集合论入门

2018年9月9日 10:19

● 集合的概念和表示方法

一. 集合

1. 集合是十九世纪诞生的基本的数学描述工具，难以被严格定义。概念上，一些元素汇集成的整体就是集合
    1) 通常，大写英文字母A,B,C,...表示集合；小写英文字母a,b,c,...表示集合中的元素
    2) $a\in A$表示a是A的元素，读作a属于A； $a\notin A$表示a不是A的元素，读作a不属于A
    3) 一般默认集合中的元素不可重复。可重复出现元素的称为多重集，某元素的重复次数称为其重复度
2. 集合的描述法：
    1) 列举法：在花括号内列出全体元素，元素间用逗号分开。如，$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{2,4,6,...\}$
    2) 描述法：用谓词P(x)表示x具有性质P，用$\{x|P(x)\}$表示具有性质P 的集合
3. 常用的数集合：自然数集合 $N=\{0,1,2,3,...\}$；整数集合 $Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$；有理数集合Q（比X多了分数）；实数集合R（比Q多了根号，π，e等无限不循环小数）；复数集合C
4. 包含关系：B是A的子集，称B包含于A
    1) $B\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$
    2) $B\not\subseteq A\Leftrightarrow\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$
    3) 包含关系是偏序关系，即有自反性、反对称性、传递性
5. 相等关系：B=A，称AB相等
    1) 外延性原理定义：两集合相等⇔拥有相同成员
        i. 即：$A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in B\leftrightarrow x\in A)$
    2) 定理：$A=B\Leftrightarrow B\subseteq A\wedge A\subseteq B$
        i. 即证明相等可以通过证明互为子集
        ii. 证明不相等只需找到反例，存在于一个集合而不存在与另一个
    3) 相等关系是等价关系，即有自反性、对称性、传递性
6. 真包含关系：B是A的真子集，称B真包含于A
    1) $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$
    2) $A\not\subset B\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\wedge A\neq B$
    3) 真包含关系有反自反性、反对称性、传递性（是拟序）
7. 空集/空集合：不拥有任何元素的集合，记作∅
    1) 可描述为$\{x|P(x)\wedge\neg P(x)\}$
    2) 定理：空集是一切集合的子集
        i. 证明：$\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow 1$
        ii. 推论：空集是惟一的
            1) 证明：设∅1与∅2都是空集，则$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2\wedge\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，所以$\varnothing_1=\varnothing_2$
            2) 可知，无论空集以什么形式出现，它们都是相等的，所以 $\{x|x\neq x\}=\{x|x*x+1=0\wedge x\in R\}=\varnothing$
8. 全集：限定所讨论的集合都是某个集合的子集，称该集合为全集，记作E。
    1) 可描述为$\{x|P(x)\vee\neg P(x)\}$
    2) 全集是相对的，不唯一
    3) 给定若干个集合之后，都可以找到包含它们的全集

9. 幂集power set：由A的全体子集组成的集合为A的幂集，记作P(A)
    1) 用描述法表示为 $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$
        i. 定理：A的元素个数记作$|A|=n$，则幂集有2^n个元素
            1) 证明：二项展开式$(x+y)^n=\sum {}_nC_k * x^k * y^{n-k}$中令$x=y=1$
    2) 编码：类似小项，按元素出现与否，把A的子集记为形如$A_{01\ldots10}$（|A|个码）
    3) 集族：幂集这种由集合构成的集合称为~
        i. 编码组成的集合可以称为集族的指标集
        ii. 空集也可视作集族，称为空集族

- 集合的运算

//从这里开始基本以截图为主了

二. 集合的运算

1. （初级）交集、（初级）并集
    1) $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$.
    2) $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
    3) 可推广至有限个或可数个集合
    4) 若两集合交集为空集，可称它们不相交
    5) ① 幂等律 $A \cup A=A,\ A \cap A=A$
       ② 交换律 $A \cup B=B \cup A,\ A \cap B=B \cap A$
       ③ 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
       $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
       ④ 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$
       $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
        i. 第一个分配律等号右边第一个∩写错了，应为∪
    6) ⑥ 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$
    7) ⑦ 零律 $A \cup E = E$，$A \cap \varnothing = \varnothing$
       ⑧ 同一律 $A \cup \varnothing = A$，$A \cap E = A$
2. 相对补集
    1) $A-B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$。
    2) ⑬ 补交转换律 $A-B = A \cap \sim B$
    3) 另：$A-A \cap B$是更精确的定义
    4) 定理：$A \cap (B-C)=A \cap B-A \cap C$
    5) $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$
3. 绝对补集
    1) $\sim A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$。
        i. 即：$x \in A \Leftrightarrow x \notin \sim A$
    2) ⑤ 德•摩根律
       绝对形式 $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
       $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
       相对形式 $E-(A \cup B) = (E-A) \cap (E-B)$
       $E-(A \cap B) = (E-A) \cup (E-B)$

3) ⑨ 排中律 $A\cup\sim A = E$

⑩ 矛盾律 $A\cap\sim A = \varnothing$

⑪ 余补律 $\sim\varnothing = E$，$\sim E = \varnothing$

⑫ 双重否定律 $\sim(\sim A) = A$

4. 对称差集
    1) $A\oplus B = \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}$
        i. 即$x\in A\oplus B \Leftrightarrow x\in A \,\overline{\vee}\, x\in B$（不可兼或）
    2) $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$
        i. 变形：$A\cup B=(A\oplus B)\cup(A\cap B)$
        ii. 变形：$A\cap B=(A\cup B)-(A\oplus B)$
    3) 交换律：$A\oplus B=B\oplus A$
    4) **结合律：**$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$
    5) $A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus E=\sim A$；$A\oplus A=\varnothing$
5. 广义交集、广义并集（教材没有集族的概念，所以教材上是对Ai运算，运算符号上写n，下写i=1）
    1) 广义交，记作$\cap\mathcal{A}$。$\cap\mathcal{A}$的描述法

       $\cap\mathcal{A}=\{x \mid \forall z(z\in\mathcal{A}\rightarrow x\in z)\}$
        i. 当$\mathcal{A}=\varnothing$时，$\cap\varnothing$无意义
    2) 广义并，记作$\cup\mathcal{A}$（“大并$\mathcal{A}$”）

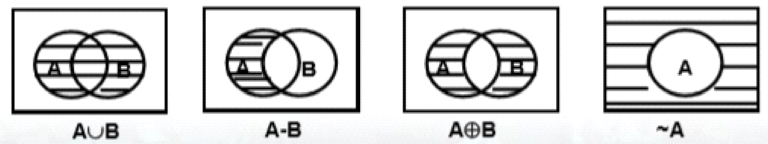
       $\cup\mathcal{A}=\{x \mid \exists z(x\in z\wedge z\in\mathcal{A})\}$
        i. 这一段集族的部分看不懂就别看了吧…不考
    3) 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$为集族，B为一集合：

       分配律
       $$B\cup(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B\cup A_\alpha)$$
       $$B\cap(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B\cap A_\alpha)$$
       德•摩根律
       $$\sim(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$
       $$\sim(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$
       $$B-(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$
       $$B-(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$
    4) (1) 若$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，则$\cup\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$；

       (2) 若$\mathcal{A}\in\mathcal{B}$，则$\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$；

       (3) 若$\mathcal{A}\neq\varnothing$且$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，则$\cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}$；

       (4) 若$\mathcal{A}\in\mathcal{B}$，则$\cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$；

       (5) 若$\mathcal{A}\neq\varnothing$，则$\cap\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{A}$。
6. 文氏图Venn diagram
    1) 

7. 包含关系的充要条件：
    1) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$
    2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup(B-A)=B$
    3) $A\subseteq B\Leftrightarrow\sim B\subseteq\sim A$
    4) $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$
8. 运算结合顺序

1) 一元运算从右向左：绝对补、幂集、广义交、广义并等
2) 二元运算多个括号并排或没括号的部分从左向右：初级并、初级交、相对补、对称差等

- 包含排斥/容斥原理

9. 容斥原理principle of inclusion-exclusion

定理1.3 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合，则

1) $$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

2) 即奇数项和减偶数项和
3) 证明：
   i. n=2时分类讨论：
      1) 不相交时显然
      2) 相交时用A∪B=(A⊕B)∪(A∩B)和A=(A-B)∪(A∩B)证
   ii. 假设n=k-1时成立
   iii. n=k时：
      1) 让第k个与假设前k-1个相交，用分配律化简
      2) 加上假设的k-1个
      3) 加上第k个本身
      4) 整理，证毕

- # 序偶与笛卡尔积

三. 序偶/有序对（的集合形式定义）

1. 序偶
   1) **<a,b> = {{a},{a,b}}**
      i. <a,b>偶尔记作(a,b)
   2) a是第一元素, b是第二元素
   3) **引理1** {x,a}={x,b} ⇔ a=b

      证明 (⇐) 显然.

      (⇒) 分两种情况.

      (1) x=a. {x,a}={x,b} ⇒ {a,a}={a,b}

      ⇒ {a}={a,b} ⇒ a=b.

      (2) x≠a. a∈{x,a}={x,b} ⇒ a=b. #
   4) **引理2** 若 $\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\varnothing$, 则

      (1) $\cup\mathcal{A}=\cup\mathcal{B}$

      (2) $\cap\mathcal{A}=\cap\mathcal{B}$
2. 定义：序偶相等：
   1) **定理2.1** <a,b>=<c,d> ⇔ a=c ∧ b=d

      证明 (⇐) 显然.

      (⇒) 由引理2, {{a},{a,b}}={{c},{c,d}}

      ⇒ ∩{{a},{a,b}}=∩{{c},{c,d}} ⇒ {a}={c} ⇔ a=c.

      又 <a,b>=<c,d> ⇔ {{a},{a,b}}={{c},{c,d}}

      ⇒ ∪{{a},{a,b}}=∪{{c},{c,d}} ⇒ {a,b}={c,d}.

      再由引理1, 得b=d. #

2) **推论** $a \neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

证明 (反证)

$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \Leftrightarrow a=b$,

与 $a\neq b$ 矛盾. #

3. （有序）n元组（元组：tuple）
   1) 三元组：
      i. $\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$
      ii. 注意嵌套的n-1元组被规定必须出现在前一项
   2) n元组：
      i. 有序n(n≥2)元组:

         $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$
      ii. 可以省略内部嵌套的<>
      iii. 称ai为n元组第i个坐标
   3) 定义n元组相等：
      i. **定理2** $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,b_2,\ldots,b_n\rangle \Leftrightarrow a_i = b_i,\ i=1,2,\ldots,n.$ #

四. 笛卡尔积/直积/卡氏积

1. 笛卡尔积：
   1) $A\times B = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \}$
2. 性质12：非交换、非结合
   1) • 非交换： $A\times B \neq B\times A$ (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

      • 非结合： $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$ (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)
3. 性质3：**分配律**：
   1) 1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
      2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
      3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
      4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$
   2) 证明：$\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

      $\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

      $\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

      $\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

      $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

      $\therefore A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #
4. 性质456：
   1) (1) $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

      (2) 若$A\neq\varnothing$, 则 $A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

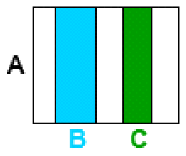
      (3) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$,

      并且当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,

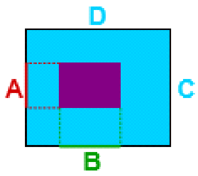
      $A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$.

2) （2）又称**消去律**，A在x后也成立

3)



$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$



$A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

5. n维笛卡尔积

1) $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{ <x_1,x_2,\ldots,x_n> \mid$
$x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\ldots\wedge x_n\in A_n \}$

2) 性质：

i. **非交换**: $A\times B\times C\neq B\times C\times A$
(要求A,B,C均非空,且互不相等)
非结合: (非2元运算)
分配律: 例如
$A\times B\times(C\cup D)=(A\times B\times C)\cup(A\times B\times D)$
其他: 如 $A\times B\times C=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee C=\varnothing$.

3) AxAxA...(n个A)...xA记作a^n。即我x我自己n-1次可以记作我的n次幂

i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix.
x.
xi.
xii.
xiii.
xiv. --------我是底线----------