

ii. (4) $\sum \binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$,

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

对应 n 个不同的球恰好放到 m 个不同盒子的方法数（无空盒）

(5) $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$

按照含球的盒子数分类，对应了允许存在空盒的方法

(6) $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r-1} \right\}$

至多 n 个不同的球放到 r-1 个相同的盒子不存在空盒的方法

按照球数分类

4. 间接的生成函数（利用恒等式4）

$$(e^x-1)^m=(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^m=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

1) $a_n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$

$$=\sum\binom{n}{n_1n_2\ldots n_m}=m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\},$$

四. 贝尔数1，1，2，5，15，52，203，877，4140，21147，115975，...（OEIS的A000110数列）

1. 是大小为0,1,2,3......的集合的划分数
2. 递推公式
   1) $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$
3. 三角形递推（OEIS的A011971数列）
   1) a[1][1]=1
   2) a[n][1]=a[n-1][n-1]
   3) a[n][m]=a[n][m-1]+a[n-1][m-1]
   4)

1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	67	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140
		⋮		⋮		⋮	

每行首项是贝尔数。

这个三角形称为贝尔三角形、Aitken阵列或Peirce三角形（Bell triangle, Aitken's array, Peirce triangle）。

4. 是二类斯特林数的和
   1) $B_n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)$
5. Dobinski公式即期望=1的泊松分布的n次矩
   1) $B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$
6. Touchard同余：对任意质数p
   1) $B_{p+n}\equiv B_n+B_{n+1}\ (\mathrm{mod}\ p)$
7. 指数生成函数
   1) $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=e^{e^x-1}$

五. 计数模型

1. 放球模型（n个球，m个盒子）

1)

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
否	否	否	$P_m(n)-P_{m-1}(n)$	将 n 恰好无序拆分成 m 部分
	否	是	$P_m(n)$	将 n 无序拆分成 t 个部分($t\le m$)
	是	否	$C(n-1,m-1)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的正整数解
	是	是	$C(n+m-1,n)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的非负整数解

2)

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
是	否	否	$\left\{{n \atop m}\right\}$	第二类Stirling数
	否	是	$\sum_{k=1}^{m}\left\{{n \atop k}\right\}$	第二类Sirling数性质
	是	否	$m!\left\{{n \atop m}\right\}$	第二类Stirling数性质
	是	是	$m^n=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left\{{n \atop k}\right\}k!$	乘法法则

3) 最上两行不是指排列数，第一行可以看这
4) 将n个相同的球放进k个相同的盒，不能有空
   i. 引：不能有空=至少一盒只有1个球+每盒都超过1个球
   ii. 引：至少一盒只有1个球=n-1球放入k-1盒
   iii. 引：每盒都超过1个球=n-k球放入k盒
   iv. 初值：只要**ans[0][0]=1**就能转移出所有把k球放入k盒的方法数=1了
   v.
```
for__(i,1,n)
    for__(j,1,min(i,k))
        ans[i][j]= ans[i-1][j-1]+ ans[i-j][j];
```
   vi. 应用：整数n拆成k个数，115，151，511视作同一种拆法
   vii. 对应第一行的模型
5) 将n个相同的球放进k个相同的盒，能有空
   i. 引：能有空=至少一盒空+每盒都不空
   ii. 引：至少一盒空=n球放入k-1盒
   iii. 引：每盒都不空=n-k球放入k盒
   iv. 初值：**ans[0][0]=1，注意这里要把第0行都赋为1**
   v.
```
for__(i,0,n)
    for__(j,1,k)
        if(i>=j)
            ans[i][j]= ans[i][j-1]+ ans[i-j][j];
        else
            ans[i][j]= ans[i][j-1];
```
   vi. 应用：此时的ans[n-m][m]即为前一题的ans[n][m]
   vii. 对应第二行的模型
6) n不同球r不同盒非空
   i. 初值：d[0][0]=1
   ii. 转移1：第i个球放入（r-j+1种）空盒：d[i][j]+=(r-j+1)*d[i-1][j-1]
   iii. 转移2：第i个球放入非空盒：d[i][j]+=j*d[i-1][j]

7)

表 13.2

球区别	盒区别	是否空盒	模型	方案计数
有	有	有	选取	m^n
有	有	无	放球子模型	$m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$
有	无	有		$\sum_{m=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$
有	无	无		$\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$
无	有	有	不定方程	$C(n+m-1,n)$
无	有	无		$C(n-1,m-1)$
无	无	有	正整数拆分	$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n 系数
无	无	无		$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$, x^n 系数

2. 函数计数模型

1) $|A|=n, |B|=m$，计数结果：

A 到 B 的关系：2^{mn}

A 到 B 的函数：m^n

A 到 B 的单射函数：$P(m,n)=m(m-1)\ldots(m-n+1)$

A 到 B 的满射函数：$m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$

A 到 B 的双射函数：$m=n, P(n,n)=n!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}=n!$

3. 等价关系计数模型

1) $\sum_{m=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$

i.

ii.

iii.

iv.

v.

vi. --------我是底线--------