关系表示、性质、复合、逆

2018年9月9日 10:19

● 关系及其表示

一. 关系relation

1. (二元)关系: 元素全是序偶的集合

 • 设F是二元关系, 则

 $<x,y>\in F \Leftrightarrow$ x与y具有F关系 $\Leftrightarrow$ xFy

 1) • 对比: xFy (中缀(infix)记号)

 F(x,y), Fxy (前缀(prefix)记号)

 $<x,y>\in F$, xyF (后缀(suffix)记号)

 • 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow <2,15>\in <$.

 2) n元关系: 元素全是有序n元组的集合

2. A到B的二元关系: AXB的任意子集

 R是A到B的二元关系

 $\Leftrightarrow R\subseteq A\times B \Leftrightarrow R\in P(A\times B)$

 1) • 若$|A|=m, |B|=n$, 则$|A\times B|=mn$, 故

 $|P(A\times B)|=2^{mn}$

 即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

 2) 定理：A到B的关系的并交补差都是A到B的关系

3. A上的二元关系: AXA的任意子集

 R是A上的二元关系

 $\Leftrightarrow R\subseteq A\times A \Leftrightarrow R\in P(A\times A)$

 1) • 若$|A|=m$, 则$|A\times A|=m^2$, 故

 $|P(A\times A)|= 2^{m^2}$

 即A上不同的二元关系共有 2^{m^2}个

4. 定义域/前域dom、值域ran、域FLD

 对任意集合R, 可以定义:

 • 定义域(domain):

 $\mathrm{dom}\ R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$

 1) • 值域(range):

 $\mathrm{ran}\ R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$

 • 域(field):

 $\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$

5. 一些特殊关系

 1) 空、恒等、全域

 设A是任意集合, 则可以定义A上的:

 • 空关系: $\varnothing$

 i. • 恒等关系: $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$

 • 全域关系:

 $E_A=A\times A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}$

 2) 整除

 • 整除关系:

 i. $D_A = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x|y \}$

 3) 大/小于（等于）

i.
- 小于等于(less than or equal to)关系:
  $LE_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x\le y \}$
- 小于(less than)关系,
  $L_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x<y \}$
- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系,...

4) 包含、真包含

i.
- 包含关系:
  $\subseteq_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subseteq y \}$
- 真包含关系:
  $\subset_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subset y \}$

6. 限制、象

1) 对任意集合F,A, 可以定义:
- 限制(restriction):
  $F\upharpoonright A = \{ \langle x,y\rangle \mid xFy \wedge x\in A \}$
- 象(image):
  $F[A] = ran(F\upharpoonright A)$
  $F[A] = \{ y \mid \exists x(x\in A \wedge xFy) \}$

2) 限制也可写作|→
3) 限制就是A定义域上的F关系
4) 如想要A值域上的F，可用F逆 |→A

7. 单根

1) 对任意集合F, 可以定义:
- 单根(single rooted): F是单根的⇔
  $\forall y(y\in ran\, F \rightarrow \exists! x(x\in dom\, F \wedge xFy))$
  $\Leftrightarrow (\forall y\in ran\, F)(\exists! x\in dom\, F)(xFy)$
- ∃!表示“存在唯一的”
- $\forall x(x\in A\rightarrow B(x))$缩写为$(\forall x\in A)B(x)$
- $\exists x(x\in A \wedge B(x))$缩写为$(\exists x\in A)B(x)$

2) 单根即F关系中每个y只能找到一个对应x

8. 单值

1) 对任意集合F, 可以定义:
- 单值(single valued): F是单值的⇔
  $\forall x(x\in dom\, F \rightarrow \exists! y(y\in ran\, F \wedge xFy))$
  $\Leftrightarrow (\forall x\in dom\, F)(\exists! y\in ran\, F)(xFy)$

2) 单值是F可成为函数的必要条件

二. 关系表示

1. 关系矩阵

1)
- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$
- R的关系矩阵

2) $$M(R)(i,\ j) = r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

2. 关系图

1)
- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$
- R的关系图 G(R)
  - 以“o”表示A中元素(称为顶点), 以“→”表示R中元素(称为有向边)
  - 若a_iRa_j, 则从顶点a_i向顶点a_j引有向边$\langle a_i,a_j\rangle$

3. 互相转化的一些默认规则

1) 前域和值域不相等时才可以把顶点分成两部分来画关系图

2)
- 当A中元素标定次序后, 对于$R\subseteq A\times A$
  - G(R)与R的集合表达式可唯一互相确定
  - R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可唯一互相确定

3)
- 对于$R\subseteq A\times B$
  - $|A|=n$, $|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n\times m$阶
  - G(R)中边都是从A中元素指向B中元素

- 关系的性质

三. 性质

1. 自反性(reflexivity)

1)
- $R \subseteq A \times A$
- R是自反的 ⇔
  $\forall x(x \in A \to xRx)$
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)xRx$
- R是非自反的 ⇔ $\exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

   i. 自反的图：每个点都有一个环指回自己

2)
- 定理2.10:
  R是自反的
  ⇔ $I_A \subseteq R$
  ⇔ R^{-1}是自反的
  ⇔ M(R)主对角线上的元素全为1
  ⇔ G(R)的每个顶点处均有环. #

2. 反自反性(irreflexivity)

1)
- $R \subseteq A \times A$
- R是反自反的 ⇔
  $\forall x(x \in A \to \neg xRx)$
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg xRx$
- R是非反自反的 ⇔ $\exists x(x \in A \wedge xRx)$

   i. 反自反的图：每个点都没有环指回自己

2)
- 定理2.11:
  R是反自反的
  ⇔ $I_A \cap R = \varnothing$
  ⇔ R^{-1}是反自反的
  ⇔ M(R)主对角线上的元素全为0
  ⇔ G(R)的每个顶点处均无环. #

3) 自反且反自反说明是空集/空关系；图、矩阵是空

3. 对称性(symmetry)

1)
- $R \subseteq A \times A$
- R是对称的 ⇔
  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \to yRx)$
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \to yRx]$
- R是非对称的 ⇔
  $\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

   i. 对称的图：两不同点间要么有平行边要么没边

2)
- 定理2.12:
  R是对称的
  ⇔ $R^{-1}=R$
  ⇔ R^{-1}是对称的
  ⇔ M(R)是对称的
  ⇔ G(R)的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

4. 反对称性(antisymmetry)

1)
- $R \subseteq A \times A$
- R是反对称的 ⇔
  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \to x=y)$
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \wedge yRx \to x=y]$
- R非反对称 ⇔
  $\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

   i. 反对称的图：只有自带环的点，没有两边连接相同两点

ii. 不同两点间没有边时，既满足对称的条件，又满足反对称条件，所以对称是都1和都0，共2种情况，反对称是除了都1就行，共3种情况

2)
- 定理2.13:

  R是反对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1}\cap R\subseteq I_A$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中,$\forall i\forall j(i\neq j\wedge r_{ij}=1\rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i\forall a_j(i\neq j)$,若有有向边$<a_i,a_j>$, 则必没有$<a_j,a_i>$. #

3) 对称且反对称：恒等关系的子集（包括空关系）；图：任两点间没边，可以有环；矩阵：只有对角线可以有1

5. 传递性(transitivity)
   1) **单序偶集合都是传递关系**
   2)
      - $R\subseteq A\times A$
      - R是传递的 $\Leftrightarrow$

        $\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$

        $\Leftrightarrow(\forall x\in A)(\forall y\in A)(\forall z\in A)[xRy\wedge yRz\rightarrow xRz]$
      - R非传递 $\Leftrightarrow$

        $\exists x\exists y\exists z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\wedge\neg xRz)$

      i. 传递性的图：每对可分两步连通的点都可一步连通
   3)
      - 定理2.14:

        R是传递的

        $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R \Leftrightarrow R^{-1}$是传递的

        $\Leftrightarrow \forall i\forall j,\ M(R\circ R)(i,j)\leq M(R)(i,j)$

        $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i\forall a_j\forall a_k$, 若有有向边$<a_i,a_j>$和$<a_j,a_k>$, 则必有有向边$<a_i,a_k>$.
6. 常见关系：
   1)
      - $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
      - $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
      - $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
      - $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
      - $|=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递($\neg 0|0$)
      - $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
      - $E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递.
   2) 零不能整除零，此处的整除关系默认被除数不是零
   3) 百度的说法：空集的空关系是自反、反自反、对象、反对称、传递的；非空集的空关系是反自反、对称、反对称、传递的
7. 关于性质能否在运算后一定保留：
   1)
      - **定理2.15: $R_1,R_2\subseteq A\times A$**

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√(4)	√
$R_1\cup R_2$	√	√	√		
$R_1\cap R_2$	√	√(2)	√	√	√(5)
$R_1\circ R_2, R_2\circ R_1$	√(1)				
R_1-R_2, R_2-R_1		√	√(3)	√	
$\sim R_1,\sim R_2$			√(3')		

i.
- R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1 o R_2$自反
- 证明: $\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow xR_2x \wedge xR_1x$

$\Rightarrow xR_1oR_2x$

$\therefore R_1,R_2$自反 $\Rightarrow R_1oR_2$自反.

ii.
- R_1,R_2反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$反自反
- 证明: (反证) 若$R_1 \cap R_2$非反自反, 则 $\exists x \in A$,

$x(R_1 \cap R_2)x$

$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore R_1,R_2$反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$反自反. #

iii.
- R_1,R_2对称 $\Rightarrow R_1-R_2$对称
- 证明: $\forall x,y \in A$,

$x(R_1-R_2)y$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$

$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x$

$\Leftrightarrow y(R_1-R_2)x$

$\therefore R_1,R_2$对称 $\Rightarrow R_1-R_2$对称.

1)
- R_1对称 $\Rightarrow \sim R_1$对称
- 证明: $\forall x,y \in A$,

$x(\sim R_1)y$

$\Leftrightarrow x(E_A-R_1)y \Leftrightarrow xE_Ay \wedge \neg xR_1y$

$\Leftrightarrow yE_Ax \wedge \neg yR_1x \Leftrightarrow y(E_A-R_1)x$

$\Leftrightarrow y(\sim R_1)x$

$\therefore R_1$对称 $\Rightarrow \sim R_1$对称. #

iv.
- R_1反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$反对称
- 证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则 $\exists x,y \in A$,

$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$

$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore R_1$反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$反对称. #

v.
- R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$传递
- 证明: $\forall x,y,z \in A$,

$x(R_1 \cap R_2)y \wedge y(R_1 \cap R_2)z$

$\Leftrightarrow (xR_1y \wedge xR_2y) \wedge (yR_1z \wedge yR_2z)$

$\Leftrightarrow (xR_1y \wedge yR_1z) \wedge (xR_2y \wedge yR_2z)$

$\Rightarrow xR_1z \wedge xR_2z \Leftrightarrow x(R_1 \cap R_2)z$

$\therefore R_1,R_2$传递 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$传递. #

- 复合关系和逆关系

四. 逆、复合、幂

1. 逆inverse
   i. $F^{-1} = \{ <x,y> \mid yFx \}$
   ii. 教材上是记作右上角写c
   iii. 例: (AxB)的逆是BxA
2. 复合/合成composite

1)
- 顺序合成(右合成):

$FoG = \{ <x,y> \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$

- 逆序合成(左合成):

$FoG = \{ <x,y> \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$

i. $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$

ii. 教材上默认复合的是上面的：顺序复合/右合成

iii. $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$

iv. 而之后的函数中默认的顺序是上面的：逆序复合/左合成

2)
- 集合表达式与关系矩阵可唯一相互确定
- $M(R^{-1})=(M(R))^T$
  - ^{T}表示矩阵转置
- $M(R_1 \circ R_2)=M(R_2) \bullet M(R_1)$
  - $\bullet$表示矩阵的“逻辑乘”，加法用$\vee$，乘法用$\wedge$

i. 即逆关系的矩阵是矩阵的转置，复合关系的矩阵是矩阵的乘积

ii. 矩阵逻辑乘：正常的矩阵乘法中，乘法改成逻辑与，加法改成逻辑或

3. 幂运算power

- $R \subseteq A \times A$, $n \in N$

1.
$$\begin{cases} R^0 = I_A \\ R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

i. R_1 是 R 自 己，R_0是恒等关系

- 显然$R^n \subseteq A \times A$, $n \in N$

2.
$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n个R}$$

i. AxA元素个数是有限的，一般到了某个n以后会循环，详见传递闭包

3.
定理2. 17 设 $R \subseteq A \times A$, $m,n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$； (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 给定m, 对n归纳.

n=0时，$R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则 $R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R^1)$

$= (R^m \circ R^n) \circ R^1 = R^{m+n} \circ R = R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

(2) 可类似证明. #

4. 复合运算结合律（此处证明的是逆序左复合，与教材默认的相反）

- 设R_1,R_2,R_3为集合, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

i.
证明: $\forall \langle x,y \rangle$, $\langle x,y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge z(R_1 \circ R_2)y)$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge \exists t(zR_2t \wedge tR_1y))$

$\Leftrightarrow \exists z \exists t(xR_3z \wedge (zR_2t \wedge tR_1y))$

$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists t(\exists z(xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists t(x(R_2 \circ R_3)t \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$. #

5. 复合运算求逆的逆穿脱（无论左右复合都是要颠倒FG次序的）

i. 定理2.7 设F,G为二集合, 则 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明 $\forall\langle x,y\rangle$,

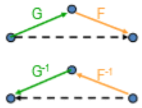
$\langle x,y\rangle\in(F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle\in(F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists z(yGz\wedge zFx)$

$\Leftrightarrow \exists z(zG^{-1}y\wedge xF^{-1}z)$

$\Leftrightarrow \exists z(xF^{-1}z\wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in G^{-1}\circ F^{-1}$. #



6. **并、交、补、差集的逆可以直接穿脱**（R补视作AxB-R）
7. **R=R逆 ⇔ R是对称的**
8. **R∩R逆 ⊆ 恒等关系 ⇔ R是反对称的**
9. R逆的逆 是 R 自 己
    i.
    ii.
    iii.
    iv.
    v.
    vi.
    vii.
    viii. ------我是底线---------