树

2018年10月28日 11:46

● 无向树、生成树

一. 无向树

1. 树、树叶、分支点、平凡树、森林
    1) 树(tree): 连通无回图, 常用T表示树
    2) 树叶(leaf): 树中1度顶点
    3) 分支点: 树中2度以上顶点
    4) 平凡树: 平凡图(即只有一个点，无树叶,无分支点)
    5) 森林(forest): 无回图
        i. 森林的每个连通分支都是树
2. • **定理9.1**: 设G=<V,E>是n阶m边无向图,则
    (1) G是树(连通无回)
    ⇔ (2) G中任何2顶点之间有唯一路径
    ⇔ (3) G无圈 ∧ m=n-1
    ⇔ (4) G连通 ∧ m=n-1
    ⇔ (5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥
    ⇔ (6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边产生唯一圈
    1) 连通所以任两点有路径，无回所以路径唯一；边数=点数-1可代替连通或无回的其中一个条件；少一条边就不连通；多一条边就有回路
    2) • **证明**: (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)
        i. (1)⇒(2): ∀u,v∈V, G连通, u,v之间的短程线是路径. 如果u,v之间的路径不唯一, 则G中有回路, 矛盾!
        ii. • 证明(续): (2)⇒(3): 任2点之间有唯一路径⇒无圈 (反证: 有圈⇒存在2点,它们之间有2条路径.)
            m=n-1(归纳法): n=1时,m=0. 设n≤k时成立, 当n=k+1时, 任选1边e, G-e有2个连通分支, $m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1$.
        iii. • 证明(续): (3)⇒(4): G连通: 假设G有s个连通分支, 则每个连通分支都是树, 所以 $m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s=n-1$, 所以s=1.
        iv. • 证明(续): (4)⇒(5): 所有边是桥: ∀e∈E, G-e是n阶(n-2)边图, 一定不连通(连通⇒m≥n-1), 所以e是割边.
        v. • 证明(续): (5)⇒(6): 所有边是桥⇒无圈. ∀u,v∈V, G连通, u,v之间有唯一路径Γ, 则Γ∪(u,v)是唯一的圈.
        vi. • 证明(续): (6)⇒(1): G连通: ∀u,v∈V, G∪(u,v)有唯一的圈C, C-(u,v)是u,v之间的路径. #
3. 定理9.2：非平凡树至少有2个树叶（极大路径的两端）
    1) • **证明**: 设T有x个树叶, 由定理1和握手定理,
        $2m = 2(n-1) = 2n-2 = \Sigma d(v)$
        $= \Sigma_{v是树叶} d(v) + \Sigma_{v是分支点} d(v)$
        $\geq x + 2(n-x) = 2n-x$, 所以 $x \geq 2$. #
        i. 取大于的原因：分支点的度可能大于2
4. 无向树的计数:
    1) • t_n: n(≥1)阶非同构无向树的个数

2)

- t_n的生成函数(generating function):

  $t(x) = t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \ldots + t_nx^n + \ldots$
- Otter公式:

  $t(x) = r(x) - (r(x)^2 - r(x^2)) / 2$
- r(x)的递推公式:

  $r(x) = x\Pi_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-r_i}$

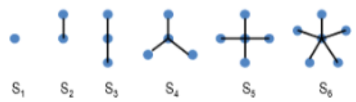
  $r(x) = r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + \ldots + r_nx^n + \ldots$

3)

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48,629	25	104,636,890
2	1	10	106	18	123,867	26	279,793,450
3	1	11	235	19	317,955	27	751,065,460
4	2	12	551	20	823,065	28	2,023,443,032
5	3	13	1,301	21	2,144,505	29	5,469,566,585
6	6	14	3,159	22	5,623,756	30	14,830,871,802
7	11	15	7,741	23	14,828,074	31	40,330,829,030
8	23	16	19,320	24	39,299,897	32	109,972,410,221

5. 星

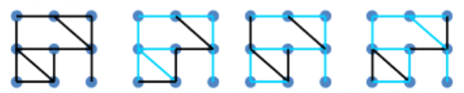
星: $S_n=K_{1,n-1}$

1) 

二. 生成树

1. 生成树、树枝、弦、余树

1)
- 生成树: $T\subseteq G \wedge V(T)=V(G) \wedge T$是树
- 树枝: $e\in E(T)$, n-1条
- 弦: $e\in E(G)-E(T)$, m-n+1条
- 余树: $G[E(G)-E(T)] = \overline{T}$

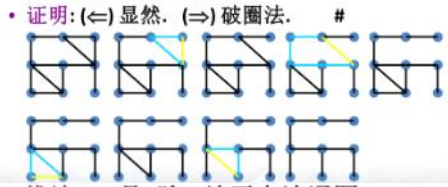
2) 

i. 生成树：是树的生成子图；树枝：生成树的边

ii. 弦：删去的边；余树：弦的集合

2. 定理9.3：连通无向图==有生成树的图

- 无向图G连通 ⇔ G有生成树
- 证明: (⇐) 显然. (⇒) 破圈法. #

1) 

2)
- 推论1: G是n阶m边无向连通图⇒m≥n-1. #
- 推论2: T是n阶m边无向连通图G的生成树 ⇒ $|E(\overline{T})|$=m-n+1. #
- 推论3: T是无向连通图G的生成树, C是G中的圈 ⇒ $|E(\overline{T})|\cap|E(C)|\neq\varnothing$.
- 定理9.13: 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则$E(T)\cap S\neq\varnothing$.

i. 回路必须有弦；割集必须有树枝

ii.
- 证明: (反证) 若$E(\overline{T})\cap E(C)=\varnothing$, 则 $E(C)\subseteq E(T)$, T中有回路C, T是树, 矛盾! #

iii.
- 证明: (反证) 若$E(T)\cap S=\varnothing$, 则 $T\subseteq G-S$,则G-S连通, S是割集, 矛盾! #

3. 破圈法

1) 定理9.4（破圈法的理论支撑）

i.
- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的弦, 则 $T\cup e$中存在由弦e和其他树枝组成的圈, 并且不同的弦对应不同的圈.

- 证明: 设$e=(u,v)$, 设$P(u,v)$是u与v之间在T中的唯一路径, 则$P(u,v)\cup e$是由弦e和其他树枝组成的圈.

ii. 设e_1,e_2是不同的弦,对应的圈是C_{e1},C_{e2}, 则$e_1\in E(C_{e1})-E(C_{e2})$, $e_2\in E(C_{e2})-E(C_{e1})$, 所以$C_{e1}\neq C_{e2}$. #

2) 无圈子图一定是破圈法得到的树的子集
   - 设G是无向连通图, $G'\subseteq G$, G'无圈, 则G中存在生成树T, $G'\subseteq T\subseteq G$.

   i.
   - 证明: 不妨设G有圈C_1(否则G是树, T=G). 则$\exists e_1\in E(C_1)-E(G')$, 令$G_1=G-\{e_1\}$.
     若G_1还有圈C_2, 则$\exists e_2\in E(C_2)-E(G')$,
     令$G_2=G_1-\{e_2\}=G-\{e_1,e_2\}$. 重复进行,
     直到$G_k=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$无圈为止, $T=G_k$. #

4. 定理9.5：树枝和弦可组成割集

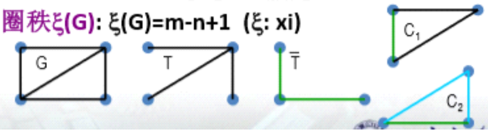
1)
- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的树枝, 则G中存在由树枝e和其他弦组成的割集, 并且不同的树枝对应不同的割集.

i.
- 证明: e是T的桥, 设T-e的两个连通分支是T_1与T_2, 则$E(G)\cap(V(T_1)\&V(T_2))$是由树枝e和其他弦组成的割集.
  设e_1,e_2是不同的树枝,对应的割集是S_{e1},S_{e2}, 则$e_1\in S_{e1}-S_{e2}$, $e_2\in S_{e2}-S_{e1}$, 所以$S_{e1}\neq S_{e2}$.

5. 最小生成树：边权和最小的生成树
   1) Kruskal避圈法
      i. 选权最小的边加入集合，边数i=1
      ii. i==n-1时跳出以下循环：
      iii. 选未加入集合的、不与集合内边构成回路的、权最小的边加入集合
      iv. i++，回到步骤ii

6. 基本回路

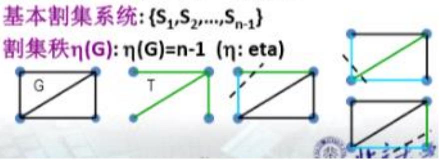
1)
- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $\overline{T}=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{m-n+1}\}$
- 基本回路: $T\cup e'_r$中的唯一回路C_r
- 基本回路系统: $\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$
- 圈秩$\xi(G)$: $\xi(G)=m-n+1$ (ξ: xi)



i. 基本回路：在树上添加弦后得到的回路；基本回路系统：基本回路的集合；圈秩：基本回路系统元素数=弦数=m-n+1

7. 基本割集

1)
- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$
- 基本割集: e_r对应的唯一割集S_r
- 基本割集系统: $\{S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}\}$
- 割集秩$\eta(G)$: $\eta(G)=n-1$ (η: eta)



i. 基本割集：在余树上添加树枝后得到的割集；基本割集系统：基本割集的集合；割集秩：基本割集系统元素数=树枝数=n-1

8. 标定图的生成树的计数

1)
- $\tau(G)$: 标定图G的生成树的个数
- $T_1\neq T_2$: $E(T_1)\neq E(T_2)$
- G-e: 删除(deletion)
- G\e: 收缩(contraction)

2) 定理9.6：计数=删边后计数+缩边后计数

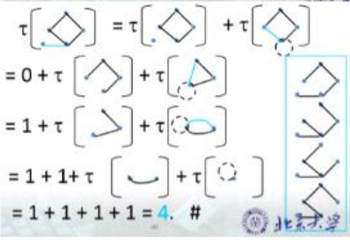
- ∀e非环,

i. $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G\backslash e)$

ii.
- 证明: ∀e非环,

(1) 不含e的G的生成树个数: $\tau(G-e)$,

(2) 含e的G的生成树个数: $\tau(G\backslash e)$. #

iii.


3) 完全图计数Cayley公式

i. $n\geq 2 \Rightarrow \tau(K_n)=n^{n-2}$

9. 定理9.7: 序列和生成树一一对应

1)
- 证明: 令$V(K_n)=\{1,2,\ldots,n\}$, 用V中元素构造长度为(n-2)的序列,有n^{n-2}个不同序列,这些序列与K_n的生成树是一一对应的.

2)
- 证明(续): (1) 由树构造序列:

设T是任意生成树. 令

$k_1=\min\{ r \mid d_T(r)=1 \}$, $N_T(k_1)=\{ \ell_1 \}$,

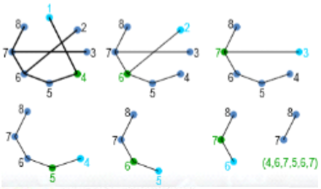
$k_2=\min\{ r \mid d_{T-\{k1\}}(r)=1 \}$, $N_{T-\{k1\}}(k_2)=\{\ell_2 \}$,

......

$k_{n-2}=\min\{ r \mid d_{T-\{k1,k2,\ldots kn-3\}}(r)=1 \}$,

$N_{T-\{k1 ,k2,\ldots kn-3\}}(k_{n-2})=\{\ell_{n-2} \}$,

得到序列 $(\ell_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2})$.

i.


3)
- 证明(续): (2) 由序列构造树:

设$(\ell_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2})$是任意序列. 令

$k_1=\min\{ r \mid r\in V-\{\ell_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2}\} \}$,

$k_2=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2}\} \}$,

...... $k_{n-2}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3}, \ell_{n-2}\} \}$,

$k_{n-1}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2}\} \}$,

$l_{n-1}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2},k_{n-1}\} \}$.

$E(T)=\{ (k_i, \ell_i) \mid i=1,2,\ldots,n-1\}$.

i.
- (3,2,7,8,2,5)
- $k_1=\min(V-\{3,2,7,8,2,5\})=\min\{1,4,6\}=1$,

$k_2=\min(V-\{1,2,7,8,2,5\})=\min\{3,4,6\}=3$,

$k_3=\min(V-\{1,3,7,8,2,5\})=\min\{4,6\}=4$,

$k_4=\min(V-\{1,3,4,8,2,5\})=\min\{6,7\}=6$,

$k_5=\min(V-\{1,3,4,6,2,5\})=\min\{7,8\}=7$,

$k_6=\min(V-\{1,3,4,6,7,5\})=\min\{2,8\}=2$,

$k_7=\min(V-\{1,3,4,6,7,2\})=\min\{5,8\}=5$,

$\ell_7=\min(V-\{1,3,4,6,7,2,5\})=\min\{8\}=8$

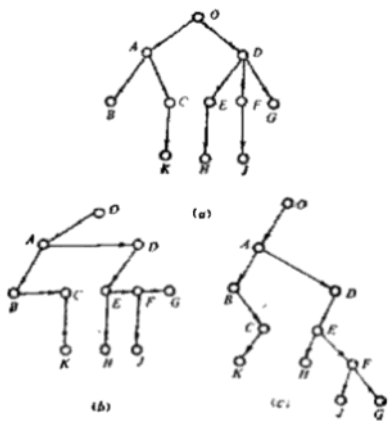
4)
- (3,2,7,8,2,5)
- (1,3,4,6,7,2,5)

(3,2,7,8,2,5,8)

5)
- 可以证明上述(1)和(2)建立的对应关系是双射: 每个树都得出序列, 每个序列都得出树; 由不同的树得出不同的序列, 由不同的序列得出不同的树. #

- ## 根树及其应用

三. 根树

1. 有向树：不考虑边的方向时是树的有向图
2. 根树root tree：只有一个结点入度为0、其他结点入度为1的有向树
    1) 根：入度为0的结点
    2) 树叶：出度为0的结点
    3) 分枝点/内点：不是树叶的点
3. 子根树：原树的某个结点作为根，其他结点被分成有限个子根树
    1) 指明结点或边的次序的根树是有序树
    2) a向b有边，称b为a的儿子；a为b的父亲
    3) a到c有通路，称c为a的后裔；a为c的祖先
    4) 同一分枝点的不同儿子为兄弟
4. m叉树：点出度<=m的树
    1) 完全m叉树：出度=m或为零的树
    2) 正则m叉树：树叶层次相同的m叉树
    3) 任一有序树都可改写为有序二叉树：
        i. 除最左的儿子外，都断绝父子关系
        ii. 将原兄弟结点用从左到右的有向边连接
        iii. 修改层次关系
        iv. 可推广至有序森林合成二叉树
        v. 
5. 定理：完全m叉树(m-1)i=t-1，t为树叶数，i为分枝点数
    1) 证：树叶数t对应选手数，分枝点数i对应比赛局数
    2) 一局比赛淘汰m-1个选手，最后剩下一个冠军选手

四. 最优树

1. 结点通路长度：从树根到结点的通路的边数
    1) 内部通路长度：分枝点的结点通路长度
    2) 外部通路长度：树叶的结点通路长度
2. 定理：完全二叉树E=I+2n，E是外部通路总和，I是内部通路总和，n是分枝点数
    1) 归纳证明：n=1时，E=0+2
    2) 假设n=k-1时，E=I+2k-2
    3) n=k时，删去一个分枝点即可利用假设，设删去点的内部通路为l，则I-=l，而E-=(2*l+2)，代入假设，得证
3. 最优树：树权w最小的带权二叉树

1) 树权：树叶权w乘以树叶通路长度L的总和

4. 定理：最优树最小两个权的树叶是兄弟；他们的通路长度最长

    1) 证明 设在带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优树中，v 是通路长度最长的分枝点，v 的儿子分别带权 w_x 和 w_y，故有

    $$L(w_x)\geqslant L(w_1)$$
    $$L(w_y)\geqslant L(w_2)$$

    若 $L(w_x)>L(w_1)$，将 w_x 与 w_1 对调，得到新树 T'，则

    $$\begin{aligned} w(T')-w(T) &= (L(w_x)\cdot w_1+L(w_1)\cdot w_x) \\ &\quad -(L(w_x)\cdot w_x+L(w_1)\cdot w_1) \\ &= L(w_x)(w_1-w_x)+L(w_1)(w_x-w_1) \\ &= (w_x-w_1)(L(w_1)-L(w_x))<0 \end{aligned}$$

    即 $w(T')<w(T)$，与 T 是最优树的假定矛盾。故 $L(w_x)=L(w_1)$。

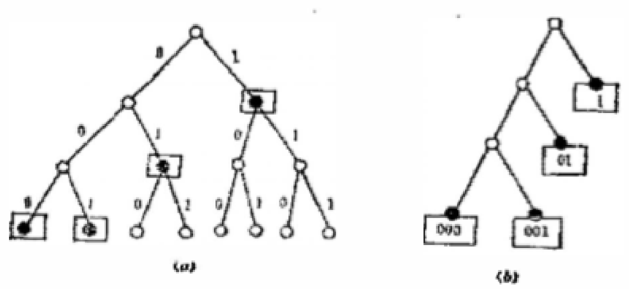
    同理可证 $L(w_y)=L(w_2)$。因此

    $$L(w_1)=L(w_2)=L(w_x)=L(w_y)$$

    分别将 w_1, w_2 与 w_x, w_y 对调得到一棵最优树，其中带权 w_1 和 w_2 的树叶是兄弟。□

5. 定理：将带最小权兄弟的父亲分枝点改为带该兄弟权之和的树叶，得到新最优树
    1) 证明：新树权与原最优树相同，假设存在更优树，则原最优树不最优，矛盾
    2) 应用：最小两个权可合并成一个权，考虑树时可递归简化

五. 前缀码

1. 前缀码：没有一个序列是另一个序列前缀的序列集合
    1) 如：{000，001，01，10，11}是前缀码，{1，00，001}不是
    2) 如果译出信息不能成为前缀码的序列，可约定不断添加0或1，直至能译出
2. 定理：任一二叉树的树叶可对应前缀码
    1) 左儿子标0，右二子标1，通路序列即为前缀码
3. 定理：任一前缀码可对应二叉树
    1) 

        i.
        ii.
        iii.
        iv.
        v.
        vi.
        vii.
        viii. ------我是底线---------