矩阵表示

2018年10月30日　　13:01

● 图的矩阵表示

一. 有向图的邻接矩阵和可达矩阵

1) 有向图点与点的关系常译作邻接

1. 有向图邻接矩阵adjacence matrix

1)
- 设$D=<V,E>$是有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
- 邻接矩阵(adjacence matrix): $A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$,
  a_{ij} = 从v_i到v_j的边数

2) 可以表示环和平行边

3)
- 每行和为出度: $\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=d^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d^-(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d^-(v_j)=m$
- 环个数: $\Sigma^n_{i=1}a_{ii}$

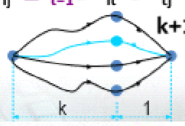
4) 交换部分行后再对应地交换部分列，得到的新方阵是置换等价的

2. 有向图邻接矩阵与通路数

1)
- 设$A(D)=A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,
  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理4: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数且
  $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a^{(r)}_{ij}$=长度为r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数

2)
- 推论: $b^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度≤r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}b^{(r)}_{ij}$=长度≤r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}b^{(r)}_{ii}$=长度≤r的回路总数. #

i.
- 证明: (归纳法) (1)r=1: $a^{(1)}_{ij}=a_{ij}$, 结论显然.
  (2) 设r≤k时结论成立, 当r=k+1时,
  $a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$最后经过$v_t$的长度为k+1的通路总数,
  $a^{(k+1)}_{ij}=\Sigma^n_{t=1}a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$的长度为k+1的通路总数. #



3)
- v_2到v_4长度为3和4的通路数: 1, 2
- v_2到v_4长度≤4的通路数: 4
- v_4到v_4长度为4的回路数: 5
- v_4到v_4长度≤4的回路数: 11

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&\boxed{2}\\0&0&2&3\\0&0&3&\boxed{5}\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&\boxed{4}\\0&0&4&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

4)

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

3. 可达矩阵reachability matrix

1)
- 设D=<V,E>是有向图,V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$},
- 可达矩阵: $P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

2)
- 主对角线元素都是1: $\forall v_i\in V$, 从v_i可达v_i
- 强连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i\neq j$, $p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij}>0$

$$P(D)=\begin{bmatrix}P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k)\end{bmatrix}$$

   i. 可达，即有长度n-1或更短的通路

3) 计算方法：warshall算法求B+，非零项改成1，**主对角线改成1**

二. 无向图的相邻矩阵和连通矩阵

1) 无向图点与点的关系常译作相邻

1. 无向图相邻矩阵adjacence matrix

1)
- 设G=<V,E>是无向简单图,V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$}
- 相邻矩阵(adjacence matrix): $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$,

$a_{ii}=0$,

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻},i\neq j\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$

2)
- A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$
- 每行(列)和为顶点度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d(v_i)=2m$

3) 无向图的adjacence matrix一定对称，有向图不一定

2. 无向图相邻矩阵与通路数

1)
- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,
  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理10.5: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数. #
- 推论1: $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$. #
- 推论2: G连通⇒距离$d(v_i,v_j)=\min\{r\mid a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$.

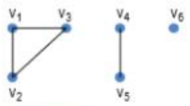
3. 连通矩阵connectivity matrix

1)
- 设G=<V,E>是无向简单图,
  V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$},
- 连通矩阵: $P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{连通}\\ 0, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{不连通}\end{cases}$$

2)
- 主对角线元素都是1: $\forall v_i\in V$, v_i与v_i连通
- 连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设$B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, 则$\forall i\neq j$, $p_{ij}=1\Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij}>0$

3)



$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

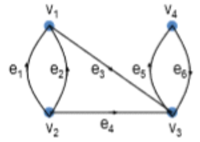
三. （完全）关联矩阵incidence matrix

1) 点与边的关系称为关联
2) 关联矩阵不能表示环，因此有环图无法定义关联矩阵

1. 有向图关联矩阵
   1)
      - 设$D=<V,E>$是无环有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
      - 关联矩阵(incidence matrix)：$M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}$，

      $$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

   2)

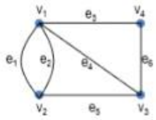
      $$M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

   3)
      - 每列和为零：$\Sigma^n_{i=1}m_{ij}=0$
      - 每行绝对值和为$d(v)$：$d(v_i)=\Sigma^m_{j=1}m_{ij}$，
        其中 1的个数为$d^+(v)$，
        -1的个数为$d^-(v)$
      - 握手定理：$\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=0$
      - 平行边：相同两列

2. 无向图关联矩阵
   1)
      - 设$G=<V,E>$是无环无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
      - 关联矩阵(incidence matrix)：$M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}$，

      $$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}e_j\text{关联}\\ 0, & v_i\text{不与}e_j\text{关联}\end{cases}$$

   2)

      $$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

   3)
      - 每列和为2：$\Sigma^n_{i=1}m_{ij}=2$ ($\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=2m$)
      - 每行和为$d(v)$：$d(v_i)=\Sigma^m_{j=1}m_{ij}$
      - 每行所有1对应的边构成断集：$[\{v_i\},\overline{\{v_i\}}]$
      - 平行边：相同两列
      - 伪对角阵：对角块是连通分支

      $$M(G)=\begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_w) \end{bmatrix}$$

      i. 断集不一定是割集，而且不一定极小

3. 定理10.1:**连通图关联矩阵秩=n-1**
   1) 做行加法不改变矩阵秩，关联矩阵行变换一定能通过把其他行都加上某一行，使该行变为全0，因此秩<=n-1
   2) 做列交换和行交换不改变矩阵秩，而连通图至少有n-1条边，所以一定能交换出对角线为1的n-1行子阵，因此秩>=n-1
   3) 综上，夹逼得出秩=n-1
   4) 推论：任意n阶图关联矩阵**秩=n-w，w为最大连通子图数**

4. 无向图基本关联矩阵

1)
- 设$G=<V,E>$是无环无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 参考点: 任意1个顶点
- 基本关联矩阵(fundamental incidence matrix): 从$M(G)$删除参考点对应的行, 记作$M_f(G)$

2)
- 定理10.2: G连通$\Rightarrow r(M_f(G))=n-1$. #

    i.
    - 推论1:
      G有p个连通分支$\Rightarrow r(M_f(G))=n-p$,
      其中$M_f(G)$是从$M(G)$的每个对角块中删除任意1行而得到的. #

        a) 不连通矩阵要把连通分支（行变换）放进对角块，从块中删

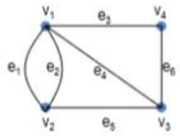
3) G连通$\Leftrightarrow r(M(G))=r(M_f(G))=n-1$.

5. 无向图基本关联矩阵与生成树

1)
- 定理10.3: G连通,
  M'_f是$M_f(G)$中任意n-1列组成的方阵,
  M'_f中各列对应的边集是$\{e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{i(n-1)}\}$,
  T是导出子图$G[\{e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{i(n-1)}\}]$, 则
  T是G的生成树$\Leftrightarrow M'_f$的行列式$|M'_f|\neq 0$.

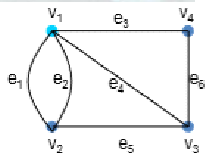
    i. 即n-1条边对应的矩阵满秩（因为行列式为零，说明不连通或有回）

    ii.



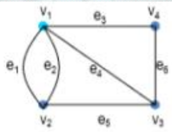
$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

    iii.



$$M_f(G)=\begin{array}{c} \\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

    iv.



$$M_f(G)=\begin{array}{c} \\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

1,2,3	0	2,3,4	1
1,2,4	0	2,3,5	1
1,2,5	0	2,3,6	1
1,2,6	0	2,4,5	0
1,3,4	1	2,4,6	1
1,3,5	1	2,5,6	1
1,3,6	1	3,4,5	1
1,4,5	0	3,4,6	0
1,4,6	1	3,5,6	1
1,5,6	1	4,5,6	1

    v.
    vi.
    vii.
    viii.
    ix.
    x.
    xi. -----------我是底线----------