

Задание:

Вычислите интеграл Лебега–Стилтьеса $\int_{[a,b]} f(x) dF(x)$.

Вариант 2:

$$2) [a, b] = [-k, 5l]; f(x) = 2 \cos kx + 2\chi\left(3x - \frac{l}{5}\right) - x^2, F(x) = e^x + 2\chi(x+1) + 2\chi(4x-k) + x^3;$$

Решение:

Итак, дано:

$$[a; b] = [-8; 75]$$

$$f(x) = 2 \cos(8x) + 2\chi(3x - 3) - x^2$$

$$F(x) = e^x + 2\chi(x+1) + 2\chi(4x-8) + x^3$$

Для решения данной задачи необходимо разложить $F(x)$ на непрерывную и разрывную (скачковую) части. Затем найти производную гладкой части $F'(x)$. Потом находим точки скачков и их величины:

$$\Delta F(-1) = 2, \quad \Delta F(2) = 2$$

Считаем вклад скачков:

$$\sum f(x_k) * \Delta F(x_k) = f(-1) * 2 + f(2) * 2$$

Далее вычисляем интеграл:

$$\int_a^b f(x) F'(x) dx$$

В итоге складываем:

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx + \sum f(x_k) * \Delta F(x_k)$$

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from math import exp, cos

def chi(x):
    return 1 if x >= 0 else 0

def f(x):
    return 2 * cos(8 * x) + 2 * chi(3 * x - 3) - x**2

def dF(x):
    return exp(x) + 3 * x**2

def main():
    a, b = -8, 75
    integral_continuous, _ = quad(lambda x: f(x) * dF(x), a, b)

    jumps = []
    for xk in [-1, 2]:
        if a < xk < b:
            delta_F = 0
            delta_F += 2 * (chi(xk + 1) - chi(xk + 1 - 1e-9))
            delta_F += 2 * (chi(4 * xk - 8) - chi(4 * xk - 8 - 1e-9))
            jumps.append(f(xk) * delta_F)

    integral_jumps = sum(jumps)

    total_integral = integral_continuous + integral_jumps

    print(f"Интеграл Лебега-Стилтьеса: {total_integral:.6f}")

def chi_graph(x):
    return np.where(x >= 0, 1, 0)

def plot_chi_functions():
    x = np.linspace(-6, 6, 1000)
    y_chi1 = 2 * chi_graph(x + 1)
    y_chi2 = 2 * chi_graph(4 * x - 8)

    _, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5), sharey=True)

    for ax in axs:
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
```

```

ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

ax.set_xticks(np.arange(-6, 6, 1))

# Левый график –  $2\chi(x+1)$ 
axs[0].plot(x, y_chi1, label='2χ(x+1)', color='pink')
axs[0].axvline(x=-1, color='black', linestyle='--', linewidth=1.5)
axs[0].set_title("2χ(x+1)")
axs[0].set_xlabel("x")
axs[0].grid(True)
axs[0].legend()

# Правый график –  $2\chi(4x-8)$ 
axs[1].plot(x, y_chi2, label='2χ(4x-8)', color='orange')
axs[1].axvline(x=2, color='black', linestyle='--', linewidth=1.5)
axs[1].set_title("2χ(4x-8)")
axs[1].set_xlabel("x")
axs[1].grid(True)
axs[1].legend()

plt.suptitle("Графики функций  $2\chi(x+1)$ ,  $2\chi(4x-8)$ ")
plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 1])
plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()
    plot_chi_functions()

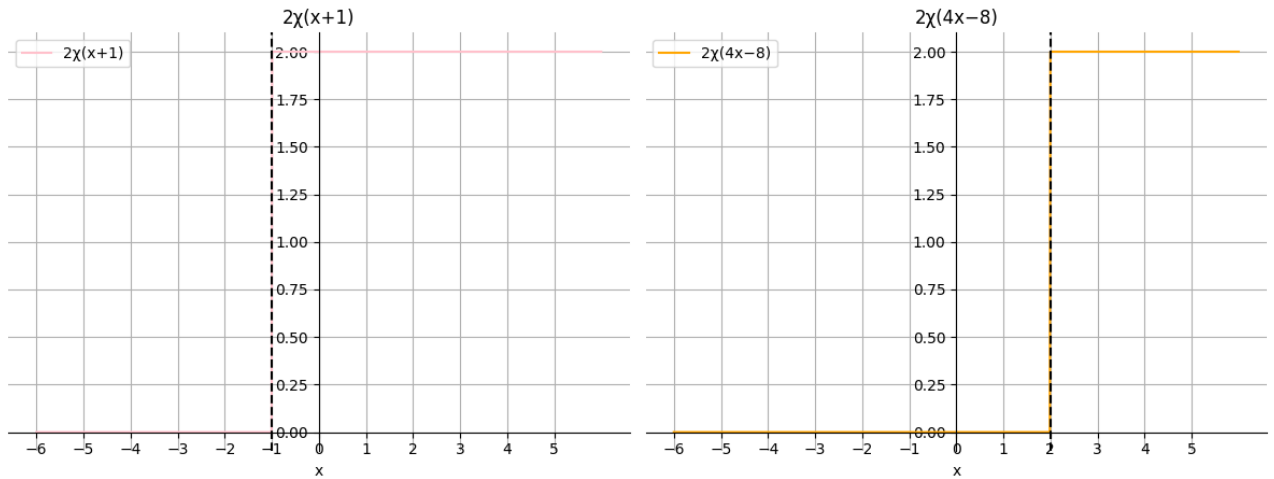
```

Вывод:

\$ python main.py

Интеграл Лебега-Стилтьеса: -2043957408774194279254538299421753344.000000

Графики функций $2\chi(x+1)$, $2\chi(4x-8)$



Изображение показывает графики функций $2\chi(x+1)$ и $2\chi(4x-8)$, в которых происходят скачки: в точках $x = -1$ и $x = 2$ соответственно.