Digitalni sustavi upravljanja 2022./2023.

Akademik Ivan Petrović

Prof. dr. sc. Marija Seder

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

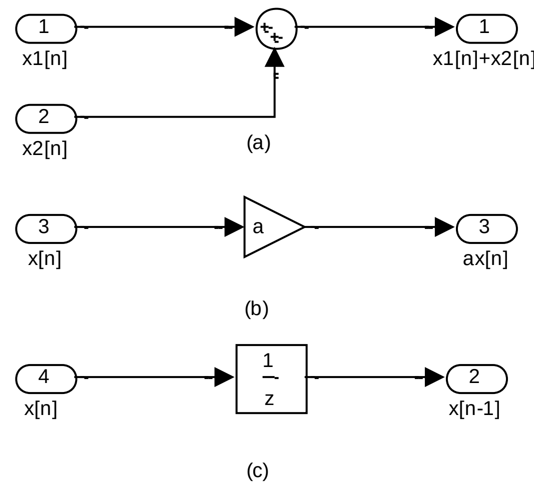
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 11 – Implementacijski aspekti digitalnih regulatora

Sadržaj poglavlja:

11.1. IMPLEMENTACIJSKI OBLICI DISKRETNIH REGULATORA

- Pri analizi i sintezi sustava upravljanja, obično se pretpostavlja aritmetika s beskonačnom preciznošću – koeficijenti su realni brojevi
- Međutim, pri implementaciji algoritma upravljanja moraju se uvesti dodatna ograničenja koja proizlaze iz karakteristika primijenjenog sklopovlja.
- Diskretni algoritam upravljanja formulira se prijenosnom funkcijom u *z*-području ili jednadžbama diferencija u vremenskom području.
- Iterativno računanje rekurzivne formule dobivene iz diferencijalne jednadžbe zahtijeva da su dostupne zakašnjele vrijednosti izlaza i ulaza, te da su dostupni i međurezultati.
- Osnovni elementi potrebni za implementaciju su zbrajala, množila i memorija za pohranjivanje vrijednosti sekvenca.



- Postoji više oblika implementacije algoritama upravljanja, a osnovni su:
  - direktni oblik I,
  - direktni oblik II,
  - serijski oblik,
  - paralelni oblik,
  - modalni oblik.

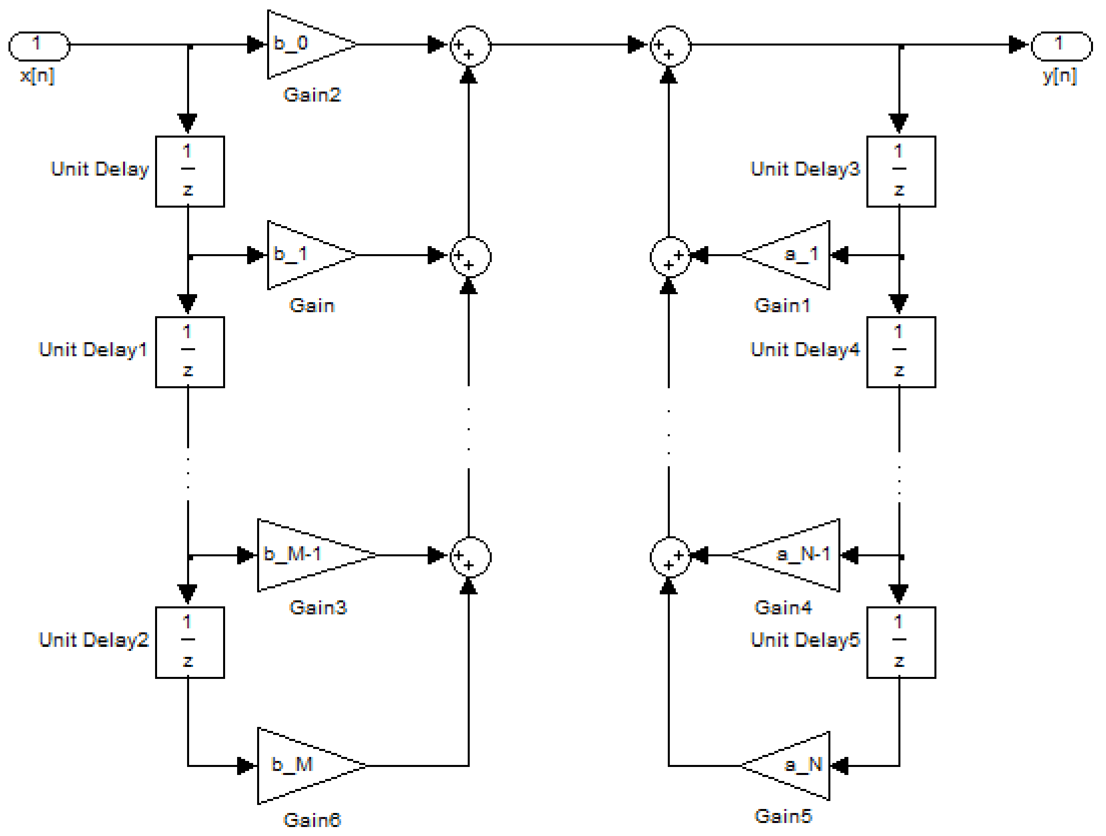
- Razmatra se sljedeća opća diferencijalna reda višeg reda, koja je zapisana u obliku rekurzivne formule za $y[n]$ u smislu linearnih kombinacija prošlih vrijednosti izlaza te trenutnih i prošlih vrijednosti ulaza:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \, . \qquad (11\text{-}1)$$

- Pripadajuća prijenosna funkcija je:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} x}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \, . \qquad (11\text{-}2)$$

- Blokovski dijagram na slici 11.2 je eksplicitna slikovna prezentacija jednadžbe (11-1) i naziva se <u>Direktni oblik I (DO-I):</u>



Slika 11.1 Blok dijagram opće diferencijalne jednadžbe N-tog reda

- DO-I ima sljedeća svojstva:
  - Može se predstaviti kao sekcija nula koju prati sekcija polova.

- U većini shema izvedenih u cjelobrojnoj aritmetici (npr. dvojni komplement koji se najčešće koristi), **ne postoji mogućnost preljeva u internom filtru iz razloga što u filtru zapravo postoji samo jedno zbrajalo**. To svojstvo DO-I strukture vrlo je korisno. U cjelobrojnoj aritmetici, preljev predstavlja prijelaz iz najvećeg pozitivnog broja u najveći negativni broj (po apsolutnoj vrijednosti) i obratno. Tada je konačni rezultat $y[k]$ uvijek unutar zadanog opsega, čime izbjegavamo preljev konačnog rezultata, čak i prilikom pojave preljeva međurezultata u zbrajalu.
    - Ilustracija nepostojanja preljeva: Brojevi prikazani cjelobrojnom aritmetikom dvostrukog komplementa koristeći 3 bita:

<table>
<tr><th>Decimalni</th><th>Binarni</th><th>Objašnjenje</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>100</td><td rowspan="8">• $3+3-4=2$ predstavlja zbroj u kojem dolazi do trenutnog preljeva ($3+3=6$, koje zbog preljeva postaje -2), no, konačni rezultat je ipak 2 koji se nalazi u propisanom opsegu.
$011+011=110 \qquad (3+3=-2)$
$110+100=010 \qquad (-2-4=2)$
• Ova se pojava može objasniti time da se pozitivni preljev u prvom zbrajalu kompenzira negativnim preljevom u drugom zbrajalu.</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>101</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>110</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>111</td></tr>
<tr><td>0</td><td>000</td></tr>
<tr><td>1</td><td>001</td></tr>
<tr><td>2</td><td>010</td></tr>
<tr><td>3</td><td>011</td></tr>
</table>

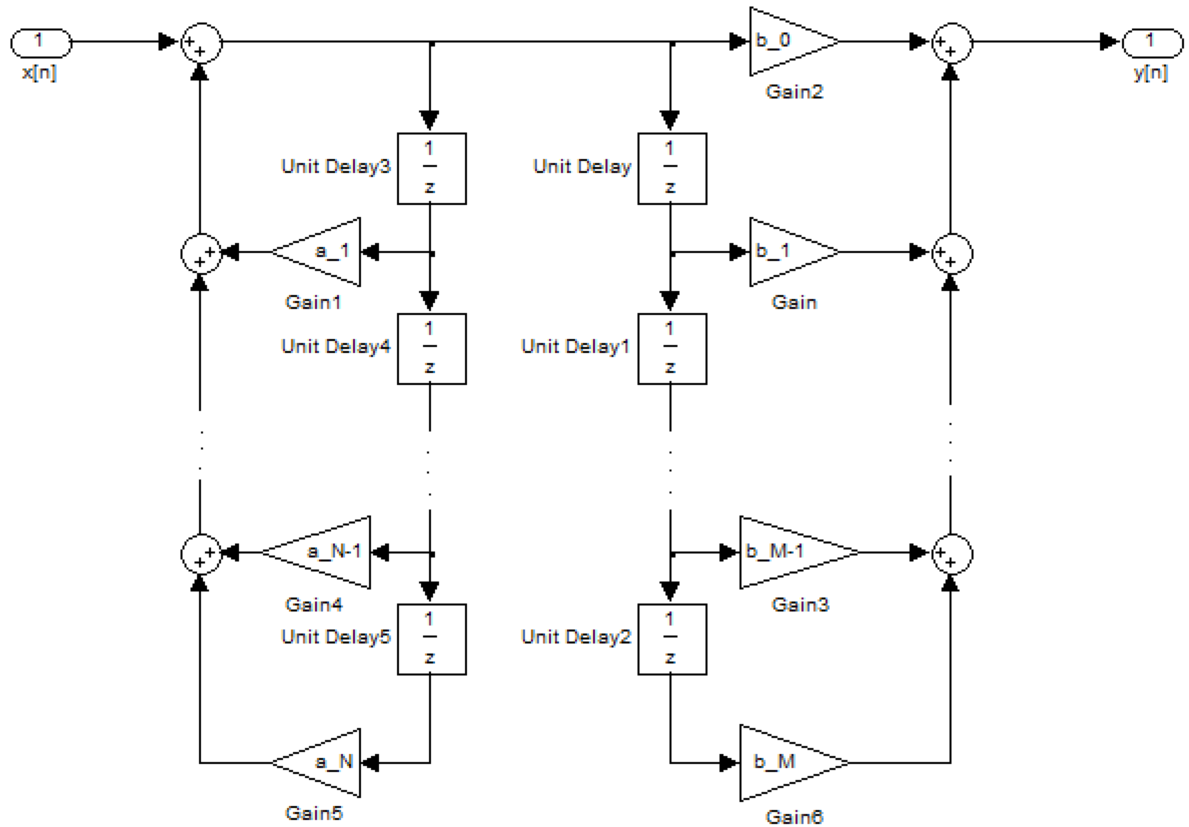
- **Postoji dvostruko više kašnjenja nego što je potrebno**. Kao rezultat toga, DO-I struktura je nekanonička, ako gledamo kašnjenja. Općenito, uvijek možemo implementirati filtar N-tog reda koristeći samo N elemenata kašnjenja.

- Kao što je slučaj sa svim direktnim oblicima (čiji su koeficijenti određeni koeficijentima prijenosne funkcije), **polovi i nule filtra vrlo su osjetljivi na pogreške zaokruživanja koeficijenata**, što uglavnom ne predstavlja problem za jednostavnu sekciju 2. reda, no može postati problem za DO filtre višeg reda.

- **Osjetljivost na pogreške zaokruživanja koeficijenata više je izražena ako su korijeni prijenosne funkcije međusobno vrlo blizu u kompleksnoj ravnini.** Da bismo smanjili tu osjetljivost, faktoriziramo prijenosne funkcije filtra u paralele ili serije sekcija 2. reda.

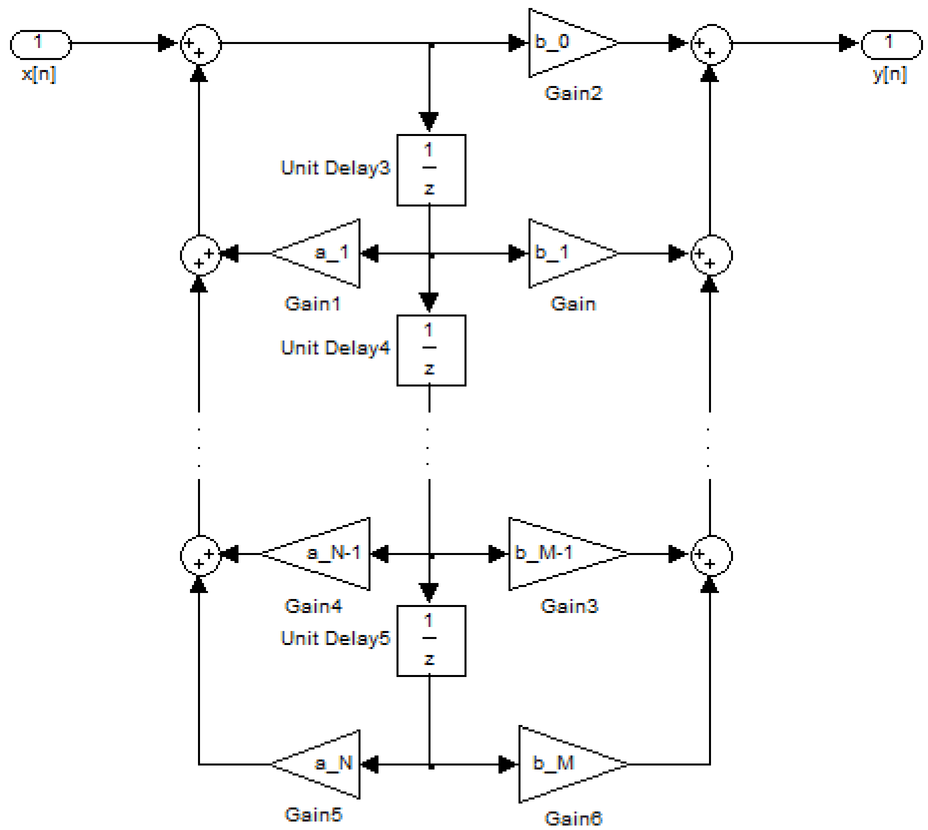
- Blok dijagram može se reorganizirati ili modificirati na mnoštvo načina ne mijenjajući pritom sveukupnu prijenosnu funkciju sustava. Svaka reorganizacija predstavlja drukčiji algoritam za implementaciju istog sustava.

- Zamjenom redoslijeda sekcija nula i polova ne utječe se na sveukupnu prijenosnu funkciju sustava:



Slika 11.2 Reorganizacija blokovskog dijagrama slike 11.1

- Oba sustava na slikama 11.1 i 11.2 imaju jednak broj kašnjenja. Međutim, blok dijagram sa slike 11.2 može se drukčije organizirati ako se primijeti da je isti signal pohranjen u oba lanca elemenata kašnjenja te se može spojiti u jedan lanac kako je prikazano na slici 11.3. - **Direktni oblik II (DO-II):**



Slika 11.3 Reorganizacija blok dijagrama sa slike 11.2

- Jednadžbe diferencije za DO-II:

$$v[k] = x[k] - a_1 v[k-1] - a_2 v[k-2] + \dots$$

$$y[k] = b_0 v[k] + b_1 v[k-1] + b_2 v[k-2] + \dots.$$

Svojstva DO-II forme:

- Sekciju polova prati sekcija nula.
- Ova je forma kanonička gledajući kašnjenja – broj kašnjenja je $max\ (N,\ M)$; razlog tome je dijeljenje elemenata za kašnjenje između sekcija polova i nula.
- Moguća je pojava internog preljeva na ulaznom dijelu linije za kašnjenje, za razliku od DO-I forme.
- Kao i DO-I struktura, i ova je struktura osjetljiva na pogreške odsijecanja koeficijenata a_i i b_i, posebno za prijenosne funkcije višeg reda.

Serijski oblik:

- Prijenosna funkcija *n*-tog reda upravljačkog algoritma predstavljena je kao umnožak jednostavnijih prijenosnih funkcija prvoga i drugoga reda:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = \alpha_0 H_1(z) H_2(z) \cdots H_n(z).$$

- Za faktoriziranje prijenosne funkcije koriste se dva tipa elemenata:

  a) elementi 1. reda

$$H_l(z) = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \quad i$$

  b) elementi 2. reda

$$H_l(z) = \frac{1 + b_i z^{-1} + b_{i+1} z^{-2}}{1 + a_i z^{-1} + a_{i+1} z^{-2}}.$$

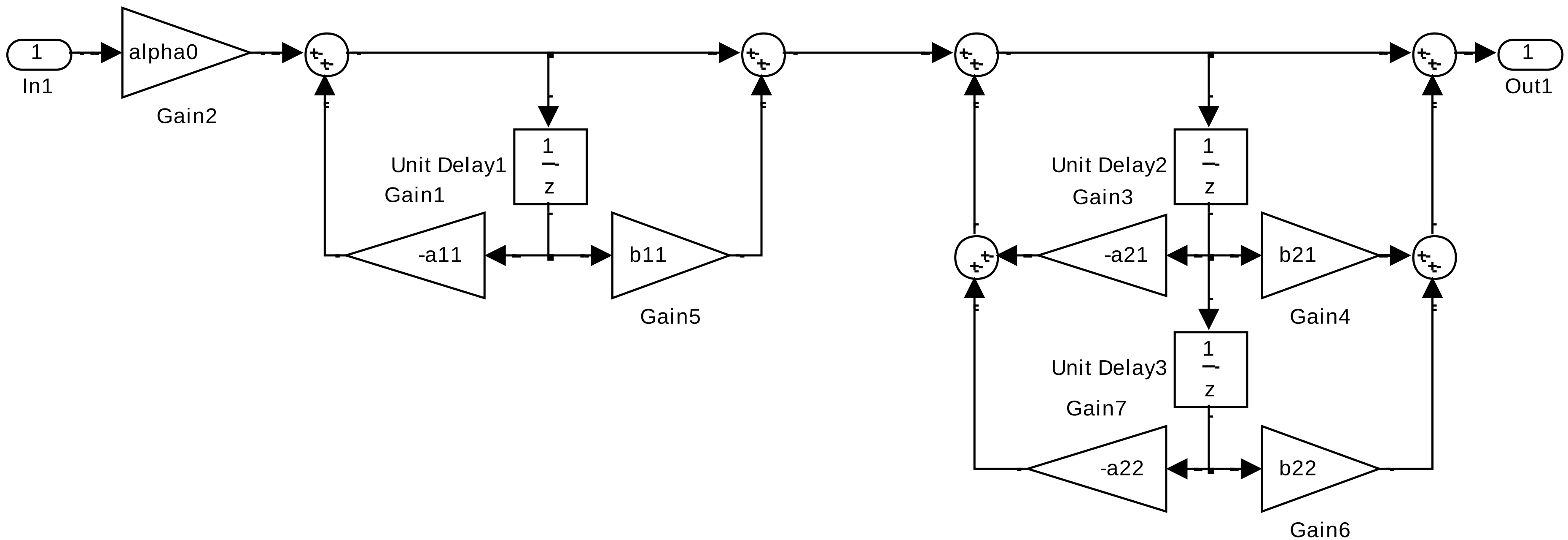
- Treba napomenuti da elementi prvoga reda predstavljaju realne nule i realne polove, dok elementi drugoga reda predstavljaju kompleksno-konjugirane parove nula i polova.

- Postoji poprilična sloboda u odabiru kompozicije podelemenata kao i u odabiru redoslijeda u kojem će ti podsustavi biti poredani u seriju.

- Dakle, ako postoji N podsekcija drugoga reda, postoji N! različitih parova nula i polova i postoji N! različitih redoslijeda na koji su podsekcije postavljene u seriju, tj. postoji sveukupno (N!)^2 različitih struktura.

- Iako svi ovi načini grupiranja imaju istu prijenosnu funkciju i isti odnos ulaza i izlaza u aritmetici s beskonačnom preciznošću, njihovo ponašanje kada je u pitanju konačna aritmetika može biti poprilično drukčije.

- Blokovska shema za filtar s jednim elementom 1. reda i jednim elementom 2. reda izvedenima u DO-II obliku:



Slika 11.4 Regulator u serijskoj izvedbi

- Jednadžbe diferencija za prikazanu strukturu dane su izrazima:

$$y_1[k] = \alpha_0 \left(x[k] + b_{11} x[k-1] \right) - a_{11} y_1[k-1],$$
$$y[k] = y_1[k] + b_{21} y_1[k-1] + b_{22} y_1[k-2] - a_{21} y[k-1] - a_{22} y[k-2].$$

- Dodatna definicija serijske forme:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = H(1) \cdot H(2) \cdots H(n). \qquad (11\text{-}3)$$

- Prijenosna funkcija H(z) rastavljena je na jednostavnije prijenosne funkcije prvoga i drugoga reda koje predstavljaju podsekcije DO-II:

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1} z^{-1}}{1 + a_{i1} z^{-1}}, \qquad (11\text{-}4)$$

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2}}{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}}. \qquad (11\text{-}5)$$

- Ovakva realizacija zahtijeva pet množila za realizaciju podsekcije drugoga reda, dok prethodna definicija kaskadne forme zahtijeva četiri.
- Međutim, podsekcije s pet množila su obično korištene kad je u pitanju implementacija u aritmetici s konačnom duljinom riječi, iz razloga što omogućuju distribuciju pojačanja sustava kontrolirajući time veličinu signala na kritičnim mjestima u sustavu.

Paralelni oblik:

- Prijenosna funkcija *n*-tog reda prikazana je kao zbroj jednostavnijih prijenosnih funkcija prvoga i drugoga reda:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = a_0 + H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z).$$

- Koriste se dva tipa elemenata:

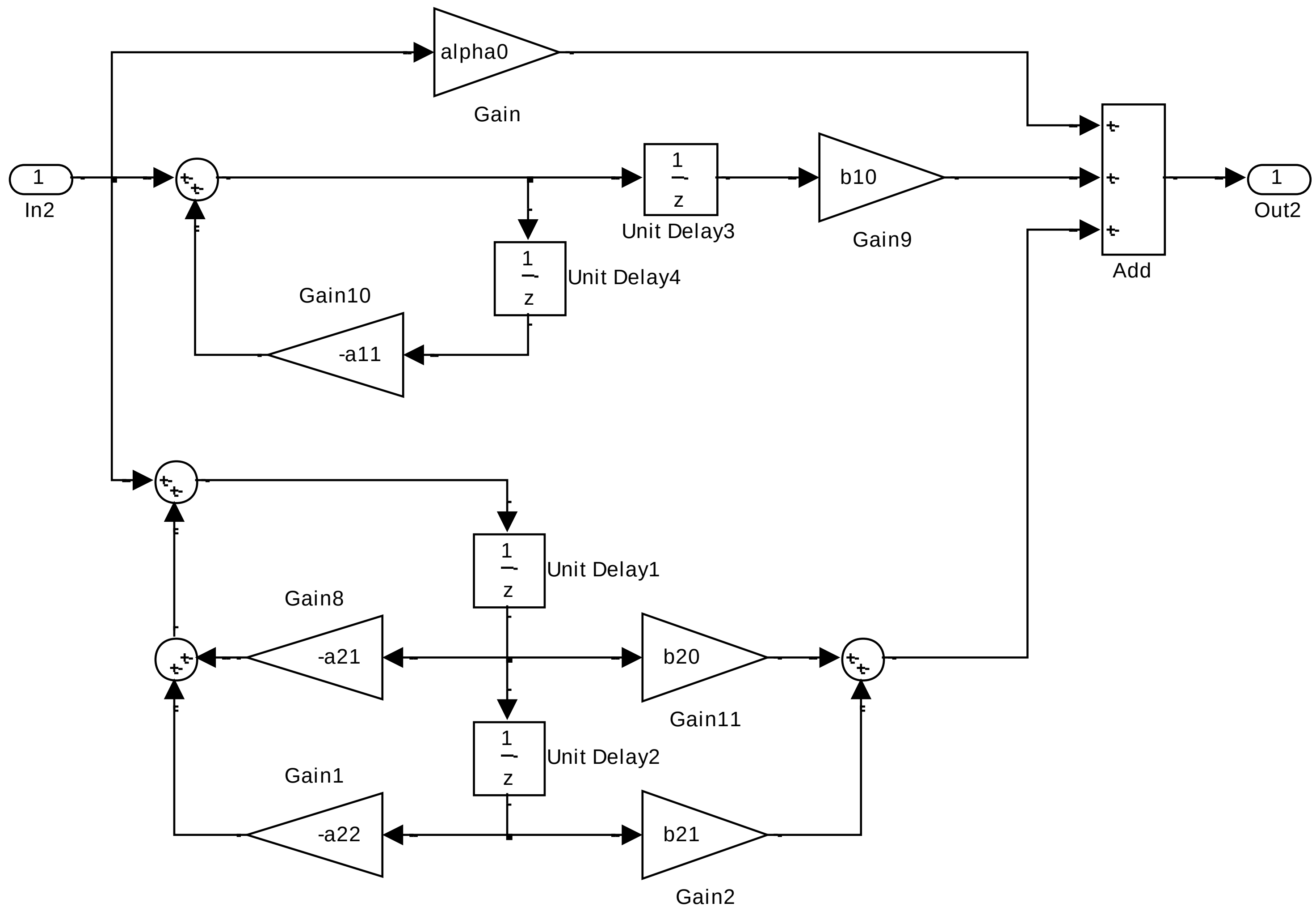
a) *elementi 1. reda*

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} z^{-1}}{1 + a_{i1} z^{-1}} \ ,$$

b) *elementi 2. reda*

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} z^{-1} + b_{i1} z^{-2}}{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}} \ .$$

- Blokovska shema za paralelnu kombinaciju podsustava prvoga i drugoga reda izvedenima u DO-II obliku:



Slika 11.5 Regulator u paralelnoj izvedbi

- Jednadžbe diferencija za prikazanu strukturu dane su izrazima:

$$v_0[k] = \alpha_0 x[k],$$
$$v_1[k] = b_{10} x[k-1] - a_{11} v_1[k-1],$$
$$v_2[k] = b_{20} x[k-1] + b_{21} x[k-2] - a_{21} v_2[k-1] - a_{22} v_2[k-2],$$
$$y[k] = v_0[k] + v_1[k] + v_2[k].$$

Modalni oblik:

- U ovom obliku prijenosna se funkcija pretvara u odgovarajući model po varijablama stanja:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)\ , \qquad (11\text{-}6)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)\ . \qquad (11\text{-}7)$$

- Odabire se tzv. modalna forma zapisa po varijablama stanja kod koje su dijagonalni članovi matrice φ jednaki realnim polovima ili kvadratne podmatrice za konjugirano-kompleksne polove.

- Primjerice, za slučaj kada regulator ima jedan realni pol i dva konjugirano-kompleksna pola:

$$p_1 = \lambda_1 \quad , \quad p_{2,3} = \sigma \pm j\omega \ , \qquad (11\text{-}8)$$

- matrica φ formira se na sljedeći način:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega \\ 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix}. \qquad (11\text{-}9)$$

- Kao matrica transformacije u modalnu formu koristi se matrica svojstvenih vektora sustava:

$$x = Tz \ . \qquad (11\text{-}10)$$

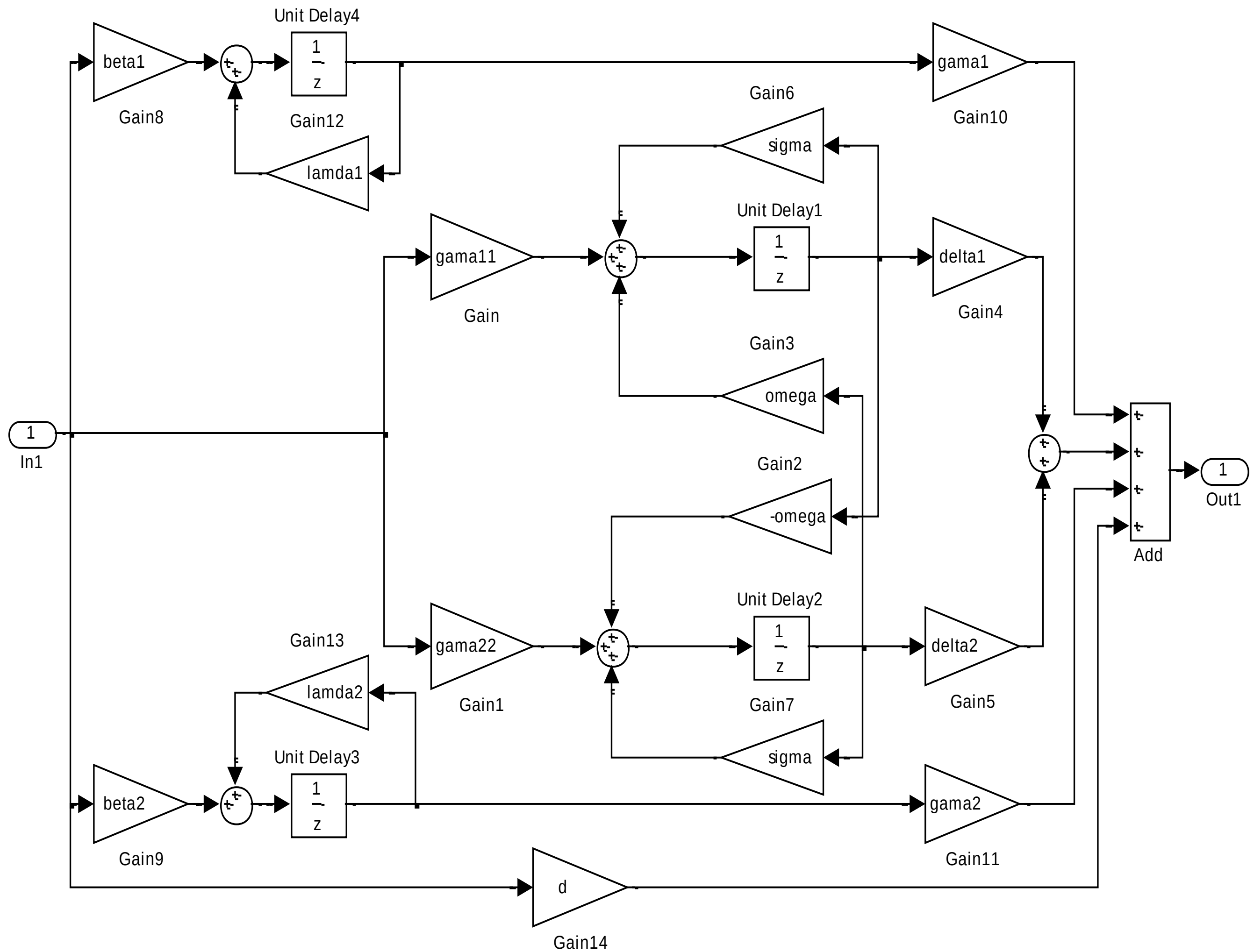
- Uz pretpostavku da regulator ima različitih n_r realnih polova i n_c različitih konjugirano-kompleksnih parova polova, tada se regulator realizira na sljedeći način:

$$z_i(k+1) = \lambda_i z_i(k) + \beta_i e(k) \ , \ i = 1,2,\ldots,n_r \quad \text{(11-11)}$$

$$v_i(k+1) = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix} v_i(k) + \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \end{bmatrix} e(k) \ , \ i = 1,2,\ldots,n_c \quad \text{(11-12)}$$

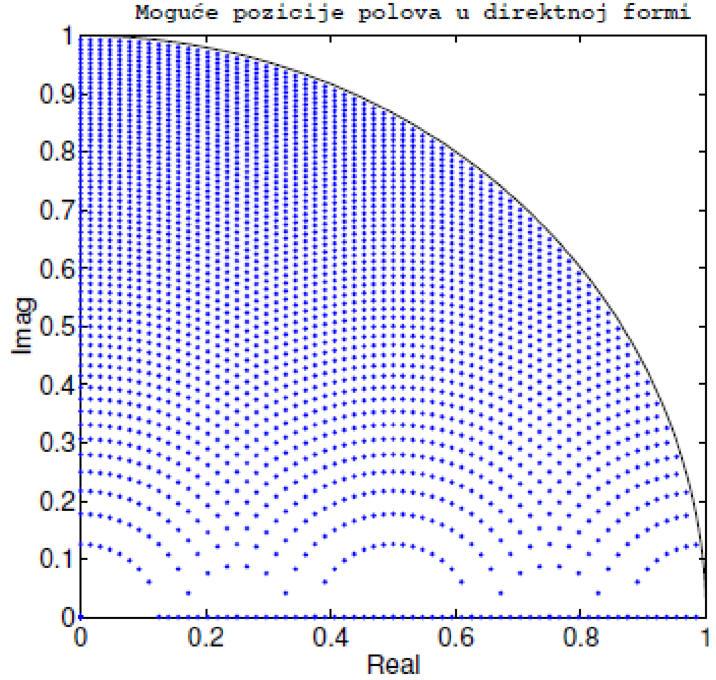
$$u(k) = \sum_{i=1}^{n_r} \gamma_i z_i(k) + \sum_{i=1}^{n_c} \delta_i v_i(k) + De(k) \ . \quad \text{(11-13)}$$

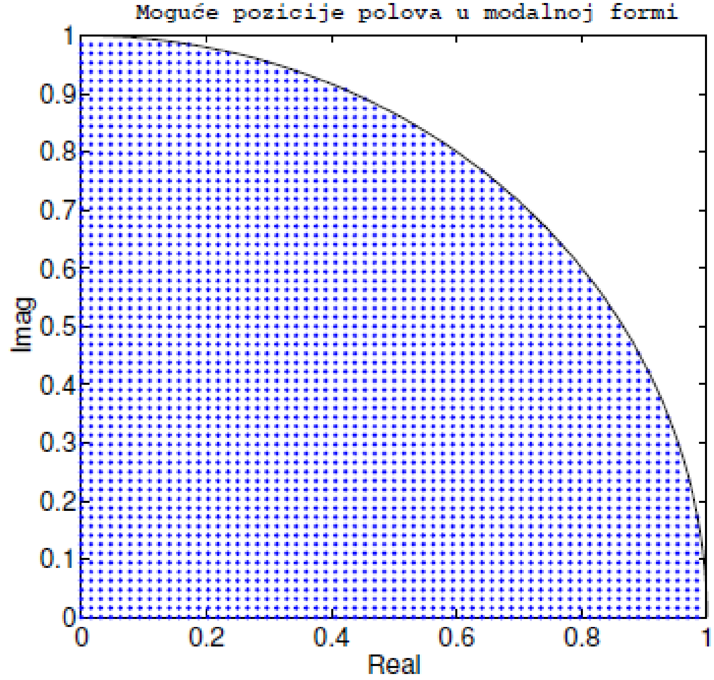
- Blokovska realizacija regulatora u modalnoj izvedbi:



Slika 11.6 Regulator u modalnoj izvedbi

- Vidljivo je kako se regulator zapisan u prostoru stanja u modalnoj formi realizira paralelno, tj. zasebno se realiziraju pojedini realni polovi i parovi konjugirano-kompleksnih polova.





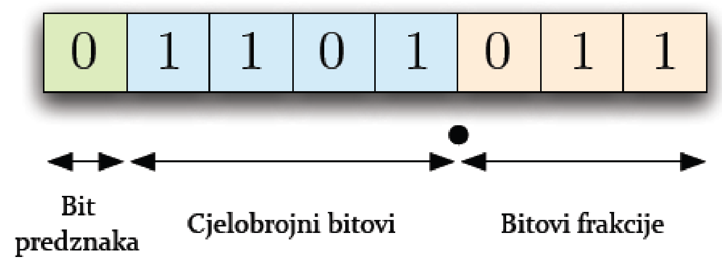
- Uniformna osjetljivost položaja polova postiže se kod modalne realizacije zahvaljujući činjenici da su koeficijenti koji se koriste pri izvedbi regulatora zapravo njegovi polovi.

11.2. BINARNA ARITMETIKA S KONAČNOM DULJINOM RIJEČI

- Pažnja u ovom potpoglavlju posvećena je:
  - najčešće upotrebljavanim metodama zapisa brojeva kod mikroprocesorskog upravljanja – cjelobrojnom zapisu brojeva;
  - odsijecanju i zaokruživanju brojeva u (1) analogno-digitalnim pretvornicima, (2) pri izvođenju aritmetičkih operacija i (3) pohrani parametara u memoriju.
- U teoretskim analizama diskretnih sustava obično se pretpostavlja da su vrijednosti signala i koeficijenata sustava predstavljeni kao realni brojevi.
- Idealne realne brojeve u narednim razmatranjima čini prikaz brojeva u Matlabu.
- Kod implementacije sustava s digitalnom obradbom signala, signali i koeficijenti sustava moraju se prikazati u konačnoj preciznosti.

Binarni zapis brojeva:

- Realni broj u aritmetici s nepomičnim zarezom prikazuje se kao cjelobrojna vrijednost X s N=m+n+1 bitova, pri čemu je:
  - N – duljina riječi,
  - m – broj cjelobrojnih bitova,
  - n – broj bitova frakcije.



- Prikazani format zapisa ponekad se naziva Q-formatom i označava se Qm.n.
- Za zapis cijelog broja koristi se $N+1$ bita, pri čemu se N bita koristi za zapis broja, dok se preostali bit koristi za predznak (MSB – *engl. most significant bit*).
- Iz navedenog je lako zaključiti da je najveći broj koji se zapisuje na ovaj način $\boxed{2^N - 1}$ za pozitivan i $\boxed{-2^N}$ za negativan.

- Najčešće je binarna točka postavljena na 2. poziciju (odmah iza MSB-a), te na taj način opseg brojeva koji se mogu prikazati iznosi

$$\boxed{[-1,\ 1-2^{-N}]}.$$

- Granica razlučivosti ovakvog načina zapisa brojeva iznosi 2^{-N}, odnosno to je najmanji diskretni pomak između dva susjedna broja (korak kvantizacije).

- Izraz 2^{-N} nazivamo još i LSB – engl. *least significant bit* (najmanje značajan bit), jer predstavlja desni bit u prikazu broja i najmanje utječe na konačnu vrijednost broja.

- Realni broj pretvaramo u broj u aritmetici s nepomičnim zarezom na sljedeći način:

$$X = round(x \cdot 2^{n}) \quad ,$$

- gdje *x* predstavlja realni broj, a *X* broj zapisan u aritmetici s nepomičnim zarezom. Npr., dekadski broj iznosa 13.4 možemo zapisati u formatu Q4.3 kao X = 107 = 01101011.

- U cjelobrojnom je prikazu binarni zarez nepomičan. Npr. za $N = 5$:

$$0.1010 = 0 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}$$
$$0.1010 = 0 + 0.5 + 0 + 0.125 + 0$$
$$0.1010 = 0.625.$$

- Za zapisivanje negativnih brojeva u binarnoj aritmetici koriste se tri različita oblika zapisa:

  a) *Zapis s predznakom* − vodeći bit predstavlja predznak, 0 za pozitivne vrijednosti i 1 za negativne. Ovakvim zapisom broj 0 ima dva zapisa 0000.00 i 1000.00.

$$-6.5 = 1110.10$$
$$+6.5 = 0110.10$$

  b) *Zapis dvojnog komplementa* − pozitivni brojevi jednaki su zapisu s predznakom, dok se negativni brojevi zapisuju na način da se sve binarne znamenke pozitivnog broja komplementiraju i zatim se pridoda 1.

$$-(0110.10) = (1001.01) + (0000.01)$$

$$-(0110.10) = 1001.10$$

Pri određivanju pozitivnog broja, koristi se isti postupak:

$$-(1001.10) = (0110.01) + (0000.01)$$

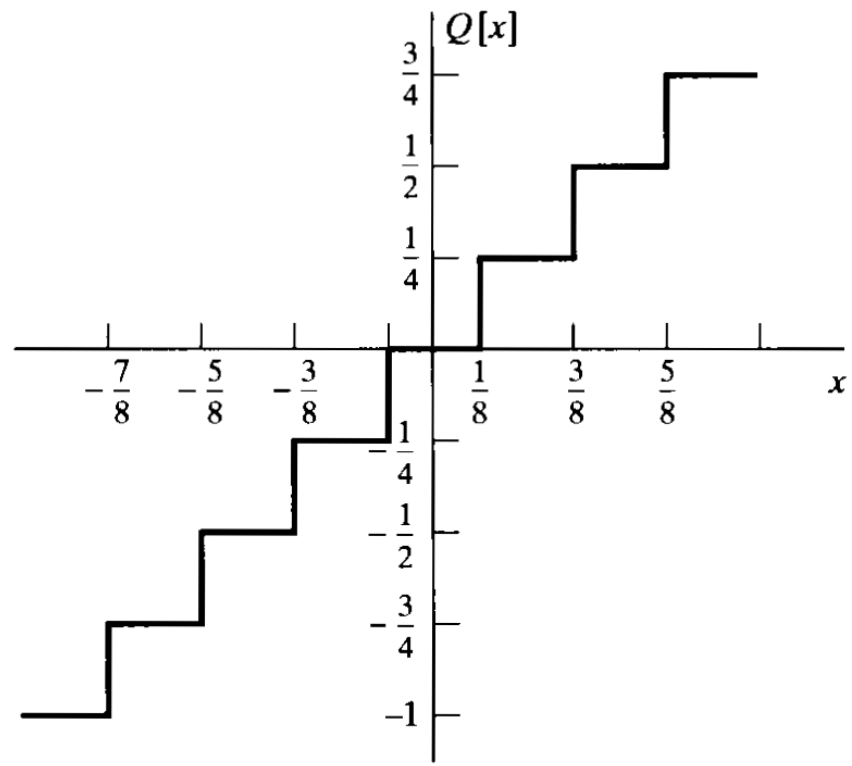
$$-(1001.10) = 0110.10$$

c) *Zapis komplementa* − pozitivni brojevi zapisani su u obliku zapisa s predznakom, dok su negativni zapisani tako da se svi bitovi pozitivnog broja komplementiraju.

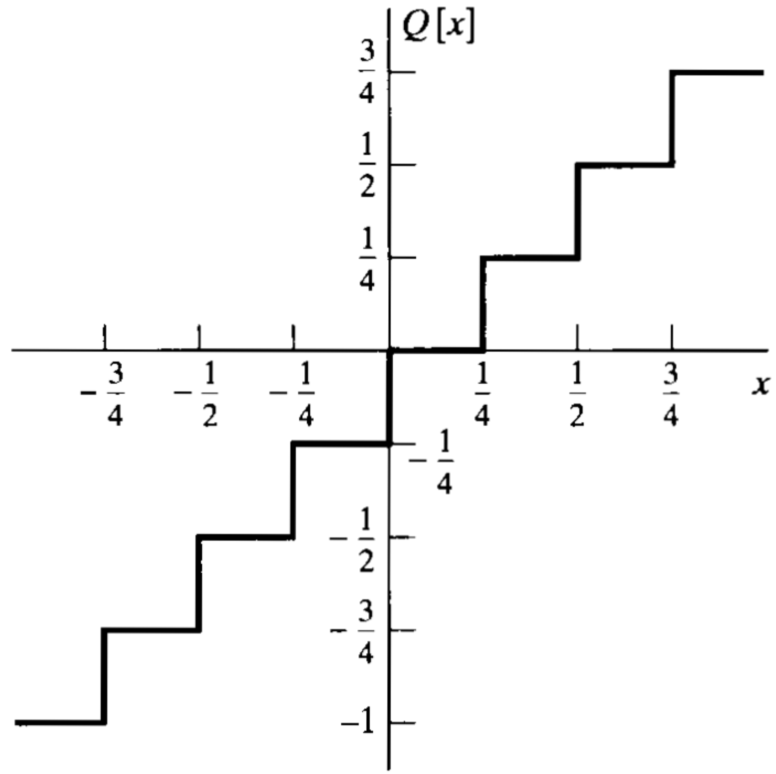
$$-(0110.10) = 1001.01$$

Odsijecanje i zaokruživanje binarnih brojeva:

- Proizvoljni realni broj x zahtijevao bi za svoju točnu binarnu prezentaciju neograničen broj bitova.
- Operacija kvantiziranja broja na (N+1) bitova može biti provedena putem zaokruživanja ili odsijecanja, ali u oba slučaja kvantizacija je nelinearna operacija koja nema potrebu za memorijskim prostorom.



Slika 11.7 Nelinearna karakteristika za operaciju zaokruživanja uz zapis dvojnog komplementa (N = 2)



Slika 11.8 Nelinearna karakteristika za operaciju odsijecanja uz zapis dvojnog komplementa (N = 2)

- U razmatranjima utjecaja kvantizacije, definiramo kvantizacijsku pogrešku kao:

$$e = Q_N[x] - x \,. \tag{11-14}$$

- Za operaciju zaokruživanja, kvantizacijska pogreška kreće se u rasponu:

$$-\Delta/2 < e \leq \Delta/2 \quad , \qquad (11\text{-}15)$$

- dok se kvantizacijska pogreška za operaciju zaokruživanja kreće u rasponu:

$$-\Delta < e \leq 0 \quad , \qquad (11\text{-}16)$$

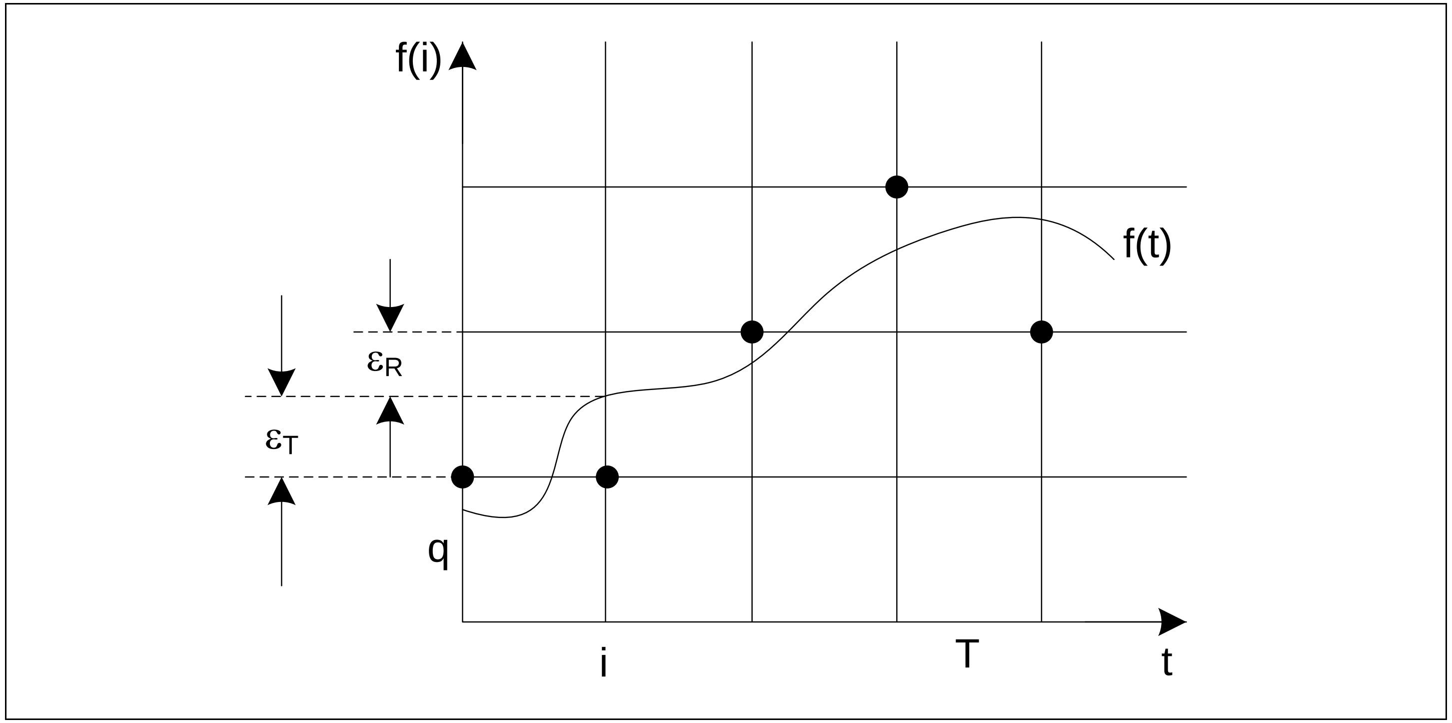
gdje Δ predstavlja najmanju razliku između brojeva, tj. granicu razlučivosti.

- Binarni se broj zaokružuje na *N*-bitova tako da se odabere broj unutar N-bitova koji je najbliži nezaokruženoj vrijednosti.

- Npr. 0.1100011 zaokružen na 4 bita je jednak 0.110.

- Npr. 0.1001010 zaokružen na 4 bita je 0.101.

Pogreške **odsijecanja i zaokruživanja** *u A/D pretvornicima:*



- A/D pretvornik treba odabrati takav da mu je razlučivost *q* nešto niža od najveće amplitude šuma koji se pojavljuje i koji je sastavni dio signala u stvarnome sustavu.

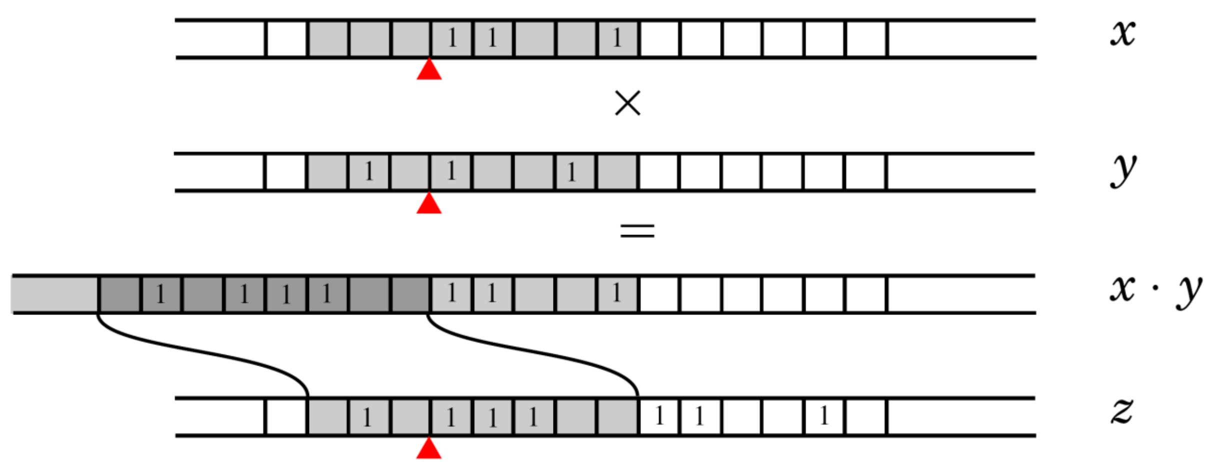
Odsijecanja i zaokruživanja pri izvođenju aritmetičkih operacija:

- Množenje uporabom decimalne aritmetike i riječi s 4 znamenke (za ilustraciju):

$$0.140 \cdot 0.140 = 0.0196$$

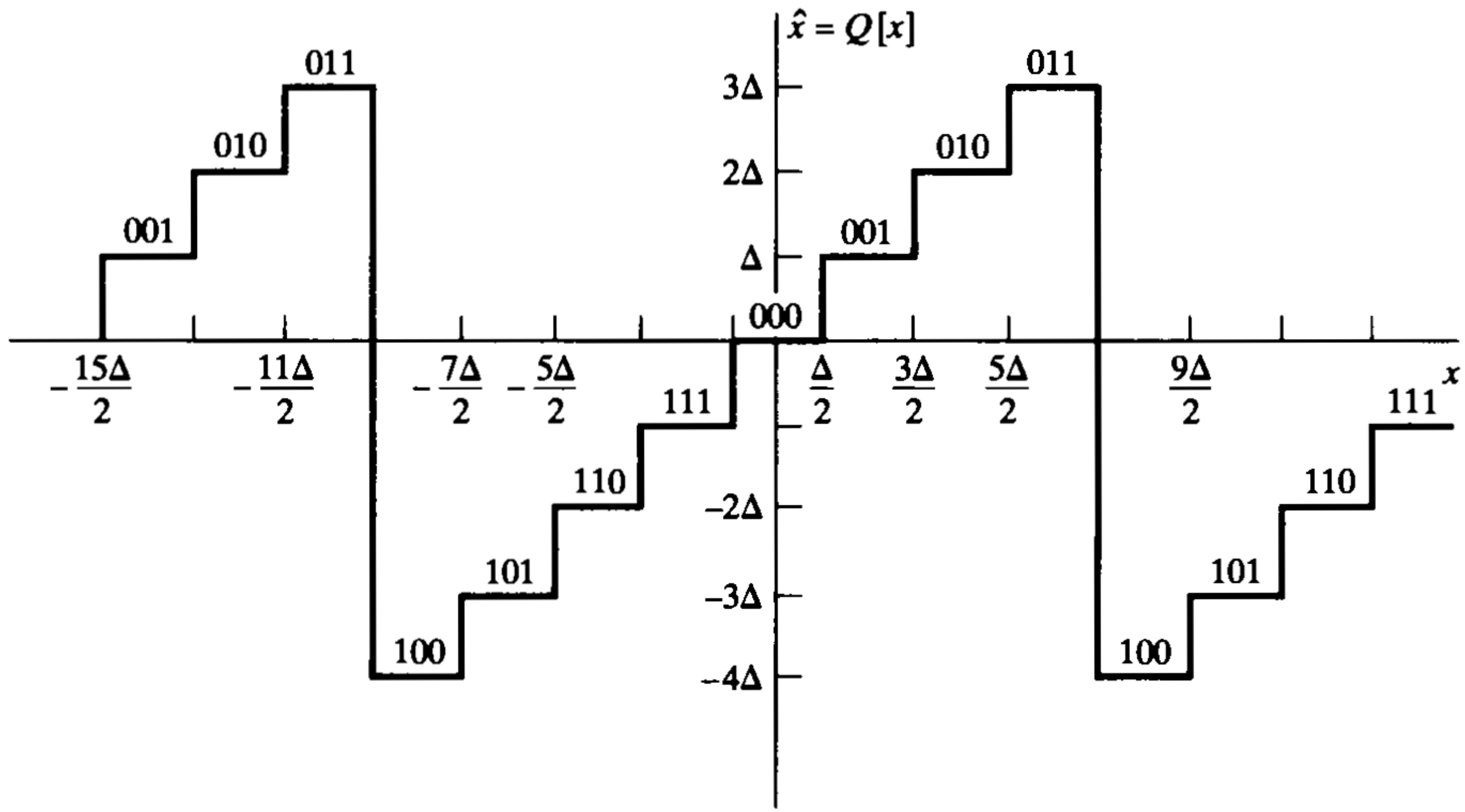
  - Odsijecanjem se dobije 0.019, pri čemu je pogreška odsijecanja jednaka $|\varepsilon_T| = 0.0006$, dok se zaokruživanjem dobije 0.020, tako da pogreška zaokruživanja iznosi $|\varepsilon_R| = 0.0004$

- Množenje u binarnoj aritmetici:

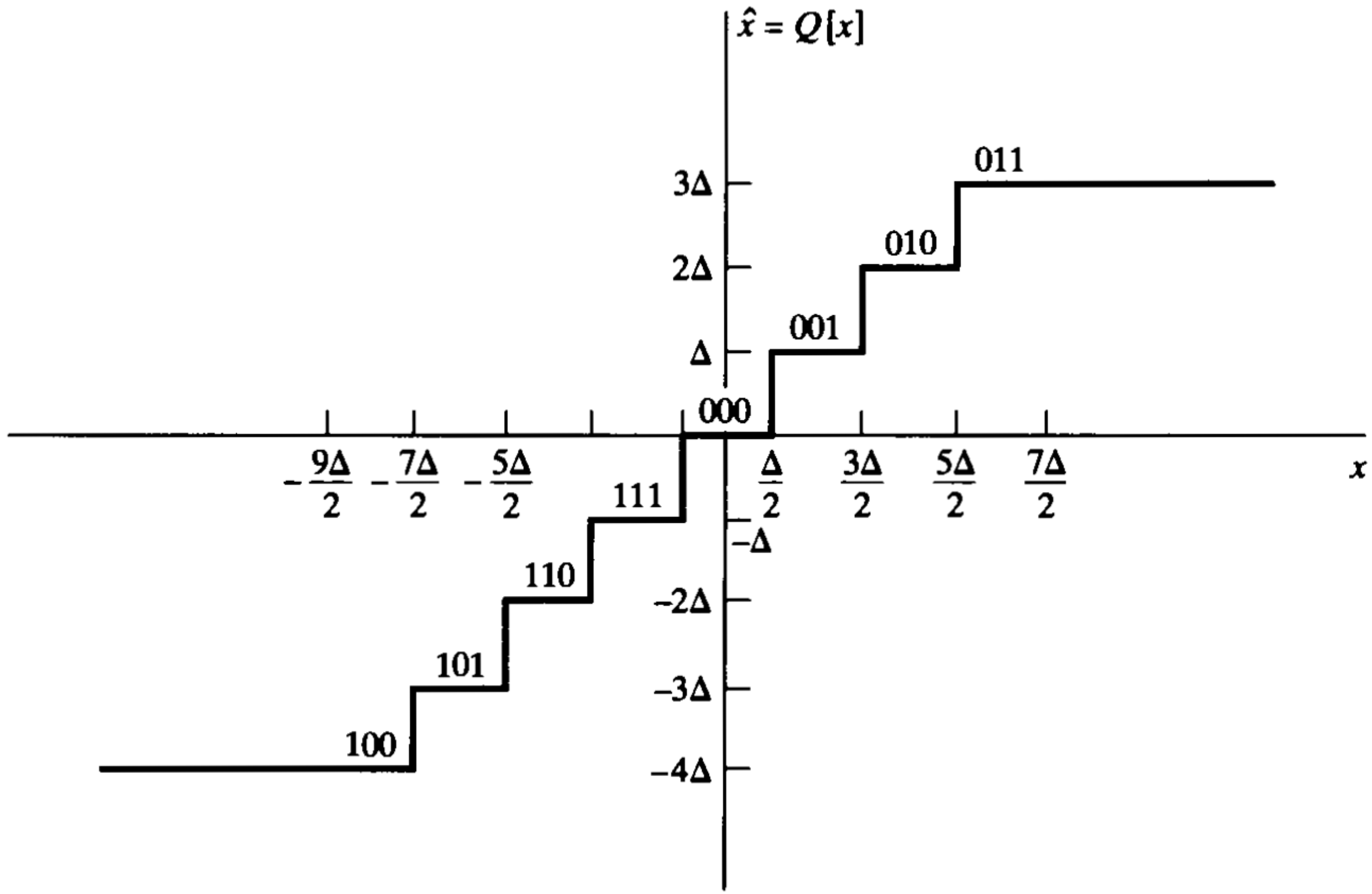


  - Problemi: odsijecanje/zaokruživanje, ali i preljev

- U slučaju da je broj veći od maksimalog mogućeg prikazivog broja, dogodio se preljev – kada se zbrajaju dva broja čija je suma veća od raspoloživog raspona brojeva.
- Npr., broj u zapisu dvojnog komplementa s četiri bita, koji u decimalnoj formi iznosi 7, je 0111. Ako se ovome broju doda broj 0001, prijenos propagira sve do bita za predznak, tako da je rezultat 1000, što u decimalnoj formi iznosi -8.
- Metoda zasićenja (saturation) obično je implementirana u A/D konverziji. U slučaju preljeva iznos pogreške ne skače naglo, međutim nedostatak joj je što ne sadrži korisno svojstvo aritmetike dvojnog komplementa:
    - 'Ako se nekoliko brojeva u zapisu dvojnog komplementa zbrajaju bez preljeva, tada je rezultat zbrajanja ovih brojeva točan, iako se možda dogodio preljev u pojedinim međusumama.'



Slika 11.9 Karakteristika uz zapis dvojnog komplementaza slučaj preljeva (N = 3)



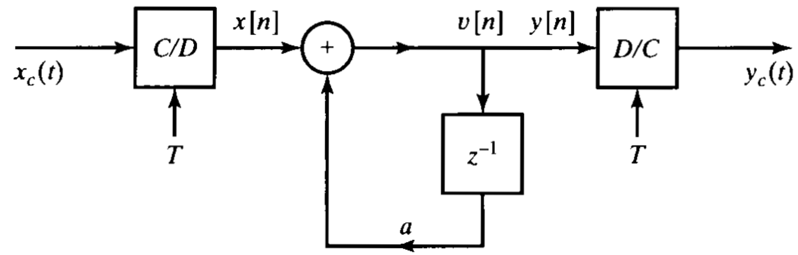
Slika 11.10 Karakteristika uz zapis dvojnog komplementa za slučaj zasićenja (N = 3)

Pogreške parametara pohranjenih u memoriji:

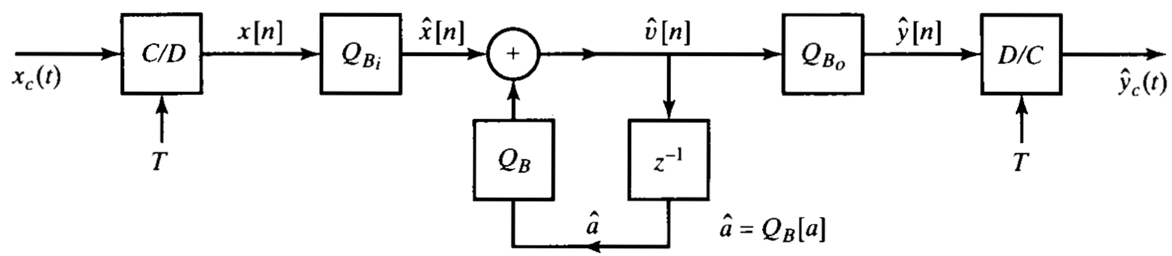
- Do ovih pogrešaka dolazi zbog konačne duljine riječi koju memorijske jedinice koriste za pohranu podataka, a potrebno je pohraniti podatak koji je zapisan u većoj točnosti od točnosti dodijeljene memorijske lokacije - zaokruživanje ili odsijecanje.

- *Primjer:*
  - Neka vremenska konstanta izračunata za prijenosnu funkciju *n*-tog reda koristeći 5-znamenkastu preciznost iznosi $a = 0.55436$ (0.100011011),
  - Neka je algoritam namijenjen implementaciji u 8-bitovnom računalu (rezolucija 8-bitovnog računala je $2^{-7} = 1/128$, 8. bit je predznak). Kao rezultat dobije se: $a = 0.546875$ (0.1000110).

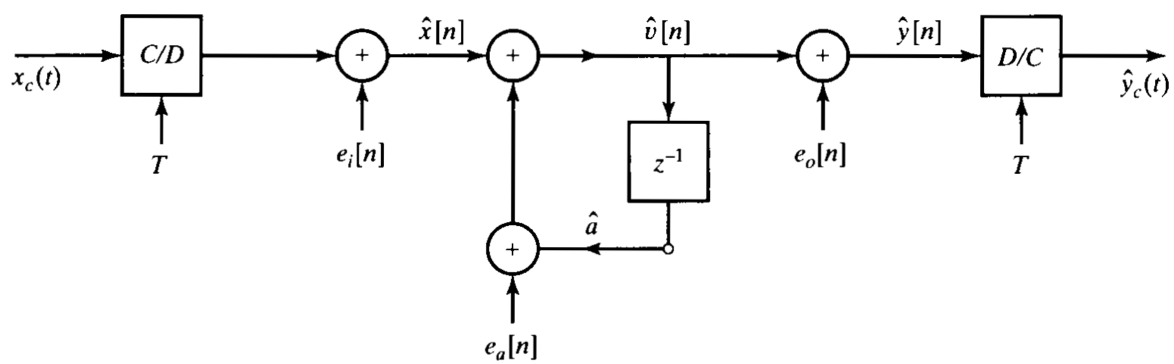
Statističko modeliranje pogreške odsijecanja i zaokruživanja:



(a)



(b)



- Slika (a) – idealni sustav u beskonačnoj preciznosti kojem je kontinuirani signal xc(t) uzorkovan kako bi se dobio niz x[n] koji predstavlja ulaz u sustav:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad .$$

- Slika (b) - sustav implementiran u binarnoj aritmetici od (B + 1) bitova (koeficijent a, varijabla $\hat{v}$[n-1], zbrajalo, umnožak $\hat{a}\hat{v}$[n-1] ima (2B + 1) bitova i rezultat se mora zaokružiti ili odsijecati na (B + 1) bitova prije nego se zbraja dalje s ulazom $\hat{x}$[n]. – nelinearni efekti

- Efekt kvantiziranja parametara sustava općenito se određuje odvojeno od efekta kvantizacije u konverziji podataka.
- Dakle, idealni koeficijenti prijenosne funkcije zamijenjeni su njihovim kvantiziranim vrijednostima te se zatim testiraju odzivi kako bi se primijetila eventualna degradiranja u performansama sustava te jesu li ta degradiranja dosegla neprihvatljive razine.
- Na primjer, ako je realni broj a kvantiziran na (B + 1) bitova, potrebno je razmotriti je li rezultirajući sustav prikazan sljedećim izrazom

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}z^{-1}} \ ,$$

dovoljno sličan željenoj prijenosnoj funkciji H(z).

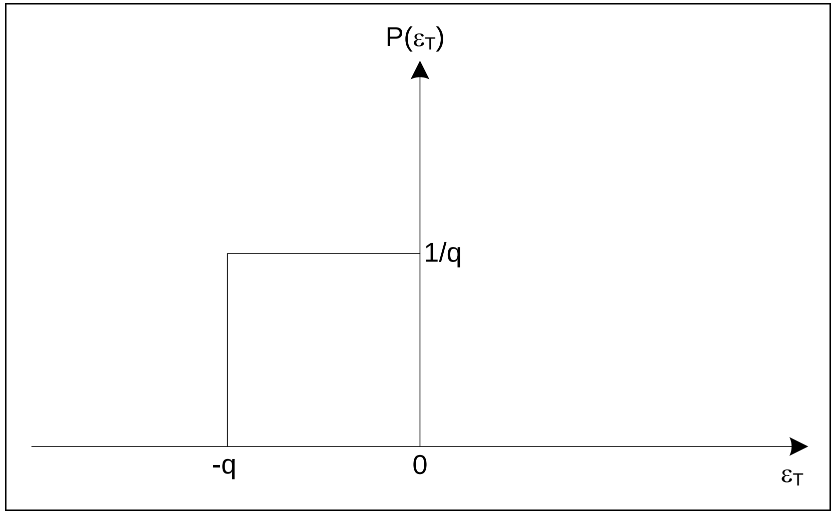
- Slika (c) - može se osigurati da se preljev dogodi samo rijetko te da su kvantizacijske pogreške male - linearizirani sustav u kojem su kvantizacijske pogreške zamijenjene pribrojenim izvorima šuma.

- Pretpostavlja se da je kvantizacijsku pogrešku ε moguće modelirati bijelim šumom, jednoliko raspodijeljenim u intervalu $[0, q]$.

- Također, pretpostavlja se da ne postoji veza između različitih izvora pogrešaka.

Statistički model pogreške odsijecanja:

- Na slici je prikazana statistička funkcija gustoće vjerojatnosti za pogrešku odsijecanja u cjelobrojnoj aritmetici dvojnog komplementa.



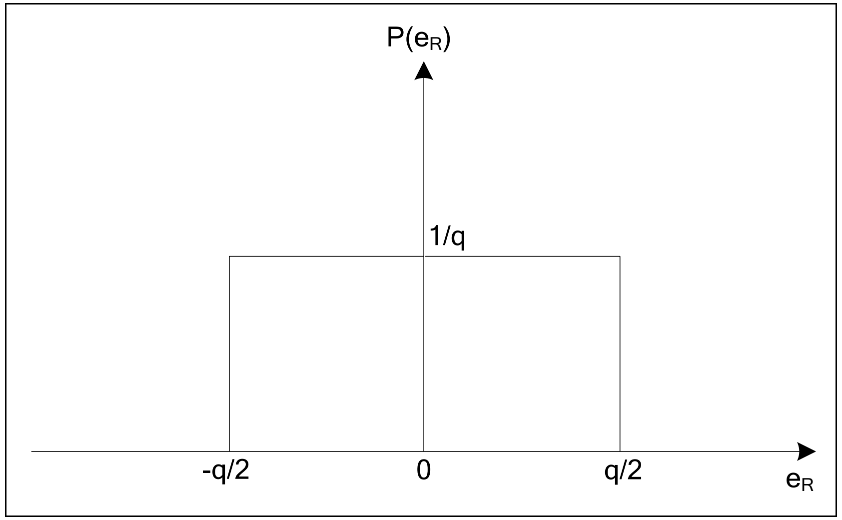
- Srednja vrijednost i varijanca pogreške odsijecanja ε_T iznose:

srednja vrijednost - $\bar{\varepsilon}_T = E\{\varepsilon_T\} = -\frac{q}{2},$

varijanca - $\sigma^2_{\varepsilon_T} = E\{\varepsilon_T\} = \int_{-q}^{0} \frac{1}{q}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_T)^2 d\varepsilon = \frac{q^2}{12}.$

Statistički model pogreške zaokruživanja:

- Na slici je prikazana funkcija gustoće vjerojatnosti za pogrešku zaokruživanja u cjelobrojnoj aritmetici dvojnog komplementa.



- Srednja vrijednost i varijanca pogreške zaokruživanja iznose:

srednja vrijednost - $\bar{\varepsilon}_R = E\left\{\varepsilon\right\} = 0,$

varijanca - $\sigma_R^2 = E\left\{\varepsilon_R^2\right\} = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q}\varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{q^2}{12}.$

Propagacija kvantizacijskog šuma kroz sustav:

- Propagacija kvantizacijskog šuma ε ovisi o prijenosnoj funkciji između ulazne točke ε i izlaza sustava.
- Promatrajući ponašanje izlaza sustava ($\bar{u}$ ili σ_u) u odnosu na ponašanje ulaznog šuma ($\bar{\varepsilon}$ ili σ_ε), gleda se je li algoritam upravljanja pojačava ili oslabljuje kvantizacijski šum.
- Pretpostavka je da je sustav stabilan, linearan i vremenski nepromjenjiv, impulsnog odziva h_i (ili prikazan prijenosnom funkcijom $H(z)$).
- Dovede li se ulazni signal $\varepsilon[i]$, zadan svojom srednjom vrijednošću $\bar{\varepsilon}$ ili varijancom σ_ε, tada je srednja vrijednost izlaznog signala u dana izrazom:

$$\bar{u} = E\{u_i\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k E\{\varepsilon_{i-k}\},$$

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} h_k .$$

- Alternativno, koristeći izraz za prijenosnu funkciju u diskretnom području, može se pisati:

$$\bar{u}(z) = H(z)\bar{\varepsilon}(z),$$

no, kako je $\bar{\varepsilon}$ = konst., koristi se teorem o konačnoj vrijednosti

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) H(z).$$

Napomene:

- Kvantizacijski se šum može smanjiti povećanjem točnosti pri zaokruživanju koeficijenata (veći broj bitova).
- Propagacija i pojačanje kvantizacijskog šuma ovise o primijenjenom obliku implementacije algoritma upravljanja.
- U pravilu paralelna implementacija manje pojačava kvantizacijski šum, ali je najbolje to provjeriti simulacijom.

SKALIRANJE

- Radi smanjenja pojave preljeva
- Potrebno je osigurati da signali na izlazu iz zbrajala imaju amplitudu manju od jedinice kako bi se izbjegao preljev.
- Ako $w_k[n]$ predstavlja vrijednost signala kojeg treba ograničiti, a $h_k[n]$ neka označava impulsni odziv od ulaza x[n] do varijable $w_k[n]$, tada vrijedi

$$\left|w_k[n]\right| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h_k[m]\right| . \qquad (11\text{-}17)$$

- Ograničenje

$$\left|w_k[n]\right| \le x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h_k[m]\right| \qquad (11\text{-}18)$$

Dobiveno je zamjenom x[n-m] s njegovom maksimalnom vrijednošću x_{max}. Iz toga slijedi da je dovoljan uvjet za $|w_k[n]| < 1$

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|} . \qquad (11\text{-}19)$$

- Ako x_{max} ne zadovoljava prethodno napisani uvjet, tada se može x[n] pomnožiti, tj. skalirati s koeficijentom *s* na ulazu u sustav tako da

$$s \cdot x_{\max} < \frac{1}{\max_k \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \right]} . \qquad (11\text{-}20)$$

- Drugi pristup skaliranju počinje pretpostavkom da je ulaz uskopojasni signal koji se modelira na način da je $x[n] = x_{max}\cos(\omega_0 n)$. U tom slučaju vrijedi

$$w_k[n] = \left| H_k(e^{j\omega_0}) \right| x_{\max} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0})) . \qquad (11\text{-}21)$$

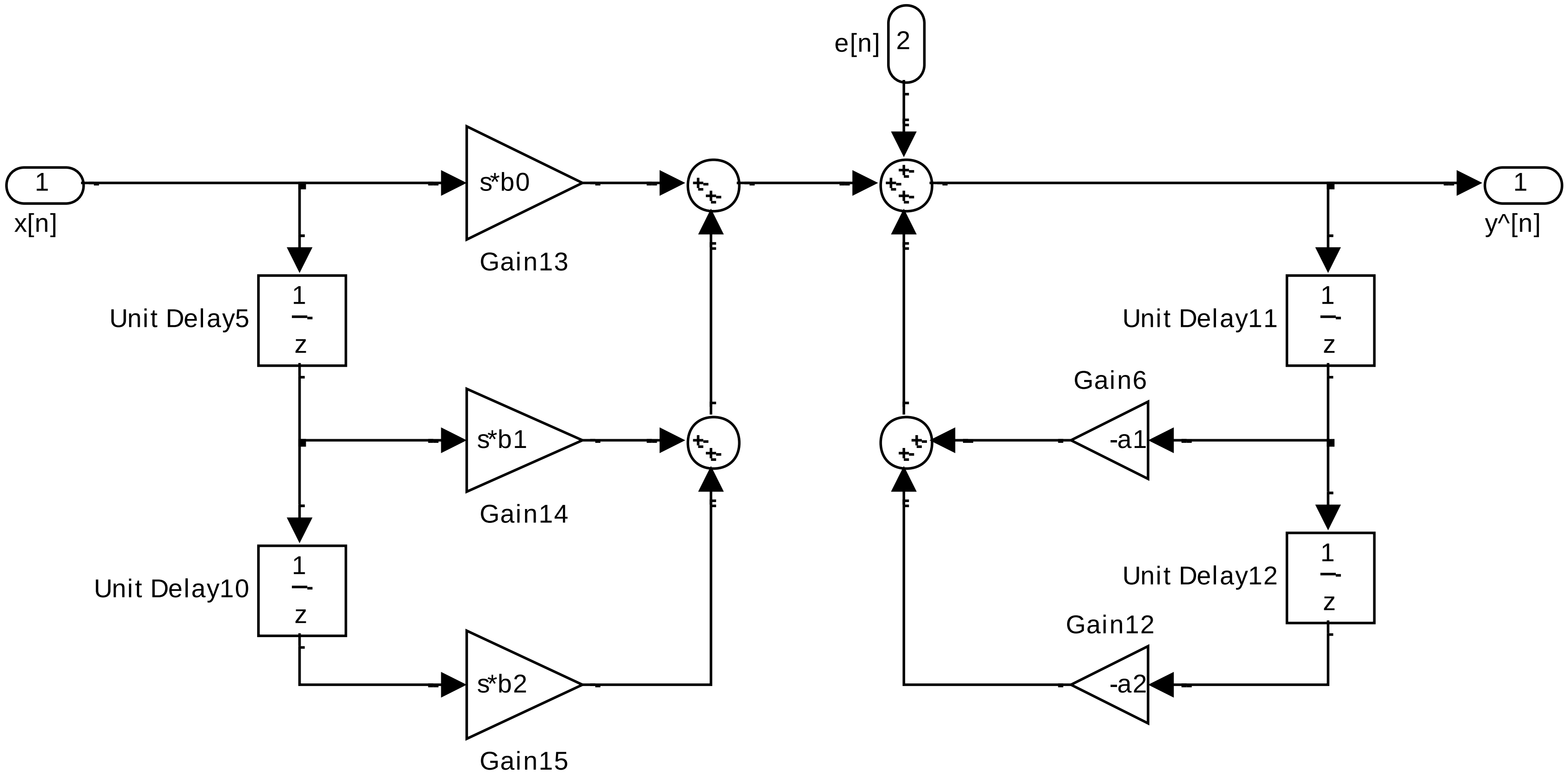
- Stoga, preljev je izbjegnut za sve sinusoidalne signale ako vrijedi

$$\max_{k,|\omega|\le\pi} \left|H_k(e^{j\omega})\right| x_{\max} < 1 \quad , \qquad (11\text{-}22)$$

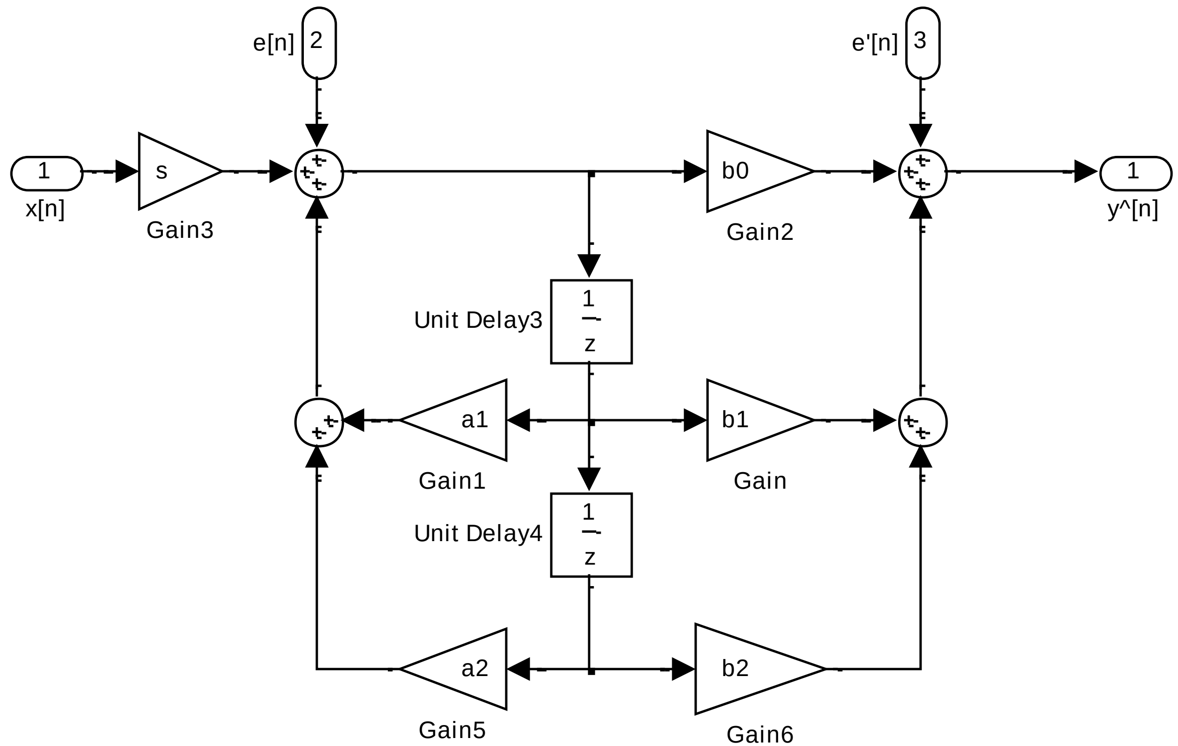
- ili je ulaz skaliran s koeficijentom s koji zadovoljava

$$s x_{\max} < \frac{1}{\max\limits_{k,|\omega|\le\pi} \left|H_k(e^{j\omega})\right|} \quad . \qquad (11\text{-}23)$$

- Faktore skaliranja moguće je pronaći tako što se proračuna impulsni odziv ili frekvencijski odziv numerički.
- Ako se ulaz mora proporcionalno smanjiti (s<1), omjer signala i šuma (SNR) na izlazu sustava će biti smanjen.



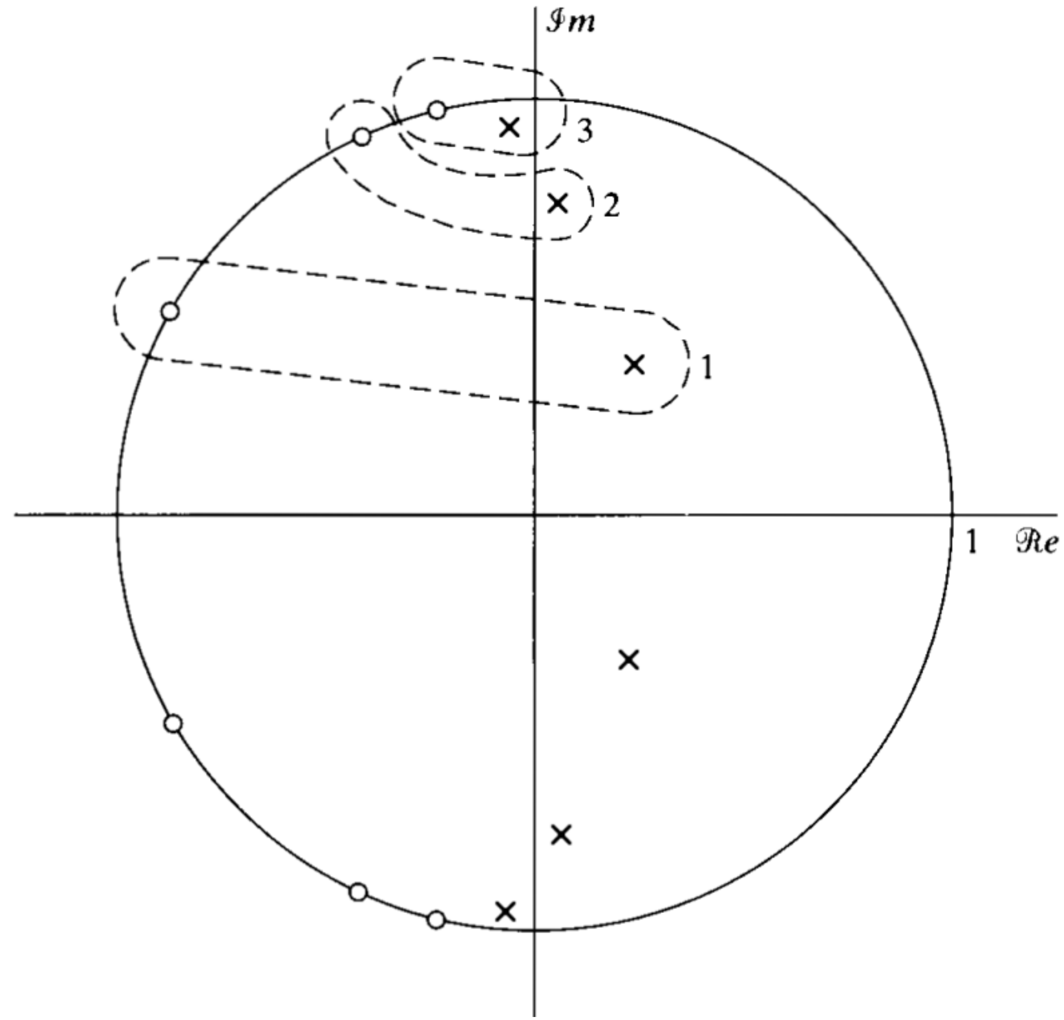
Slika 11.11 Skaliranje sustava u direktnoj I izvedbi



Slika 11.12 Skaliranje sustava u direktnoj II izvedbi

- U slučaju analize serije ili paralele, potrebno je distribuirati pojačanje po podsekcijama tako da se u svakoj podsekciji izbjegne preljev.
- Postoje jednostavna Jacksonova pravila kojima se u većini slučajeva dobivaju dobri rezultati:

- Pol koji je najbliži jediničnoj kružnici trebao bi se grupirati s nulom koja je najbliža jediničnoj kružnici u z-ravnini – da se smanji rezonantno izdizanje ampl. frekv. kar. sekcije jer bliski pol i nula imaju manje pojačanje ampl. frekv. kar. od udaljenog pola i nule, a bliski pol i nula koji su blizu jedinične kružnice imaju veće rezonantno izdizanje od bliskog pola i nule koji su dalje od jedinične kružnice
- Prethodno pravilo trebalo bi se opetovano primjenjivati sve dok sve nule i polovi nisu grupirani.
- Rezultirajuće podsekcije drugoga reda trebale bi se postaviti redoslijedom koji odgovara ili rastućoj blizini jedinične kružnice ili padajućoj.



Slika 11.13 Primjer grupiranja i redoslijeda podsekcija za sustav šestoga reda

11.3. POGREŠKE KOEFICIJENATA I NJIHOV UTJECAJ NA DINAMIKU REGULATORA

- Kada se parametri racionalne prijenosne funkcije ili odgovarajuće diferencijalne jednadžbe kvantiziraju, polovi i nule sustava pomiču se na nove pozicije u z ravnini.
- Također, frekvencijski odziv se odmiče od svoje izvorne vrijednosti.
- Ako je implementacijska struktura jako osjetljiva na promjene koeficijenata rezultirajući sustav možda više neće zadovoljavati izvorne specifikacije ili će možda postati nestabilan.
- Detaljna analiza osjetljivosti za opći slučaj je kompleksna
- Potrebno je razmotriti kako je kvantizacija koeficijenata utjecala na prijenosnu funkciju.
- Prijenosna funkcija direktnih izvedbi dana je s:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} .$$

- Koeficijenti a_k i b_k su idealni realni koeficijenti koji nakon kvantizacije čine sljedeću prijenosnu funkciju:

$$\hat{H}(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}\hat{b}_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_k z^{-k}} \quad ,$$

gdje su $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ te $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ kvantizirani koeficijenti koji se razlikuju od početnih koeficijenata za vrijednost kvantizacijskih pogrešaka Δa_k i Δb_k .

- Jednostavan način provjeravanja utjecaja osjetljivosti položaja polova sustava je sljedeća funkcija osjetljivosti:

$$S_{p_i}^{a_k} = \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \quad ,$$

pri čemu su a_k koeficijenti, a p_i korijeni polinoma, tj. polovi sustava.

- Neka je karakteristični polinom sustava dan izrazom:

$$A(z) = 1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^{N}(1-p_k z^{-1}) \quad .$$

- Primjenom pravila o derivaciji složene funkcije dobije se:

$$\frac{\partial A(z)}{\partial a_k} = \frac{\partial A(z)}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \quad .$$

- Sređivanjem prethodnog izraza dobije se:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\partial A(z) / \partial a_k}{\partial A(z) / \partial p_i} = \frac{-z^{-k}}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{N} (1 - p_j z^{-1})(-z^{-1})} \quad .$$

- Zatim uvrštenjem $z = p_i$ u gornji izraz dobije se:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{n-k}}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{N} (p_i - p_j)} \quad .$$

- Može se zaključiti da ako su polovi sustava blizu jedan drugome, tada je osjetljivost velika.
- Najveća je osjetljivost položaja polova na iznos parametra a_n, uz pretpostavku stabilnog regulatora, tj. $|p_i| < 1$.
- Konjugirano-kompleksni polovi blizu realne osi predstavljaju nepovoljan slučaj.

- Dodatno, što je veći broj zbijenih polova to je veća osjetljivost. Analogno razmatranje vrijedi i za nule sustava.
  - Prednosti kaskadne i paralelne izvedbe proizlazi iz činjenice da se zasebno realiziraju pojedini segmenti prijenosne funkcije regulatora.
  - Svaki od segmenata realizira se u direktnoj izvedbi pa za njih vrijede relacije za osjetljivost polova i nula o iznosu koeficijenata.
  - U paralelnoj formi na nule sustava utječu kvantizacijske pogreške u koeficijentima nazivnika i brojnika svih podsekcija.

11.4. NELINEARNA SVOJSTVA REGULATORA UZROKOVANA KVANTIZACIJOM

- Prijenosna funkcija zapisana cjelobrojnom aritmetikom konačne duljine riječi predstavlja nelinearni sustav s povratnom vezom kod kojega su moguće nelinearne pojave poput pojasa neosjetljivosti ili graničnog perioda.

- Kod analogno-digitalnog pretvornika s konačnom duljinom riječi također je moguća pojava graničnog perioda za cijeli sustav s povratnom vezom.

- Na primjeru je prikazano pojavljivanje pojasa neosjetljivosti i graničnog perioda pri korištenju decimalne aritmetike.

- Upotrebljava se ekvivalent odsijecanju kod aritmetike dvojnog komplementa, npr. 5.6 će postati 5, dok će -5.6 postati -6.

Pojas neosjetljivosti (*engl. deadband*):

- Uzmimo prijenosnu funkciju prvog reda

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{1-0.9z^{-1}},$$

ulaz neka bude jedinična skokovita funkcija

$$u(z) = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

početni uvjet neka je

$$y[0] = 3.$$

- Izlaz je tada izračunan rekurzivnom jednadžbom diferencija

$$y[k+1] = 0.9y[k] + u[k+1].$$

- Izračunane vrijednosti y_k primjenom decimalne aritmetike dane su u tablici:

k	u_k	y_k	zaokruženo	y_k	odsječeno
0	0	3	3	3	3
1	1	3.7	4	3.7	3
2	1	4.6	5	3.7	3
3	1	5.5	6	3.7	3
4	1	6.4	6	3.7	3
5	1	6.4	6	3.7	3

- Može se utvrditi postojanje pojasa neosjetljivosti:
  - pri zaokruživanju, uz početne uvjete izlaza y_k u intervalu $[6,15]$, izlaz ostaje u stabilnom stanju određenom početnim uvjetima.
  - U slučaju da su početni uvjeti ispod vrijednosti 6, izlaz nakon nekoliko koraka dolazi do vrijednosti 6, a u slučaju da su početni uvjeti izlaza iznad 15, izlaz u nekoliko koraka dolazi do vrijednosti 15 i ostaje u njoj što govori da postoji pojas neosjetljivosti u intervalu $[6,15]$.

- pri odsijecanju, uz početnu vrijednost izlaza u intervalu $[1,10]$, izlaz ostaje nepromijenjen i istog je iznosa kao i početna vrijednost.
- U slučaju da je početna vrijednost manja od 1, izlaz u nekoliko koraka dolazi u vrijednost 1 i ostaje u njoj; u slučaju da je izlaz veći od 10, on u nekoliko koraka dolazi u vrijednost 10 i ostaje u njoj. Pojas neosjetljivosti se nalazi u intervalu $[1,10]$.

***Granični period* (*engl. Limit Cycle*):**

- Diskretna prijenosna funkcija prvog reda dana je izrazom

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{1+0.9z^{-1}},$$

ulazni impuls neka je $u(z)=10$, a početno stanje $y[0]=0$.

- Izlaz je dan izrazom

$$y[k+1] = -0.9y[k] + u[k+1].$$

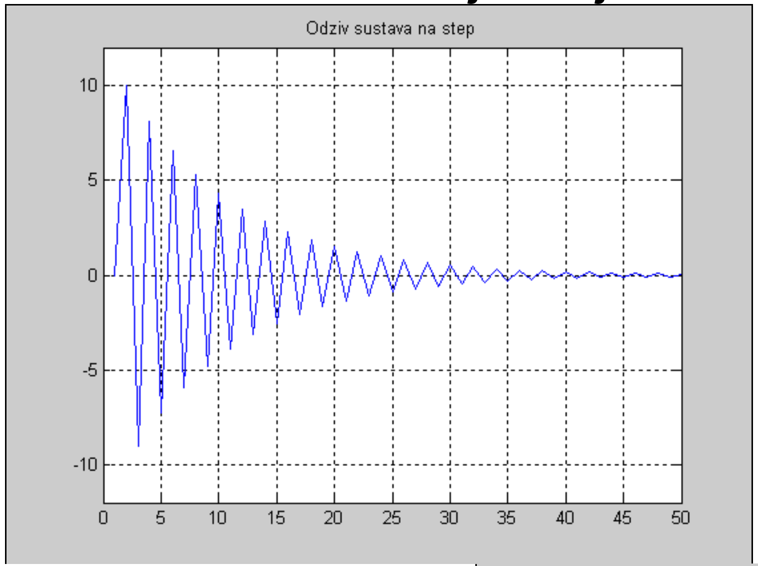
- Za beskonačnu duljinu riječi, vrijednost izlaza iznosi:

$$y_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}} 10 = 0.$$

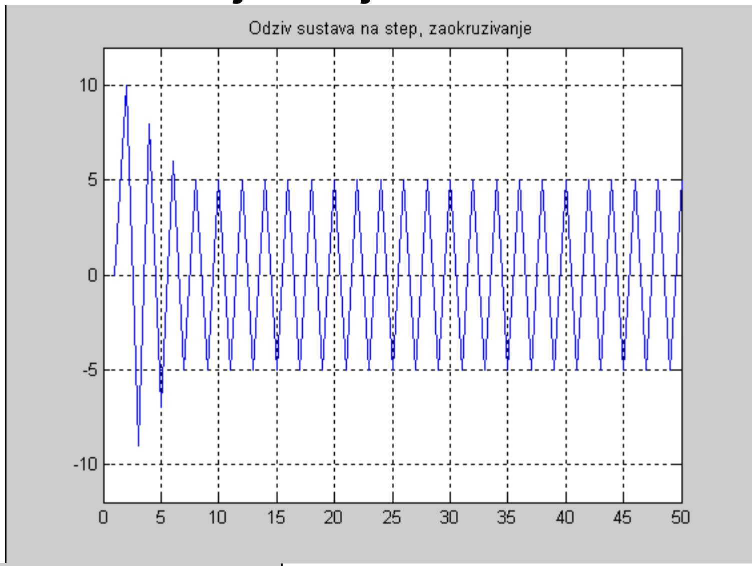
- Izračunane vrijednosti y_k za konačnu duljinu riječi dane su u tablici, a prikazane su grafički na slikama na sljedećoj stranici.

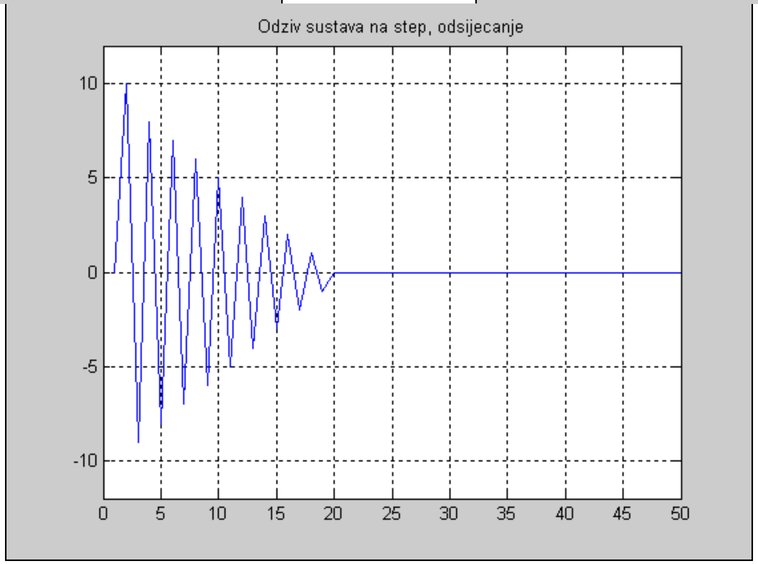
k	u_k	y_k	zaokruženo	y_k	odsječeno
0	0	0	0	0	0
1	10	10	10	10	10
2	0	-9	-9	-9	-9
3	0	8.1	8	8.1	8
4	0	-7.3	-7	-7.3	-8
5	0	6.3	6	7.2	7
6	0	-5.4	-5	-6.3	-7
7	0	4.5	5	6.3	6
8	0	-4.5	-5	-5.4	-6
9	0	4.5	5	5.4	5

Beskonačna duljina riječi



Konačna duljina riječi - zaokruživanje





Konačna duljina riječi - odsijecanje