欧拉、哈密顿

2018年10月28日 11:46

● 欧拉图

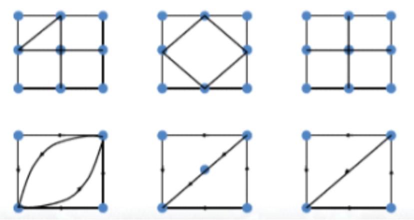
一. 欧拉图Euler graph

1. 七桥问题：康德生活的哥尼斯堡周围七座桥能否一次走完，最好还回到原地
2. Leonhard Euler(1707~1783)：瑞士藉史上最多产数学家
    1)
        – ≥1100书籍论文
        – 全集≥75卷
        – 13个孩子
        – 最后17年失明
    2)
    $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right).$$
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$
    $$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right).$$
3. 欧拉通路：经过图中所有边的简单通路
4. 半欧拉图：有欧拉通路的图
    1) 即可以一笔走完全部线的图
5. 欧拉回路：经过图中所有边的简单回路
6. 欧拉图：有欧拉回路的图
    1) 即可以一笔走完全部线还回到原点的图

二. 充要条件

1. 无向欧拉图
    1) 定理8.1: 设G是无向连通图,则
       G是欧拉图(1)
       ⇔ G中所有顶点都是偶数度(2)
       ⇔ G是若干个边不交的圈的并(3)

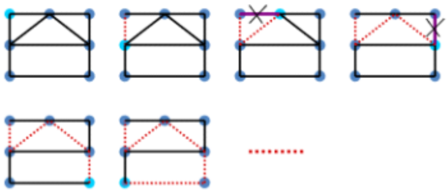
    2) 证明 (1)⇒(2) 若欧拉回路总共k次经过顶点v, 则 d(v)=2k. (2)⇒(3)若删除任意1个圈上的边,则所有顶点的度还是偶数,但是不一定连通了.对每个连通分支重复进行. (3)⇒(1)有公共点但边不交的简单回路,总可以拼接成欧拉回路:在交点处,走完第1个回路后再走第2个回路. #
2. 无向半欧拉图
    1) • 定理8.2: 设G是无向连通图,则
       (1) G是半欧拉图
       ⇔ (2) G中恰有2个奇度顶点 #
    2) 奇度顶点即为起点、终点
    3) **无向欧拉图奇度顶点数=0；半欧拉图奇度顶点数=2**
3. 有向欧拉图
    1) • 定理8.3: 设G是有向连通图,则
       G是欧拉图
       ⇔ ∀v∈V(G), $d^+(v)=d^-(v)$
       ⇔ G是若干个边不交有向圈的并
4. 有向半欧拉图
    1) G是半欧拉图
       ⇔ G中恰有2个奇度顶点,其中1个入度比出度大1,另1个出度比入度大1,其余顶点入度等于出度. #
    2) 出入度差为1和-1的顶点即为起点和终点
    3) **有向欧拉图入度恒等于出度**；半欧拉图有两个点出入度差为正负一



三. 算法

1. Fleury算法/避桥法

1)
- 从任意一点开始,沿着没有走过的边向前走
- 在每个顶点,优先选择剩下的**非桥边**,除非只有唯一一条边
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

2) 

3) 即不断删图里不是桥的边，将删去的边连起来

4) 递归伪码

    if d(v)>1 **then** e:=v关联的任意非割边
    else e:=v关联的唯一边

   i. u:=e的另一个端点.
    递归地求G-e的从u到w的欧拉通路
    把e接续在递归求出的通路上

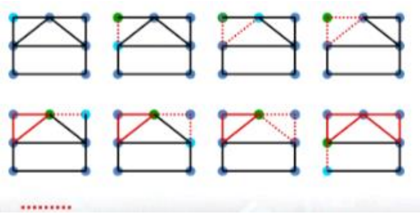
5) 迭代伪码

    (1) P_0:=v;
    (2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍,
    设 $G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$,
   i. e_{i+1}:= G_i中满足如下2条件的边:
    (a) e_{i+1}与v_i关联
    (b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的桥
    (3) 若$G_i \neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

6)
- **定理8.5**: 设G是无向欧拉图,则Fleury算法终止时得到的简单通路是欧拉回路. #

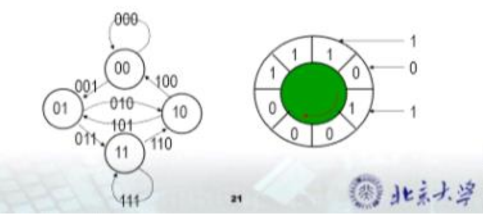
2. 逐步插入回路算法

1)
- 每次求出一个简单回路
- 把新求出的回路插入老回路,合并成一个更大的回路
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

2) 

3. 应用：电信号发生器轮盘设计

- D=<V,E>, V={00,01,10,11},
  E={ abc=<ab,bc> | a,b,c∈{0,1} }

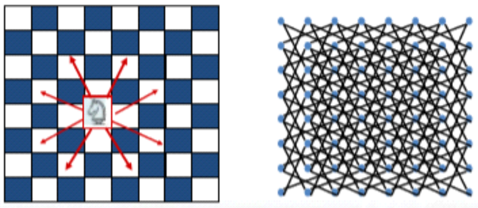
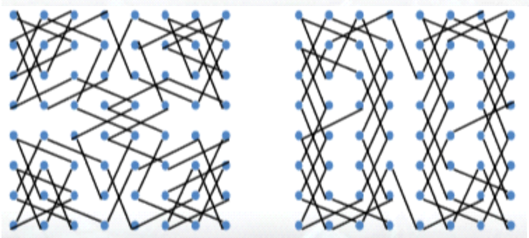
1) 

4. 应用：DNA组

- 哈密顿图

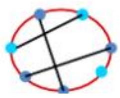
一. 哈密顿图/汉密尔顿图Hamilton graph

1. 周游世界问题：有没有一条路线能让英国人游遍全球所有国家
2. WillamRowan Hamilton(1805~1865)：爱尔兰天才科学家
    1)
        - 光学(optics)
        - 1827, Astronomer Royal of Ireland.
        - 1837, 复数公理化, a+bi
        - 四元数(quaternion): a+bi+cj+dk, 放弃乘法交换律!
3. 马的周游棋盘问题：让马跳遍全格
    - Leohard Euler, 1759

    1) 
    2) 
4. 哈密顿通路：经过图中所有定点的初级通路
5. 半哈密顿图：有哈密顿通路的图
    1) 即可以沿部分线一笔走完全部点的图
6. 哈密顿回路：经过图中所有顶点的初级回路
7. 哈密顿图：有哈密顿回路的图
    1) 即可以沿部分线一笔走完全部点还回到原点的图
8. 定理：**闭包为哈密顿图的无向简单图也是哈密顿图**
    1) 闭包C(G)：重复将G的度数和至少为n的点连接起来

二. 充分、必要条件

1. 无向必要条件（用于证明某些图不是哈密顿图）
    1) 无向哈密顿图的必要条件
        i.
            - 定理8.6: 设G=<V,E>是无向哈密顿图, 则对V的任意非空真子集V_1有 $p(G-V_1) \le |V_1|$。
            - 证明：设C是G中任意哈密顿回路, 当V_1中顶点在C中都不相邻时, $p(C-V_1)=|V_1|$最大; 否则, $p(C-V_1)<|V_1|$. C是G的生成子图, 所以$p(G-V_1) \le P(C-V_1) \le |V_1|$. #

            
        ii. 即n>0时，**删去n个点不会产生大于n个连通分支**
        iii.

非充分的反例：彼德森图，是3-正则图，有10个顶点，满足此必要条件，但它想构成哈密顿回路，必须删去五条边，且保持每个顶点有两条边，易知不存在这样的五条边，它只是半哈密顿图	

    2) 无向半哈密顿图的必要条件
        i.
            - 定理8.7: 设G=<V,E>是无向半哈密顿图,则对V的任意非空真子集V_1有

            $p(G-V_1) \le |V_1|+1$ #
        ii. 即删去n个点不会产生大于n+1个连通分支

3) 无向哈密顿图的必要条件2：用两种颜色给点着色，两种颜色的数量差<2

2. 无向充分条件（用于证明某些图是哈密顿图）

1) 无向半哈密顿图的充分条件

i. • 定理8.7: 设G是n(≥2)阶无向简单图, 若对G中任意不相邻顶点u与v有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则G是半哈密顿图.

(1) 即：任一点与其邻域外点的**关联边数的和恒大于等于结点数-1**

ii. • 证: 只需证明

(1) G连通

(2) 由极大路径可得圈

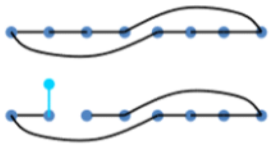
(3) 由圈可得更长路径

(1) • (1) G连通: $\forall u\forall v((u,v)\notin E\rightarrow \exists w((u,w)\in E\wedge(w,v)\in E))$

(2) • 设极大路径 $\Gamma=v_0v_1\ldots v_k$, $k\leq n-2$. 若 $(v_0,v_k)\notin E$, 则 $\exists i(1\leq i\leq k-1\wedge(v_i,v_k)\in E\wedge(v_0,v_{i+1})\in E)$,
否则, $d(v_0)+d(v_k)$
$\leq d(v_0)+k-1-(d(v_0)-1)=k\leq n-2$(矛盾).
于是得圈 $C=v_0\ldots v_iv_kv_{k-1}\ldots v_{i+1}v_0$.

• (3) 由圈得更长路径: 连通. #

(3)



iii. 非必要反例：六阶圈图

2) 无向哈密顿图的充分条件一

i. 推论1: 设G是n(≥3)阶无向简单图,若对G中任意不相邻顶点u与v有

$$d(u)+d(v)\geq n$$

则G是哈密顿图.

ii. 即：任一点与其邻域外点的**关联边数之和都大于等于结点数**

iii. • 证: 由定理8.7知G连通且有哈密顿通路 $\Gamma=v_0v_1\ldots v_n$.
若 $(v_0,v_n)\in E$, 则得哈密顿回路

$$C=v_0v_1\ldots v_nv_0.$$

若 $(v_0,v_k)\notin E$, 则与定理8.7证明(2)类似,
也存在哈密顿回路. #

3) 无向哈密顿图的充分条件二

i. • 推论2: 设G是n(≥3)阶无向简单图,若对G中任意顶点u有

$$d(u)\geq n/2$$

则G是哈密顿图. #

ii. 即：任一点的**关联边数都大于等于结点数/2**

iii. • 定理8.8: 设u,v是无向n阶简单图G中两个不相邻顶点,且 $d(u)+d(v)\geq n$, 则

G是哈密顿图 ⇔

$G\cup(u,v)$是哈密顿图. #

3. 有向充分条件

1) 有向半哈密顿图的充分条件

i. • 定理8.9: 设D是n(≥2)阶竞赛图, 则D是半哈密顿图.

ii. 更有用的推广：

- 推论:设D是n阶有向图,若D含n阶竞赛图作为子图,则D是半哈密顿图. #

(1) 

2) 有向哈密顿图的充分条件

i. • **定理8.10:** 强连通的竞赛图是哈密顿图.

- 证: n=1时,平凡图是哈密顿图.

  n=2时,不可能强连通.

ii. 下面设$n\geq 3$. 只需证明:

(1) D中存在长度为3的圈.

(2) D中存在长度为k的圈 $\Rightarrow$ D中存在长度为k+1的圈.

(1)
- 证: $\forall v\in V(D)$,

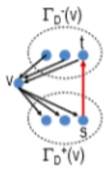
  D强连通 $\Rightarrow \Gamma_D^-(v)\neq\varnothing, \Gamma_D^+(v)\neq\varnothing$.

  D竞赛图 $\Rightarrow \Gamma_D^-(v)\cup\Gamma_D^+(v)=V(D)-\{v\}$

  D强连通 $\Rightarrow \exists s\in\Gamma_D^+(v), \exists t\in\Gamma_D^-(v)$,

  $\langle s,t\rangle\in E(D)$.

  于是C=vstv是长度为3的圈.



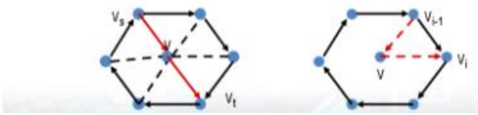
(2)
- 设D中有圈$C=v_1v_2\ldots v_kv_1$, $(3\leq k\leq n)$

  若$\exists v\in V(D-C), \exists v_s,v_t\in V(C)$,

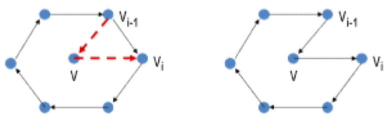
  使得 $\langle v_s,v\rangle\in E(D)$, $\langle v,v_t\rangle\in E(D)$,

  则 $\exists v_{i-1},v_i\in V(C)$,

  使得$\langle v_{i-1},v\rangle\in E(D)$,$\langle v,v_i\rangle\in E(D)$.



- 则 $C'=v_1v_2\ldots v_{i-1}vv_i\ldots v_kv_1$ 是长度为k+1的圈.

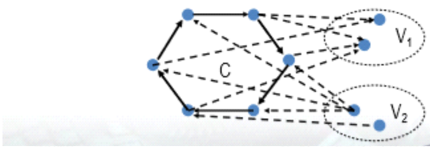


- 否则,令

  $V_1=\{v\in V(D-C) \mid \forall u\in V(C), \langle u,v\rangle\in E(D)\}$

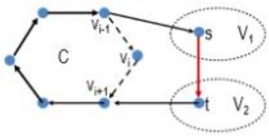
  $V_2=\{v\in V(D-C) \mid \forall u\in V(C), \langle v,u\rangle\in E(D)\}$

  则 $V_1\neq\varnothing, V_2\neq\varnothing, V_1\cap V_2=\varnothing$.



- 于是$\exists s\in V_1, \exists t\in V_2, \langle s,t\rangle\in E(D)$. 在C上任取相邻3点$v_{i-1},v_i,v_{i+1}$, 则$C'=v_1v_2\ldots v_{i-1}stv_{i+1}\ldots v_kv_1$是长度为k+1的圈.

  #



iii. 更有用的推广

(1) • 推论: 设D是n阶有向图,若D含n阶强连通竞赛图作为子图,则D是哈密顿图. #

4. 边不重的哈密尔顿回路数在高阶完全图中的充要条件

1) • 完全图$K_{2k+1}$$(k\geq 1)$中同时有k条边不重的哈密顿回路,且这k条边不重的哈密顿回路含有K_{2k+1}中所有边

i.

- 证: 设$V(K_{2k+1})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k+1}\}$,

  对 $i=1,2,\ldots,k$, 令 $P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}\ldots v_{i-(k-1)}v_{i+(k-1)}v_{i-k}$,

  下标mod(2k)转换到{1,2,...,2k+1}中, 0转换成2k.

  令$C_i=v_{2k+1}P_iv_{2k+1}$. 可以证明:

  (1) C_i都是哈密顿回路,

  (2) $E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing$ $(i\neq j)$,

  (3) $\cup_{i=1}^{n}E(C_i)=E(K_{2k+1})$. #

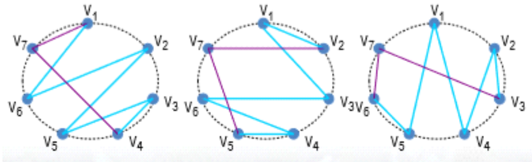
(1) 例

$V(K_7)=\{v_1,v_2,\ldots,v_7\}$, k=3, mod 6

$P_1=v_1v_0v_2v_{-1}v_3v_{-2}=v_1v_6v_2v_5v_3v_4$,

$P_2=v_2v_1v_3v_0v_4v_{-1}=v_2v_1v_3v_6v_4v_5$,

$P_3=v_3v_2v_4v_1v_5v_0=v_3v_2v_4v_1v_5v_6$,



ii. 推论

(1)

- 完全图K_{2k}($k\geq2$)中同时有k-1条边不重的哈密顿回路, 除此之外, 剩下的是k条彼此不相邻的边

(2)

- 证: k=2时, K_4显然. 下面设k≥3.

  $K_{2k}=K_{2(k-1)+1}+K_1$ (联图)

  设$V(K_{2(k-1)+1})=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k-1}\}$, $V(K_1)=\{v_{2k}\}$.

  K_{2k-1}中有k-1条边不重的哈密顿回路,

  设为$C'_1, C'_2,\ldots,C'_{k-1}$,

  依次把v_{2k} "加入" C'_i,

  得到满足要求的C_i. #

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

viii.

ix.

x. --------我是底线---------