Digitalni sustavi upravljanja 2022./2023.

Akademik Ivan Petrović

Prof. dr. sc. Marija Seder

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 10 – Analitički postupci sinteze

Sadržaj poglavlja:

10.1. Uvod u sintezu analitičkim postupcima

10.2. Postupak sinteze prema Truxal-Guilleminu (John G. Truxal and Ernst Adolf Guillemin)

10.3. Postupak sinteze prema Ragazziniju (John R. Ragazzini)

10.1. Uvod u sintezu analitičkim postupcima

- Metode sinteze na temelju frekvencijskih karakteristika spadaju u posredne postupke sinteze.
  - Polazište pri sintezi je otvoreni regulacijski krug opisan frekvencijskom karakteristikom ili prijenosnom funkcijom.
  - Željeno vladanje zatvorenog regulacijskog kruga postiže se dodavanjem različitih kompenzacijskih (korekcijskih) članova koji modificiraju frekvencijsku karakteristiku otvorenog regulacijskog kruga, a time posredno i frekvencijsku karakteristiku zatvorenog regulacijskog kruga.
  - Posredni postupci sinteze obavljaju se u pravilu u više koraka; pri tome je posebno važno iskustvo i vještina projektanta.

- **Analitički postupci sinteze spadaju u neposredne postupke sinteze, jer je polazište pri sintezi zatvoreni regulacijski krug** opisan željenom prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G_r(s) \overset{!}{=} G_m(s)}, \quad \text{- u kontinuiranom području} \qquad (10\text{-}1)$$

$$\boxed{G_r(z) \overset{!}{=} G_m(z)} \quad \text{- u diskretnom području}$$

gdje je $G_m(s)$, $G_m(z)$ - željena (modelska) prijenosna funkcija zatvorenog sustava (referentni model).

- $G_m(\cdot)$ proizlazi iz specifikacije kakvoće koja se obično zasniva na odgovarajućoj prijelaznoj funkciji $h_r(t)$.
- Za niz prikladnih prijelaznih funkcija $h_r(t)$ načinjene su tablice pripadajućih prijenosnih funkcija $G_m(\cdot)$, s točno definiranim rasporedom polova i nula.
- Ovakav neposredni postupak sinteze <u>nije primjenljiv na procese s mrtvim vremenom</u>.
- Uz poznato vladanje procesa i uz odabrani $G_m(\cdot)$ može se tada neposredno projektirati odgovarajući regulator.

Standardni oblici modelskih prijenosnih funkcija $G_m(s)$ i $G_m(z)$:

- Neka je željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na referentnu vrijednost dana izrazom:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}, \quad u > v}. \qquad (10\text{-}2)$$

- Rasporedom polova i nula u (10-2), što se postiže odgovarajućim izborom parametara α_i i β_i, dobije se željena prijelazna funkcija $h_x(t)$.

- Čest je slučaj da je polinom u brojniku (10-2) nultog reda (nema nula) te da je

$$\boxed{G_m(0) \overset{!}{=} 1}.$$

- Tada je $\alpha_0 = \beta_0$ pa slijedi:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}}. \qquad (10\text{-}3)$$

- Za razne željene prijelazne funkcije $h_r(t)$ postoje tzv. **standardni (prototipni) oblici** prijenosne funkcije $G_m(s)$ (prema (10-3)) za koje su određeni parametri β_i (dani u tabličnom obliku, a određuju raspored polova).

- U nastavku je prikazano nekoliko često korištenih standardnih oblika:

a) Binomni oblik

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\omega_n^u}{(s+\omega_n)^u} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}}, \qquad (10\text{-}4)$$

- Ovaj oblik odgovara serijskoj vezi *u* PT_1 - članova s istom vremenskom konstantom $T_m = \dfrac{1}{\omega_n}$.
- Standardni polinomi ***β(s)*** za različite redove glase:

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n{}^2$$

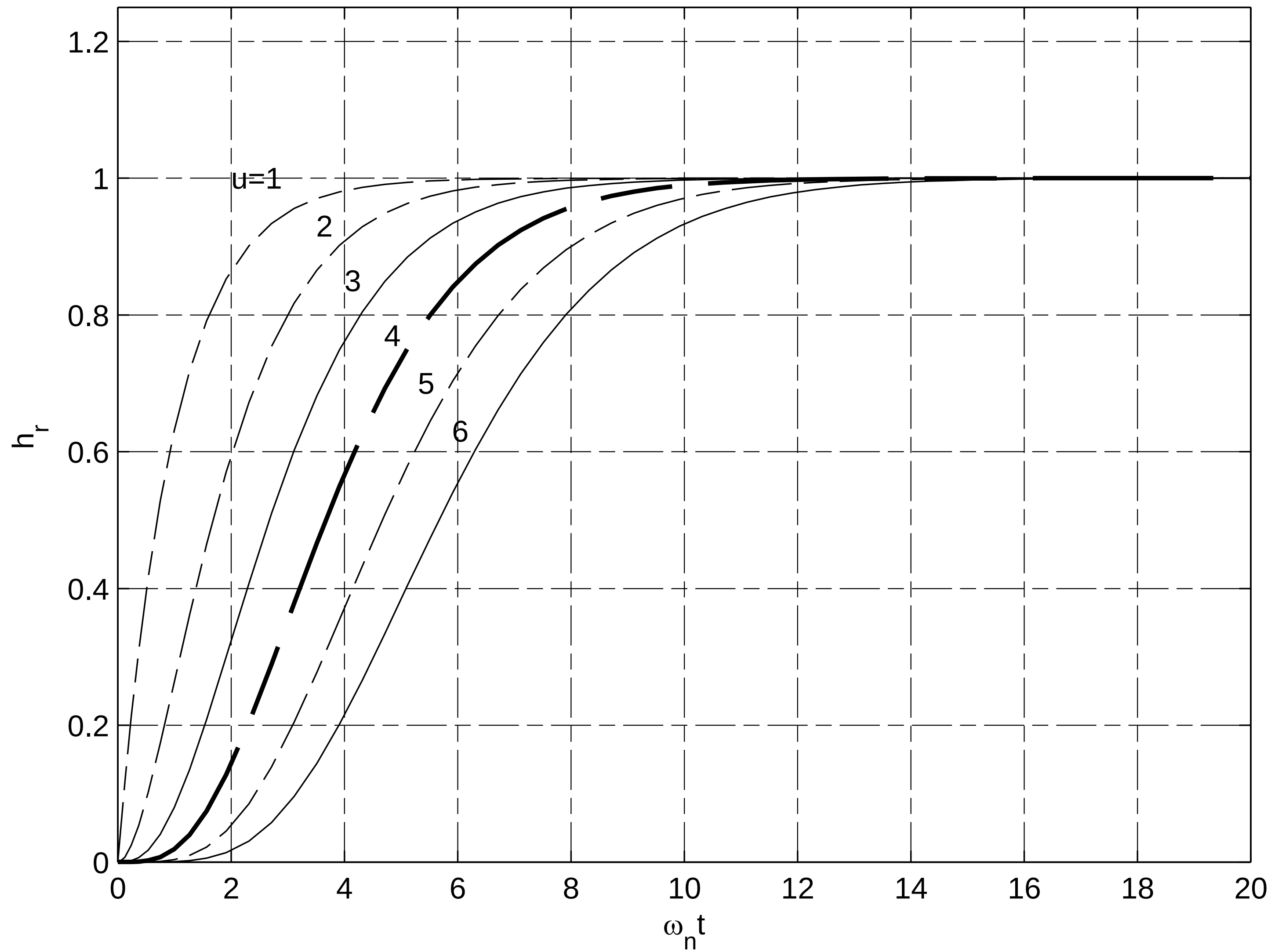
$$s^3 + 3\omega_n s^2 + 3\omega_n{}^2 s + \omega_n{}^3$$

$$s^4 + 4\omega_n s^3 + 6\omega_n{}^2 s^2 + 4\omega_n{}^3 s + \omega_n{}^4$$

$$s^5 + 5\omega_n s^4 + 10\omega_n{}^2 s^3 + 10\omega_n{}^3 s^2 + 5\omega_n{}^4 s + \omega_n{}^5$$

$$s^6 + 6\omega_n s^5 + 15\omega_n{}^2 s^4 + 20\omega_n{}^3 s^3 + 15\omega_n{}^4 s^2 + 6\omega_n{}^5 s + \omega_n{}^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 10.1.
- Vidimo da $h_r(t)$ nema regulacijskog nadvišenja. Porastom reda *u* $h_r(\omega_n t)$ poprima sporiji odziv.



Sl. 10.1. Prijelazne funkcije za binomne modelske oblike.

b) Butterworthov oblik

- Standardni polinomi ***β(s)*** za različite redove glase:

$$s+\omega_n$$

$$s^2+1.4\omega_n s+\omega_n^2$$

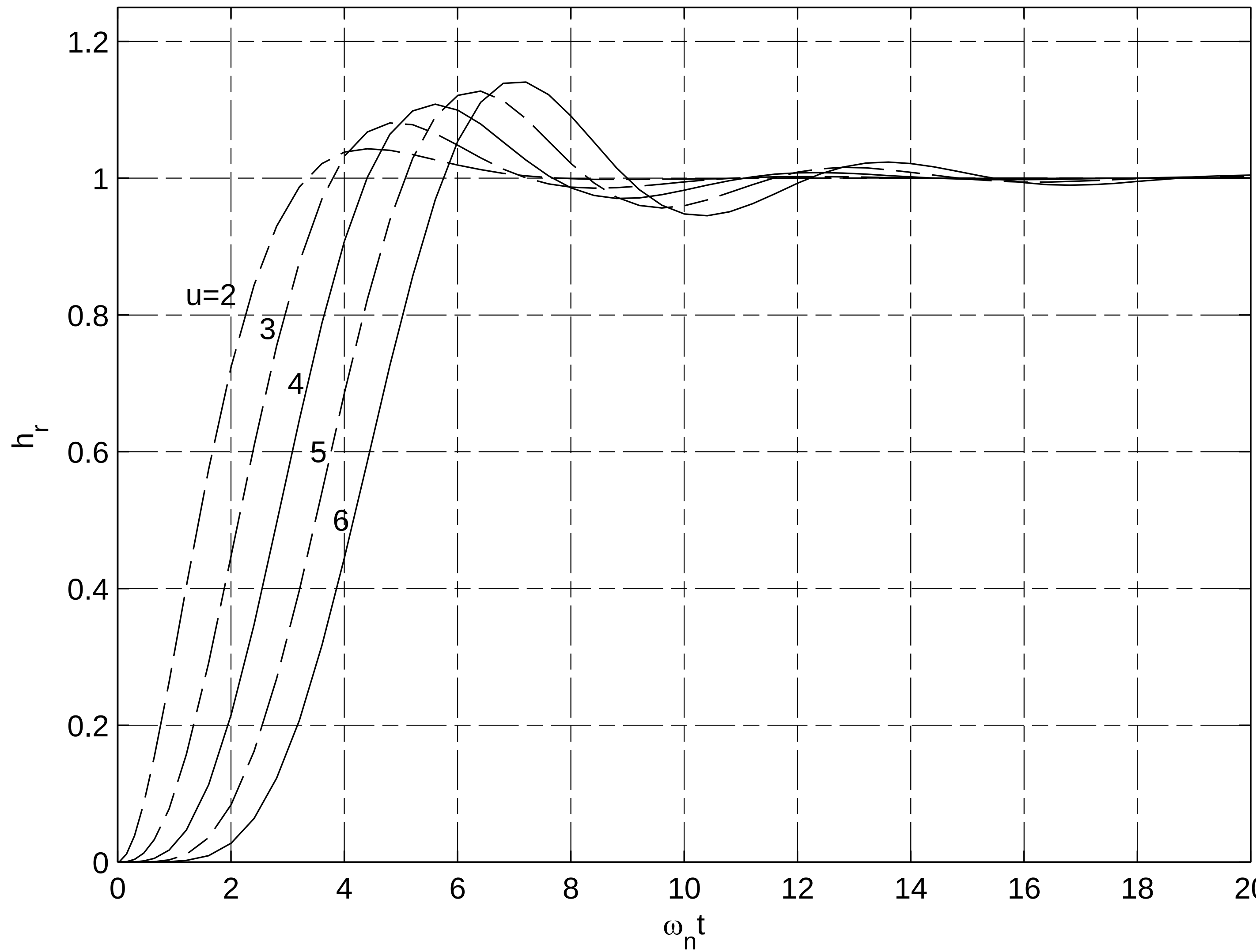
$$s^3+2.0\omega_n s^2+2.0\omega_n^2 s+\omega_n^3$$

$$s^4+2.6\omega_n s^3+3.4\omega_n^2 s^2+2.6\omega_n^3 s+\omega_n^4$$

$$s^5+3.24\omega_n s^4+5.24\omega_n^2 s^3+5.24\omega_n^3 s^2+3.24\omega_n^4 s+\omega_n^5$$

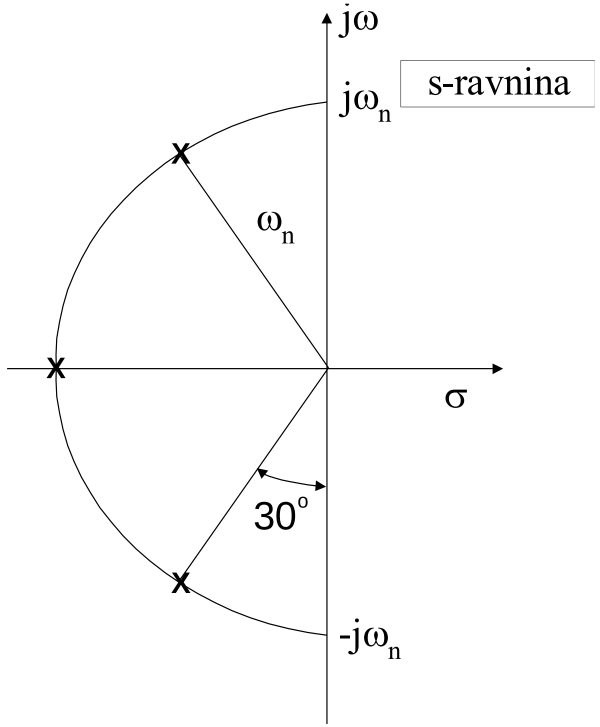
$$s^6+3.86\omega_n s^5+7.46\omega_n^2 s^4+9.14\omega_n^3 s^3+7.46\omega_n^4 s^2+3.86\omega_n^5 s+\omega_n^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r\left(\omega_n t\right)}$ prikazane su na slici 10.2.
- Vidimo da $h_r(t)$ ima regulacijsko nadvišenje, ali je brži odziv nego kod binomnih oblika.



Sl. 10.2. Prijelazne funkcije za Butterworthove modelske oblike.

- Polovi prijenosne funkcije (10-3) ravnomjerno su razmješteni u lijevoj poluravnini s-ravnine na kružnici s radijusom ω_n.
- Uočava se zakonitost među koeficijentima. Regulacijsko nadvišenje raste s redom polinoma. Sustav postaje sporiji s povećanjem reda.
- Npr. za 3. red standardnog polinoma u Butterworthovom obliku dobije se:



Sl. 10.3.

c) Standardni oblici zasnovani na integralnim kriterijima

- Standardni polinomi prijenosne funkcije (10-3) mogu proizaći i iz integralnih kriterija. Primjerice, za *I₄* integralni kriterij:

$$\boxed{\int_0^\infty |e(t)| \cdot t \cdot dt}, \qquad (10\text{-}5)$$

standardni polinomi ***β(s)*** za različite redove glase:

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.505\omega_n s + \omega_n^{\ 2}$$

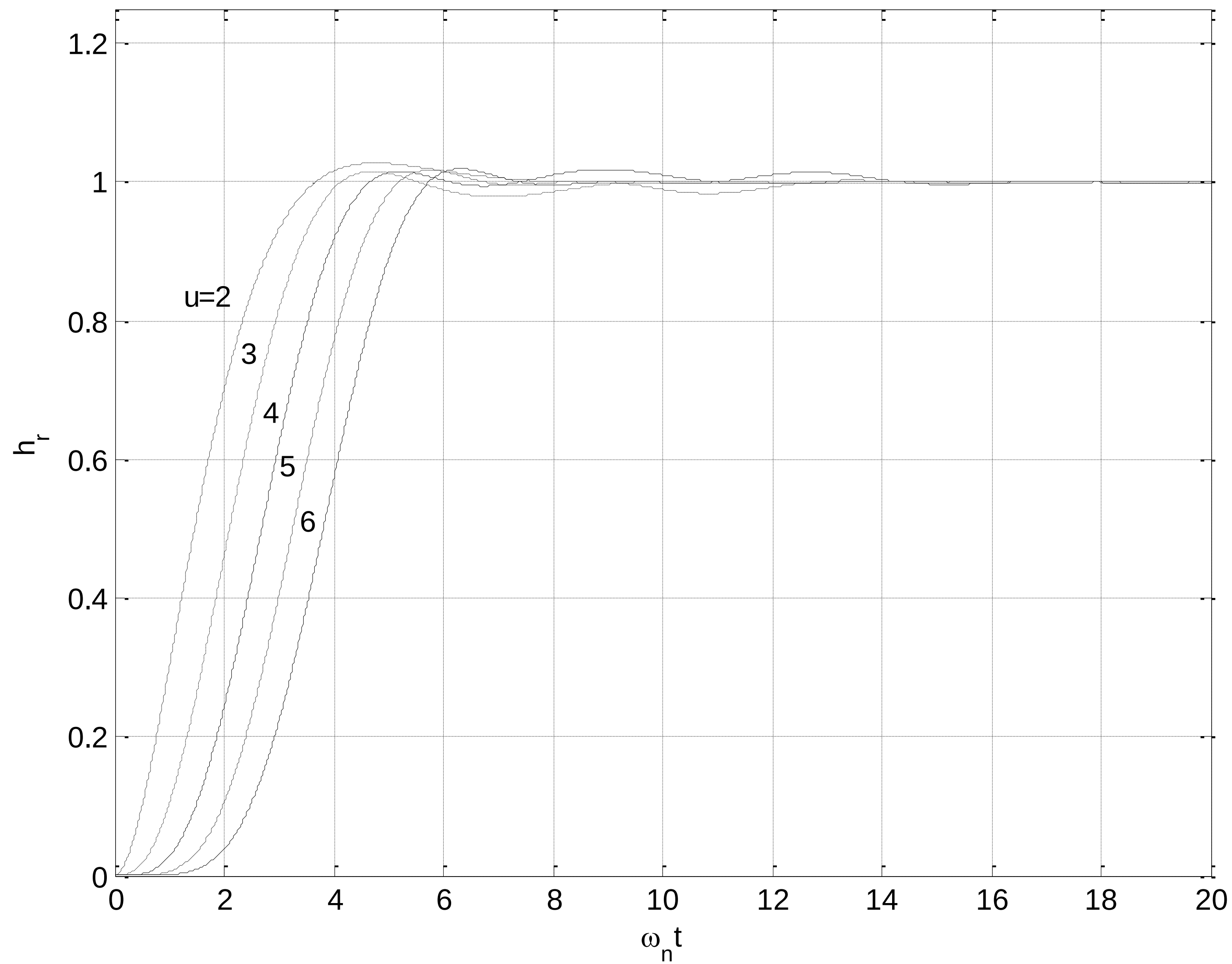
$$s^3 + 1.783\omega_n s^2 + 2.172\omega_n^{\ 2} s + \omega_n^{\ 3}$$

$$s^4 + 1.953\omega_n s^3 + 3.347\omega_n^{\ 2} s^2 + 2.648\omega_n^{\ 3} s + \omega_n^{\ 4}$$

$$s^5 + 2.068\omega_n s^4 + 4.499\omega_n^{\ 2} s^3 + 4.675\omega_n^{\ 3} s^2 + 3.257\omega_n^{\ 4} s + \omega_n^{\ 5}$$

$$s^6 + 2.152\omega_n s^5 + 5.629\omega_n^{\ 2} s^4 + 6.934\omega_n^{\ 3} s^3 + 6.792\omega_n^{\ 4} s^2 + 3.740\omega_n^{\ 5} s + \omega_n^{\ 6}$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 10.4.

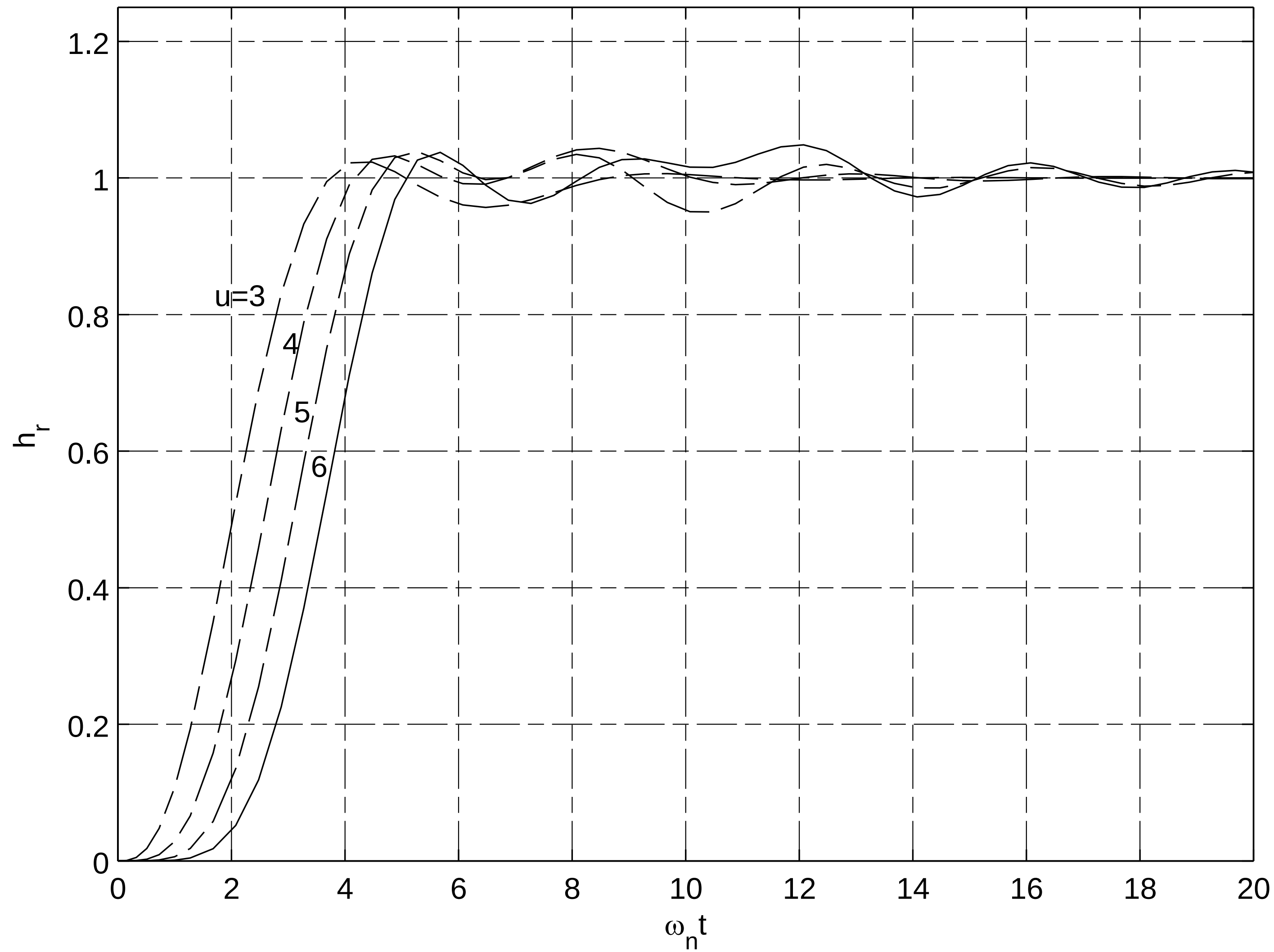


Sl. 10.4. Prijelazne funkcije za modelske oblike prema kriteriju (10-5)

- Standardni oblik, koji se zasniva na integralnom kriteriju, kojim se **minimizira vrijeme ustaljivanja t_ε** također se često koristi.
- Primjerice, standardni polinomi za minimalno vrijeme smirivanja uz vrijednost $t_{5\%}$ glase:

$$s+\omega_n$$
$$s^2+1.4\omega_n s+\omega_n^2$$
$$s^3+1.55\omega_n s^2+2.10\omega_n^2 s+\omega_n^3$$
$$s^4+1.60\omega_n s^3+3.15\omega_n^2 s^2+2.45\omega_n^3 s+\omega_n^4$$
$$s^5+1.575\omega_n s^4+4.05\omega_n^2 s^3+4.10\omega_n^3 s^2+3.025\omega_n^4 s+\omega_n^5$$
$$s^6+1.45\omega_n s^5+5.10\omega_n^2 s^4+5.30\omega_n^3 s^3+6.25\omega_n^4 s^2+3.425\omega_n^5 s+\omega_n^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 10.5.



Sl. 10.5. Prijelazne funkcije za modelske oblike za minimalno t_ε

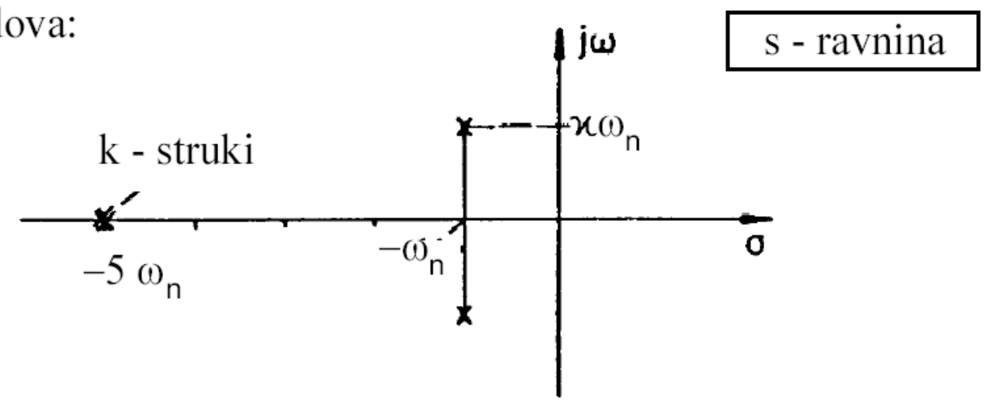
d) Weberov oblik

- Željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava prema Weberu glasi:

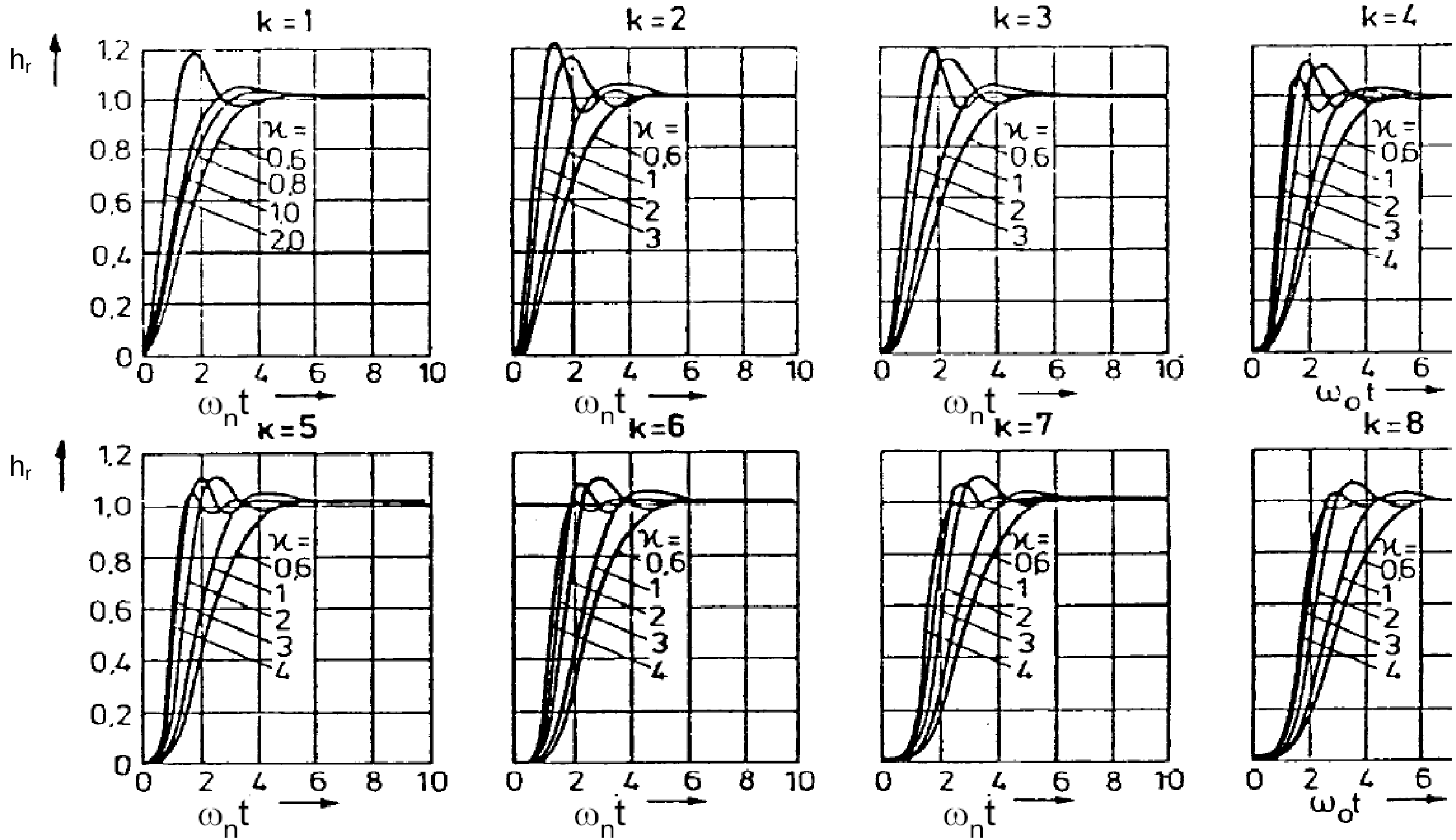
$$\boxed{G_m(s) = \frac{5^k \cdot \left(1+\kappa^2\right)\cdot \omega_n^{k+2}}{\left(s+\omega_n + j\kappa\omega_n\right)\cdot\left(s+\omega_n - j\kappa\omega_n\right)\cdot\left(s+5\omega_n\right)^k}}. \qquad (10\text{-}6)$$

- Radi se o prijenosnoj funkciji koja ima jedan k-struki realni pol (k = u - 2) i jedan kompleksni par polova.

razmještaj polova:



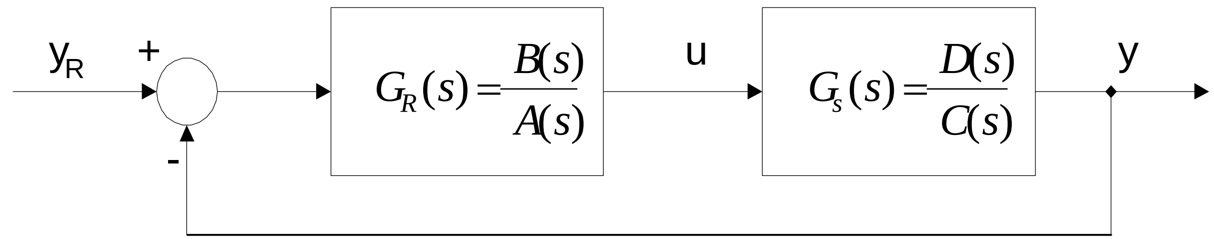
- Odabir κ, ***k*** i $\boldsymbol{\omega_n}$ se radi s obzirom na konkretnu primjenu.
- Prijelazne funkcije $h_r(\omega_n t)$ za različite vrijednosti ***k*** i κ dane su na slici 10.6.



Sl. 10.6. Prijelazne funkcije za Weberove modelske oblike

10.2. Postupak sinteze prema Truxal-Guilleminu (TG postupak):

- Razmatra se regulacijski krug prikazan na slici 10.7. (DESNO)



- Proces $G_s(s)$ opisan je racionalnom prijenosnom funkcijom (10-7):

$$\boxed{G_s(s)=\frac{D(s)}{C(s)}=\frac{d_0+d_1s+\cdots+d_ms^m}{c_0+c_1s+\cdots+c_ns^n}}$$

- Pretpostavke:
  - * polinomi brojnika D(s) i nazivnika C(s) nemaju zajedničke korijene;
  - * proces je stabilan i posjeduje svojstva minimalne faze;
  - * m < n.

- Prijenosna funkcija regulatora kojega treba projektirati (10-8):

$$\boxed{G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ws^w}{a_0+a_1s+\cdots+a_zs^z}.}$$

- Pri tome mora biti ispunjen uvjet realizacije (**$w \le z$**).
- $G_m(s)$ može, uz uvjet realizacije regulatora, imati proizvoljan oblik.

- Regulator treba tako projektirati da prijenosna funkcija zatvorenog sustava odgovara modelskoj prijenosnoj funkciji $G_m(s)$:

$$\boxed{G_r(s) \overset{!}{=} G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}, \quad u > v}. \tag{10-9}$$

- Iz prijenosne funkcije s obzirom na referentnu vrijednost

$$\boxed{G_r(s) = \frac{G_R(s) G_s(s)}{1 + G_R(s) G_s(s)} \overset{!}{=} G_m(s)} \tag{10-10}$$

slijedi prijenosna funkcija regulatora:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)}}. \tag{10-11}$$

- Nakon uvrštenja polinoma $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ za $G_m(s)$ dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}}. \qquad (10\text{-}12)$$

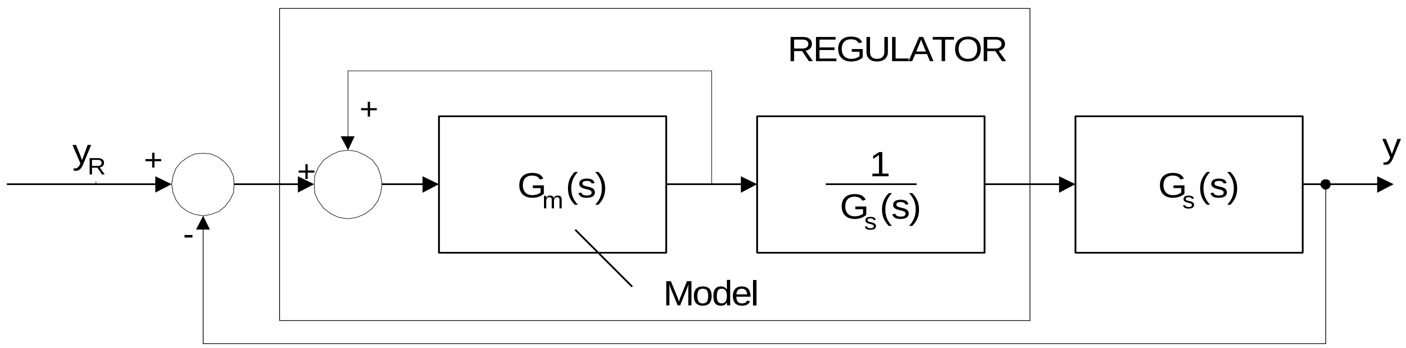
- U izrazu (10-12) mora biti ispunjeno **(uvjet realizacije regulatora)**:

Stupanj $B(s) = w = n + v \leq$ Stupanj $A(s) = z = u + m$, odakle slijedi:

$$\boxed{u - v \geq n - m}.$$

- Prema tome, "**polni višak**" (pole excess (engl.), Polüberschuβ (njem.)) (**u-v**) željene prijenosne funkcije $G_m(s)$ mora biti veći (ili jednak) "polnom višku" (**n-m**) prijenosne funkcije procesa $G_s(s)$.

- U prijenosnoj funkciji regulatora $G_R(s)$ pojavljuje se $G_S(s)^{-1}$.
- Dakle, regulatorom bi se moglo **potpuno kompenzirati dinamičko vladanje** procesa.
- Stoga se regulator koji ima strukturu kao (10-11) naziva **kompenzacijskim regulatorom**.
- Regulacijski krug koji ima regulator prema (10-11) može se prikazati kao na slici 10.8.



Sl. 10.8.

- Potrebno je imati u vidu uvjet realizacije.

- Opisanim TG postupkom određen je kontinuirani regulator, koji je optimalne strukture i optimalnih parametara s obzirom na zadanu prijenosnu funkciju procesa i željenu (modelsku) prijenosnu funkciju zatvorenog regulacijskog kruga.

- Međutim, konačni je cilj sinteze određivanje prijenosne funkcije $G_R(z)$ (odnosno rekurzivne jednadžbe) digitalnog regulatora.

- Kako je već opisano u 3. poglavlju prijenosna funkcija digitalnog regulatora $G_R(z)$ može se dobiti:

    - **emulacijom prijenosne funkcije** $G_R(s)$, pri čemu se utjecaj procesa uzorkovanja može zanemariti (metoda EMUL1) ili uzeti u obzir (metoda EMUL2).

    - neposrednom sintezom u diskretnom području (metoda 3).

TG postupak sinteze digitalnog regulatora EMUL1 metodom:

- Nakon što je određena prijenosna funkcija kontinuiranog regulatora $G_R(s)$, prema izrazu (10-11) ili (10-12), $G_R(z)$ se određuje kroz dva dodatna koraka:
  - **1. korak - Izbor vremena uzorkovanja *T***: prema ω_b modelske prijenosne $G_m(s)$ ili prema vremenu porasta t_r pripadne prijelazne funkcije.
  - **2. korak - diskretizacija regulatora:** Dobiveni kontinuirani regulator $G_R(s)$ jednostavno se diskretizira nekim od postupaka diskretizacije digitalnih filtara, npr. Tustinovim postupkom:

$$\boxed{G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}}$$

TG postupak sinteze digitalnog regulatora EMUL2 metodom:

- Postupak je identičan prethodnom koraku, ali je ZOH aproksimiran nadomjesnom prijenosnom funkcijom u *s*-području:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{1+\frac{T}{2}s}$$

i dobivena je nadomjesna prijenosna funkcija procesa:

$$\boxed{G_s'(s) = G_{ZOH}(s)G_s(s)}$$

- Dodavanjem $G_{ZOH}(s)$ u prijenosnu funkciju procesa povećan je „polni višak“ procesa za jedan (***n-m*+1**), pa je i minimalni „polni višak“ modelske funkcije za jedan veći nego kod EMUL1 metode (***u-v*+1**).
- Dakle, postupak sinteze je sljedeći:
  - **1. korak** – izabrati $G_m(s)$ prema $G'_s(s)$, tj. s „polnim viškom“ ≥ ***n-m*+1**
  - **2. korak** – izabrati vrijeme uzorkovanja (kao kod EMUL1) i odrediti $G_{ZOH}(s)$
  - **3. korak** – odrediti $G'_s(s)$ te $G_R(s)$ prema (10-11) ili (10-12)
  - **4. korak** – odrediti $G_R(z)$ kao kod EMUL1 metode.

Primjer 10.1:

- Neka je proces opisan prijenosnom funkcijom

$$\boxed{G_s(s) = \frac{5}{s\left(s^2 + 1{,}4s + 1\right)} = \frac{D(s)}{C(s)}},$$

- “Polni višak“ procesa iznosi: *n* - *m* = 3 - 0 = 3.

- Prema (10-12) slijedi “polni višak” za $G_m(s)$: $\boxed{u - v \geq 3}$.
- Izbor parametara prijenosne funkcije $G_m(s)$, koji određuju položaje njenih polova i nula, nije potpuno proizvoljan.
- **Praktična ograničenja** koja se postavljaju na $G_m(s)$, a time i na regulator, odnose se na:

a) **maksimalno dopušteno područje promjene izvršne veličine u(t);**

b) **netočnosti parametara $G_s(s)$ ili njihovo mijenjanje s vremenom;**

c) **šum u mjernom signalu koji se prenosi preko regulatora na proces.**

- Uvažavajući navedena ograničenja, za $G_m(s)$ se može odabrati bilo koji standardni oblik.

- Ako se odabere standardni Butterworthov oblik 3. reda (u - v = 3)

$$\boxed{G_{\mathbf{m}3}(s)=\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}=\frac{\omega_n^3}{s^3+2\omega_n s^2+2\omega_n^2 s+\omega_n^3}}$$

dobije se regulator:

$$\boxed{G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}=\frac{\omega_n^3}{5}\cdot\frac{s^2+1,4s+1}{s^2+2\omega_n s+2\omega_n^2}}$$

- Linearni regulator drugog reda (aktivni filtar drugog reda).

- Neka se, primjerice, zahtijeva ulazno vrijeme $\boxed{t_u=2s}$.
  - Iz normirane prijelazne funkcije $h_r(\omega_n t)$ za Butterworthov oblik 3. reda dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_u\approx 3,8},\qquad \boxed{\omega_n\approx\frac{3,8}{t_u}=\frac{3,8}{2}=1,9s^{-1}}.$$

- Prema tome, prijenosna funkcija **kontinuiranog regulatora** glasi:

$$\boxed{G_R(s)=1,37\cdot\frac{s^2+1,4s+1}{s^2+3,8s+7,22}}$$

***Određivanje digitalnog regulatora EMUL1 metodom*:**

1. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T = \frac{t_u}{4 \div 12} \xrightarrow{npr.} T = \frac{t_u}{5} = \frac{2s}{5} = 0,4s$$

2. korak - diskretizacija regulatora; određivanje $G_R(z)$ (**EMUL1 regulator**):

$$\boxed{G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 1,37 \cdot \frac{s^2 + 1,4s + 1}{s^2 + 3,8s + 7,22}\Bigg|_{s=5\cdot\frac{z-1}{z+1}}}$$

$$\boxed{G_R(z) = \frac{0.88 - 1,29z^{-1} + 0,51z^{-2}}{1 - 0,69z^{-1} + 0,26z^{-2}}}$$

Određivanje digitalnog regulatora EMUL2 metodom:

1. korak – zbog $G_{ZOH}(s)$ izabiremo $G_m(s)$ Butterworthov oblik 4. reda (u-v+1=4)

$$\boxed{G_{\mathbf{m}4}(s)=\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}=\frac{\omega_n^4}{s^4+2,6\omega_n s^3+3,4\omega_n^2 s^2+2,6\omega_n^3 s+\omega_n^4}}$$

2. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T=\frac{t_u}{4\div 12}\xrightarrow{npr.}T=\frac{t_u}{5}=\frac{2s}{5}=0,4s\,,\quad \boxed{G_{ZOH}(s)=\frac{1}{1+\frac{T}{2}s}=\frac{1}{1+0,2s}}$$

3. korak – određivanje $G'_s(s)$ i $G_R(s)$:

$$\boxed{G'_s(s)=\frac{5}{s\left(1+1,4s+s^2\right)(1+0,2s)}=\frac{D(s)}{C'(s)}}$$

$$\boxed{G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C'(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}=\frac{\omega_n^4}{5}\cdot\frac{\left(s^2+1,4s+1\right)\left(1+0,2s\right)}{s^3+2,6\omega_n s^2+3,4\omega_n^2 s+2,6\omega_n^3}}$$

- Iz normirane prijelazne funkcije $h_x\left(\omega_n t\right)$ za Butterworthov oblik 4. reda dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_u \approx 4,2}, \qquad \boxed{\omega_n \approx \frac{4,2}{t_u} = \frac{4,2}{2} = 2,1 s^{-1}}.$$

- što uvršteno u prijenosnu funkciju $G_R(s)$ daje:

$$\boxed{\begin{aligned} G_R(s) &= 3,89 \cdot \frac{\left(s^2+1,4s+1\right)\left(1+0,2s\right)}{s^3+5,46s^2+14,99s+24,08} = \\ &= 0.78\frac{\left(s^2+1,4s+1\right)\left(s+5\right)}{\left(s+3,13\right)\left(s^2+2,33s+7.59\right)} \end{aligned}}$$

4. korak – određivanje $G_R(z)$ (**EMUL2 regulator**):

$$\boxed{G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 3,89 \cdot \frac{\left(s^2+1,4s+1\right)\left(1+0,2s\right)}{s^3+5,46s^2+14,99s+24,08}\Bigg|_{s=5\cdot\frac{z-1}{z+1}}}$$

$$G_R(z)=\frac{0,71-1,04z^{-1}+0,41z^{-2}}{1-1,01z^{-1}+0,65z^{-2}-0,11z^{-3}}=$$
$$=0,71\frac{1-1,45z^{-1}+0,58z^{-2}}{\left(1-0,23z^{-1}\right)\left(1-0,78z^{-1}+0,47z^{-2}\right)}$$

Primjer 10.2:

- Za statički proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s)=\frac{1}{(1+s)^2(1+5s)}=\frac{1}{1+7s+11s^2+5s^3}=\frac{D(s)}{C(s)}$$

treba projektirati regulator prema standardnom obliku $G_m(s)$ proisteklom iz kriterija:

$$\boxed{\int_0^\infty |e(t)| \cdot t \cdot dt}$$

tako da se dobije $t_{a,50} = 2s$.

- Za $G_s(s)$ "polni višak" je ***n - m = 3*** $\rightarrow$ za $G_m(s)$ je "polni višak" $\boxed{u - v \geq 3}$.
- Za $\int_0^\infty |e(t)| \, t \, dt$ i za *u* = 3 i *v* = 0 dobije se standardni polinom (slajd 13):

$$\boxed{\beta(s) = s^3 + 1{,}75\omega_n s^2 + 2{,}15\omega_n^2 s + \omega_n^3}.$$

- Iz normiranih prijelaznih funkcija $h_r(\omega_n t)$ dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_{a,50} \approx 2},$$

$$\boxed{\omega_n \approx \frac{2}{t_{a,50}} = \frac{2}{2} = 1 s^{-1}}.$$

- Slijedi:

$$\boxed{\beta(s) = s^3 + 1,75s^2 + 2,15s + 1, \qquad \alpha(s) = 1}.$$

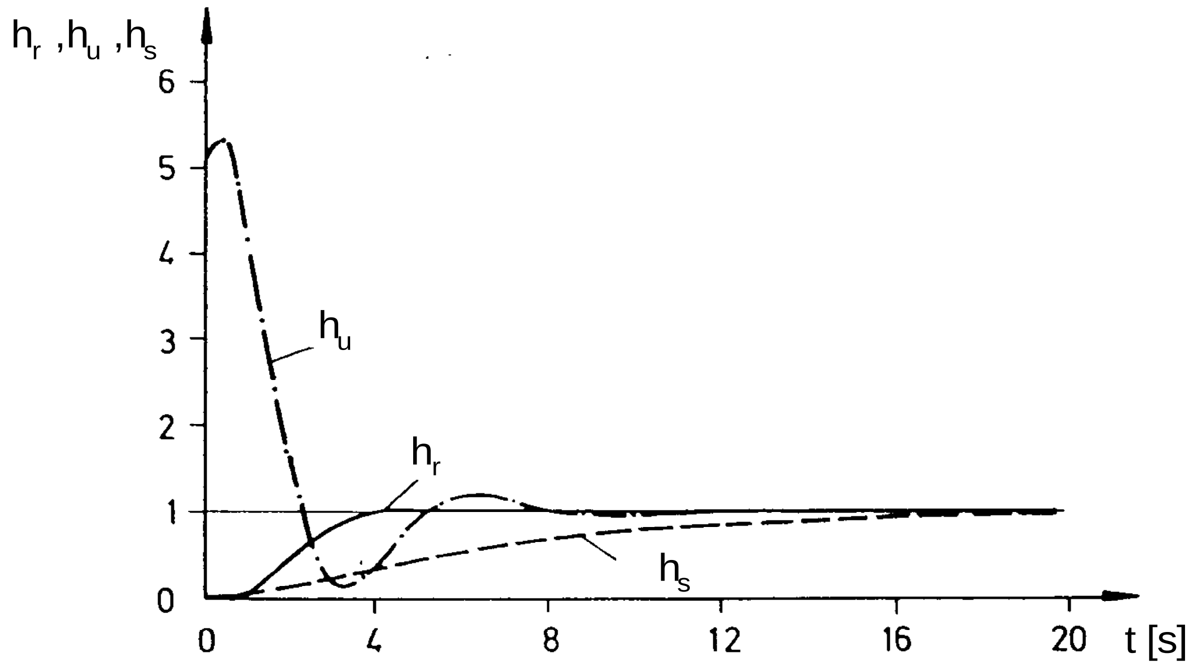
- Prema (10-12) dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s) - \alpha(s)\right]} = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{1 \cdot \left[\cancel{1} + 2,15s + 1,75s^2 + s^3 - \cancel{1}\right]}},$$

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{s\left(2,15 + 1,75s + s^2\right)}}.$$

- Prema tome, ovaj regulator posjeduje I- djelovanje.

- Vladanje sustava upravljanja s tako projektiranim regulatorom prikazano je na slici 10.11.
- **Digitalni regulator za primjer 10.2 može se projektirati nekim od opisanih postupaka (EMUL1, EMUL2), kao što je provedenu u primjeru 10.1.**
- **Nadalje se sva razmatranja provode u kontinuiranom području, a studentima se preporuča da za vježbu projektiraju odgovarajuće digitalne regulatore.**



Sl. 10.11. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 10.2.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;
- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

Primjer 10.3.:

- Za proces kao u primjeru 10.1 (astatičan proces): $$G_s(s)=\frac{5}{s\left(1+1,4s+s^2\right)}$$

  neka je odabrana $G_m(s)$ kao u primjeru 10.2.: $$G_m(s)=\frac{1}{s^3+1,75s^2+2,15s+1}.$$

- Pomoću (10-12) ($G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}$) dobije se:

$$G_R(s)=\frac{1+1,4s+s^2}{10,75+8,75s+5s^2}.$$

(Regulator bez I djelovanja)

- **Iz primjera 10.2. i 10.3 proizlazi da se može postići jednako vladanje zatvorenog sustava za sasvim različite procese.**

- Pretpostavlja se da su izvršne veličine u(t) u dopuštenom području vrijednosti.

- Na temelju dosadašnjih razmatranja proizlazi da je **struktura regulatora** određena strukturom procesa i modelskom prijenosnom funkcijom $G_m(s)$.

- **Parametri tako strukturiranog regulatora** proizlaze iz parametara procesa, parametara modelske prijenosne funkcije $G_m(s)$ i postavljenih zahtjeva na sustav upravljanja.

- Dosadašnja razmatranja odnosila su se na **procese** koji su **stabilni** i imaju svojstva **minimalne faze**.

- Za procese koji ne ispunjavaju navedene pretpostavke opisani postupak sinteze uvjetno je primjenljiv.

- U tom slučaju regulatorom se ne smiju kompenzirati polovi i nule $G_s(s)$ koje se nalaze u desnoj poluravnini s-ravnine jer bi i kod malih promjena položaja nula i polova (uslijed malih promjena parametara procesa) nastupili problemi stabilnosti. Stoga se ne može u ovim slučajevima proizvoljno odabrati $G_m(s)$.
- Korijeni karakteristične jednadžbe zatvorenog sustava upravljanja su korijeni jednadžbe

$$1+G_sG_R=0$$

$$1+\frac{D}{C}\frac{B}{A}=0$$

$$CA+DB=0$$

- Neka se pol procesa (s-a) krati s nulom regulatora:

$$C(s)=(s-a)\bar{C}(s)$$

$$B(s)=(s-a)\bar{B}(s)$$

- Karakteristična jednadžba postaje

$$(s-a)\bar{C}(s)A(s)+D(s)(s-a)\bar{B}(s)=0$$

$$(s-a)(A\bar{C}+D\bar{B})=0$$

- Zajednički faktor ostaje faktor karakteristične jednadžbe!

$$G_R=\frac{1}{G_s}\frac{G_m}{1-G_m}$$

- Za procese s neminimalnim faznim vladanjem mora se $G_m(s)$ tako odrediti da su nule od $G_m(s)$ jednake nulama $G_s(s)$ koje su smještene u desnoj poluravnini s-ravnine => izbor $G_m(s)$ značajno je ograničen.

- Objašnjenje ovakvog odabira slijedi iz sljedeće prijenosne funkcije:

$$\frac{U}{R}=\frac{G_R}{1+G_RG_s}=\frac{\frac{1}{G_s}\frac{G_m}{1-G_m}}{\frac{1}{1-G_m}}=\frac{G_m}{G_s}$$

- Kada ne bi bilo pokrate neminimalnofazne nule procesa između G_m i G_s tada bi odziv upravljačke veličine prema referenci bio nestabilan
- Za nestabilne procese mora prijenosna funkcija $(1-G_m(s))$ posjedovati nule koje su jednake polovima $G_s(s)$ koji su smješteni u desnoj poluravnini s-ravnine.
- Objašnjenje ovakvog odabira slijedi iz sljedeće prijenosne funkcije:

$$\frac{Y}{Z}=\frac{G_s}{1+G_R G_s}=G_s\left(1-G_m\right)$$

- Kada ne bi bilo pokrate nestabilnog pola procesa između G_s i (1-G_m) tada bi odziv izlazne veličine prema poremećaju na ulazu u procesu bio nestabilan
- **Primjena analitičkih postupaka sinteze za procese s neminimalnim faznim vladanjem i za nestabilne procese ilustrirana je primjerima 10.4. i 10.5.**

Primjer 10.4.: *Proces s neminimalno faznim vladanjem*

- Za proces s neminimalno faznim vladanjem (svepropusni član prvog reda):

$$\boxed{G_s(s) = \frac{1 - T_s s}{1 + T_s s}}$$

treba projektirati regulator tako da zatvoreni regulacijski krug ima željenu prijenosnu funkciju:

a) $$\boxed{G_m(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}}.$$

- Prema (10-12) ($G_R(s) = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s) - \alpha(s)\right]}$)dobije se: $$\boxed{G_R(s) = \frac{1 + T_s s}{1 - T_s s}\frac{1}{T_1 s}}.$$

- Ovaj bi regulator neposredno kompenzirao nulu procesa ($s = 1/T_S$), što je, kako je navedeno, nepoželjno $\Rightarrow$ **Odabrana $G_m(s)$ nije prihvatljiva**.

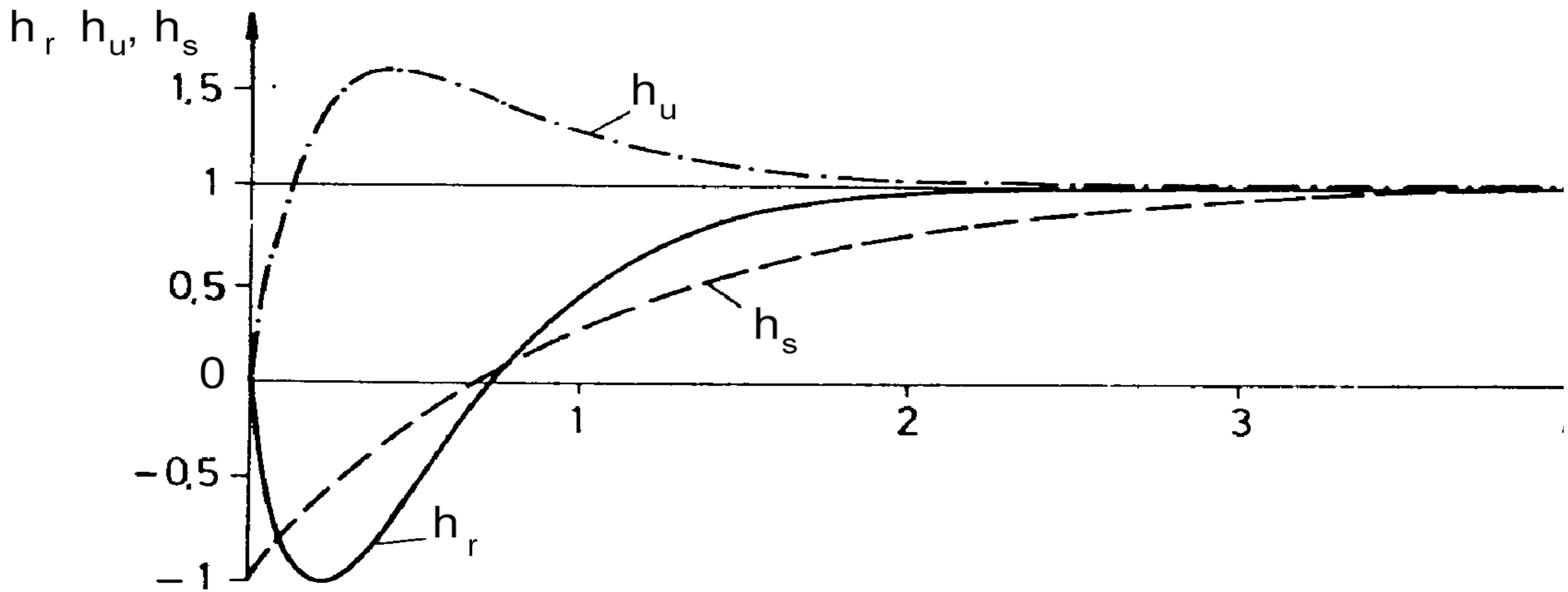
- Stoga se odabire $G_m(s)$ na sljedeći način ($G_m(s)$ ima svojstva neminimuma faze):

b) $$\boxed{G_m(s)=\frac{1-T_s s}{(1+T_1 s)^2}}.$$

- Prema (10-11) $G_R(s)=\frac{1}{G_s(s)}\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}$ dobije se:

$$\boxed{G_R(s)=\frac{1+T_s s}{s\left[(2T_1+T_s)+T_1^2 s\right]}}.$$

- Vladanje sustava upravljanja, s procesom koji ima neminimalno fazna svojstva, prikazano je na slici 10.12.



Sl. 10.12. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 10.4.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;
- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

Primjer 10.5.: *Nestabilni proces*

- Za nestabilni proces $$\boxed{G_s(s)=\frac{1}{1-T_s s}=\frac{D(s)}{C(s)}}$$

  potrebno je projektirati regulator tako da:

  $(1-G_m(s))$ ima nulu u $s=+\dfrac{1}{T_s}$ (to je vrijednost nestabilnog pola procesa):

$$\boxed{1-G_m(s)=1-\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}=\frac{\beta(s)-\alpha(s)}{\beta(s)}=\frac{(1-T_s s)P(s)}{\beta(s)}}.$$

- Iz uvjeta realizacije (10-12) mora biti: $u - v \geq 1$ (jer je $n - m = 1$)
- Dakle, polinom P(s) treba tako odabrati da vrijedi:

$$\boxed{\text{stupanj}\left[(1-T_s s)\cdot P(s)\right]=\text{stupanj}\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}. \quad (10\text{-}13)$$

- Za konkretni slučaj odaberimo da je Stupanj $\beta(s)$ = 2 i Stupanj $\alpha(s)$ = 1. *Napomena*: Za niže stupnjeve može se pokušati riješiti zadatak i vidjeti da se ne dobiva rješenje.

$$G_m(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2}$$

- Dalje raspisujemo prijenosnu funkciju (1 - G_m(s)) i izjednačavamo koeficijente uz potencije od s u polinomima u brojniku s lijeve i desne strane jednakosti. Nepoznati polinom P(s) pretpostavljamo da je prvog stupnja.

$$\boxed{\frac{\beta(s)-\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{(1-T_s s)P(s)}{\beta(s)}}$$

$$\boxed{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 - \alpha_0 - \alpha_1 s = (1-T_s s)(p_0 + p_1 s)}$$

  Budući da se traži da modelska nema pogrešku u stacionarnom stanju $G_m(0) = 1 \rightarrow \alpha_0 = \beta_0$ te slijedi $p_0 = 0$.

- Dalje slijedi:

$$\boxed{p_1 = \beta_1 - \alpha_1},$$

$$\boxed{-T_s \cdot p_1 = \beta_2}.$$

te eliminacijom p_1 $\boxed{\beta_2 = \left(\alpha_1 - \beta_1\right)T_s}$.

- Koeficijenti: α_0 i α_1 te β_0, β_1 i β_2 načelno se određuju prema željenoj dinamici sustava. Neka je zadano $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\beta_2 = 1$ i $\alpha_1 = 1/T_s$. Slijedi:

$$\boxed{\beta_1 = \frac{1}{T_s},}$$

  pa se dobije:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} = \frac{1 + \frac{2}{T_s} s}{1 + \frac{1}{T_s} s + s^2}},$$

(G$_m$(s) ne spada u prije razmatrane standardne oblike.)

odnosno:

$$\boxed{1 - G_m(s) = \frac{(1 - T_s s)(-\frac{s}{T_s})}{1 + \frac{1}{T_s} s + s^2}}.$$

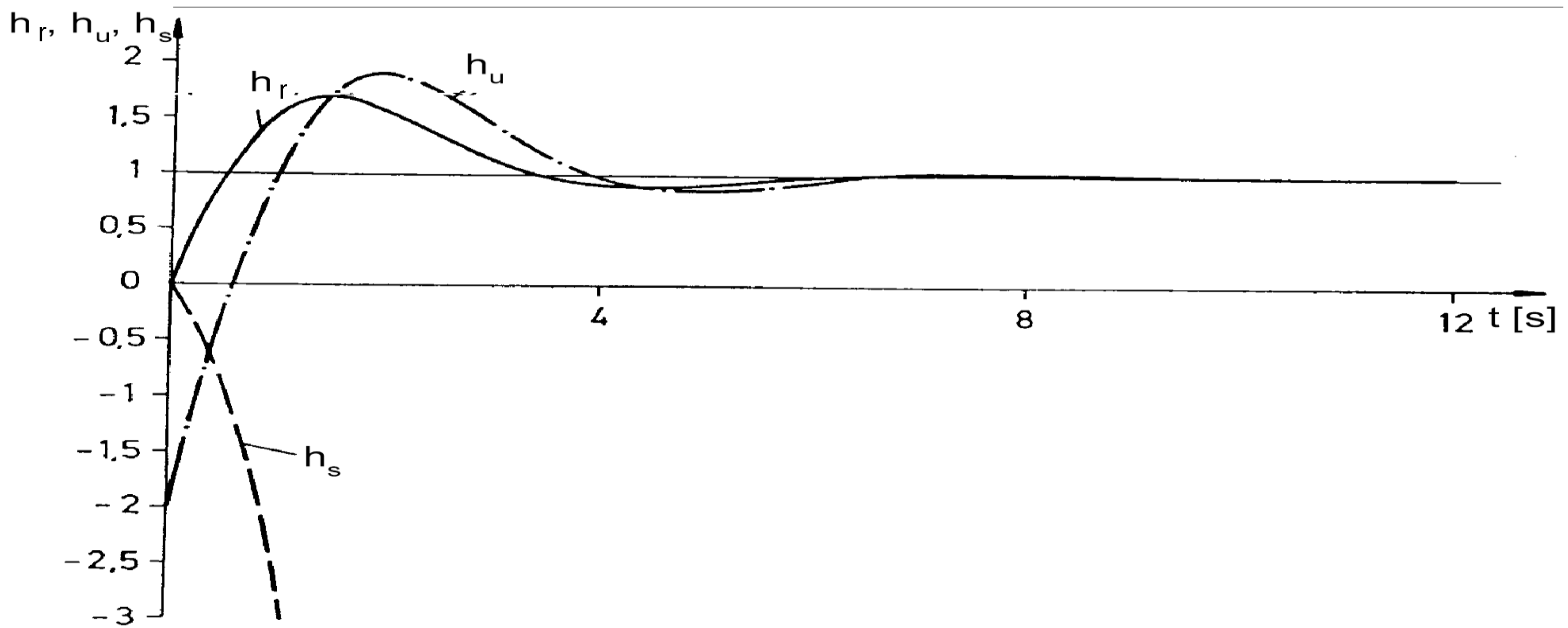
- Prema (10-11) slijedi:

$$G_R(s)=\frac{1}{G_s(s)}\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}=(1-sT_s)\frac{\dfrac{1+\dfrac{2}{T_s}s}{1+\dfrac{1}{T_s}s+s^2}}{\dfrac{(1-sT_s)\left(-\dfrac{s}{T_s}\right)}{1+\dfrac{1}{T_s}s+s^2}},$$

odnosno:

$$G_R(s)=\frac{1+\dfrac{2}{T_s}s}{-\dfrac{1}{T_s}s}=-2\left(1+\frac{T_s}{2}\frac{1}{s}\right).$$

- Vladanje sustava upravljanja, s nestabilnim procesom, prikazano je na slici 10.13 (za T_s = 1s):



Sl. 10.13. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 10.5.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;
- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

10.3. Postupak sinteze digitalnog regulatora prema Ragazziniju (metoda 3 – direktno u z-području)

- Koraci sinteze:
  - **1. korak** – izabrati vrijeme uzorkovanja kao kod EMUL1 i EMUL2 metoda
  - **2. korak** – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s)$ primjenom ZOH transformacije → $G_s(z)$
  - **3. korak** – na osnovi $G_s(z)$ i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju $G_m(z)$ kojoj je nazivnik diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe (transformacijom polova - pole placement), a brojnik uključuje sva ostala ograničenja od $G_s(z)$ te ograničenje točnosti u stacionarnom stanju
  - **4. korak** – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{X_R(z)} = \frac{G_R(z)G_s(z)}{1+G_R(z)G_s(z)} \stackrel{!}{=} G_m(z),$$

$$G_R(z)=\frac{1}{G_s(z)}\frac{G_m(z)}{1-G_m(z)},$$

- **Napomena**: **Treba voditi računa o uvjetu realizacije regulatora, jer ZOH transformacija može unijeti neminimalno faznu nulu u prijenosnu funkciju $G_s(z)$, koja se ne smije pojaviti u $G_R(z)$ kao pol !!!**
- **Mora vrijediti kauzalnost**: Iz teorije z-transformacije prijenosna funkcija $G_R(z)$ je kauzalna ako nema pol u beskonačnosti (odnosno stupanj brojnika je manji od stupnja nazivnika). Pol u beskonačnosti u $G_R(z)$ će se pojaviti ako $G_s(z)$ ima nulu u beskonačnosti, osim ako ne zahtjevamo da ga pokrati $G_m(z)$.
- **Ograničenje 1**: $G_m(z)$ mora imati nulu u beskonačnosti istog reda kao proces $G_s(z)$ – ovo je ekvivalentno polnom višku kod TG postupka

$$G_s(z)=\frac{D(z)}{C(z)}=\frac{z^{-k}\left(d_0+\ldots+d_m z^{-m}\right)}{c_0+\ldots+c_n z^{-n}}$$

$$G_m(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{z^{-k}\left(b_0+\ldots+b_m z^{-m}\right)}{a_0+\ldots+a_n z^{-n}}$$

- **<u>Ograničenje 2:</u>** 1-$G_m(z)$ mora posjedovati nule koje su jednake polovima $G_s(z)$ izvan jedinične kružnice
- **<u>Ograničenje 3:</u>** $G_m(z)$ mora posjedovati nule koje su jednake nulama $G_s(z)$ izvan jedinične kružnice
- **<u>Ograničenje točnosti u stacionarnom stanju pri odzivu na step</u>**

$$\boxed{e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z-1}\left[1-G_m(z)\right] = 0 \Rightarrow G_m(1) = 1}$$

- **<u>Ograničenje točnosti u stacionarnom stanju – kinetička pogreška 1/K_v</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\dfrac{Tz}{(z-1)^2}\left[1-G_m(z)\right] = \dfrac{1}{K_v} \\ (L'Hopital) \Rightarrow -T\left.\dfrac{dG_m}{dz}\right|_{z=1} = \dfrac{1}{K_v} \end{array}}$$

<u>Vratimo se ponovo na primjer 10.1.</u>

<u>Određivanje digitalnog regulatora neposredno u z-području (metoda 3):</u>

1. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T=\frac{t_u}{4\div 12}\xrightarrow{npr.}T=\frac{t_u}{5}=\frac{2s}{5}=0,4s$$

2. korak – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s) \rightarrow G_s(z)$

$$\boxed{G_s(z)=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\}=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{5}{s^2\left(1+1,4s+s^2\right)}\right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G_s(z)&=\frac{0,05z^{-1}+0,16z^{-2}+0,03z^{-3}}{1-2,45z^{-1}+2,02z^{-2}-0,57z^{-3}}=\\&=0,05\frac{z^{-1}\left(1+3,24z^{-1}\right)\left(1+0,23z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-1,45z^{-1}+0,57z^{-2}\right)}\end{aligned}}$$

3. korak – na osnovi $G_s(z)$ i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju $G_m(z)$ – pronaći i uključiti ograničenja na $G_m(z)$

- Karakteristična jednadžba je diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe (pole placement) – treći red prema Butterworthu

$$s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3 = 0$$

$$s^3 + 3.8s^2 + 7.22s + 6.859 = 0$$

$$\begin{matrix} s_{p1} = -1.9 \\ s_{p2,3} = -0.95 \pm 1.65j \end{matrix} \Rightarrow (z = e^{sT}) \begin{matrix} z_{p1} = 0.47 \\ z_{p2,3} = 0.54 \pm 0.42j \end{matrix}$$

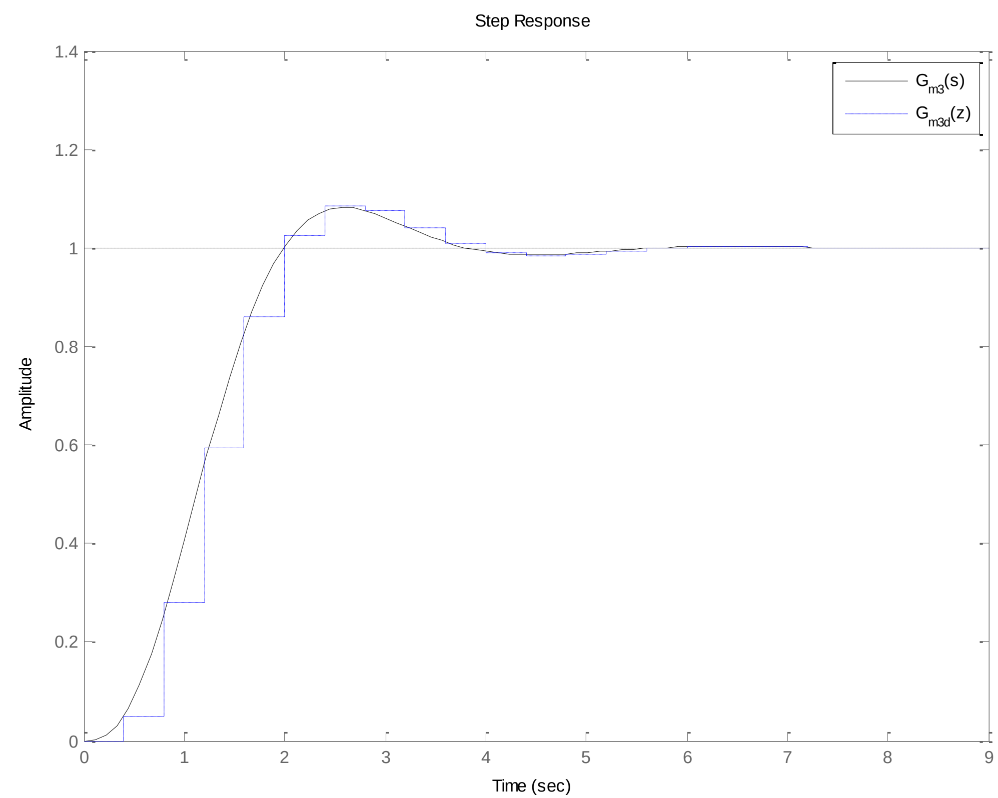
$$z^3 - 1.55z^2 + 0.9737z - 0.2187 = 0$$

- $G_s(z)$ ima 1-struku nulu u beskonačnosti
- $G_s(z)$ ima nestabilnu nulu **$(1+3,24z^{-1})$,** koja bi se preslikala u pol regulatora, pa da bi se to spriječilo i modelska funkcija treba imati tu nulu
- Stacionarna točnost - pojačanje G_m bude **1** za ***z*=1**

$$\boxed{G_{m3d}(z) = \frac{z^{-1}(1+3.24z^{-1})p_0}{1-1,55z^{-1}+0,97z^{-2}-0,22z^{-3}}}$$

- Potrebno je odrediti p_0 iz uvjeta za stacionarnu točnost

$$\boxed{G_{m3d}(1) = 1 \Rightarrow p_0 = 0.48}$$



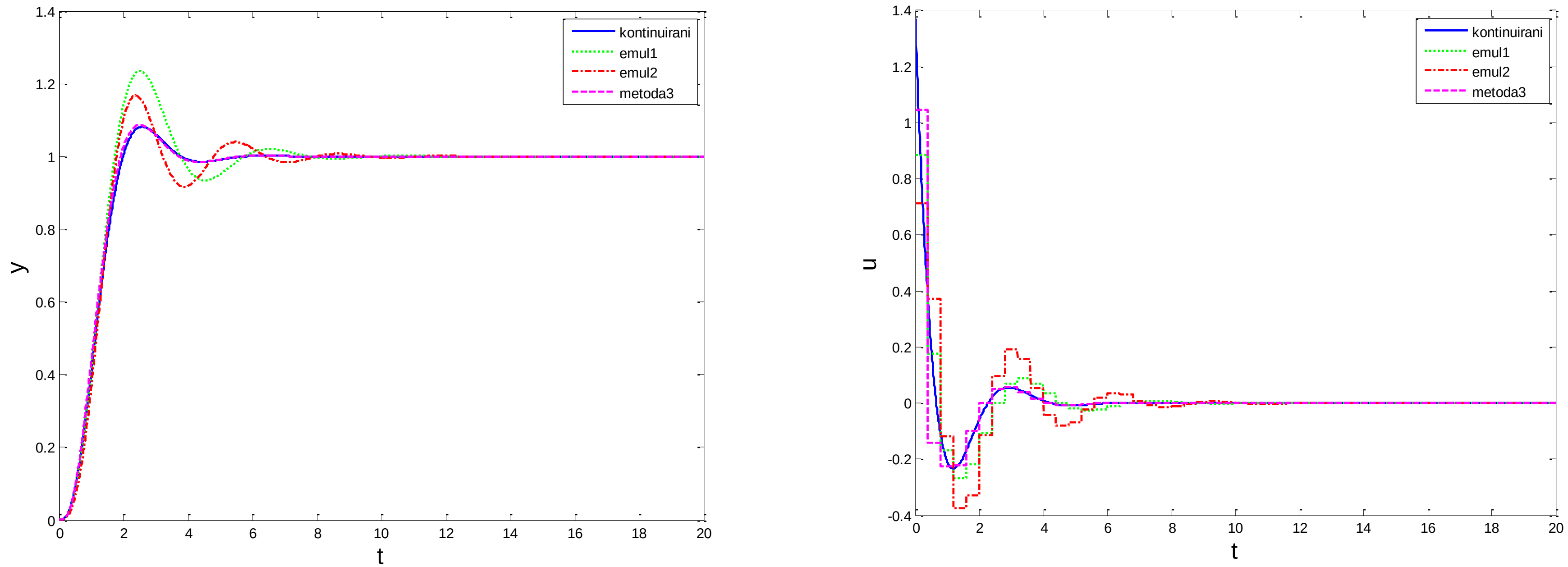
Sl. 10.9. Usporedba diskretne modelske funkcije s kontinuiranom.

4. korak – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$\boxed{G_R(z)=\frac{1}{G_s(z)}\frac{G_{m3d}(z)}{1-G_{m3d}(z)},}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G_R(z)&=\frac{1,05-1,52z^{-1}+0,598z^{-2}}{1-0,36z^{-1}+0,08z^{-2}+0,05z^{-3}}=\\&=1,05\frac{\left(1-1,45z^{-1}+0,57z^{-2}\right)}{\left(1+0,23z^{-1}\right)\left(1-0,6z^{-1}+0,22z^{-2}\right)}\end{aligned}}$$

Usporedba regulatora simulacijom sustava:



Sl. 10.10. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa sva četiri projektirana regulatora u primjeru 10.1

- Nadvišenja prijelaznih funkcija: kontinuirani **8.15%**, EMUL1 **23.45%**, EMUL2 **16.77%**, metoda3 **8.63%.**

Primjer 10.6.

Proces je opisan prijenosnom funkcijom

$$G_s(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

Projektirati diskretni regulator neposredno u diskretnom području tako da karakteristična jednadžba zatvorenog sustava upravljanja bude diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe

$$s^2 + s + 1 = 0$$

s vremenom uzorkovanja T=1. Sustav upravljanja mora biti stabilan, bez pogreške u stacionarnom stanju (odziv na step) i s kinetičkom pogreškom $1/K_v=1$.

Rješenje:

1. korak – vrijeme uzorkovanja je zadano

2. korak – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s) \rightarrow G_s(z)$

$$\boxed{G_s(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\} = 0.0484\frac{z^{-1}(1+0.9672z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.9048z^{-1})}}$$

3. korak – na osnovi $G_s(z)$ i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju $G_m(z)$ – pronaći i uključiti ograničenja na $G_m(z)$

- Karakteristična jednadžba je diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe (pole placement)

$$s_{p1,2} = -0.5 \pm 0.866\,j \Rightarrow (z = e^{sT})\, z_{p1,2} = 0.393 \pm 0.462\,j$$

$$z^2 - 0.7859z + 0.3679 = 0$$

- $G_s(z)$ ima 1-struku nulu u beskonačnosti
- $G_s(z)$ nema nestabilnu nulu
- Stacionarna točnost (na step i na rampu)

$$\boxed{G_{md}(z) = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots)}{1 - 0.7859 z^{-1} + 0{,}3679 z^{-2}}}$$

- Iz dvije jednadžbe za stacionarnu točnost moguće je odrediti samo dvije nepoznanice – b_0 i b_1 pa članove od b_2 na dalje zanemarujemo

$$G_{md}(1)=1\Rightarrow$$

$$\frac{b_0+b_1}{1-0.7859+0.3679}=1\Rightarrow$$

$$b_0+b_1=0.582$$

$$-T\left.\frac{dG_{md}}{dz}\right|_{z\to 1}=\frac{1}{K_v}\Rightarrow-\left.\frac{dG_{md}}{dz}\right|_{z\to 1}=1\Rightarrow$$

$$-\frac{(-b_0z^{-2}-2b_1z^{-3})\big|_{z=1}(nazivnik(z=1))-(0.7859z^{-2}-2\cdot 0.3679z^{-3})\big|_{z=1}(brojnik(z=1))}{(nazivnik(z=1))^2}=1\Rightarrow$$

$$b_0+2b_1=0.5318$$

$$b_0=0.6321$$

$$b_1=-0.05013$$

$$G_{md}(z)=\frac{z^{-1}(0.6321-0.05013z^{-1})}{1-0.7859z^{-1}+0,3679z^{-2}}$$

4. korak – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$G_R(z)=\frac{1}{G_s(z)}\frac{G_{md}(z)}{1-G_{md}(z)},$$

$$G_R(z)=\frac{13,06-12,85z^{-1}+0,9372z^{-2}}{1+0,5492z^{-1}-0,4043z^{-2}}=$$
$$=13,06\frac{(1-0,9z^{-1})(1-0,08z^{-1})}{\left(1+0,967z^{-1}\right)\left(1-0,418z^{-1}\right)}$$

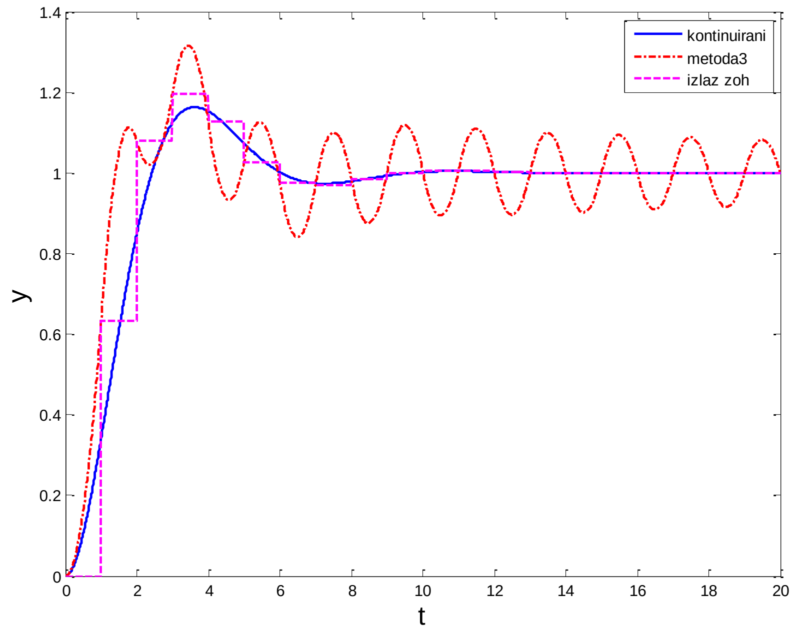
Usporedba regulatora simulacijom sustava:

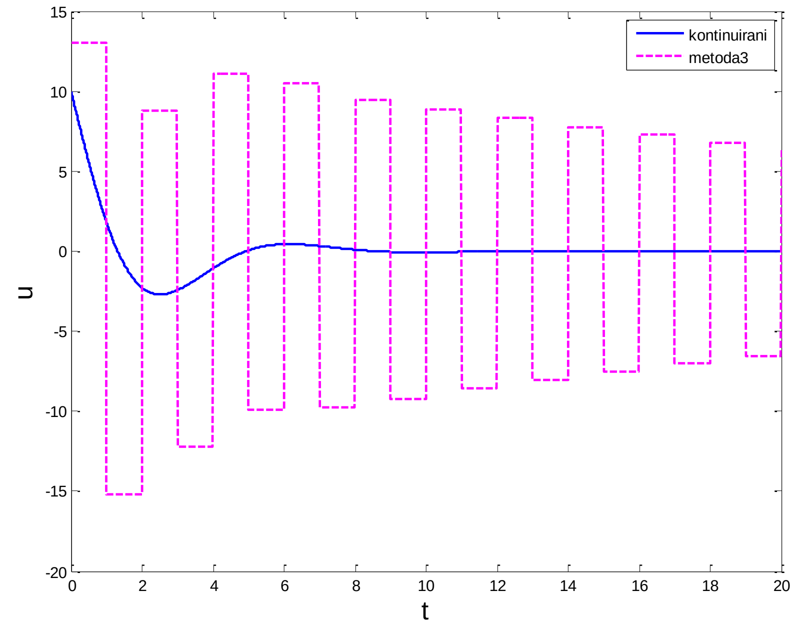
-kontinuirani sustav projektiran je za modelsku funkciju

$$G_m(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

Dobiven je regulator

$$
\boxed{G_R(s) = \frac{10s+1}{s+1}}
$$





Sl. 10.11. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa kontinuiranim i diskretnim regulatorom u primjeru 10.6

- Odziv izlaza iz procesa je oscilatoran, ali samo između trenutaka uzorkovanja.
- Odgovor ćemo naći u sljedećoj prijenosnoj funkciji

$$\boxed{\frac{U(z)}{R(z)} = 13,06\frac{(z-1)(1-0,9z^{-1})(1-0,08z^{-1})}{\left(1+0,967z^{-1}\right)\left(1-0,79z^{-1}+0,37z^{-2}\right)}}$$

- Pol z=-0.967 je vrlo blizu jedinične kružnice i prouzrokuje oscilacije upravljačke veličine. Ovaj pol se pokratio s nulom prijenosne funkcije i zato se na diskretnom odzivu izlazne veličine ne vide oscilacije. Ovako loš odziv može se izbjeći uključivanjem skoro nestabilne nule u modelsku prijenosnu funkciju.

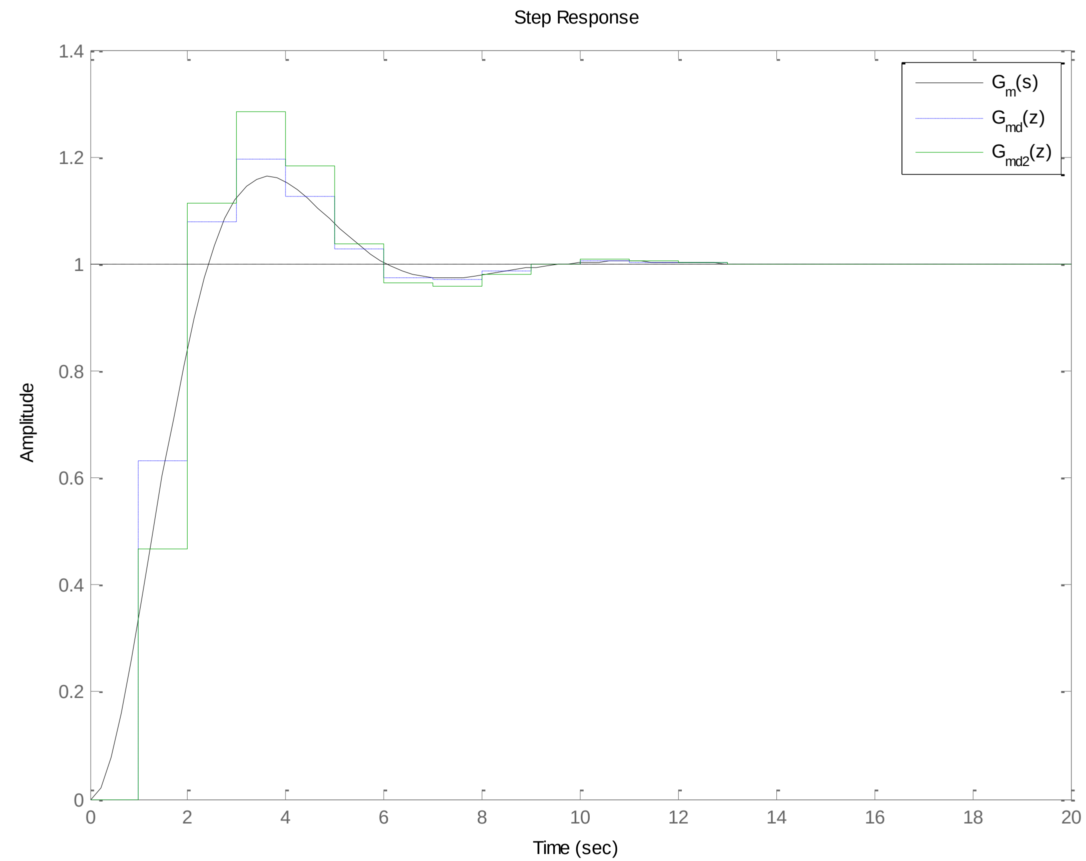
$$\boxed{G_{md2}\left(z\right) = \frac{z^{-1}(1+0.967z^{-1})(b_0+b_1z^{-1})}{1-0.7859z^{-1}+0,3679z^{-2}}}$$

- Ponavljanjem postupka za statičku točnost dobiju se sljedeće dvije jednadžbe

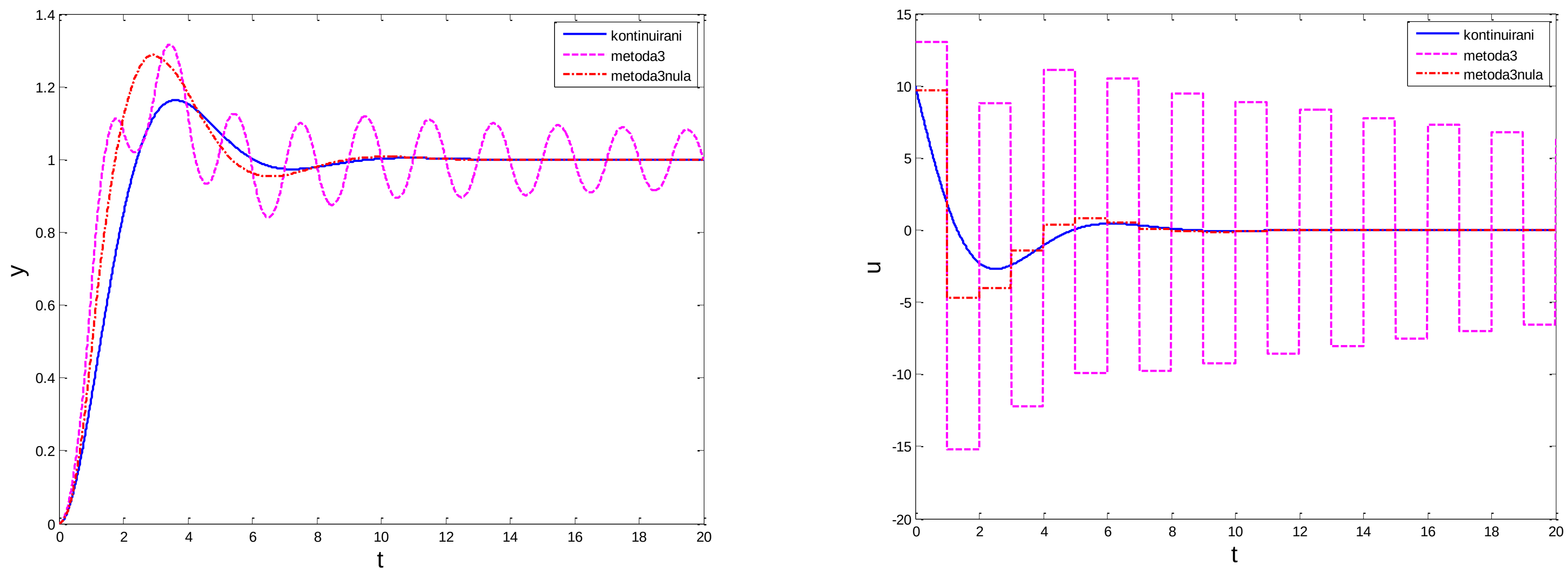
$$\boxed{\begin{array}{l} G_{md2}(1) = 1 \Rightarrow \\ b_0 + b_1 = 0.2958 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -T\left.\dfrac{dG_{md2}}{dz}\right|_{z\to 1} = \dfrac{1}{K_v} \Rightarrow -\left.\dfrac{dG_{md2}}{dz}\right|_{z\to 1} = 1 \Rightarrow \\ (1+2\cdot 0.967)b_0 + (1+2\cdot 0.967)b_1 = 0.5318 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_0 = 0.47 \\ b_1 = -0.17 \end{array}}$$



Sl. 10.12. Usporedba diskretnih modelskih funkcija s kontinuiranom.



Sl. 10.13. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa kontinuiranim i diskretnim regulatorima u primjeru 10.6