Analitički postupci sinteze regulatora

Jadranko Matuško
Šandor Ileš

Fakultet elektrotehnike i računarstva

6. prosinca 2023.

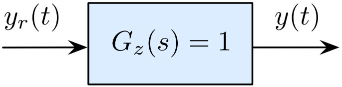
Analitički postupci sinteze

Idealno vladanje sustava upravljanja

- Idealno vladanje sustava upravljanja predstavlja ono vladanje koje se može opisati prijenosnom funkcijom:

$$G_z(s) = 1 \tag{1}$$

- Takvo vladanje ima jedinično pojačanje i nulti fazni pomak na cjelokupnom frekvencijskom području



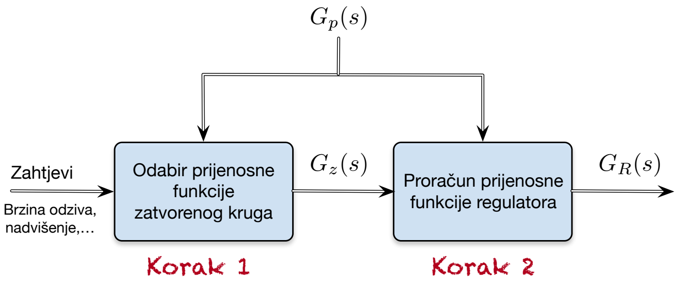
Slika 1: *Idealno vladanje sustava upravljanja*

Analitički postupci sinteze

- Polazište kod analitičkih postupaka sinteze je prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga.
- Kako se regulator tek treba projektirati, zatvoreni regulacijski krug ne postoji pa se kao polazište za sintezu može koristiti samo **modelska (željena) prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga**.
- Modelska prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga treba oslikavati/uvažavati projektne zahtjeve (brzina odziva, nadvišenje, točnosti u ustaljenom stanju).
- Dakle, prvi korak kod analitičkih postupaka je odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga koja zadovoljavaju projektne zahtjeve.

Analitički postupci sinteze

Načelni postupak sinteze



- Za oba koraka sinteze (odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga i proračun regulatora) potrebno je poznavanja modela procesa.
- Zašto ne možemo slobodno odabrati modelsko vladanje zatvorenog regulacijskog kruga?

Analitički postupci sinteze

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

- Načelno se odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga može odabrati na neizmjerno načina.
- Za sustave reda $n > 2$ taj odabir nije trivijalan.
- Iz tog razloga tipično se koriste standardne prototipne modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga:
  - Binomni oblik
  - Butterworthov oblik
  - Standardni oblici zasnovani na integralnim kriterijima

Analitički postupci sinteze

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

- Razmotrimo prijenosnu funkciju u općem obliku:

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_u s^u}, u \geq v \tag{2}$$

- Ako se istovremeno razmatraju polovi i nule prijenosne funkcije odabir modelskog vladanja i dalje ima previše stupnjeva slobode te se stoga obično odabire da polinom u brojniku bude reda $v = 0$:

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0}{\beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_u s^u} \tag{3}$$

- Ako se zahtjeva za sustav nema pogrešku u ustaljenom stanju tada mora vrijediti:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sG_m(s)\frac{1}{s} = 1 \;\rightarrow\; G_m(0) = 1. \tag{4}$$

odnosno $\alpha_0 = \beta_0$

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

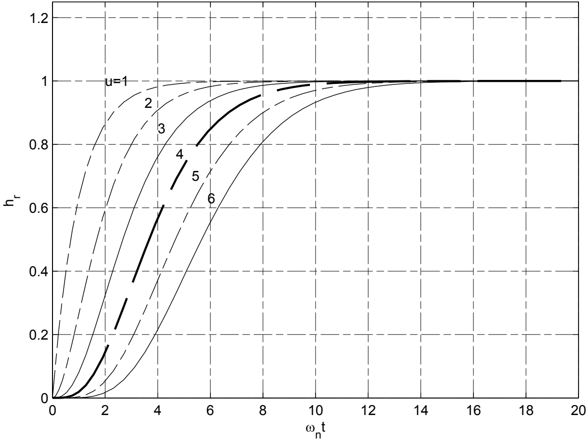
Binomni oblik

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\omega_n^u}{(s+\omega_n)^u} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} s+\omega_n \\ s^2+2\omega_n s+\omega_n^2 \\ s^3+3\omega_n s^2+3\omega_n^2 s+\omega_n^3 \\ s^4+4\omega_n s^3+6\omega_n^2 s^2+4\omega_n^3 s+\omega_n^4 \\ s^5+5\omega_n s^4+10\omega_n^2 s^3+10\omega_n^3 s^2+5\omega_n^4 s+\omega_n^5 \\ s^6+6\omega_n s^5+15\omega_n^2 s^4+20\omega_n^3 s^3+15\omega_n^4 s^2+6\omega_n^5 s+\omega_n^6 \end{gathered} \tag{6}$$

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

Binomni oblik



Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

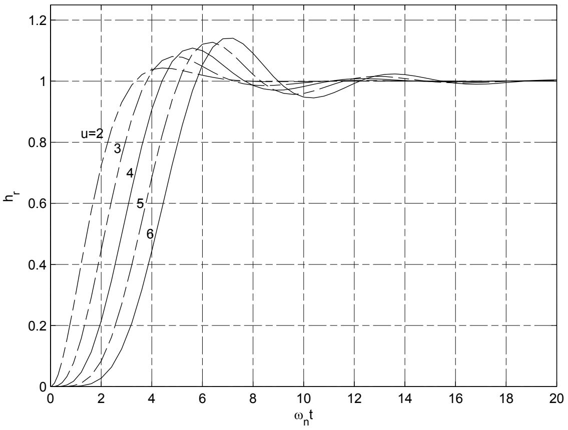
Butterworthov oblik

- Standardni polinomi $\beta(s)$ za različite redove glase:

$$
\begin{gathered}
s+\omega_n \\
s^2+1.4\omega_n s+\omega_n^2 \\
s^3+2.0\omega_n s^2+2.0\omega_n^2 s+\omega_n^3 \\
s^4+2.6\omega_n s^3+3.4\omega_n^2 s^2+2.6\omega_n^3 s+\omega_n^4 \\
s^5+3.24\omega_n s^4+5.24\omega_n^2 s^3+5.24\omega_n^3 s^2+3.24\omega_n^4 s+\omega_n^5 \\
s^6+3.86\omega_n s^5+7.46\omega_n^2 s^4+9.14\omega_n^3 s^3+7.46\omega_n^4 s^2+3.86\omega_n^5 s+\omega_n^6
\end{gathered} \tag{7}
$$

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

Butterworthov oblik



Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

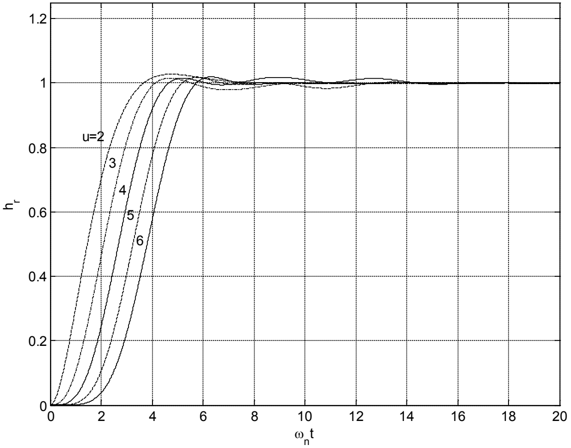
Modelske funkcije optimalne prema ITAE integralnom kriteriju

$$I_{\mathrm{ITAE}} = \int_0^\infty |e(t)|t dt \tag{8}$$

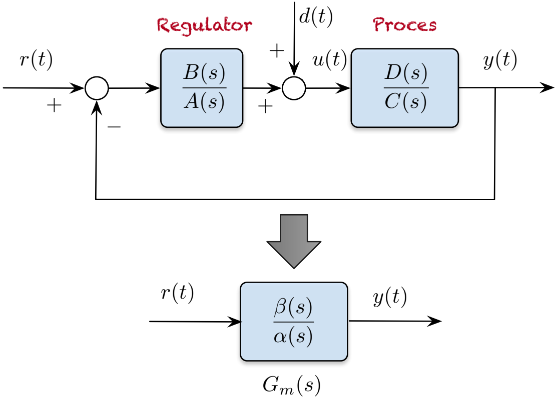
$$\begin{gathered}
s + \omega_n \\
s^2 + 1.505\omega_n s + \omega_n^2 \\
s^3 + 1.783\omega_n s^2 + 2.172\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\
s^4 + 1.953\omega_n s^3 + 3.347\omega_n^2 s^2 + 2.648\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\
s^5 + 2.068\omega_n s^4 + 4.499\omega_n^2 s^3 + 4.675\omega_n^3 s^2 + 3.257\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\
s^6 + 2.152\omega_n s^5 + 5.629\omega_n^2 s^4 + 6.934\omega_n^3 s^3 + 6.792\omega_n^4 s^2 + 3.740\omega_n^5 s + \omega_n^6
\end{gathered} \tag{9}$$

Odabir modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

ITAE optimalni oblik



Postupak prema Truxal-Guileminu



Postupak projektiranja regulatora prema Truxal-Guilleminu (TG postupak)

- Razmatramo standardnu jednopetljastu strukturu upravljanja uz prijenosnu funkciju procesa:

$$G_p(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s + \ldots + d_m s^m}{c_0 + c_1 s + \ldots + c_n s^n}. \tag{10}$$

i prijenosnu funkciju regulatora:

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_w s^w}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_z s^z}. \tag{11}$$

- Pretpostavke:
  - polinomi $D(s)$ i $C(s)$ su koprim polinomi, tj. nemaju zajedničke korijene.
  - Proces je stabilan i minimalno-fazni, te da je $m \leq n$

Postupak projektiranja regulatora prema Truxal-Guilleminu (TG postupak)

- Regulator treba tako projektirati da prijenosna funkcija zatvorenog sustava odgovara modelskoj prijenosnoj funkciji $G_m(s)$:

$$G_{zr}(s) = G_m(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_u s^u}, \quad v \leq u. \tag{12}$$

- Iz prijenosne funkcije s obzirom na referentnu vrijednost:

$$G_{zr}(s) = \frac{G_R(s)G_s(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)} = G_m(s) \tag{13}$$

slijedi prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)}. \tag{14}$$

Postupak projektiranja regulatora prema Truxal-Guilleminu (TG postupak)

- Nakon uvrštenja $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ slijedi:

$$G_R = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)(\beta(s) - \alpha(s))} \tag{15}$$

- Uz pretpostavku kauzalnosti procesa $\deg C(s) \geq \deg D(s)$ slijedi iz izraza (15) da za kauzalnost regulatora mora biti ispunjeno (uvjet realizacije regulatora):

$$\deg A(s) - \deg B(s) = \deg D(s) - \deg C(s) + \deg \beta(s) - \deg \alpha(s) \geq 0 \tag{16}$$

  odakle slijedi:

$$\deg \beta(s) - \deg \alpha(s) \geq \deg D(s) - \deg C(s), \tag{17}$$

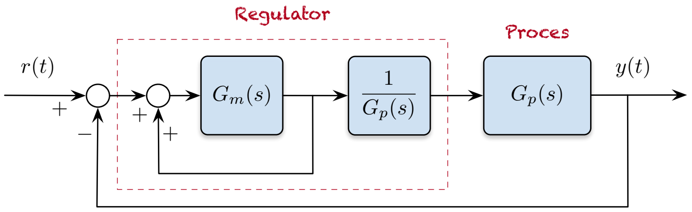
  odnosno

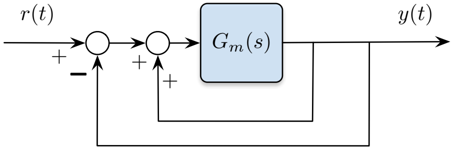
$$\boxed{u - v \geq n - m} \tag{18}$$

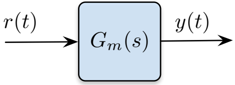
Postupak projektiranja regulatora prema Truxal-Guilleminu (TG postupak)

Prema tome, ”polni višak” $(u - v)$ željene prijenosne funkcije $G_m(s)$ mora biti veći ili jednak ”polnom višku” $(n - m)$ prijenosne funkcije procesa $G_p(s)$.

Postupak projektiranja regulatora prema Truxal-Guilleminu (TG postupak)







Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Stabilan minimalno fazni proces

- Istosmjerni motor (DC) opisan je prijenosnom funkcijom:

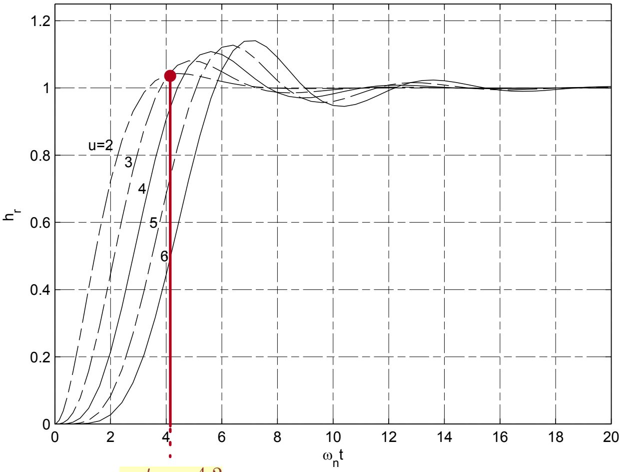
$$\frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_t}{(R_a + sL_a)\,(Js + B) + K_b K_t} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \qquad (19)$$

pri čemu je $T_1 = 30\,ms$, $T_2 = 5\,ms$ i $K = 10$.

- Potrebno je TG postupkom projektirati regulator kojim se postiže prijelazna pojava prema Butterworthovom prototipnom obliku uz vrijeme prvog maksimuma $t_m = 10\,ms$
- Kako je polni višak procesa $n - m = 2$ tada i polni višak modelske prijenosne funkcije mora biti jednak ili veći od 2. Stoga odabiremo $u - v = 2$ i odabiremo nazivnik modelske prijenosne funkcije Butterworthovog tipa 2. reda (sljedeći slajd)

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Stabilan minimalno-fazni proces



$\omega_n t_m = 4.2$

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Stabilan minimalno fazni proces

- Iz slike na prethodnom slajdu slijedi:

$$\omega_n t_m = 4.2 \;\rightarrow\; \omega_n = \frac{4.2}{t_m} = \frac{4.2}{0.01} = 420\,[rad/s] \tag{20}$$

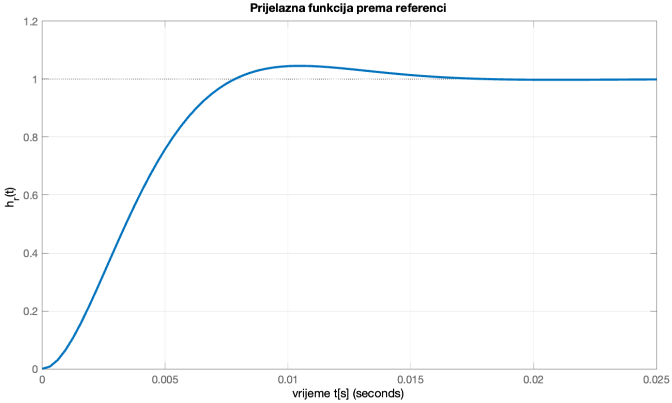
- Prema tome, modelska prijenosna funkcija $G_m(s)$ uz dodatni uvjet stacionarne točnosti u slučaju skokovite promjene referentne veličine glasi:

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 1.4\omega_n + \omega_n^2} = \frac{176400}{s^2 + 588s + 176400}. \tag{21}$$

$$G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)}\frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{2.646s^2 + 617.4s + 17640}{s(s+588)}. \tag{22}$$

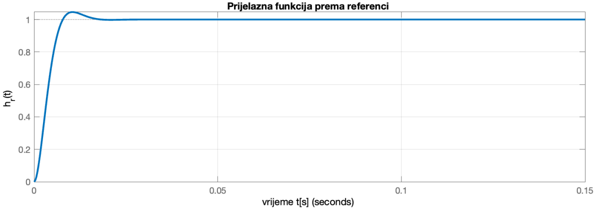
Postupak prema Truxal-Guilleminu

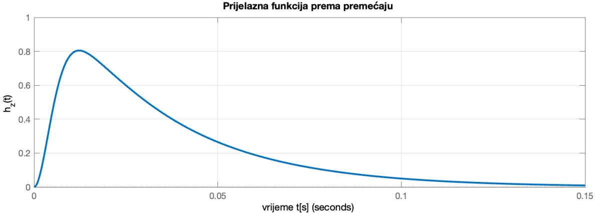
Primjer: Stabilan minimalno fazni proces



Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Stabilan minimalno fazni proces





TG postupak projektiranja regulatora

Neminimalno-fazni i nestabilni procesi

- Dosadašnja razmatranja odnosila su se na procese koji su stabilni i imaju svojstva minimalne faze.
- Za procese koji ne ispunjavaju navedene pretpostavke opisani postupak sinteze uvjetno je primjenljiv.
- U tom slučaju regulatorom se ne smiju kompenzirati polovi i nule $G_s(s)$ koje se nalaze u desnoj poluravnini s-ravnine jer bi i kod malih promjena položaja nula i polova (uslijed malih promjena parametara procesa) nastupili problemi stabilnosti.
- Stoga se $G_m(s)$ ne može u ovim slučajevima proizvoljno odabrati.

TG postupak projektiranja regulatora

Neminimalno-fazni sustavi

- Za slučaj neminimalno-faznog procesa jedna ili više njegovih nula se nalaze u desnoj kompleksnoj s-poluravnini.
- Kraćenje tih nula kod standardnog postupka obavilo bi se polovima regulatora, što znači da na mjestima tih nula regulator ima polove, koji se prema tome nestabilni, čineći sam regulator nestabilnim,.
- Kako bi se izbjeglo kraćenje tih nula potrebno ih je onda zadržati i u prijenosnoj funkciji $G_m(s)$.
- Ostatak postupka je isti, s tim da ovo zadržavanje neminimalno-faznih nula utječe na red polinoma u nazivniku $G_m(s)$.

TG postupak za neminimalno-fazne procese

Primjer

- Za proces s neminimalno faznim vladanjem (svepropusni član prvog reda):

$$G_s(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \tag{23}$$

treba projektirati regulator tako da zatvoreni regulacijski krug ima željenu prijenosnu funkciju:

$$G(s) = \frac{1}{1 + T_1 s} \tag{24}$$

- Primjenom standardnog postupka dizajna (koji krati cjelokupnu dinamiku procesa) dobije se sljedeći regulator:

$$G_R(s) = \frac{1 + Ts}{1 - Ts} \frac{1}{T_1 s} \tag{25}$$

- Očito je da je dobiveni regulator nestabilan, te ovakav odabir $G_m(s)$ nije zadovoljavajući .

TG postupak za neminimalno-fazne procese

Primjer

- Stoga željenu prijenosnu funkciju $G_m(s)$ odabiremo tako da uključuje neminimalno-faznu nulu, npr:

$$G_m(s) = \frac{1 - Ts}{(1 + T_1 s)^2}. \tag{26}$$

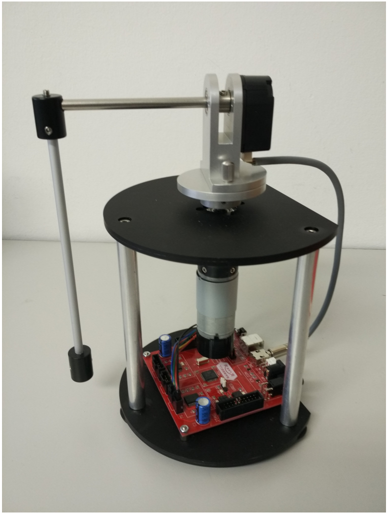
- U tom se slučaju dobije regulator:

$$G_R(s) = \frac{1 + Ts}{s(2T_1 + T + T_1^2 s)} \tag{27}$$

koji je očito **stabilan**.

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo



Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo

- Razmotrimo primjer inverznog rotacijskog njihala čiji je model vladanja uz pretpostavku da je ulaz pozicija baze opisana prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{-s^2}{ls^2 - g} = \frac{Ks^2}{(1+\tau s)(1-\tau s)}, \tag{28}$$

  pir čemu je $\tau = \sqrt{l/g} = 0.1[s]$ i $K = 1/g$.

- Potrebno je projektirati regulator TG postupkom tako da vladanje prema referenci bude binomnog prototipnog oblika uz $\omega_n = 1$

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo

- Budući da sustav ima nestabilni pol tada je potrebno osigurati da ne dođe do njegovog kraćenja tako da se osigura da $1 - G_m(s)$ ima nultočku na poziciji nestabilnog pola.
- Polinom nazivnika modelske prijenosne funkcije odabiremo u binomnom obliku te kako je polni višak procesa jednak nuli tada je potrebno osigurati da $G_m(s)$ ima polni višak veći (jednak) od nule.
- Pretpostavimo modelsku prijenosnu funkciju u obliku:

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2}. \tag{29}$$

Kako bi se spriječilo kraćenje nestabilne nule potrebno je sljedeće:

$$1 - G_m(s) = 1 - \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\beta_0 - \alpha_0 + (\beta_1 - \alpha_1)s + \beta_2 s^2}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} = \frac{(1 - \tau s)(p_0 + p_1 s)}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} \tag{30}$$

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo

- Izjednačavanjem koeficijenta uz odgovarajuće potencije polinoma u brojniku slijedi:

$$\begin{aligned}\beta_0 - \alpha_0 &= p_0 \\ \beta_1 - \alpha_1 &= p_1 - \tau p_0 \\ \beta_2 &= -p_1 \tau\end{aligned} \tag{31}$$

- Iz uvjeta stacionarne točnosti slijedi $G_m(0) = 1$ tj. $\alpha_0 = \beta_0$, odnosno $p_0 = 0$. Nadalje slijedi da je $p_1 = -\beta_2/\tau$, odakle slijedi $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2/\tau$.
- Prema tome modelska prijenosna funkcija glasi:

$$G_m(s) = \frac{\beta_0 + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\tau}\right) s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} \tag{32}$$

Odavde slijedi regulator u obliku:

$$G_R(s) = \frac{-\tau}{K\beta_2} \frac{(1 + \tau s)(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2/\tau)s)}{s^3}. \tag{33}$$

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo

- S obzirom na to da modelska funkcija sadrži nulu $-\alpha_0/\alpha_1$ tada odziv zatvorenog regulacijskog kruga može značajno odstupati od prototipnog binomnog te se u tom slučaju u granu referentne vrijednosti dodaje prefiltar:

$$G_{pf} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 s}. \tag{34}$$

Postupak prema Truxal-Guilleminu

Primjer: Nestabilan proces - obrnuto njihalo