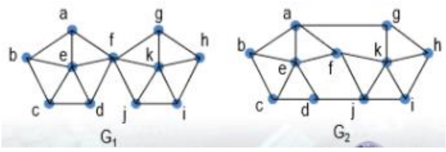
连通度

2018年10月25日 15:00

● 无向图的连通度

一. 连通度connectivity、割集cut set

1. 连通度主观理解：为破坏连通性至少需要删除的顶点数/边数
   1) 破坏连通性：连通分支数增加，即：
      i. – $p(G-V') > p(G)$
         – $p(G-E') > p(G)$
   2) 特例：平凡图有连通性，n阶完全图删去n-1个点成为平凡图后仍有连通性，但一般规定，**n阶完全图连通度为n-1**
2. 点割集：$G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing \neq V' \subset V$, (1) $p(G-V')>p(G)$;
   (2) $\forall V'' \subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$ (极小性条件)
   1) 数量极小的一组顶点，删除后使连通分支数增加
   2) **极小**：这组点少删任何一个都不能使连通分支数增加
   3) 不可以是全部点
3. 割点：自成一点割集的点
   1) v是割点 ⇔ {v}是割集
      例：G_1中f是割点，G_2中无割点
   2) 

4. • 边割集：$G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing \neq E' \subset E$, (1) $p(G-E')>p(G)$;
   (2) $\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$ (极小性条件)
   1) 引理1
      i. • 设E′是边割集，则$p(G-E')=p(G)+1$.
         • 证：如果$p(G-E')>p(G)+1$，
         则E′不是边割集，因为不满足定义中的极小性. #
         • 注：点割集无此性质
      ii. **边割集只能让连通分支数加一**，点割集可能加很多
5. 割边/桥：自成一边割集的边
6. 扇形割集：有公共顶点的边割集
   1) • $I_G(v)$不一定是边割集(不一定极小)
      • $I_G(v)$是边割集 ⇔ v不是割点
      
      • 扇形割集：边割集$E' \subseteq I_G(v)$
   2) 此处IG是指某点的关联集，扇形割集是其子集，即有公共顶点的边割集
7. 重新定义点连通度
   1) • G是无向连通非完全图，
      $\kappa(G) = \min\{\ |V'|\ \mid V'是G的点割集\ \}$

2) • 规定: $\kappa(K_n) = n-1$
G非连通: $\kappa(G)=0$
(平凡图N_1连通, 但$\kappa(N_1) = \kappa(K_1) = 0$)
    i. 即κ不连通图=0，κ1阶图=0
    ii. 然而一阶图定义为连通，所以**点连通度=0是不连通的必要条件**

8. 重新定义边连通度
    1) • G是无向连通图,
    $\lambda(G) = \min\{\ |E'|\ \mid E'\text{是G的边割集}\ \}$
    2) • 规定: G非连通: $\lambda(G)=0$

二. Whitney定理

1. 引理2
    1) • 设E'是非完全图G的最小边割集,
    G-E'的两个(引理1)连通分支是G_1,G_2,
    则存在$u\in V(G_1)$, $v\in V(G_2)$, 使得$(u,v)\notin E(G)$.
        i. 即用边割集破坏连通性以后，（非完全图的）原图的**补图的边所连的点可能分别在两个连通分支**
        ii. 是找最小边割集的一个方法
        iii. • 证: (反证) 否则
        $\lambda(G) = |E'| = |V(G_1)|\times|V(G_2)|$
        $\geq |V(G_1)|+|V(G_2)|-1=n-1$,
        与G非完全图相矛盾! #
            1) • $a\geq1 \wedge b\geq1 \Rightarrow (a-1)(b-1)\geq 0$
            $\Leftrightarrow ab-a-b+1\geq 0 \Leftrightarrow ab\geq a+b-1$.
2. k-连通图、k-边连通图
    1) • k-连通图: $\kappa(G)\geq k$
    • K-边连通图: $\lambda(G)\geq k$
    2) 即删掉k-1个点/边仍能连通的图
    3) 例：彼得森图κ=λ=3，是1、2、3-（边）连通图，不是4-（边）连通图
3. 定理：3-正则图的点连通度=边连通度
4. (Whitney不等式)：
    1) $\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$.
        i. 即：**点连通度<=边连通度<=最小度**
        • 第一部分: $\lambda\leq\delta$
        ii. • 证明: 设 $d_G(v) = \delta$.
        $I_G(v) = \{\ (u,v) \mid (u,v)\in E(G)\ \}$
        则必有扇形边割集$S\subseteq I_G(v)$,
        所以, $\lambda\leq|S|\leq|I_G(v)| = \delta$.
        iii. 扇形割集必能破坏至少一个点的连通性，其边数小于等于最小度
        • 第二部分: $\kappa\leq\lambda$
        iv. • 证明: 设边割集E'满足$|E'|=\lambda$.
        根据引理1和引理2,
        设G-E'的两个连通分支是G_1和G_2,
        设$u\in V(G_1)$,$v\in V(G_2)$,使得$(u,v)\notin E(G)$.
        v. 高阶非完全图找到引理2的两个点，删除这两点以外的、所有由边割集所连的

点，即删除了边割集。其他特殊情况易知恒成立

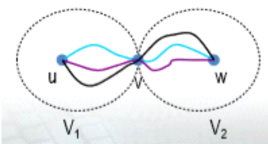
vi.
- 如下构造V”：对任何$e \in E'$，
选择e的异于u,v的一个端点放入V”.
则 $u,v \in G-V'' \subseteq G-E' = G_1 \cup G_2$,
所以 V”中含有点割集V’.
故 $\kappa \le |V'| \le |V''| \le |E'| = \lambda$. #

2) • 推论：k-连通图一定是k-边连通图.

三. 割的充要条件

1. 割点：

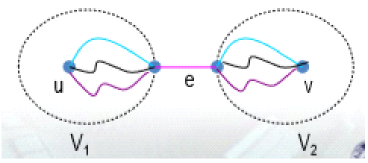
1)
- 定理7.17:
无向连通图G中顶点v是割点
⇔ 可把V(G)-{v}划分成V_1与V_2，使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点w的路径都要经过v.

2) 

3)
- 推论：无向连通图G中顶点v是割点
⇔ 存在与v不同的顶点u和w，使得从顶点u到w的路径都要经过v. #

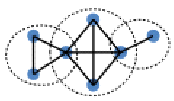
2. 割边：

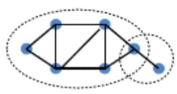
1)
- 定理7.18-19：无向连通图G中边e是桥
⇔ G的任何圈都不经过e
⇔ 可把V(G)划分成V_1与V_2，使得从V_1中 任意顶点u到V_2中任意顶点v的路径都要经过e. #

2) 

3) 推论：**桥的两端都是割点或孤立点**

3. 块：极大无割点连通子图

1) 

2) 

3)
- 定理7.20：G是3阶以上无向简单连通图. 则G是块
⇔ G中任意2顶点共圈 ⇔ G中任意1顶点与任意1边共圈 ⇔ G中任意2边共圈 ⇔ G中任意2顶点与任意1边，有路径连接这2顶点并经过这1边 ⇔ G中任意3顶点，有路径连接其中2顶点并经过第3点⇔G中任意3顶点，有路径连接其中2顶点并不经过第3点. #

4)
- 块：极大无割点连通子图
- 2-连通图：$\kappa \ge 2$，即连通无割点图
- 2-边连通图：$\lambda \ge 2$，即连通无桥图
- 2-连通 ⊂ 2-边连通 （可能 $\kappa < \lambda$）
- 2-连通 ⊂ 块 （K_2是块，不是2-连通）
- 块 ≠ 2-边连通（K_2是块，不是2-边连通；8字形图是2-边连通，不是块）

四. Menger定理

1. x-y割：删去后能让点x和y不连通的一组点

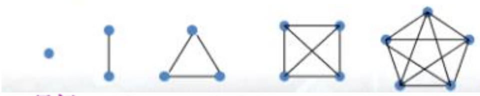
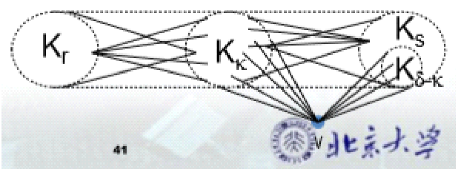
1) • 如果 x,y是G中不相邻顶点，
$S \subseteq V(G) - \{x,y\}$，
在G-S中x与y不连通，
则 S称为G中的x-y割

2. 两点间独立路径：除起点和终点外无其他公共顶点的路径
3. Menger定理/最小-最大(min-max)定理：
   1) • 定理(Menger,1927)：在图G中，
   最小的x-y割包含的顶点数
   = 最大的x-y独立路径的条数. #

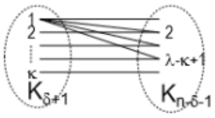
五. 连通充要条件

1. • 定理7.15: 3阶以上无向简单连通图G是2-连通图
   ⇔ G中任两顶点共圈
   ⇔ G中任两顶点之间有2条以上独立路径. #
2. 边不交路径：两条无公共边(但可能有公共顶点)的路径
   1) 
3. • 定理7.16:
   3阶以上无向图G是2-边连通图
   ⇔ G中任2顶点共简单回路
   ⇔ G中任2顶点间有2条以上边不交路径. #
   1) 简单回路：无重复边的回路
4. • 定理：3阶以上无向图G是k-连通图
   ⇔ G中任2顶点间有k条以上独立路径. #
   • 定理：3阶以上无向图G是k-边连通图
   ⇔ G中任2顶点间有k条以上边不交路径. #

六. 其他定理

1. • n阶简单连通图的κ,λ,δ之间关系有且仅有3种可能:
   (1) $\kappa = \lambda = \delta = n\text{-}1$
   (2) $1 \le 2\delta\text{-}n\text{+}2 \le \kappa \le \lambda = \delta \le n\text{-}2$
   (3) $0 \le \kappa \le \lambda \le \delta < \lfloor n/2 \rfloor$
   • 注：$1 \le 2\delta\text{-}n\text{+}2 \Leftrightarrow (n\text{-}1)/2 \le \delta$
   $\Leftrightarrow \lfloor n/2 \rfloor \le \delta$
   1) • 目标：(有)：(1) $\kappa = \lambda = \delta = n\text{-}1$.
   • 构造：令 $G = K_n$即可.
   • 注意：非连通图 ⇒ $\kappa=\lambda=0$
   但是K_1连通，$\kappa(K_1)=\lambda(K_1)=\delta(K_1)=0$
   
   2) • 目标：$1 \le 2\delta\text{-}n\text{+}2 \le \kappa \le \lambda = \delta \le n\text{-}2$
   • 构造：令$r = \lfloor(n\text{-}\kappa)/2\rfloor$, $s = \lfloor(n\text{-}\kappa\text{-}1)/2\rfloor$,
   $r+s = n\text{-}\kappa\text{-}1$. 令$G' = K_\kappa + (K_r \cup K_s)$. 给G'增加顶点v，使得v与$K_\kappa$中所有顶点相邻，与$K_s$中$\delta\text{-}\kappa$个顶点相邻，就得到G.
   • 分析：$\delta(G)=\delta$:
   K_κ: $d(u) = \kappa\text{-}1\text{+}r\text{+}s\text{+}1 = n\text{-}1 \ge \delta$,
   K_r: $d(u) = r\text{-}1\text{+}\kappa \ge \delta$,
   K_s: $d(u) = s\text{-}1\text{+}\kappa \ge \delta$,
   v: $d(v) = \delta$.
   • 分析：
   $\kappa(G)=\kappa$: 删除K_κ.
   $\lambda(G)=\lambda=\delta$: 删除$I_G(v)$.
   

3)
- 目标: $0 \le \kappa \le \lambda \le \delta < \lfloor n/2 \rfloor$
- 构造: 令 $G'=K_{\delta+1} \cup K_{n-\delta-1}$, 设
$V(K_{\delta+1})=\{u_1,u_2,\ldots,u_{\delta+1}\}$,
$V(K_{n-\delta-1})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-\delta-1}\}$,
给 G' 增加边 (u_i,v_i), $i=1,2,\ldots,\kappa$,
以及 (u_1,v_i), $i=2,3,\ldots,\lambda-\kappa+1$, 就得到 G.



- 分析: $\delta(G)=\delta$:
$K_{\delta+1}$: $d(u)\ge\delta$, $K_{n-\delta-1}$: $d(u)\ge n-\delta-2\ge\delta$.
$\kappa(G)=\kappa$: 删除 $\{u_i \mid i=1,2,\ldots,\kappa\}$,
$\lambda(G)=\lambda$: 删除
$\{(u_i,v_i) \mid i=1,2,\ldots,\kappa\} \cup$
$\{(u_1,v_i) \mid i=2,3,\ldots,\lambda-\kappa+1\}$

4)
- 如果 G 是完全图, 则 $G=K_n$,
所以 $\kappa = \lambda = \delta = n-1$.

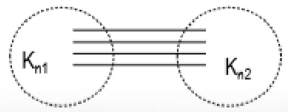
5)
- (2) $1 \le 2\delta-n+2 \le \kappa \le \lambda = \delta \le n-2$
$\delta \ge \lfloor n/2 \rfloor$ 时, 定理7.12, 7.13.

   i. 7.12和7.13在下面

6)
- (3) $0 \le \kappa \le \lambda \le \delta < \lfloor n/2 \rfloor$
$\delta < \lfloor n/2 \rfloor$ 时, Whitney定理. #

2. 定理7.11

- **G是n阶简单无向连通图, $\lambda(G)<\delta(G)$, 则存在 G^* 以G为生成子图, G^* 由完全图 K_{n1} 和 K_{n2}, 以及它们之间的 $\lambda(G)$ 条边组成, $\lambda(G)+2 \le n_1 \le \lfloor n/2 \rfloor$.**

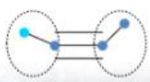
1)


2)
- 证: 设 E_1 是G的最小边割, $|E_1|=\lambda(G)$.
设 $G-E_1$ 的2个连通分支是 G_1 与 G_2, $|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|=n_2$, 不妨设 $n_1 \le n_2$, 显然 $n_1+n_2=n$, $n_1 \le \lfloor n/2 \rfloor$.

- 给 G_1 加新边使它成为 K_{n1},
给 G_2 加新边使它成为 K_{n2},
令 $G^* = K_{n1} \cup E_1 \cup K_{n2}$.
- $\lambda(G)<\delta(G)\le\delta(G^*)\le n_1-1+\lfloor \lambda(G)/n_1 \rfloor$
$\Rightarrow \lambda(G)<n_1-1+\lambda(G)/n_1 \Leftrightarrow (n_1-1)(n_1-\lambda(G))>0$
$\Rightarrow \lambda(G)<n_1 \Rightarrow \lambda(G) \le n_1-1$.
$\lambda(G)=n_1-1 \Rightarrow \lambda(G)=n_1-1+\lfloor \lambda(G)/n_1 \rfloor$
$\Rightarrow \lambda(G)<\delta(G)\le\delta(G^*)\le\lambda(G)$ (矛盾!)
$\lambda(G)<n_1-1 \Rightarrow \lambda(G) \le n_1-2 \Rightarrow \lambda(G)+2\le n_1$. #

推论

3)
- (1) $\delta(G)\le\delta(G^*)\le n_1-1\le\lfloor n/2 \rfloor-1$
(2) G^* 中有不相邻顶点u,v,使得
$d_{G^*}(u)+d_{G^*}(v)\le n-2$
(3) $d(G)\ge d(G^*)\ge 3$
- 证明: (2) $u\in G_1$, $v\in G_2$, 在G中不相邻, 则在 G^* 中仍然不相邻.
(3) $d(G)=\max d(u,v)$
$\lambda(G)\le n_1-2$ #



3. 定理7.12

1)
- G是6阶以上连通简单无向图.
(1) $\delta(G)\ge\lfloor n/2 \rfloor \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$
(2) 任意一对不相邻顶点u,v都有
$d(u)+d(v)\ge n-1$,
$\Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$.
(3) $d(G)\le 2 \Rightarrow \lambda(G)=\delta(G)$. #

4.
- 定理7.13 G是n阶简单连通无向非完全图, 则 $2\delta(G)-n+2 \le \kappa(G)$.

1)

- 证: 设V_1是G的点割集, $|V_1|=\kappa(G)$, 设$G-V_1$的连通分支是$G_1,G_2,\ldots,G_s(s\geq 2)$, 设$|V(G_1)|=n_1$, $|V(G_2)|+\ldots+|V(G_s)|=n_2$, 则$n_1+n_2+\kappa(G)=n$.

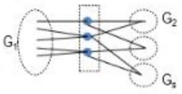
$\delta(G)\leq n_1-1+\kappa(G)=n_1+\kappa(G)-1$,

并且 $\delta(G)\leq n_2+\kappa(G)-1$

$\Rightarrow 2\delta(G)\leq n_1+\kappa(G)+n_2+\kappa(G)-2$

$= n+\kappa(G)-2$

$\Rightarrow \kappa(G)\geq 2\delta(G)-n+2$. #



i.
ii.
iii.
iv.
v.
vi.
vii.
viii.
ix. ------我是底线---------