图

2018年9月22日　13:49

● 图的基本概念

一. 图的概念

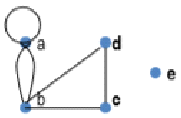
1. 无序积

   A&B = { {a,b} | x∈A ∧ y∈B }

   1)
   - 记{a,b}=(a,b)
   - 允许 a=b
   - (a,b)=(b,a)

2. 无向图undirected graph

   1)
   - 图 G=<V,E>
     - V≠∅　顶点集 V(G)
     - E⊆V&V　边集(多重集) E(G)
   - 例：G=<V,E>
     - V={a,b,c,d,e}
     - E={(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)}

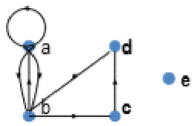
   - 顶点、边

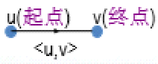
   2) E：edge，V：vertex，G：graph，带权图的权记作fi，是三元组第三元

3. 有向图directed graph

   1)
   - 有向图 D=<V,E>
     - V≠∅, 顶点集 V(D)
     - E⊆V×V, 边集(多重集) E(D)
   - 例：D=<V,E>
     - V={a,b,c,d,e}
     - E={ <a,a>,<a,b>,<a,b>, <b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b> }

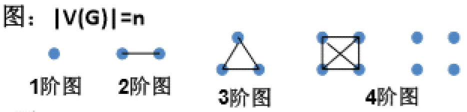
   - 有向边

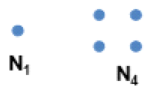
4. 其他分类

   1) n阶图n点；有限图有限点；零图没边；平凡图只有个点；空图是空白

      i.
      - n阶图：|V(G)|=n

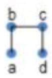
      

      - 有限图：|V(G)|<∞
      - 零图N_n：E=∅
      - 平凡图：1阶零图N_1
      - 空图：　V=E=∅

   2) 标定图：有字母的图；底图/基图：有向图去掉箭头

      i.
      - 标定图：顶点或边带标记的图

      - 非标定图：顶点和边不带标记的图

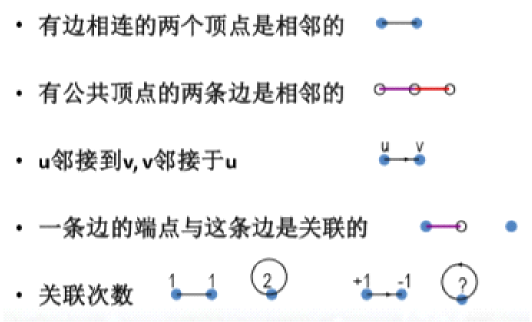
      

      - 底图(基图)：有向图去掉边的方向后得到的无向图

5. 点和边

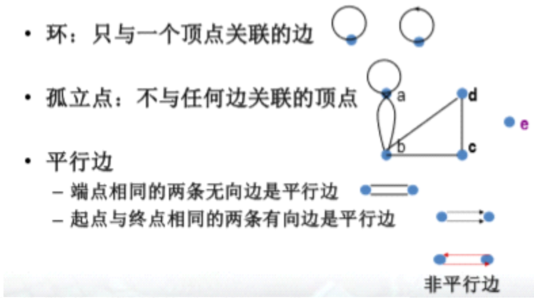
   1) 边边相邻；点边关联；无向点点相邻；有向点点邻接

i.

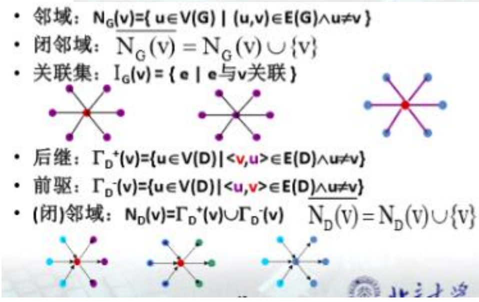


2) 环；孤立点；平行边

i.



3)

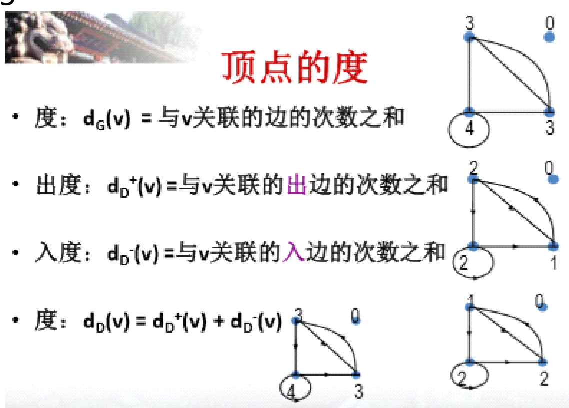


i. 不带本身的开邻域简称邻域；闭邻域比邻域多了它本身
ii. 关联集是无向边的集合；后继、前驱是有向边的集合
iii. 后继的箭头指向邻域，前驱的箭头指向本身

二. 图的性质

1. 度degree

1)



2)

- 最大度 $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v\in V(G) \}$
- 最小度 $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v\in V(G) \}$
- 最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v\in V(D)$
- 最小出度 $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v\in V(D) \}$
- 最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v\in V(D)$
- 最小入度 $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v\in V(D) \}$

3) 度数为1的点称为悬挂点，其关联边为悬挂边

2. 握手定理：**点度数和为2倍边数**

1) • 设$G=\langle V,E\rangle$是无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m. \quad \#$$

2) 任何图中奇度顶点的个数是偶数. #

3) • 设$D=\langle V,E\rangle$是有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n) = d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n) = m. \quad \#$$

3. 简单图

   1) • 简单图：既无环也无平行边的图

   $$\Rightarrow 0 \le \Delta(G) \le n-1$$

4. K-正则图

   1) • k-正则图：所有顶点的度都是k

5. 度数列

   1) • 设$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，称

   $$d = (d(v_1),d(v_2),\ldots, d(v_n))$$

   为G的度数列

6. 可图化

   1) • 设非负整数列$d=(d_1,d_2, \ldots, d_n)$，若存在图G，使得G的度数列是d，则称d为可图化的

      i. 即：和为偶数的非负整数列可图化

      非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$可图化$\Leftrightarrow$

      $$d_1+d_2+\ldots+d_n \equiv 0 \pmod 2).$$

   2) • 证：($\Rightarrow$) 握手定理

      ($\Leftarrow$) 奇数度点两两之间连一边，剩余度用环来实现. #

7. 可简单图化

   1) • 设非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$，若存在简单图G，使得G的度数列是d，则称d为可简单图化的

   可简单图化充要条件(Havel定理)

   2) • 设非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足：

   $$d_1+d_2+\ldots+d_n \equiv 0 \pmod 2),$$
   $$n-1\ge d_1\ge d_2\ge\ldots\ge d_n\ge 0,$$

   则d可简单图化$\Leftrightarrow$

   $$d'=(d_2-1,d_3-1,\ldots,d_{d1+1}-1,d_{d1+2},\ldots,d_n)$$

      i. 逆序排列，删去第一项数字l，之后连续l项都减一，得到和为偶数的新整数列，若它可简单图化，则原整数列也可简单图化

   3) • 定理7.4(P.Erdös,T.Gallai,1960)：

   设非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$满足：

   $$n-1\ge d_1\ge d_2\ge\ldots\ge d_n\ge 0,$$

   则d可简单图化$\Leftrightarrow$

   $$d_1+d_2+\ldots+d_n=0 \pmod 2)$$

   并且对$r=1,2,\ldots,n-1$有

   $$d_1+d_2+\ldots+d_r \le r(r-1)+\min\{r,d_{r+1}\}+ \min\{r,d_{r+2}\}+\ldots+\min\{r,d_n\}.$$

   #

      i. • 定理7.4'(P.Erdös,T.Gallai,1960)：非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$可简单图化$\Leftrightarrow$

      $$d_1+d_2+\ldots+d_n=0 \pmod 2)$$

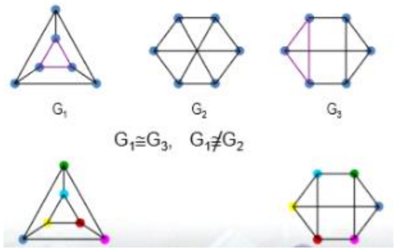
      并且对$r=1,2,\ldots,n$有

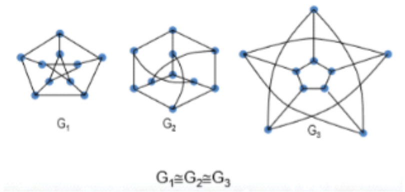
      $$d_1+d_2+\ldots+d_r \le r(r-1)+\min\{r,d_{r+1}\}+\min\{r,d_{r+2}\}+\ldots+\min\{r,d_n\}. \quad \#$$

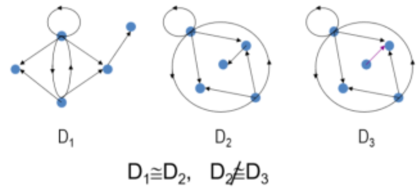
8. 同构isomorphism

   1) • 无向图$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$，若存在双射$f:V_1\to V_2$满足$\forall u,v\in V_1$，$(u,v)\in E_1 \leftrightarrow (f(u),f(v))\in E_2$，则称$G_1$与$G_2$同构，记作$G_1\cong G_2$

- 有向图$D_1=<V_1,E_1>$, $D_2=<V_2,E_2>$，若存在双射 $f:V_1 \to V_2$，满足$\forall u,v \in V_1$，$<u,v> \in E_1 \leftrightarrow <f(u),f(v)> \in E_2$，则称$D_1$与$D_2$同构，记作$D_1 \cong D_2$

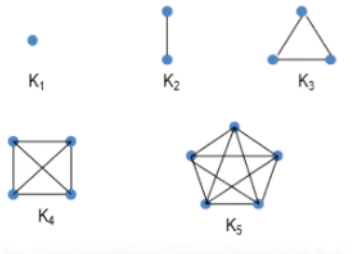
2) 同构的图，图论性质完全一致
3) 例
   i. 

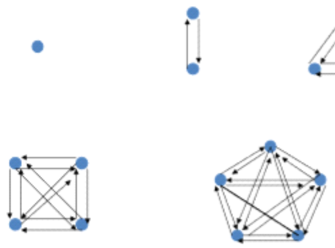
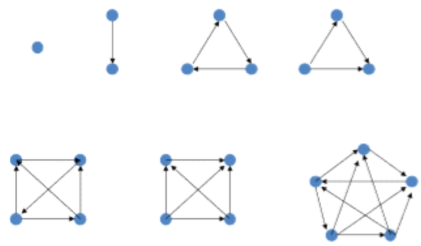
   ii. 

   iii. 

三. 图族graph class

1. 完全图complete graph

1) 无向完全图：相当于无向最大度-正则图，n阶完全图可记作K_n
   i. 

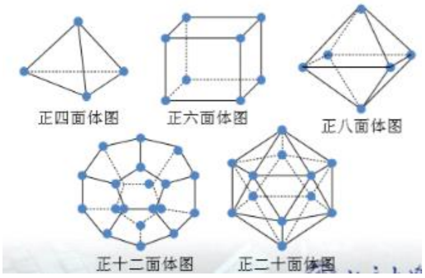
2) 有向完全图：相当于最大度-有向正则图
   i. 
3) 竞赛图tournament：完全图每条边任给一个方向
   i. 

2. 一些特殊的图

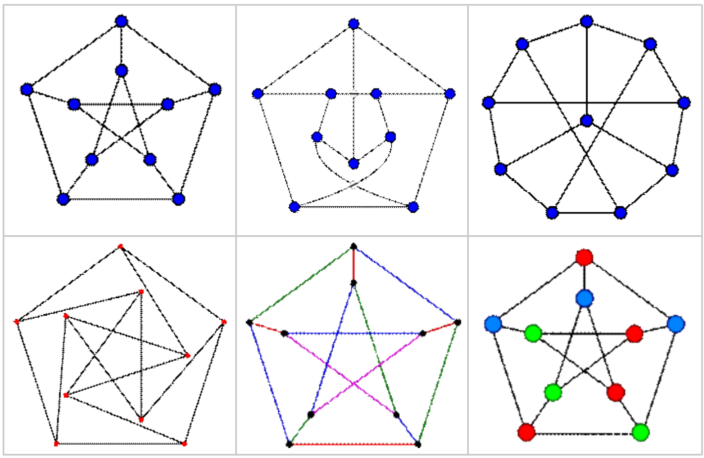
1) 柏拉图图(Plato graphs)：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体所相应的图的统称
   i. 所有顶点的次都相同的平面图称为点正则平面图；所有面的边界上含有相同的边数的平面图称为面正则平

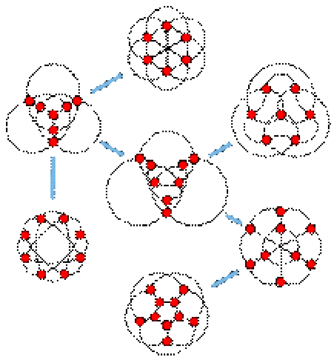
面图。既是点正则又是面正则的平面图称为全正则平面图

ii. 利用欧拉公式可以推出只有5个柏拉图图是全正则平面图

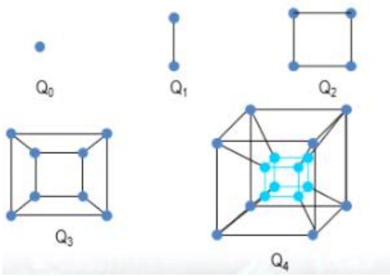
iii. 

2) 彼德森图

i. 

ii. 

3) 超立方体：Qi对应定点相连得到Qi+1

i. 

4) 圈图：n个点依次被n条边连起来（n>=3）

5) 轮图：圈图n个点用n条边再连向第n+1个点（n>=3）

3. r部图

1) • **r部图: $G=\langle V,E\rangle, V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_r$, $V_i\cap V_j=\varnothing$ $(i\neq j)$, $E\subseteq \bigcup_{i\neq j}(V_i\& V_j)$,**

• 也记作 $G=\langle V_1,V_2,\ldots,V_r;E\rangle$.

i. 即有r个分组的点，同组点互不相连

2) • **二部图: $G=\langle V_1,V_2;E\rangle$, 也称为偶图**

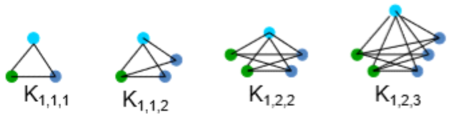
i. 

ii. Bipartite Graph二部图也常译为二分图

iii. 称这2个V为互补顶点子集

3) 完全r部图

i.



4. 子图subgraph

1) • **子图(subgraph):** $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$,

$$G'\subseteq G \Leftrightarrow V'\subseteq V \wedge E'\subseteq E$$

2) • **真子图(proper subgraph):**

$$G'\subset G \Leftrightarrow G'\subseteq G \wedge (V'\subset V \vee E'\subset E)$$

3) • **生成子图(spanning subgraph):**

G'是G的生成子图 $\Leftrightarrow G'\subseteq G \wedge V'=V$

i. 生成子图spanning subgraph：点不动，舍去部分边

4) • **导出子图:** $G=\langle V,E\rangle$,

• 若$V_1\subset V$, $E_1= E \cap V_1 \& V_1$,则称

$$G[V_1] = \langle V_1,E_1\rangle$$

为由V_1导出的子图

i. 导出子图induced subgraph：舍去部分点，非邻接/关联边都不动

5. 补图complementary graph

1) • **补图:** $G=\langle V,E\rangle$, $\overline{G}=\langle V,E(K_n)-E\rangle$

i. 补图，相当于集合论补集

2) • **自补图(self-complement graph):** $G\cong\overline{G}$

四. 图的运算

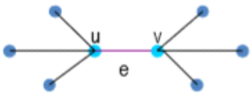
1. 删除

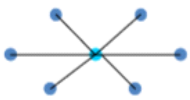
1)
- $G-e = \langle V, E-\{e\}\rangle$, 删除边e
- $G-E' = \langle V, E-E'\rangle$, 删除边集E'
- $G-v = \langle V-\{v\}, E-I_G(v)\rangle$, 删除顶点v以及v所关联的所有边
- $G-V' = \langle V-V', E-I_G(V')\rangle$,删除顶点集V'以及V'所关联的所有边

2. 收缩、加新边

1)
- $G\backslash e$: $e=(u,v)$, 删除e,合并u与v
- $G\cup(u,v) = \langle V,E\cup\{(u,v)\}\rangle$
  - 在u与v之间加新边

也写成$G+(u,v)$





3. 不交

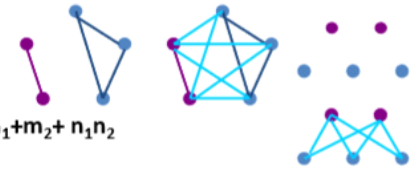
1)
- $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$,
- G_1与G_2不交 $\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\varnothing$
- G_1与G_2边不交(边不重) $\Leftrightarrow E_1\cap E_2=\varnothing$

4. 并、交、差、环和

1)
- $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 都无孤立点
- 并图: $G_1 \cup G_2 = <V(E_1 \cup E_2), E_1 \cup E_2>$
- 交图: $G_1 \cap G_2 = <V(E_1 \cap E_2), E_1 \cap E_2>$
- 差图: $G_1 - G_2 = <V(E_1 - E_2), E_1 - E_2>$
- 环和: $G_1 \oplus G_2 = <V(E_1 \oplus E_2), E_1 \oplus E_2>$

5. 联图
   - $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 不交无向图
   - $G_1+G_2=<V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \& V_2)>$

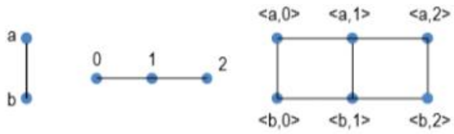
1)
- $K_r+K_s=K_{r+s}$
- $N_r+N_s=K_{r,s}$
- $n=n_1+n_2$, $m=m_1+m_2+n_1n_2$

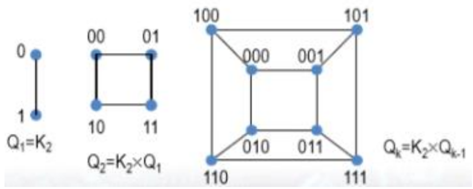


6. 积图
   - $G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 无向简单图
   - $G_1 \times G_2=<V_1 \times V_2, E>$, 其中

1)
$E = \{ (<u_i,u_j>,<u_k,u_s>) \mid$
$(<u_i,u_j>,<u_k,u_s> \in V_1 \times V_2) \wedge$
$((u_i=u_k \wedge u_j$与u_s相邻$) \vee (u_j=u_s \wedge u_i$与$u_k$相邻$)) \}$
- $n=n_1n_2$, $m=n_1m_2+n_2m_1$

   i. 左图每个点换成右图，对应点相连



2)


i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix. ------我是底线---------