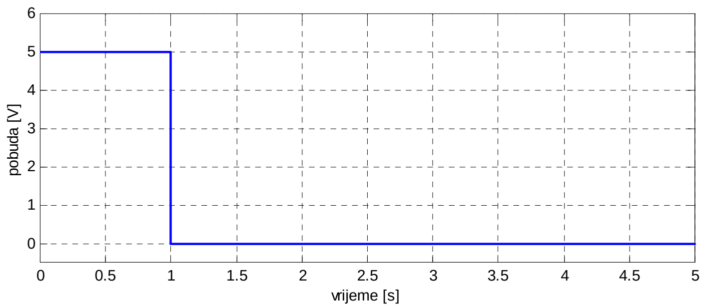
Računalno upravljanje sustavima

Zadaci za vježbu

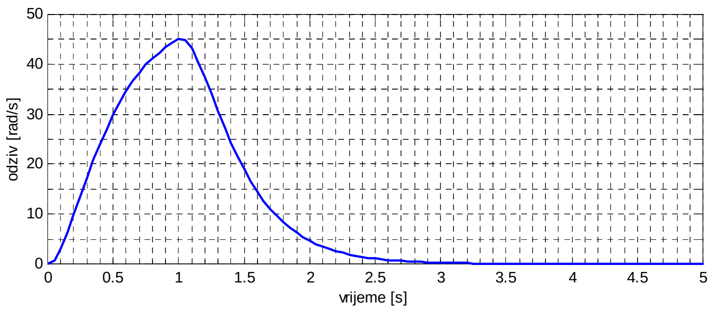
1. Identifikacija grafoanalitičkim postupcima

Zadatak 1

Korištenjem grafoanalitičih metoda provedite identifikaciju sustava čiji su pobuda i odziv prikazani slikama 1 i 2.



Slika 1: Pobuda sustava



Slika 2: Odziv sustava

Rješenje:

Određivanje prijelazne funkcije

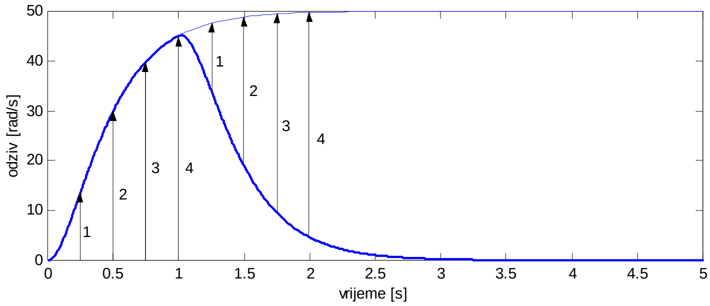
Budući da se većina grafoanalitičkih metoda identifikacije zasniva na analizi prijelazne funkcije, potrebno je prvo iz odziva na pravokutni impuls odrediti prijelaznu funkciju.

Da bismo odredili prijelaznu funkciju, očitat ćemo vrijednost odziva sustava na pravokutni impuls u trenucima dok traje impuls. Označimo trajanje pobudnog pravokutnog impulsa s T_i *te odaberimo npr. trenutke* $0.25T_i$, $0.5T_i$, $0.75T_i$ *i* T_i. *Kao što je opisano na predavanjima, očitane vrijednosti ćemo ravnalom prenijeti i pribrojiti odzivu u odgovarajućim vremenskim trenucima nakon prestanka pravokutnog impulsa, npr. očitanu vrijednost u trenutku* $0.25T_i$ *pribrojit ćemo vrijednosti u trenutku* $1.25T_i$ *itd. Postupak je ilustriran na slici 3, gdje se vidi i dobiveni odziv. Potrebno je uočiti da dobiveni odziv još uvijek ne predstavlja*

Tablica 1: Numerički postupak

t	$y(t)$	$y_h(t)$	$h(t)$
$0.25T_i$	14	14	2.8
$0.5T_i$	30	30	6
$0.75T_i$	40	40	8
T_i	45	45	9
$1.25T_i$	34	$34 + 14 = 48$	9.6
$1.5T_i$	19	$19 + 30 = 49$	9.8
$1.75T_i$	10	$10 + 40 = 50$	10
$2T_i$	5	$5 + 45 = 50$	10

prijelaznu funkciju, budući da nije korišten impuls jediničnog iznosa. Da bi se iz odziva dobila prijelazna funkcija, potrebno je još podijeliti dobivene iznose s amplitudom impulsa, tj. s 5, što odgovara skaliranju y-osi na slici 3 s $1/5$.



Slika 3: Grafički postupak određivanja odziva na skokovitu funkciju

Opisani postupak možemo provesti i numerički, što je ilustrirano u tablici 1. U tablici su s $y(t)$ označene očitane vrijednosti odziva na pravokutni impuls, s $y_h(t)$ izračunane vrijednosti odziva u vremenskim trenucima t, a $h(t)$ označava iznose prijelazne funkcije, tj. $h(t) = y_h(t)/5$.

Identifikacija prijenosne funkcije sustava

Nakon što smo odredili prijelaznu funkciju, potrebno je izabrati odgovarajuću metodu identifikacije. Budući da prijelazna funkcija ima aperiodski oblik, u obzir dolaze Küpfmüllerova, Strejcova, PT2 i PTn metoda. Budući da trebamo "papirnato" rješenje, momentna metoda ne dolazi u obzir jer nam nije dostupno računalo.

Ovdje ćemo odabrati Strejcovu metodu. Za nju je potrebno očitati vrijednost prijelazne funkcije u dvije točke između kojih se nalazi točka infleksije. Možemo procijeniti da se točka infleksije nalazi približno u točki $t = 0.25$. Stoga odabiremo sljedeće dvije točke prijelazne funkcije: $(t_1 = 0.1, h_1 = 0.6)$, $(t_2 = 0.75, h_2 = 8)$.

Također određujemo stacionarno stanje prijelazne funkcije h_s, a time i statičko pojačanje K. Iz tablice 1 jasno se vidi da je

$$K = h_s = 10.$$

Koristeći izraze za Strejcovu metodu dobijemo:

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{K-h_1}{K-h_2}\right)} = \frac{0.75 - 0.1}{\ln\left(\frac{10-0.6}{10-8}\right)} = 0.42\,[\mathrm{s}]\,.$$

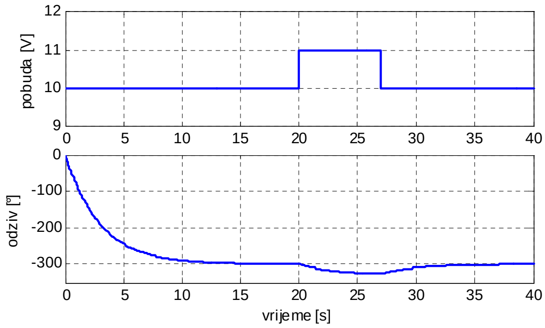
$$T_t = T\ln\left(1 - \frac{h_2}{K}\right) + t_2 = 0.42\ln\left(1 - \frac{8}{10}\right) + 0.75 = 0.074\,[\mathrm{s}]\,.$$

Naposljetku, prijenosna funkcija sustava je:

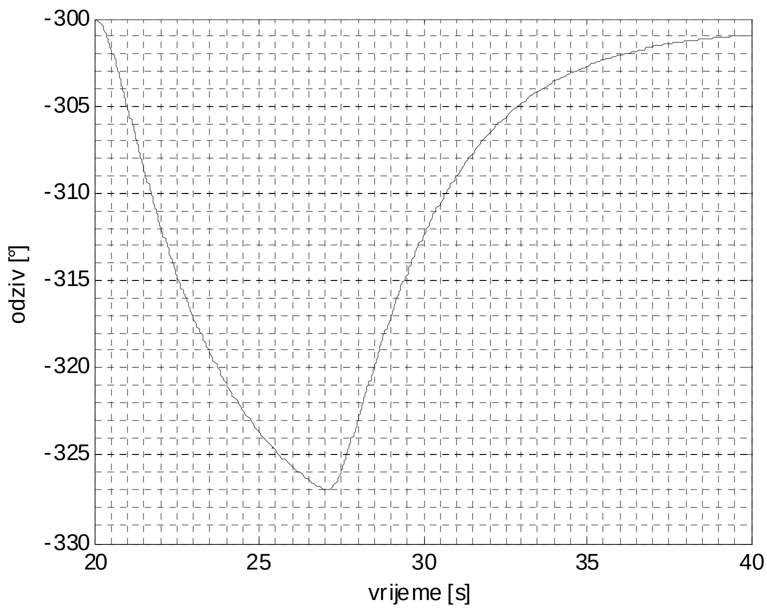
$$G(s) = K\frac{e^{-sT_t}}{1+Ts} = 10\frac{e^{-0.074s}}{1+0.42s}.$$

Zadatak 2

Nelinearni sustav doveden je u radnu točku te je u trenutku $t = 20[s]$ primijenjen ispitni signal trajanja $7[s]$ kao na slici 4. Odziv sustava dan je također na slici 4, a na slici 5 je uvećani odziv. Pronađite linearizirani model sustava u radnoj točki **dvjema** po volji odabranim grafoanalitičkim metodama identifikacije.



Slika 4: Pobuda i odziv sustava.



Slika 5: Uvećani odziv sustava.

Rješenje:

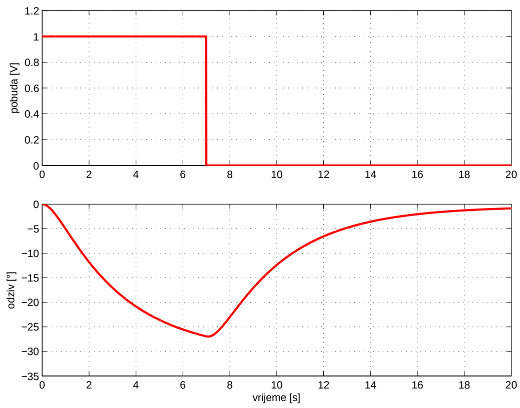
Prvo izdvajamo samo korisni dio signala od $t = 20$ nadalje, te uklanjamo pomak (tj. oduzimamo radnu točku) što daje odziv kao na slici 6.

Onda estimiramo prijelaznu funkciju iz odziva na impuls. Koristimo grafički postupak kojim dobijemo rezultat prikazan na slici 7. Budući da je korišten jedinični impuls, dobiveni odziv predstavlja prijelaznu funkciju pa nije potrebno skaliranje.

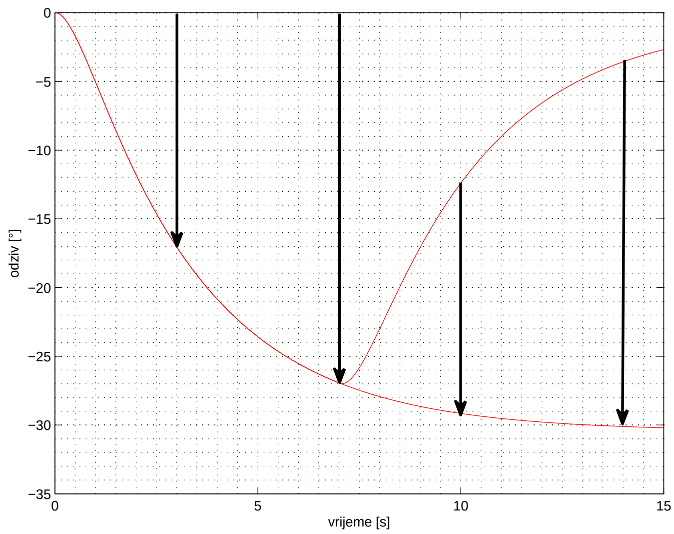
Prvo odabiremo Küpfmüllerovu metodu. Za ovu metodu moramo naći točku infleksije odziva u kojoj povlačimo tangentu te očitavamo vremena porasta i zadržavanja t_a i t_z kao što je vidljivo na slici 8.

Možemo otprilike očitati $t_a = 4.25$ i $t_z = 0.3$. Vremenske konstante prema Küpfmüllerovoj metodi dobiju se prema:

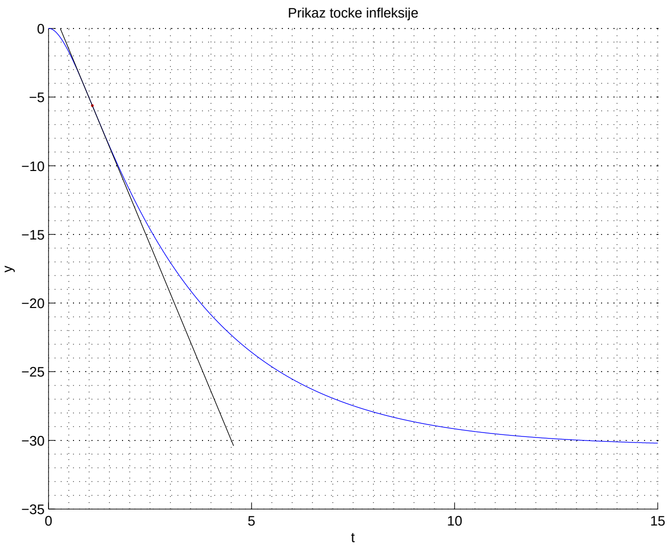
$$T = t_a = 4.25,$$



Slika 6: Pobuda i odziv sustava.



Slika 7: Prijelazna funkcija.



Slika 8: Prikaz točke infleksije.

$$T_t = t_z = 0.3.$$

Pojačanje je jednako ustaljenom stanju prijelazne funkcije, tj. $K = -30$*. Konačno, prijenosna funkcija je*

$$G(s) = K\frac{e^{-sT_t}}{1+Ts} = -30\frac{e^{-0.3s}}{1+4.25s}.$$

Zatim možemo odabrati metodu po Strejcu. Očitavamo dvije točke lijevo i desno od točke infleksije, npr.:

$$(t_1, h_1) = (0.5, -1.75),$$

$$(t_2, h_2) = (5, -23.5).$$

Pojačanje je opet jednako ustaljenom stanju prijelazne funkcije, tj. $K = -30$*. Sada prema izrazima po Strejcu dobijemo:*

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln\dfrac{K-h_1}{K-h_2}} = 3.06,$$

$$T_t = T\ln(1 - h_1/h_{hs}) + t_1 = 0.32.$$

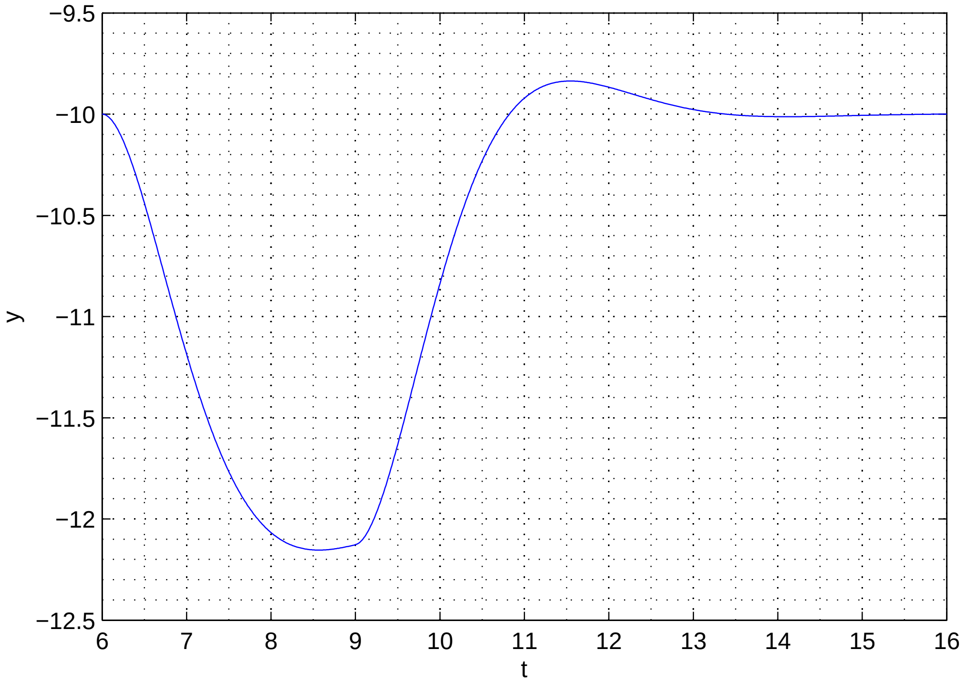
Prijenosna funkcija je:

$$G(s) = K\frac{e^{-sT_t}}{1+Ts} = -30\frac{e^{-0.32s}}{1+3.06s}.$$

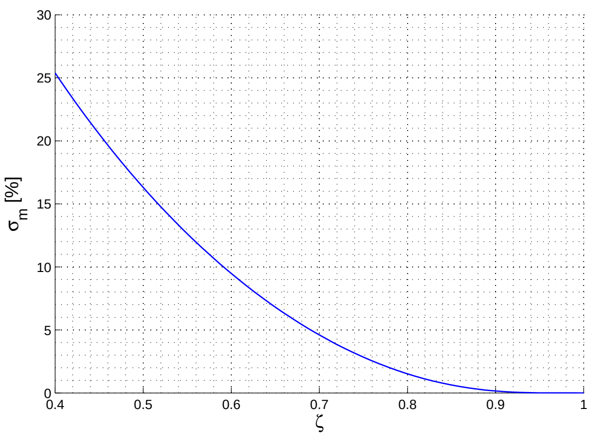
Zadatak 3

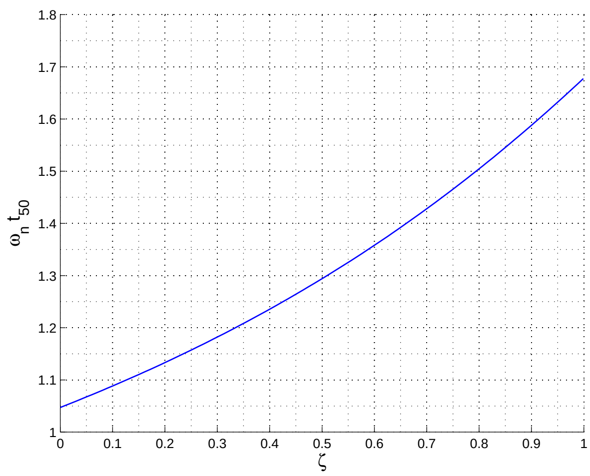
Nelinearni sustav doveden je u radnu točku u kojoj je izlaz sustava $y_0 = -10$. Potom je u trenutku $t = 6$ primijenjen ispitni signal oblika $u(t) = u_0 + 2S(t-6) - 2S(t-9)$, gdje je u_0 ulaz sustava u radnoj točki, a $S(t)$ jedinična skokovita funkcija. Odziv sustava dan je na slici 9. Pronađite linearizirani model sustava u radnoj točki.

Korisni grafovi za sustave drugog reda nalaze se na sljedećoj stranici.



Slika 9: Pobuda i odziv sustava.





Rješenje:

- *Potrebno je gledati promjene signala oko radne točke tako da prvo od svih signala treba oduzeti radnu točku. To je kao da smo na y osi prekrižili brojke, pa umjesto -10 pišemo 0, umjesto -12 pišemo -2 itd. Na vremenskoj osi isto tako treba oduzeti početno vrijeme, pa umjesto 6 pišemo 0 itd. Također, od pobude treba oduzeti* u_0*, pa ostaje samo zbroj stepova.*

- *Iz izraza za pobudu treba zaključiti da je to pravokutni impuls iznosa* $\Delta u = 2$ *koji traje 3 sekunde. Stoga da bismo dobili prijelaznu funkciju potrebno je još podijeliti vrijednosti na y osi s 2.*

- *Grafičkim postupkom dobije se stacionarno stanje odziva* $y_{stac} = -2$*, a odatle stacionarno stanje prijelazne funkcije* $h_{stac} = -1$*. Stoga je pojačanje* $K = h_{stac} = -1$*. Radi se o oscilatornom odzivu pa biramo metodu aproksimacije PT2S članom.*

- *Sada se očita maksimum (ovdje je to zapravo minimum)* $h_{min} = -1.075$. *Relativno nadvišenje je* $\sigma_m = (h_{min} - h_{stac})/h_{stac} \cdot 100\% \; = (-1.075 - (-1))/(-1) \cdot 100\% = 7.5\%$
- *Očitamo* $t_{50} = 0.9$
- *Iz prvog grafa očitamo* $\zeta = 0.63$
- *Iz drugog grafa:* $\omega_n t_{50} = 1.37$, *slijedi* $\omega_n = 1.52$
- *Pa je linearizirani model* $G(s) = K\frac{1}{s^2/\omega_n^2 + 2\zeta/\omega_n s + 1} = -\frac{1}{0.43s^2 + 0.83s + 1}$. *A idealno rješenje bilo bi:* $G(s) = -\frac{1}{0.4s^2+0.8s+1}$

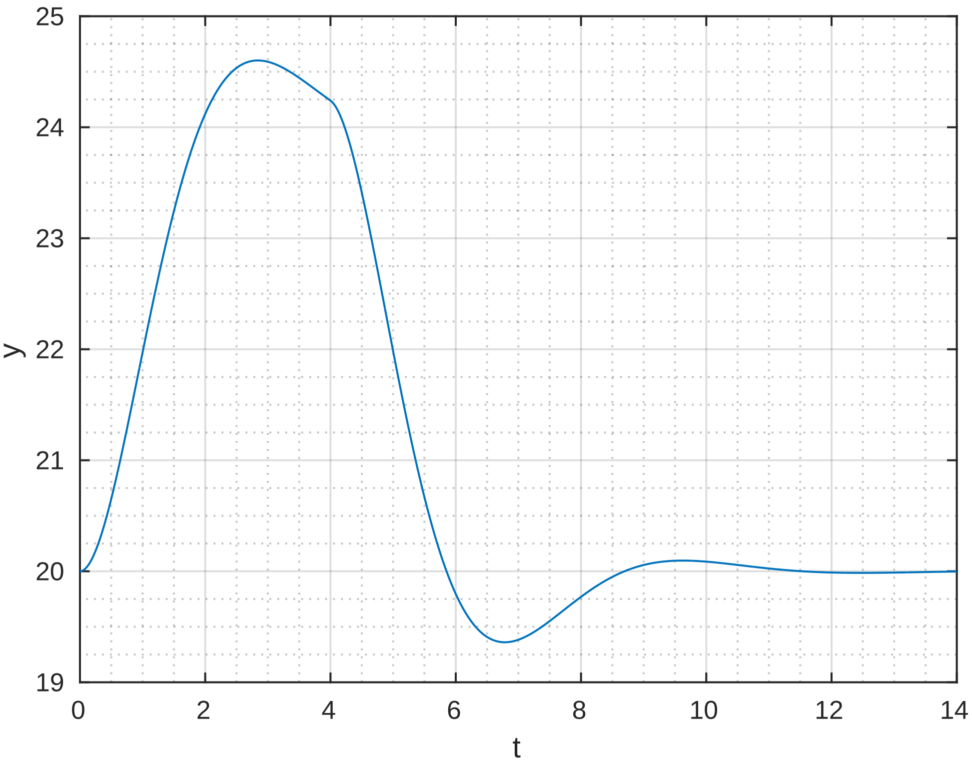
Zadatak 4

Nelinearni sustav doveden je u radnu točku u kojoj je izlaz sustava $y_0 = 20$. Potom je u trenutku $t = 0$ primijenjen ispitni signal oblika $u(t) = u_0 + 2S(t) - 2S(t-4)$, gdje je u_0 ulaz sustava u radnoj točki, a $S(t)$ jedinična skokovita funkcija. Odziv sustava dan je na slici 10.

a) Pronađite prijenosnu funkciju lineariziranog modela sustava u zadanoj radnoj točki korištenjem metode koja će najvjernije opisati ponašanje sustava imajući u vidu oblik prijelazne funkcije. Za izračun w_n koristite jednadžbu:

$$w_n = \frac{\pi}{t_m\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Napomena: Na grafu na slici 10 ucrtajte odziv i označite veličine važne za identifikaciju.



Slika 10: Odziv sustava.

b) Uz pretpostavku da je sustav 2. reda bez nula momentnom metodom odredite prijenosnu funkciju sustava $G(s)$. Poznati momenti su: $M_0 = 2$, $M_1 = 1.6$, $M_2 = 0.16$, $M_3 = -5.376$. Općeniti zapis prijenosne funkcije preko momenata je:

$$G(s) = M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + ...$$

c) Ako bi odziv na slici 10 bio zašumljen koja od dvije korištene metode bi dala bolje rezultate? Obrazložite!

Rješenje:

a) Očitavanjem iz grafa dobije se približno vrijeme prvog maksimuma $t_m = 2.8$ s, a prethodno opisanim grafičkim postupkom nanošenja vrijednosti iza trajanja impulsa dobijemo procjenu stacionarnog stanja $y_{stac} = 4$ (moramo oduzeti radnu točku $y_0 = 20$). Iznos pobude je 2, pa je

$$K = h_{stac} = 4/2 = 2$$

Očitavanjem nadvišenja dobijemo:

$$\sigma_m = (4.6 - 4)/4 = 15\%$$

Iz izraza za nadvišenje:

$$\sigma_m = 100\mathrm{e}^{\dfrac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

slijedi:

$$\zeta^2 = \frac{\ln^2\left(\frac{\sigma_m}{100}\right)}{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\sigma_m}{100}\right)} = 0.27$$
$$\zeta = 0.52$$

Dalje slijedi:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_m\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.31$$

Prijenosna funkcija procesa je

$$G(s) = K\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + 1} = \frac{2}{0.6s^2 + 0.8s + 1}$$

b) Pretpostavka je da je prijenosna funkcija procesa oblika (drugi red bez nula):

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

Polazište momentne metode je razvoj člana e^{-st} u Laplaceovoj transformaciji težinske funkcije $g(t)$ u Taylorov red oko točke $st = 0$:

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \left[1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + ...\right] g(t)dt =$$
$$= \int_0^\infty g(t)dt - s\int_0^\infty tg(t)dt + \frac{s^2}{2!}\int_0^\infty t^2 g(t)dt - \frac{s^3}{3!}\int_0^\infty t^3 g(t)dt + ... =$$
$$= M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + ...$$

Izjednačavanjem momentnog zapisa prijenosne funkcije s prijenosnom funkcijom drugog reda slijedi:

$$M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + ... = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

$$(a_0 + a_1 s + s^2)(M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + ...) = b_0$$

Dalje, izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od s dobit ćemo beskonačan broj algebarskih jednadžbi:

$$M_0 a_0 = b_0$$

$$(-M_1 a_0 + M_0 a_1)\, s = 0s$$

$$\left(\frac{M_2}{2!} a_0 - M_1 a_1 + M_0\right) s^2 = 0s^2$$

$$\left(-\frac{M_3}{3!} a_0 + \frac{M_2}{2!} a_1 - M_1\right) s^3 = 0s^3$$

$$\vdots$$

$$\left(-(1)^k \frac{M_k}{k!} a_0 + (-1)^{k-1} \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} a_1 + (-1)^{k-2} M_{k-2}\right) s^k = 0s^k$$

Budući da imamo 3 koeficijenta za odrediti (a_0, a_1, b_0) dovoljne su prve tri jednadžbe koje koriste momente M_0, M_1 i M_2. Slijedi:

$$a_0 = \frac{-M_0}{\frac{M_2}{2} - \frac{M_1^2}{M_0}} = 1.667$$

$$a_1 = \frac{M_1}{M_0} a_0 = 0.8 a_0 = 1.333$$

$$b_0 = M_0 a_0 = 2a_0 = 3.333$$

Prijenosna funkcija se može dalje srediti u oblik:

$$G(s) = \frac{2a_0}{a_0 + 0.8a_0 s + s^2}$$

što dijeljenjem s a_0 prelazi u:

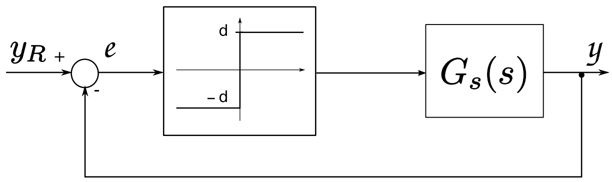
$$G(s) = \frac{2}{0.6s^2 + 0.8s + 1}$$

c) *Na PT2S metodu šum ne utječe značajno budući da je potrebne parametre moguće dosta precizno očitati usprkos šumu (pokazano u vježbama), momentna metoda zahtjeva diferenciranje prijelazne funkcije te šum značajno kvari proces. Odgovor je PT2S*

2. Relejni postupak

Zadatak 5

Sustav na slici 11 doveden je u oscilatorno stanje primjenom nelinearnog elementa s čistom relejnom karakteristikom.



Slika 11: Oscilatorni krug s nelinearnim elementom s čistom relejnom karakteristikom.

Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)},$$

gdje su vremenske konstante iznosa $T_1 = 0.5$ s i $T_2 = 1.5$ s; pojačanje procesa iznosi $K_s = 1$. Pojačanje releja iznosi $d = 0.5$.

a) *(6 bodova)* Odrediti period T_o i amplitudu A oscilacija signala y

b) *(4 boda)* Odrediti parametre PID regulatora prema relejnom postupku ako je zadano fazno osiguranje $\gamma = 55°$

c) *(4 boda)* Odrediti period T_o oscilacija i kritično pojačanje K_{kr} Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti. Nađite vezu K_{kr} i amplitude A oscilacija iz a) dijela zadatka.

Rješenje:

a)

$$N(A) = \frac{4d}{\pi A}.$$

$$N(A)G_s(j\omega_o) = -1.$$

$$\frac{K_s}{j\omega_o(1+j\omega_o T_1)(1+j\omega_o T_2)} \cdot \frac{4d}{\pi A} = -1.$$

$$-\omega_o^2(T_1+T_2) + j\omega_o(1-\omega_o^2 T_1 T_2)) = -K_s\frac{4d}{\pi A},$$

$$-\omega_o^2 T_1 T_2 + 1 = 0,$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = 1.1547,$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 5.4414.$$

$$\omega_o^2(T_1+T_2) = \frac{4dK_s}{\pi A},$$

$$A = \frac{4dK_s}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega_o^2(T_1+T_2)} = 0.2387.$$

b) Parametri PID regulatora prema relejnom postupku uz zadano fazno osiguranje $\gamma = 55^\circ$ određuju se prema sljedećim izrazima:

$$T_D = \frac{\mathrm{tg}(\gamma) + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \mathrm{tg}^2(\gamma)}}{2\omega_o},$$

$$T_I = \alpha T_D,$$

$$K_R = \frac{4d}{\pi A}\cos(\gamma).$$

Uz $\alpha = 4$ slijedi $T_D = 1.3733$, $T_I = 5.4934$ i $K_R = 1.5295$.

c)

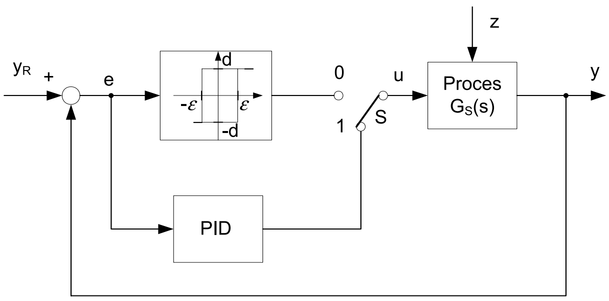
$$K_{kr} G_s(j\omega_o) = -1$$

ω_o je isti jer je K_{kr} samo zamijenio $N(A)$ u postupku a) dijela zadatka i izraz za ω_o ostaje isti kao u a) dijelu zadatka.

$$K_{kr} = \frac{4d}{\pi A}.$$

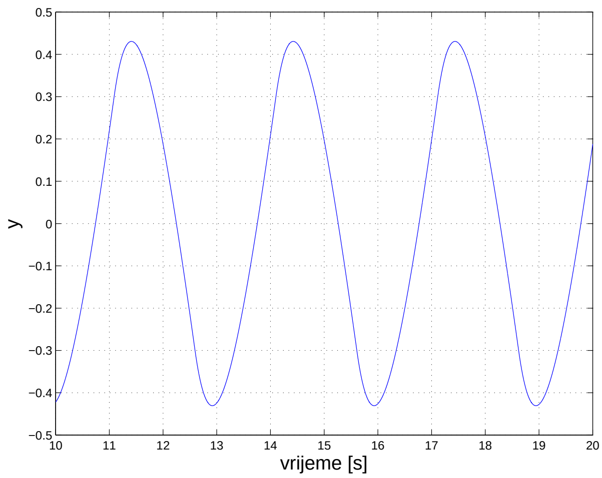
Zadatak 6

Sustav na slici 12 doveden je u oscilatorno stanje kada je sklopka S u položaju 0. Snimljeni je odziv



Slika 12: Oscilatorni krug s nelinearnim elementom s relejnom karakteristikom.

prikazan na slici 13.



Slika 13: Odziv izlazne veličine y.

Pojačanje releja iznosi $d = 0.5$, a područje propuštanja je određeno parametrom $\varepsilon = 0.3$.

a) Odredite parametre prijenosne funkcije procesa koji je aproksimiran IPT1 članom ($G_s(s) = \frac{K_s}{s(1+T_s s)}$);

b) Odrediti parametre PID regulatora prema relejnom postupku ako je zadano fazno osiguranje $\gamma = 45°$;

c) Odredite prijenosnu funkciju realnog PID regulatora u paralelnoj izvedbi uz faktor $\nu = 10$.

Napomena: Koristite sljedeće izraze određivanja parametara regulatora prema relejnom postupku:

$$
\begin{aligned}
N(A) &= \frac{4d}{\pi A^2}\sqrt{A^2-\varepsilon^2} - \mathrm{j}\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2},\\
\varphi_N &= \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-\varepsilon^2}}\right),\\
T_D &= \frac{\mathrm{tg}(\gamma-\varphi_N) + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \mathrm{tg}^2(\gamma-\varphi_N)}}{2\omega_o},\\
T_I &= \alpha T_D,\ \alpha = 4,\\
K_R &= \frac{4d}{\pi A}\cos(\gamma-\varphi_N).
\end{aligned}
$$

Rješenje:

a) Iz odziva očitamo

$$A = 0.43$$

$$T_o = 3$$

Uz $y_R = 0$ slijedi jednadžba harmoničke ravnoteže zapisana u obliku:

$$N(A)G_s(j\omega_o) = -1.$$

Uvrštavanjem procesa IPT1 oblika slijedi:

$$\frac{K_s}{j\omega_o(1+j\omega_o T_s)} \cdot \left(\frac{4d}{\pi A^2}\sqrt{A^2-\varepsilon^2} - \mathrm{j}\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2}\right) = -1.$$

Raspisivanjem jednadžbe i izjednačenjem imaginarnih i realnih dijelova s obje strane znaka jednakosti dolazimo do parametara K_s i T_s IPT1 procesa:

$$
\begin{aligned}
K_s\left(\frac{4d}{\pi A^2}\sqrt{A^2-\varepsilon^2} - \mathrm{j}\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2}\right) &= -\mathrm{j}\omega_o(1+\mathrm{j}T_s\omega_o),\\
-K_s\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2} &= -\omega_o,\\
K_s\frac{4d\sqrt{A^2-\varepsilon^2}}{\pi A^2} &= T_s\omega_o^2,\\
K_s &= 2,\\
T_s &= 0.5.
\end{aligned}
$$

b) Parametri PID regulatora prema relejnom postupku uz zadano fazno osiguranje $\gamma = 45°$ iznose: $T_D = 0.24$, $T_I = 0.97$ i $K_R = 1.48$.

c) Regulator je oblika:

$$G_r(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1+\frac{T_D}{\nu}s}\right).$$

3. Diskretizacija

Zadatak 7

Prijenosna funkcija procesa glasi:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{s(1+T_1 s)},$$

a PD regulatora:

$$G_R(s) = K_R \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{\nu} s}.$$

Zadano je: $T_1 = 5$ s, $K_s = 2$, $K_R = 1.5$, $T_D = 1.5$ s i $\nu = 20$.

a) Odrediti područje vrijednosti vremena uzorkovanja prema širini frekvencijskog pojasa zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu i prema zahtjevu na stabilnost regulatora diskretiziranog Eulerovom unaprijednom diferencijom.

b) Odrediti prijenosnu funkciju diskretnog regulatora dobivenog pomoću Eulerove unaprijedne diferencije za odabrano vrijeme diskretizacije.

Rješenje:

a)

$$6\omega_b \leq \omega_s \leq 40\omega_b$$

$$G_o(s) = G_R(s)G_s(s) = \frac{K_R K_s T_D}{(1+T_1 s)(1+\frac{T_D}{\nu}s)}.$$

$$G_r(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{K_R K_s T_D}{(\frac{T_1 T_D}{\nu})s^2 + (T_1 + \frac{T_D}{\nu})s + 1 + K_R K_s T_D},$$

Širina frekvencijskog pojasa ω_b definirana je kao frekvencija kod koje amplituda zatvorenog kruga padne za 3 dB. U općenitom slučaju to je izraz:

$$|G_r(j\omega_b)| = \frac{\sqrt{2}}{2}|G_r(0)|.$$

Obično je $|G_r(0)| = 1$ ako otvoreni krug ima astatizam (integralno djelovanje), što u ovom zadatku nije slučaj zbog PD regulatora koji poništi integralno djelovanje samog procesa.

$$|G_r(0)| = \frac{K_R K_s T_D}{1 + K_R K_s T_D}.$$

Sređivanjem dobije se kvadratna jednadžba:

$$(\frac{T_1 T_D}{\nu})^2\omega_b^4 + ((T_1 + \frac{T_D}{\nu})^2 - 2(1 + K_R K_s T_D)(\frac{T_1 T_D}{\nu}))\omega_b^2 - (1 + K_R K_s T_D)^2 = 0.$$

$$\omega_b = 1.1773$$

$$0.8895 > T > 0.1334$$

Uvjet za Eulera unaprijednog:

$$T < \frac{2T_D}{\nu}.$$

$$T < 0.15$$

Presjek:

$$0.15 > T > 0.1334$$

b) Odabiremo $T = 0.14$.

$$G_R(z) = \frac{K_R\nu(z-1)}{z + \dfrac{T - \dfrac{T_D}{\nu}}{\dfrac{T_D}{\nu}}}.$$

Za specifični T*:*

$$G_R(z) = \frac{30z - 30}{z + 0.87}.$$

4. Sinteza u frekvencijskom području

Zadatak 8

Za proces:

$$G_p(s) = \frac{0.1}{(1+0.2s)(1+0.02s)} \tag{1}$$

potrebno je korištenjem korekcijskog člana s faznim kašnjenjem:

$$G_R(s) = K_R \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad \alpha > 1 \tag{2}$$

zadovoljiti sljedeće zahtjeve na zatvoreni regulacijski krug:

a) pogreška u stacionarnom stanju na skokovitu pobudu $< 5\%$;

b) vrijeme porasta $t_{a,50} \approx 0.15[s]$.

Projektirajte diskretni regulator metodama EMUL1 i EMUL2.

Rješenje:

Navedene projektne specifikacije za zatvoreni regulacijski krug uvode određene zahtjeve na frekvencijsku karakteristiku otvorenog kruga. Tako zahtjev da pogreška u stacionarnom stanju bude manja od 5% *povlači da amplitudna karakteristika otvorenog kruga na niskim frekvencijama* $(\omega \to 0)$ *bude:*

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_o}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_o\dfrac{1+Ts}{(1+\alpha Ts)(1+T_1 s)(1+T_2 s)}} = \frac{1}{1+K_o}, \tag{3}$$

gdje je $K_o = K_R \cdot 0.1$, $T_1 = 0.2$, $T_2 = 0.02$. *Dalje slijedi*

$$K_0 = \frac{1-e_\infty}{e_\infty} = \frac{1-0.05}{0.05} = 19 (= 25.6[dB]) \tag{4}$$

S druge strane, vrijeme porasta $t_{a,50}$ *približno određuje potrebnu presječnu frekvenciju* ω_c *prema približnom izrazu* $\omega_c t_{a,50} \approx 1.5 - \frac{\sigma_m[\%]}{250} \approx 1.5$, *koja prema tome iznosi:*

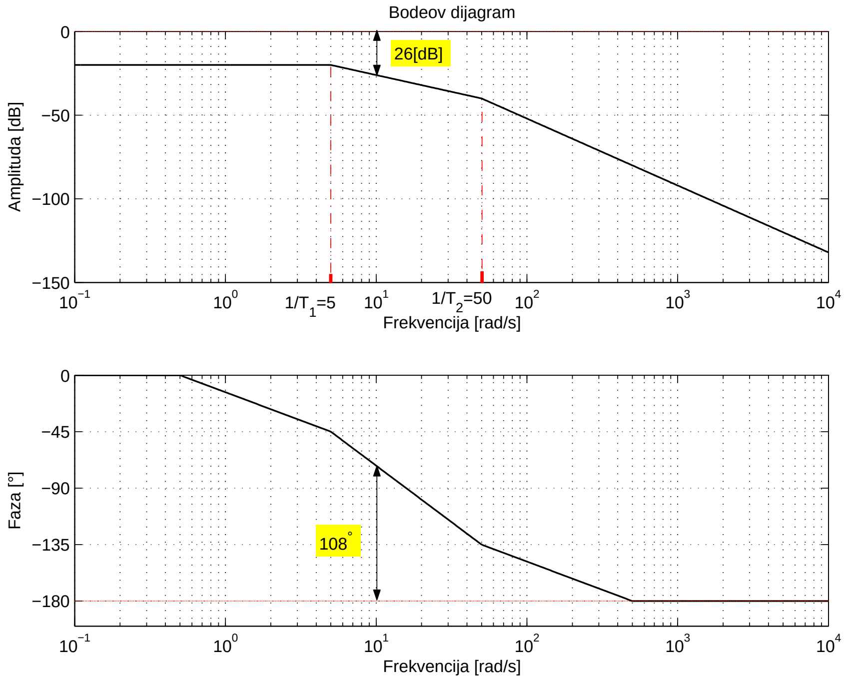
$$\omega_c \approx \frac{1.5}{t_{a,50}} = 10[rad/s] \tag{5}$$

Rješavanje ovog zadatka provest će se kroz nekoliko koraka. U prvom koraku crtamo amplitudnu i faznu karakteristiku procesa, kako bi odredili koliko je pojačanje potrebno dodati u otvoreni krug kako bi presječna frekvencija iznosila upravo $10[rad/s]$. *U sljedećem koraku crtamo frekvenciju karakteristiku otvorenog kruga uz dodano pojačanje određeno u prvom koraku, te provjerimo iznos pojačanja na niskim frekvencijama. Ako to pojačanje nema zadovoljavajući iznos potrebno je provesti treći korak u kojem se u otvoreni krug dodaje korekcijski član s faznim kašnjenjem kako bi se amplitudna karakteristika u području niskih frekvencija podigla na zadovoljavajući iznos. Pritom je bitno da ovaj korekcijski član ne djeluje na iznos amplitude i faze u području srednjih frekvencija (oko* ω_c*), te je zbog toga potrebno da on bude barem dekadu udaljen od* ω_c.

Na slici 14 prikazan je Bodeov dijagram procesa, uz naznačene vrijednosti amplitude i faznog osiguranja na željenoj presječnoj frekvenciji $10[rad/s]$. *Očitane s Bodeovog dijagrama ove vrijednosti iznose* $-26[db]$ *odnosno* $108°$. *Točne vrijednosti amplitude i faze su određene sljedećim izrazima:*

$$A(\omega = 10) = 20\log 0.1 - 20\log\sqrt{1+(\frac{10}{5})^2} - 20\log\sqrt{1+(\frac{10}{50})^2} = -27.16[dB] \; (= \frac{1}{22.8}) \tag{6}$$

$$\phi(\omega = 10) = -\arctan\frac{10}{5} - \arctan\frac{10}{50} = -74.75° \tag{7}$$



Slika 14: Bodeov dijagram procesa

Dodavanjem pojačanja od $27.16[dB]$ *procesu (odnosno množenjem s 22.8) amplitudna karakteristika se podiže za ovaj iznos (fazna se ne mijenja), te sada amplitudno-frekvencijska karakteristika sječe* $0[dB]$ *upravo na željenoj presječnoj frekvenciji* $\omega_c = 10$ *(slika 15), dakle imamo uz proces pojačanje* $K_c = 22.8$*:*

$$K_c \cdot G_p(s) = 22.8 \cdot \frac{0.1}{(1+0.2s)(1+0.02s)} \tag{8}$$

Da bi se podigla amplitudna karakteristika u području niskih frekvencija potrebno je koristiti korekcijski član s faznim kašnjenjem oblika:

$$G_{FK}(s) = \alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad \alpha > 1 \tag{9}$$

Pritom je bitno da nema djelovanja korekcijskog člana na amplitudu nakon $\omega = 1/T < \omega_c$*, tj. da je* $|G_{FK}(\omega)| \approx 0[dB]$ *za* $\omega > 1/T$.

Kako je za ispunjenje uvjeta o iznosu pogreške u stacionarnom stanju neophodno da otvoreni sustav na niskim frekvencijama ima pojačanja najmanje $25.6[dB]$ *(19), odnosno otvoreni krug je oblika*

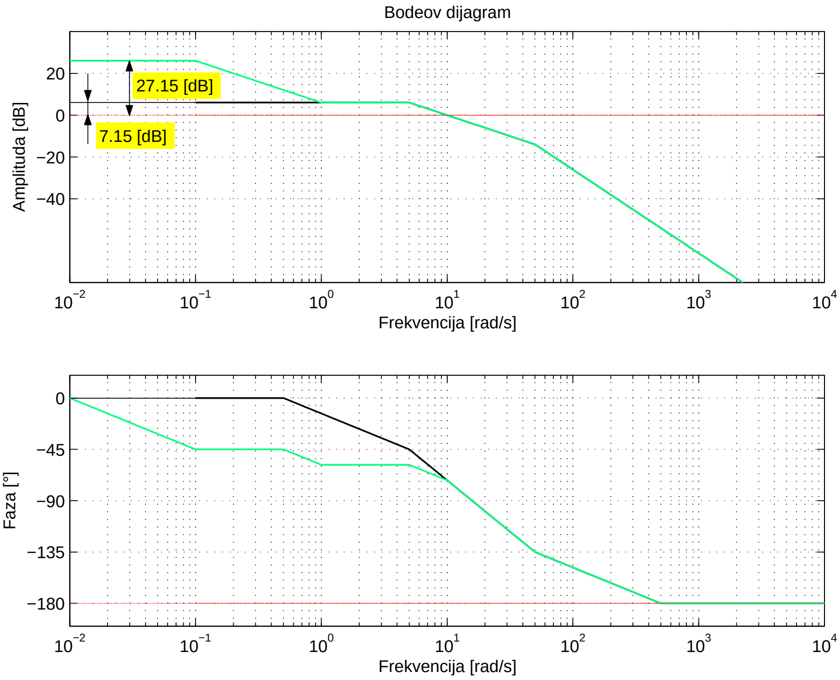
$$G_o = K_c \cdot \alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\frac{0.1}{(1+0.2s)(1+0.02s)} = K_o \cdot \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\frac{1}{(1+0.2s)(1+0.02s)}, \tag{10}$$

gdje $K_o = K_c \cdot \alpha \cdot 0.1 = 19$*. Slijedi da je potrebno korigirati amplitudnu karakteristiku za najmanje* $\alpha = \dfrac{19}{22.8 \cdot 0.1} = 8.33$*, što znači da bi bilo dovoljno odabrati* $\alpha = 10$*, te ćemo u tom slučaju napraviti korekciju amplitudne karakteristike u iznosu od* $20[dB]$.

Frekvenciju $1/T$ *općenito odabiremo da nema djelovanja korekcijskog člana na amplitudu i fazu oko presječne frekvencije, što znači da zbog djelovanja na fazu* $1/T$ *bi trebao biti* $1/T \leq 0.1\omega_c$*, što u našem slučaju znači da je* $T = 1[s]$.

Prema tome korekcijski član ima konačni oblik:

$$G_{FK}(s) = 10\frac{1+s}{1+10s} \tag{11}$$



Slika 15: Bodeov dijagram procesa bez korekcijskog člana (crna) i s korekcijskim članom (zelena)

Uzevši u obzir i prethodno dodano pojačanje u otvoreni krug kako bi se podesila presječna frekvencija slijedi da je regulator dan izrazom:

$$G_R(s) = 22.8 \cdot 10 \frac{1+s}{1+10s} = 228 \frac{1+s}{1+10s} \tag{12}$$

Izbor vremena diskretizacije

Na temelju poznate presječne frekvencije odabire se vrijeme diskretizacije na sredini preporučenog područja:

$$T_d = (0.17 \div 0.34)\frac{1}{\omega_c} = \frac{0.255}{\omega_c} \approx 0.02 \tag{13}$$

Diskretizacija metodom EMUL1

Za diskretizaciju koristit će se Tustinov postupak:

$$G_R(z) = G_R(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{23z - 22.55}{z - 0.998} \tag{14}$$

Diskretizacija metodom EMUL2

Ovdje se ZOH aproksimira PT1 članom:

$$\frac{1}{1+\frac{T_d}{2}s} = \frac{1}{1+0.01s} \tag{15}$$

Potrebno je ustanoviti utjecaj gornjeg PT1 člana na presječnu frekvenciju i pojačanje na niskim frekvencijama te po potrebi ponovo provesti sintezu regulatora kako bi zahtjevi na kvalitetu upravljanja ostali ispunjeni. Amplituda na presječnoj frekvenciji je:

$$\left|\frac{1}{1+0.01j\omega_c}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+0.01^2\omega_c^2}} = 0.995 \tag{16}$$

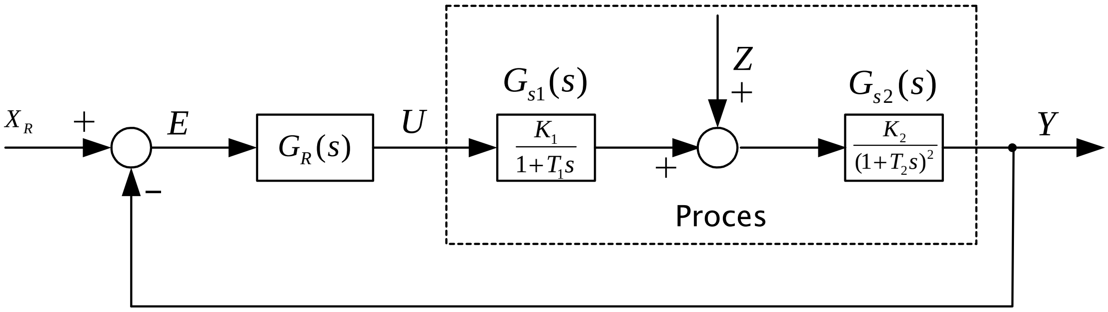
Vidljivo je da je utjecaj na amplitudnu karakteristiku na presječnoj frekvenciji zanemariv. Računanjem pomaka faze koji unosi ZOH:

$$\Delta\phi = -\arctan(0.01\omega_c) = -0.09966[rad] = -5.71^\circ \tag{17}$$

Budući da otvoreni krug ima dosta veliko fazno osiguranje, ovo smanjenje faze je zanemarivog utjecaja na dinamičko vladanje sustava. Isto tako utjecaj na pojačanje na niskim frekvencijama je također zanemariv, pa u ovom slučaju nije potrebno vršiti nikakvu korekciju. Stoga je diskretni regulator po EMUL2 metodi identičan regulatoru dobivenom EMUL1 metodom.

Zadatak 9

Zadan je aperiodski proces trećeg reda prikazan na slici 16. Parametri procesa su: $K_1 = 20$, $K_2 = 0.1$, $T_1 = 2s$, $T_2 = 10s$.



Slika 16: Regulacijski krug s PID regulatorom.

Dana je prijenosna funkcija PID regulatora:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \cdot \frac{1 + T_D s}{1 + T_\nu s},\ T_\nu = 0.1 \cdot T_D\ .$$

a) Predložiti prikladan način izbora integralne i derivacijske vremenske konstante T_I i T_D, uz $T_I = T_D$.

Provedite sintezu u frekvencijskom području koristeći aproksimacije Bodeovih dijagrama pravcima kako slijedi:

b) Uz vremenske konstante T_I i T_D odabrane prema a) treba odrediti pojačanje PID regulatora K_R tako da se dobije vrijeme prvog maksimuma $t_m \approx 15[s]$. Koliki je u tom slučaju iznos nadvišenja prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga?

c) Za regulacijski krug s parametrima regulatora prema b) treba projektirati kompenzacijski član $G_k(s)$

$$G_k(s) = \frac{1 + T_k s}{1 + \alpha T_k s}$$

u kaskadi s već proračunatim regulatorom tako da se postigne nadvišenje prijelazne karakteristike zatvorenog kruga $\sigma_m \approx 5\%$. Vrijeme t_m treba ostati otprilike isto dodavanjem kompenzacijskog člana.

Rješenje:

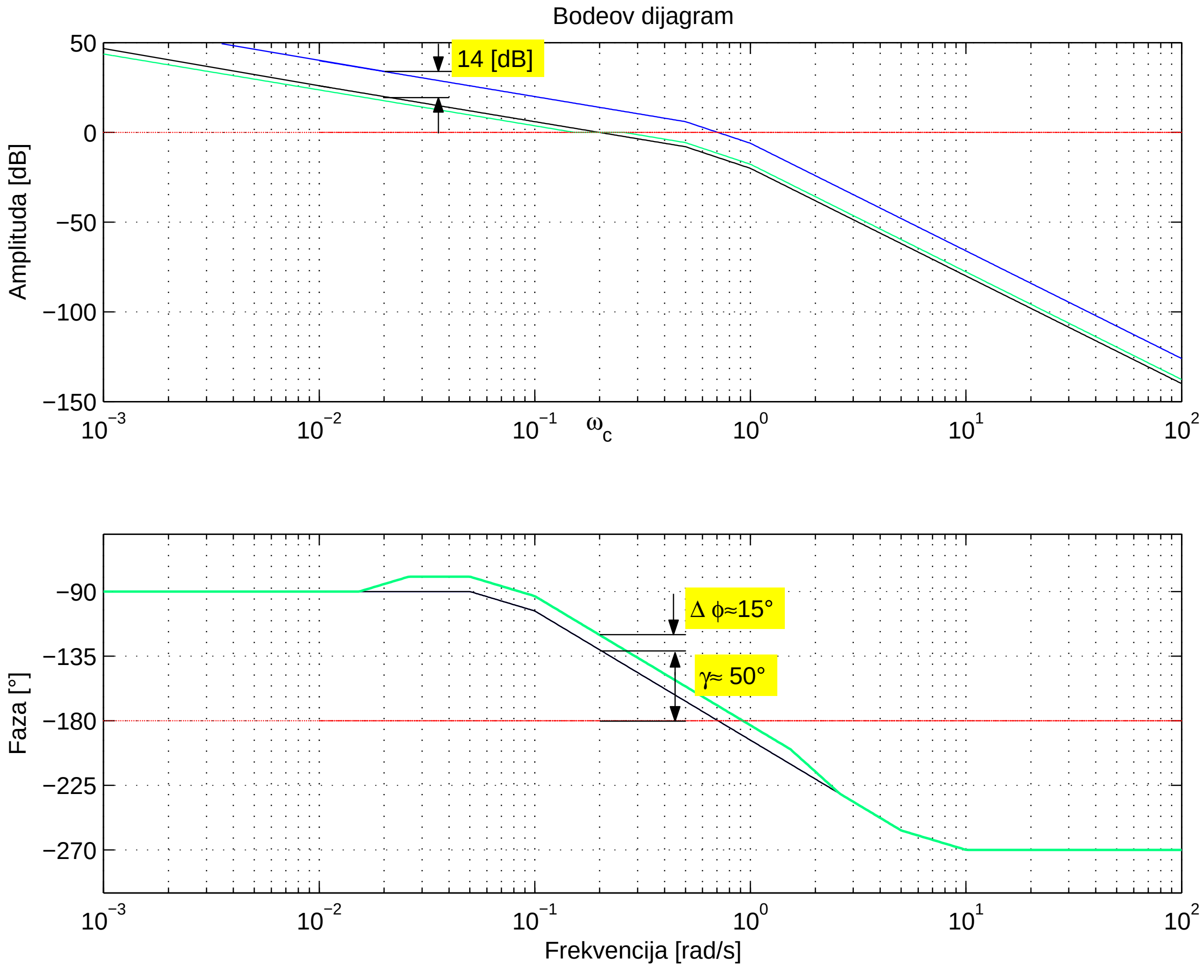
a) Vremenske konstante T_I i T_D odabiru se da kompenziraju dvostruku dominantnu vremensku konstantu procesa T_2:

$$T_I = T_D = T_2 = 10\ s\ \Rightarrow\ T_\nu = 1\ s\ .$$

b) Primjenjujući sintezu prema Bodeovim karakteristikama otvorenog kruga, vrijedi približna relacija između presječne frekvencije $\omega_c \approx \frac{3}{t_m} = 0.2\ \frac{rad}{s}$. *Prijenosna funkcija otvorenog kruga je:*

$$G_o(s) = \frac{K_R K_1 K_2}{T_I s} \frac{1}{1+T_1 s} \frac{1}{1+T_\nu s} = \frac{K_o}{s(1+T_1 s)(1+T_\nu s)}\ ,$$

pri čemu je $K_o = \frac{K_R K_1 K_2}{T_I}$. *Crtaju se Bodeove karakteristike (slika 17 - plava linija) uz aproksimacije pravcima za* $K_o \equiv 1$.



Slika 17: Aproksimacije Bodeovih karakteristika pravcima.

Na frekvenciji ω_c *amplitudnu karakteristiku valja spustiti za 14 dB, što znači da je* $K_o = 10^{-\frac{14}{20}}$, *pa je traženo pojačanje:*

$$K_R = \frac{K_o T_I}{K_1 K_2} = 1\ .$$

Analitički se do ovog rješenja dolazi postavljanjem amplitudnog uvjeta na presječnoj frekvenciji:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1$$

$$K_R = \frac{T_I \omega_c \sqrt{1+(T_1\omega_c)^2}\sqrt{1+(T_\nu\omega_c)^2}}{K_1 K_2} = 1.098$$

Rezultirajuća frekvencijska karakteristika prikazana je na slici 17 (crna linija). Fazno osiguranje je otprilike $50°$, *pa je očekivano nadvišenje* 20%.

Analitički se do ovog rješenja dolazi postavljanjem faznog uvjeta na presječnoj frekvenciji:

$$\gamma = 180 + \arg(G_o(j\omega_c)) = 180 - 90 - \arctan(T_1\omega_c) - \arctan(T_\nu\omega_c) = 56.89°$$

c) Prema približnoj relaciji koja veže nadvišenje i fazno osiguranje $\sigma_m[\%] + \gamma[°] \approx 70$ slijedi da bi fazno osiguranje trebalo iznositi $\gamma = 65°$ da se postigne traženo nadvišenje od 5%. PID regulatorom zaokruženim pod b) dobilo se fazno osiguranje 57°, što znači da fazu na presječnoj frekvenciji treba podići za:

$$\Delta\varphi(\omega_c) = 8° \ ,$$

a pritom ne izmijeniti amplitudnu karakteristiku u okolini presječne frekvencije. Za to će poslužiti kompenzacijski član sa faznim prethođenjem prijenosne funkcije:

$$G_{FP}(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \ \alpha < 1,$$

pri čemu parametar α određuje iznos maksimalnog izdizanja faze korekcijskog člana. Vrijednost parametra α određujemo iz izraza za maksimalno fazno izdizanje:

$$\sin\varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin\varphi_m}{1+\sin\varphi_m} = 0.7557$$

Iznos vremenske konstante T se određuje tako da maksimalno izdizanje faze korekcijskog člana bude upravo na frekvenciji ω_c:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c} = 5.75$$

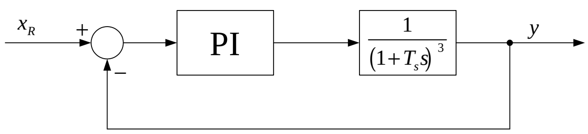
Dodavanjem ovog korekcijskog člana se također djelomično utjecalo na iznos amplitudne karakteristike na presječnoj frekvenciji unoseći pojačanje $1/\sqrt{\alpha} \approx 1.15 (= 1.2[dB])$. Stoga je potrebno u seriju s korekcijskim članom dodati pojačanje koje će kompenzirati ovaj doprinos korekcijskog člana na ω_c, te ono očito iznosi $K = \sqrt{\alpha} = 0.8693 (= -1.2[dB])$
Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u prijenosnu funkciju korekcijskog člana, de dodavanjem spomenutog pojačanja u sustav kako bi presječna frekvencija ostala nepromijenjena, slijedi:

$$G'_{FP}(s) = \sqrt{\alpha}\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = 0.8693\frac{1+5.75s}{1+4.35s},$$

Amplitudna i fazna karakteristika otvorenog kruga nakon dodavanja korekcijskog člana je prikazana na slici 17 (zelena linija).

Zadatak 10

Regulacijski krug na slici 18 korištenjem analognog PI regulatora podešen je tako da mu je maksimalno



Slika 18: Regulacijski krug.

nadvišenje prijelazne funkcije $\sigma_m = 20\%$, a pripadno vrijeme prvog maksimuma je $t_m = 3$ s. Postojeći sustav potrebno je poboljšati dodavanjem digitalnog kompenzacijskog člana čija je prijenosna funkcija u s području

$$K\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$

u seriju s postojećim analognim PI regulatorom, a kojim se nadvišenje smanjuje za 15% (dakle, na 5%), pri čemu vrijeme maksimuma ostaje nepromijenjeno. Pritom treba uzeti u obzir utjecaj diskretizacije (metoda EMUL2). Vrijeme diskretizacije odaberite prema izrazu $T_s = 2\pi/(15\omega_c)$, gdje je T_s vrijeme diskretizacije, a ω_c presječna frekvencija otvorenog kruga.

Napišite prijenosnu funkciju kompenzacijskog člana u z području.

Rješenje:

Prema približnim relacijama, presječna frekvencija iznosi

$$\omega_c = \frac{3}{t_m} = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Odatle se računa vrijeme diskretizacije

$$T_s = \frac{2\pi}{15\omega_c} = 0.42$$

te se ZOH prema metodi EMUL2 aproksimira kao

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{1 + \frac{T_s}{2}s} = \frac{1}{1 + 0.21s}$$

Za smanjenje nadvišenja za 15% *faza se na presječnoj frekvenciji treba podići za*

$$\varphi_1 = 15^\circ$$

ZOH također spušta fazu na presječnoj frekvenciji pa je fazu dodatno potrebno podići za

$$\varphi_2 = \arctan 0.21\omega_c = 11.86^\circ$$

Pa je traženo fazno izdizanje kompenzacijskog člana na presječnoj frekvenciji

$$\varphi_m = 15^\circ + 11.86^\circ = 26.86^\circ$$

Dakle, potrebno je uzeti član s faznim prethođenjem, tj. $0 < \alpha < 1$. *Frekvencija maksimalnog izdizanja faze ovog člana je*

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

te odabiremo $\omega_m = \omega_c$. *Maksimalno izdizanje faze je s* α *povezano preko*

$$\varphi_m = \arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

iz čega se dobije

$$\alpha = \frac{1 - \sin\varphi_m}{1 + \sin\varphi_m} = 0.3776$$

Vremenska konstanta T *određena je iz uvjeta da se maksimum faze događa baš na* ω_c*:*

$$T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = 1.627 \text{ s}.$$

Pojačanje člana K *odabire se tako da se kompenzira utjecaj kompenzacijskog člana i nadomjesnog člana za ZOH na amplitudno-frekvencijsku karakteristiku na frekvenciji* ω_c *kako se ne bi remetila presječna frekvnecija, odnosno vrijeme maksimuma. Utjecaj kompenzacijskog člana na amplitudnu karakteristiku je:*

$$A_1(\omega_c) = \sqrt{\frac{1+\omega_c^2 T^2}{1+\alpha^2\omega_c^2 T^2}} = 1/\sqrt{\alpha} = 1.627.$$

a utjecaj ZOH nadomjesnog člana je

$$A_2(\omega_c) = \sqrt{\frac{1}{1+0.21^2\omega_c^2}} = 0.98$$

pa ga je moguće zanemariti. Stoga je potrebno pojačanje kompenzatora

$$K = 1/A_1 = 0.615$$

Prijenosna funkcija kompenzacijskog člana je

$$G_r(z) = 0.615\frac{1+1.627s}{1+0.3776\cdot 1.627s}\bigg|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1.369z-1.056}{z-0.4906}$$

Zadatak 11

Za proces:

$$G(s) = \frac{100}{(s+10)(s+1)}$$

potrebno je korištenjem odgovarajućeg korekcijskog dinamičkog člana projektirati regulator kojim bi se zadovoljili sljedeći zahtjevi na zatvoreni regulacijski krug:

- Zatvoreni regulacijski krug nema pogrešku u stacionarnom stanju na skokovitu pobudu referentnog signala;
- Pogreška u stacionarnom stanju na pobudu oblika funkcije linearnog porasta $x_r(t) = t$ je < 0.05;
- Vrijeme prvog maksimuma $t_m \approx 2.5[s]$;

Zatim je potrebno:

a) Projektirati digitalni regulator uz zanemaren utjecaj diskretizacije (metoda EMUL1). Vrijeme diskretizacije odaberite prema presječnoj frekvenciji tako da odaberete vrijednost iz sredine preporučenog područja.

b) Odredite koliko utječe diskretizacija na brzinu odziva i nadvišenje.

c) Kvalitativno skicirajte odzive izlazne veličine zatvorenog kruga na skokovitu promjenu reference uz korištenje kontinuiranog i uz korištenje diskretnog regulatora (naznačite nadvišenje, vrijeme prvog maksimuma i stacionarnu vrijednost).

Rješenje:

a) *Da bi se uklonila pogreška u stacionarnom stanju pri skokovitoj pobudi regulator mora imati integralnu komponentu, $G_R = K_R\frac{1}{s}$. Željena je presječna frekvencija:*

$$\omega_c = \frac{3}{t_m} = 1.2$$

Prvo naštimavamo pojačanje otvorenog kruga koji se sastoji od sustava i integratora.

$$G_o(s) = K_R\frac{1}{s}\frac{10}{(1+0.1s)(s+1)}$$

Amplituda na željenoj presječnoj frekvenciji treba biti 1:

$$|G_o(j\omega_c)| = K_R \frac{10}{\omega_c\sqrt{1+(0.1\omega_c)^2}\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$$

$$K_R = \frac{\omega_c\sqrt{1+(0.1\omega_c)^2}\sqrt{1+\omega_c^2}}{10} = 0.1888$$

Zahtjev da pogreška u stacionarnom stanju na rampu bude manja od 5% povlači zahtjev na iznos amplitude na niskim frekvencijama ($\omega \to 0$). Da se ne pokvari amplitudna i fazna karakteristika na srednjem i višem frekvencijskom području uzima se korekcijski član s faznim kašnjenjem oblika $G_{FK} = \alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$. Sada otvoreni krug ima oblik:

$$G_o(s) = K_R \frac{1}{s}\alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\frac{10}{(1+0.1s)(s+1)}$$

Iz izraza za pogrešku u stacionarnom stanju slijedi:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_o}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K_o\frac{1+Ts}{s(1+\alpha Ts)(1+T_1s)(1+T_2s)}}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{K_o}, \tag{18}$$

gdje je $K_o = 10K_R\alpha$, $T_1 = 0.1$, $T_2 = 1$. Dalje slijedi

$$K_o = \frac{1}{e_\infty} = \frac{1}{0.05} = 20 \tag{19}$$

Stoga je potrebno podignuti pojačanje na niskim frekvencijama za $\alpha = \frac{K_o}{10K_R} = 10.5937$. Faza korekcijskog člana ne smije utjecati na okolicu ω_c pa se bira $\frac{1}{T} < \frac{\omega_c}{10}$ (barem jedna dekada). Dakle $T = 8.3333$ s. Ukupni regulator je oblika:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s}\alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = 2\frac{1}{s}\frac{8.3333s+1}{88.28s+1}$$

Vrijeme diskretizacije:

$$T_d = \frac{0.17+0.34}{2\omega_c} = 0.2125$$

Diskretizirani regulator po Tustinu:

$$G_{Rd}(z) = 0.0203\frac{(1+z^{-1})(1-0.9748z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.9976z^{-1})}$$

b) *Pogledamo utjecaj člana $e^{-s\frac{T_d}{2}}$ na presječnoj frekvenciji (samo na fazu).*

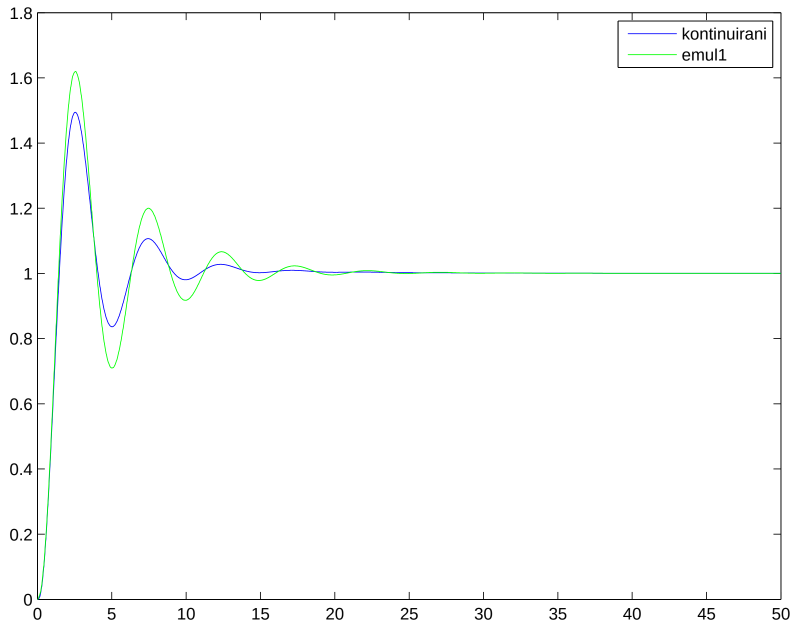
$$\varphi = -\omega_c\frac{T_d}{2} = -7.3^\circ$$

Dakle, smanjuje fazno osiguranje za 7.3°, odnosno povećava nadvišenje za $\approx 7.3\%$. Brzina odziva ostaje jednaka. Za skicu odziva treba koristiti vrijednost t_m i nadvišenje prema faznom osiguranju (Slika 19).

Zadatak 12

Za proces:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}:$$



Slika 19: Odzivi.

a) Projektirajte digitalni kompenzacijski član čija je prijenosna funkcija u s području

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}, \quad \alpha > 1.$$

Pritom zanemarite utjecaj diskretizacije (metoda EMUL1). Vrijeme diskretizacije odaberite prema širini frekvencijskog pojasa zatvorenog regulacijskog kruga. Zatvoreni regulacijski krug treba zadovoljiti sljedeće zahtjeve:

- pogreška u stacionarnom stanju na pobudu oblika linearnog porasta $r(t) = t$ nije veća od 0.05;
- nadvišenje i brzina odziva na skokovitu pobudu moraju ostati nepromijenjeni.

b) Odredite koliko diskretizacija utječe na brzinu odziva i nadvišenje.

Zadane su vremenske konstante procesa iznosa $T_1 = 0.1$ s, $T_2 = 0.1$ s; pojačanje procesa iznosi $K_s = 1$.

Napomena: Koristite sljedeće približne izraze:

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_c},$$

$$\omega_b = (1.2 \div 1.5)\omega_c.$$

5. Truxal-Guilleminov postupak

Zadatak 13

Prijenosna funkcija koja opisuje upravljanje zakretom osovine pogonskog motora robotske ruke dana je s

$$G_S(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(s+1)}.$$

Potrebno je korištenjem Truxal-Guilleminovog postupka:

a) Odrediti izvedivu standardnu modelsku funkciju minimalnog reda $G_m(s)$ koja će osigurati točnost pozicioniranja robotske ruke na podlozi bez nadvišenja. Pritom dinamika modelske prijenosne funkcije treba biti dva puta brža od dinamike prijenosne funkcije $G_S(s)$ (odrediti $t_{a,50}$).

b) Odrediti prijenosnu funkciju regulatora $G_R(s)$ za modelsku funkciju određenu pod a).

c) Odrediti digitalni regulator $G_R(z)$, perioda diskretizacije $T = 0.4$ s, s uključenim utjecajem diskretizacije na vladanje regulacijskog kruga (metoda EMUL2).

Rješenje:

Zahtijeva se čisto aperiodsko vladanje modelske funkcije pa zato odabiremo binomni oblik. Iz $t_{a,50}$ određujemo potrebnu dinamiku modelske funkcije. Prijelazna funkcija sustava dobije se inverznom Laplaceovom transformacijom (nakon rastava na parcijalne razlomke):

$$H_S(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+s)} \cdot \frac{1}{s} = (\frac{-1}{1+0.5s} + \frac{2}{1+s})\frac{1}{s} = \frac{-1}{1+0.5s}\frac{1}{s} + \frac{2}{1+s}\frac{1}{s},$$

$$h_S(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_S(s)) = -1(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.5}}) + 2(1-\mathrm{e}^{-t}) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}.$$

t_{50} *(vremenski trenutak u kojem prijelazna funkcija dosegne 50% stacionarne vrijednosti) određuje se iz*

$$h_S(t_{50}) = 0.5,$$

$$1 - 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} = 0.5,$$

$$p = \mathrm{e}^{-t}, \quad 0 < p < 1,$$

$$1 - 2p + p^2 = 0.5,$$

$$p = 0.29, \quad t_{50} = -\ln p = 1.23.$$

Iz derivacije prijelazne funkcije u točki t_{50} dobije se vrijeme porasta $t_{a,50}$.

$$h'_S(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t},$$

$$h'_S(t_{50}) = 0.4142,$$

$$t_{a,50} = \frac{1}{h'_S(t_{50})} = 2.41.$$

Dva puta brža dinamika zahtijeva $t_{za,50} = \frac{t_{a,50}}{2} = 1.2$ zatvorenog kruga. Budući da je $t_{a,50} \approx 2t_{50}$ dovoljno je očitati iz grafova modelske funkcije vrijeme t_{50} umjesto vrijeme porasta (lakše očitavanje) pa tako dva puta brža dinamika zahtijeva $t_{z50} = \frac{t_{50}}{2} = 0.61$. Modelska funkcija je drugog reda, a prema binomnom obliku slijedi $t_{z50}\omega_n = 1.7$ (očitano), $\omega_n = 2.77$. Modelska je funkcija sljedećeg oblika:

$$G_m(s) = \frac{7.67}{s^2 + 5.54s + 7.67}.$$

Regulator prema tome glasi:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)}\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)} = \frac{3.833s^2+11.5s+7.667}{s^2+5.538s} = 3.833\frac{(s+2)(s+1)}{s(s+5.54)}.$$

Uzimajući u obzir utjecaj diskretizacije aproksimiran kao

$$G_{ZOH} = \frac{1}{1+\frac{T}{2}s},$$

prijenosna funkcija procesa glasi:

$$G_s'(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.2s)}.$$

Sada je potrebno uzeti modelsku funkciju 3. reda. Prema zahtjevu za dva puta bržu dinamiku očitavamo $t_{z50}\omega_n = 2.7$, $\omega_n = 4.4$. *Modelska je funkcija sljedećeg oblika:*

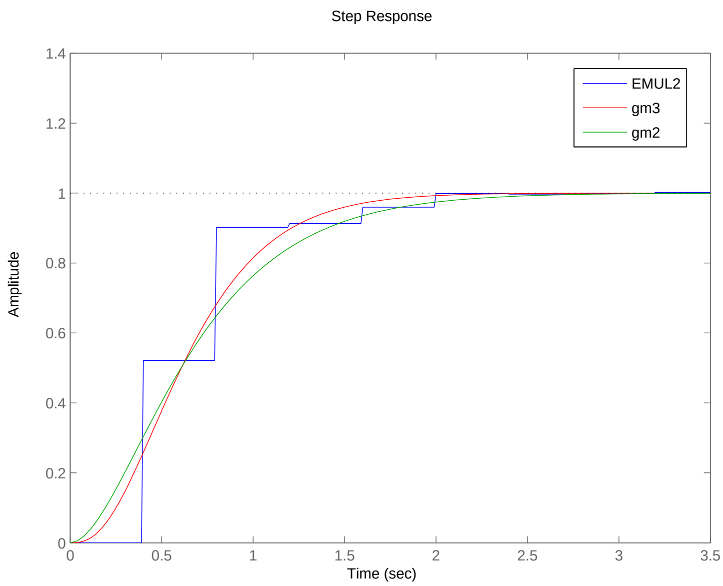
$$G_m(s) = \frac{85.04}{s^3+13.19s^2+58.02s+85.04}.$$

Regulator prema tome glasi:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_s'(s)}\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)} = \frac{8.5s^3+68.03s^2+144.6s+85.04}{s^3+13.19s^2+58.02s} = 8.5\frac{(s+5)(s+2)(s+1)}{s(s^2+13.19s+58.02)}.$$

Diskretizacijom Tustinovim postupkom dobije se:

$$G_R(z) = \frac{4.795z^3-5.252z^2+1.37z}{z^3-0.557z^2-0.329z-0.1145} = 4.795\frac{z(z-0.67)(z-0.43)}{(z-1)(z^2+0.44z+0.11)}.$$



Slika 20: Usporedba odziva s kontinuiranim i digitalnim regulatorom.

Zadatak 14

Dan je proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{s+1}{s+0.5}.$$

Potrebno je korištenjem Truxal-Guilleminovog postupka:

a) Odrediti izvedivu modelsku funkciju minimalnog reda $G_m(s)$ koja će osigurati točnost u ustaljenom stanju na skokovitu promjenu referentne veličine $x_R(t)$. Modelsku funkciju odaberite proizvoljno tako da vladanje zatvorenog kruga bude dva puta brže od vladanja procesa. Uzmite u obzir da nula ne utječe uvelike na vladanje procesa.

b) Odrediti prijenosnu funkciju regulatora $G_R(s)$ za modelsku funkciju određenu pod a).

c) Odrediti digitalni regulator $G_R(z)$, s uključenim utjecajem diskretizacije na vladanje regulacijskog kruga (metoda EMUL2). Period diskretizacije odredite prema vremenu porasta t_r zatvorenog kruga tako da uzmete vrijednost koja je na sredini preporučenog područja.

d) Odrediti digitalni regulator $G_R(z)$ neposredno u z-području (metoda 3). Period diskretizacije odredite kao pod c).

Rješenje:

a) Polni višak procesa je 0 pa je minimalna realizacija modelske funkcije prvog reda. Frekvencija 0.5 u nazivniku prijenosne funkcije procesa utječe na brzinu odziva tako da treba biti dva puta veća, odnosno $\omega_n = 1$:

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}$$

b) Regulator prema tome glasi:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{s+0.5}{s(s+1)}$$

c) Vrijeme porasta t_r očitano je iz prijelazne funkcije prema Butterworthu od 0.1 do 0.9.

$$t_r \approx 2$$

Vrijeme uzorkovanja na sredini preporučenog područja:

$$T = \frac{0.08 + 0.5}{2} t_r = 0.58$$

Uključenje utjecaja diskretizacije nalazi se u izrazu za regulator:

$$G_R(s) = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = 0.29 \frac{(s+3.45)(s+0.5)}{s(s+1)} = \frac{0.29s^2 + 1.145s + 0.5}{s^2 + s}$$

Tustinovom diskretizacijom dobivamo:

$$G_{R2}(z) = \frac{0.5148z^2 - 0.3844z}{z^2 - 1.55z + 0.5504} = 0.51 \frac{1 - 0.75z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.55z^{-1})}$$

d) ZOH diskretizacija procesa:

$$\begin{aligned}
G_{sd}(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\frac{G_s(s)}{s}\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\ \frac{1}{s+0.5} + 2\frac{0.5}{s(s+0.5)}\} \\
&= (1 - z^{-1})(\frac{1}{1 - e^{-0.5T}z^{-1}} + 2\frac{(1 - e^{-0.5T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-0.5T}z^{-1})}) \\
&= \frac{1 - 0.4965z^{-1}}{1 - 0.7483z^{-1}}
\end{aligned}$$

Proces ne posjeduje nule u beskonačnosti i ne posjeduje neminimalno fazne nule i stoga ih ne mora posjedovati ni diskretna modelska funkcija. Nazivnik modelske funkcije odabire se kao diskretni ekvivalent kontinuirane modelske funkcije tako da se polovi kontinuirane modelske funkcije transformiraju prema relaciji $z = e^{sT}$ u polove diskretne modelske funkcije:

$$s_p = -1 \quad \rightarrow z_p = 0.56.$$

Uvjet za stacionarnu točnost daje na izbor samo jedan parametar brojnika diskretne modelske funkcije:

$$G_{md}(z) = \frac{\alpha_0}{1 - 0.56z^{-1}}$$

Iz $G_{md}(1) = 1$ slijedi $\alpha_0 = 0.44$. Regulator prema tome glasi:

$$G_{R3}(z) = \frac{1}{G_{sd}(z)} \frac{G_{md}(z)}{1 - G_{md}(z)} = \frac{0.786(1 - 0.7483z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.4965z^{-1})}$$

Zadatak 15

Dan je proces opisan diskretnom prijenosnom funkcijom:

$$G_s(z) = 0.05\frac{z + 2}{(z - 1.5)(z - 0.5)}$$

i vremena diskretizacije $T = 0.1$ s. Potrebno je korištenjem Ragazzinijevog postupka:

a) *(4)* Odrediti izvedivu modelsku funkciju $G_m(z)$ koja će osigurati točnost u ustaljenom stanju na skokovitu promjenu referentne veličine. Modelsku funkciju odaberite tako da karakteristična jednadžba zatvorenog sustava upravljanja bude diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 18s + 40 = 0.$$

b) *(2)* Odrediti digitalni regulator $G_R(z)$. Ima li regulator integralno djelovanje? Obrazložite zašto se regulatorom ne smiju kratiti nestabilni pol i neminimalno fazna nula procesa. Pokažite to s odgovarajućim prijenosnim funkcijama.

Rješenje:

a) Proces mora biti zapisan u ovom obliku:

$$G_s(z) = 0.05\frac{z^{-1}(1 + 2z^{-1})}{(1 - 1.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Proces posjeduje jednu nulu u beskonačnosti, jednu neminimalno faznu nulu i jedan nestabilni pol i stoga ih se mora uključiti u diskretnu modelsku funkciju. Nazivnik modelske funkcije odabire se kao diskretni ekvivalent kontinuirane modelske funkcije tako da se polovi kontinuirane modelske funkcije transformiraju prema relaciji $z = e^{sT}$ u polove diskretne modelske funkcije:

$$s_{p1} = -15.4031 \quad \rightarrow z_{p1} = 0.2143.$$

$$s_{p2} = -2.5969 \quad \rightarrow z_{p2} = 0.7713.$$

$$z^2 - 0.9856z + 0.1653 = 0.$$

Označimo s n i p neminimalno faznu nulu odnosno nestabilni pol.

$$n = -2,\ p = 1.5$$

Zbog neminimalno fazne nule i jedne nule u beskonačnosti modelska funkcija je oblika

$$G_m(z) = \frac{z^{-1}(1 - nz^{-1})(b_0 + b_1z^{-1} + ...)}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

gdje su

$$a_0 = 1,\ a_1 = -0.9856,\ a_2 = 0.1653$$

Zbog nestabilne nule modelska funkcija mora zadovoljavati sljedeće:

$$1 - G_m(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} - z^{-1}(1 - nz^{-1})(b_0 + b_1 z^{-1} + ...)}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{(1 - pz^{-1})(c_0 + c_1 z^{-1} + ...)}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Još ne znamo koliko ćemo parametara brojnika moći odrediti. Uvjet za stacionarnu točnost daje prvu jednadžbu s N nepoznatih parametara brojnika $b_0, b_1, ..., b_N$:

$$G_m(1) = 1 \quad \rightarrow (b_0 + b_1 + ...)(1 - n) = a_0 + a_1 + a_2$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz negativne potencije z možemo zaključiti da nepoznatih koeficijenata c_i ima za jedan više od nepoznatih koeficijenata b_i, dakle imamo $N+N+1$ nepoznanica i toliko trebamo naći jednadžbi. Izjednačavanje koeficijenata daje onoliko jednadžbi koliki je red polinoma plus 1 (za koeficijente uz z^0 do z^{-m}). Redom razmatramo: za $N = 0$ imamo nepoznanice b_0, c_0, c_1, a jednadžbi za koeficijente do z^{-2} ima 3 plus uvjet za stac. daje 4 jednadžbe - previše za 3 nepoznanice. Za $N = 1$ nepoznanice su b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, maksimalna potencija brojnika je 3 što daje 5 jednadžbi - taman. Još za svaki slučaj provjera za $N = 2$, nepoznanice su $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3$, potencija ima 5 što daje 6 jednadžbi - premalo za 7 nepoznanica.

Za nepoznanice b_0, b_1, c_0, c_1, c_2 uz zanemarivanje ostalih članova dobiju se sljedeće jednadžbe:

$$a_0 = c_0$$

$$a_1 - b_0 = c_1 - pc_0 \quad \rightarrow \; c_1 = a_1 - b_0 + pa_0$$

$$a_2 - b_1 + b_0 n = c_2 - pc_1$$

$$b_1 n = -pc_2 \quad \rightarrow \; c_2 = -b_1 n/p$$

Iz uvjeta za stac. točnost izražavamo b_0 i uvrštavamo ga u ostale izraze:

$$b_0 = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{1 - n} - b_1$$

$$b_1 = \frac{1}{(p - n)(1 - \frac{1}{p})}(-a_2 - pa_1 - p^2 a_0 + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{1 - n}(p - n))$$

Slijedi $b_0 = 0.6833$ i $b_1 = -0.6234$ (za provjeru ostali parametri iznose $c_1 = -0.1689$, $c_2 = -0.8311$).

b) Regulator prema tome glasi:

$$G_R(z) = \frac{1}{G_s(z)} \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(b_0 + b_1 z^{-1})}{0.05(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-1})} = \frac{13.67(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.9123z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8311z^{-1})}$$

Regulator ima integralno djelovanje jer ga nema proces, a potrebno je da bi se ostvarila stacionarna točnost. Regulator ne smije kratiti neminimalno faznu nulu procesa ni nestabilni pol jer zajednički faktor ostaje faktor karakteristične jednadžbe (npr. kar. jedn. $(s - a)(AC' + DB') = 0$). Kraćenjem neminimalno fazne nule javlja se nestabilno vladanje za prijenosnu funkciju $\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1+G_R G_s}$ koja u nazivniku ima neminimalno faznu nulu procesa, a kraćenjem nestabilnog pola javlja se nestabilno vladanje za prijenosnu funkciju $\frac{Y}{Z} = \frac{G_P}{1+G_R G_s}$.

6. Upravljanje procesima s mrtvim vremenom

Zadatak 16: Smithov prediktor

Proces s dominantnim mrtvim vremenom opisan je prijenosnom funkcijom:

$$G_P\left(s\right) = \frac{5e^{-50.4s}}{\left(1+10s\right)\left(1+40s\right)}$$

Proces je potrebno regulirati regulatorom zasnovanom na diskretnom Smithovom prediktoru.

a) Parametre digitalnog regulatora $G'_R(z)$ treba odrediti diskretizacijom kontinuiranog PI regulatora koji se dobije kompenzacijom dominantne vremenske konstante procesa uz zahtjev da relativni koeficijent prigušenja bude $\xi = \sqrt{2}/2$.

b) Sve potrebne diskretizacije provesti postupkom unazadne diferencije. Nacrtati shemu sustava upravljanja uz primjenu Smithovog prediktora, te napisati prijenosne funkcije svih dijelova Smithova prediktora u z području. (Napomena: ne raditi nikakve aproksimacije procesa!)

Rješenje:

PI regulator kojim se ostvaruje kompenzacija dominantne vremenske konstante ima oblik:

$$G_R\left(s\right) = K_R\frac{T_I s+1}{T_I s} = K_R\frac{40s+1}{40s}.$$

Regulator projektiramo prema prijenosnoj funkciji procesa uz zanemarenje kašnjenja - $G'_p\left(s\right)$ *. Prema tome prijenosna funkcija otvorenog kruga je:*

$$G_0\left(s\right) = G_R\left(s\right)G'_p\left(s\right) = \frac{5K_R}{40s\left(10s+1\right)}.$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga je nakon sređivanja:

$$G_z\left(s\right) = \frac{\frac{K_R}{80}}{s^2+\frac{s}{10}+\frac{K_R}{80}}.$$

Iz zahtjeva na relativni koeficijent prigušenja dobije se pojačanje regulatora:

$$K_R = 0.4$$

Da bismo dobili vrijeme uzorkovanja, prvo računamo presječnu frekvenciju otvorenog kruga. Dobije se:

$$\omega_c = 0.0455$$

Odavde se širina pojasa dobije korištenjem približnog izraza:

$$\omega_b \approx 1.5\omega_c = 0.0683$$

Vrijeme uzorkovanja bira se prema izrazu:

$$T \approx (0.16 \div 1.05)\frac{1}{\omega_b} = 2.34 \div 15.38$$

Izabire se npr. vrijednost iz donjeg područja, te je uz zaokruživanje:

$$T = 2s.$$

Diskretizaciju provodimo postupkom unazadne diferencije pa koristimo supstituciju:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}.$$

Uvrštenjem supstitucije (0-5) u (0-1) i (0-2) dolazimo do diskretnih prijenosnih funkcija modela procesa bez kašnjenja i regulatora:

$$\begin{aligned} G_p^{'}(z) &= \frac{0.05}{z^{-2} - 2.25z^{-1} + 1.26} \\ G_R(z) &= \frac{8.4 - 8z^{-1}}{20 - 20z^{-1}} \end{aligned}.$$

Da bismo ostvarili regulator zasnovan na Smithovom prediktoru potrebno je još odrediti i diskretno kašnjenje modela procesa:

$$d = round\left(\frac{T_t}{T}\right) = 25$$

Sada se prema predavanju nacrta shema Smithovog prediktora u koju se ucrtaju dobivene diskretne prijenosne funkcije.

Zadatak 17

Zadan je sustav:

$$G_s(s) = -\frac{0.321}{0.104s^2 + 2.463s + 1}e^{-0.86s},$$

Kašnjenje u sustavu potrebno je kompenzirati regulatorom zasnovanim na Smithovom prediktoru.

a) Projektirajte PI regulator i Smithov prediktor te filtar za povećanje robusnosti na pogreške modela procesa. PI regulator projektirajte tako da kompenzirate dominantnu vremensku konstantu procesa i postignete fazno osiguranje $\gamma = 65°$. Regulator projektirajte u kontinuiranom području uz zanemarenje utjecaja diskretizacije.

b) Napišite načelni postupak kako biste diskretizirali pojedine dijelove Smithova prediktora uz zanemarenje utjecaja diskretizacije (nije potrebno uvrštavati brojke!) i predložite postupak izbora vremena uzorkovanja.

c) Nacrtajte shemu sustava upravljanja sa projektiranim Smithovim prediktorom.

Rješenje:

a) Nađemo polove prijenosne funkcije rješavanjem kvadratne jednadžbe, i odatle izračunamo vremenske konstante

$$s_1 = -0.413, s_2 = -23.27 \Rightarrow T_1 = -1/s_1 = 2.42, T_2 = -1/s_2 = 0.043$$

pa je prijenosna funkcija bez kašnjenja

$$G_s'(s) = -\frac{0.321}{(1 + 0.043s)(1 + 2.42s)}$$

Vremenska konstanta PI regulatora odabire se tako da se kompenzira dominantna (veća) vremenska konstanta procesa. Još treba odrediti pojačanje regulatora, koje se određuje prema zahtjevu na fazno osiguranje.

$$
\begin{aligned}
&G_r(s) = K_r \frac{T_r s + 1}{T_r s} \\
&T_r = T_1 = 2.42 \\
&G_o(s) = G_r(s) G'(s) = \frac{K_r K_s}{T_1 s (T_2 s + 1)}
\end{aligned}
$$

Presječna frekvencija će biti ona frekvencija na kojoj faza ima iznos $-\pi + \gamma$

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_c T_2 = -\pi + \gamma \\
&\omega_c = \frac{1}{T_2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 10.84
\end{aligned}
$$

Na presječnoj frekvenciji pojačanje otvorenog kruga mora biti 1, pa prema tom uvjetu određujemo pojačanje PI regulatora

$$
\begin{aligned}
&A(\omega) = -\frac{K_r K_s}{\omega T_1 \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}} \\
&A(\omega_c) = -0.011 K_r = 1 \\
&K_r = -1/0.011 = -90.2
\end{aligned}
$$

b) Načelni postupak diskretizacije korištenjem unazadne diferencije.

Regulator:

$$
G_r(z) = G_r(s)| = K_r \frac{1 + T_r s}{T_r s}\bigg|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}} = \ldots = \frac{K_r (T/T_r + 1) - K_r}{z - 1}
$$

Proces (bez kašnjenja):

$$
G_s(z) = G_s(s)| = \frac{K_s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}\bigg|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}} = \ldots = \frac{K_s T^2 z^2}{((T + T_1) z - T_1)((T + T_2) z - T_2)} =
$$

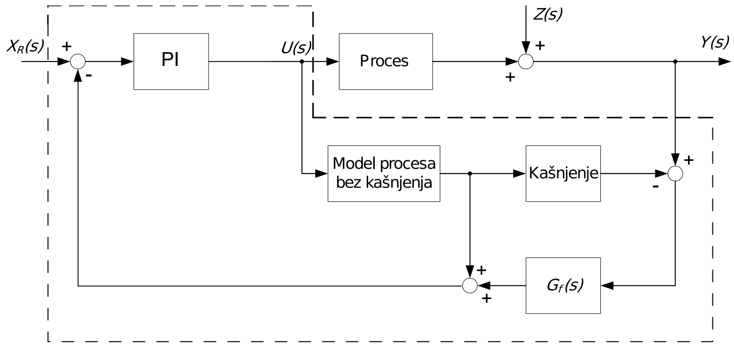
Kašnjenje u koracima diskretizacije:

$$
d = \frac{T_t}{T} = 10
$$

I filtar:

$$
\begin{aligned}
&G_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s}, T_f = T_t/2 \\
&G_f(z) = \frac{1}{1 + T_f \frac{1 - z^{-1}}{T}} = \frac{T z}{(T + T_f) z - T_f}
\end{aligned}
$$

c)



Slika 21: Shema sustava upravljanja s projektiranim Smithovim prediktorom.

7. Izvedbeni aspekti digitalnog regulatora

Zadatak 18

Prijenosna funkcija regulatora glasi:

$$G_R(s) = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{s(2.15 + 1.75s + s^2)},$$

a) Pretvorite prijenosnu funkciju regulatora u oblik pogodan za sprječavanje efekta zaleta.

b) Nacrtajte blokovsku shemu regulatora s uključenim ograničivačem iznosa upravljačkog signala i sprječavanje efekta zaleta postupkom povratnog integriranja.

8. Implementacijski aspekti digitalnog regulatora

Zadatak 19

Za prijenosnu funkciju digitalnog kompenzatora:

$$G_R(z) = 15\frac{z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.08z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.17z^{-2} - 0.015z^{-3}},$$

potrebno je:

a) odrediti shemu realizacije u direktnom obliku II;

b) odrediti shemu realizacije u serijskom obliku (pomoć: jedan od polova nazivnika je $z = 0.3$);

c) odrediti shemu realizacije u paralelnom obliku;

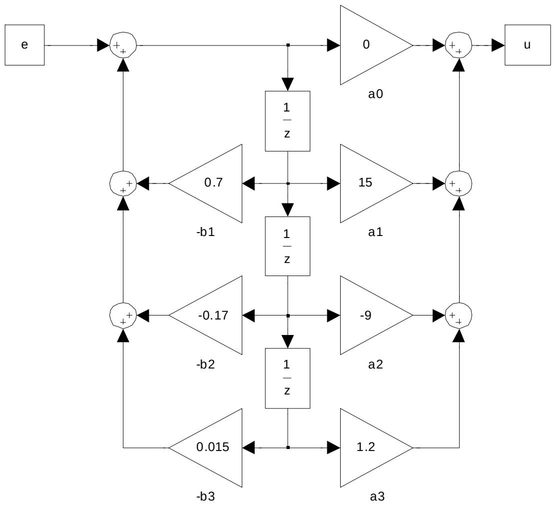
Za sve navedene realizacije potrebno je implementirati kompenzator u programskom jeziku C.

Rješenje:

a) *Za direktnu II realizaciju potrebno je samo znati koeficijente u brojniku i nazivniku koji se očitavaju direktno iz prijenosne funkcije:*

$$G_R(z) = \frac{15z^{-1} - 9z^{-2} + 1.2z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.17z^{-2} - 0.015z^{-3}} .$$

Pa je $a_0 = 0$, $a_1 = 15$, $a_2 = -9$, $a_3 = 1.2$, $b_1 = -0.7$, $b_2 = 0.17$, $b_3 = -0.015$. *Shema realizacije dana je slikom 22. Pritom je naravno moguće ispustiti pojačalo a0 koje ima pojačanje jednako nuli.*



Slika 22: DO II realizacija

Regulatori se u mikrokontrolerima zbog efikasnosti i manje cijene često implementiraju u cjelobrojnoj aritmetici, no ovdje ćemo radi jednostavnosti koristiti brojevni tip s pomičnim zarezom u dvostrukoj preciznosti. Implementacija je zapravo vrlo slična jednadžbi diferencija, osim što treba čuvati vrijednosti elemenata za kašnjenje u statičkim varijablama. Jedno od mogućih rješenja je:

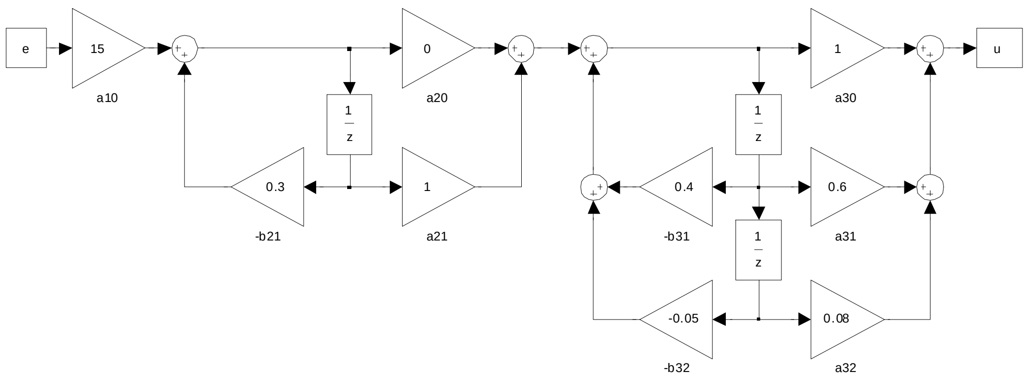
```
// Funkcija prima regulacijsko odstupanje e, a vraca upravljacku velicinu u
double DO_2(double e)
{
    // Koeficijenti brojnika
    const double a1 = 15, a2 = -9, a3 = 1.2;
    // Koeficijenti nazivnika
    const double b1 = -0.7, b2 = 0.17, b3 = -0.015;
    // Stanja elemenata za kasnjenje.
    // Koristi se static radi cuvanja vrijednosti nakon izlaska iz funkcije.
    // Pocetna vrijednost bit ce nula.
    static double v1, v2, v3;

    double v0 = e - b1*v1 - b2*v2 - b3*v3; // Ulaz 1. elementa za kasnjenje
    double u = a1*v1 + a2*v2 + a3*v3; // Upravljacka velicina

    // Propagiraj signale kroz elemente za kasnjenje
    v3 = v2;
    v2 = v1;
    v1 = v0;

    return u;
}
```

Vidi se da vrijednost regulacijskog odstupanja e ne djeluje direktno na izlaz regulatora, već utječe tek u sljedećem uzorku. To je zato jer je pojačanje a0 jednako nuli i regulator nema proporcionalno djelovanje.

b) *Za serijsku realizaciju potrebno je izračunati nul točke brojnika i nazivnika. Nazivnik je 3. reda, ali je poznat jedan pol pa dijelimo sa* $(1 - 0.3z^{-1})$, *što daje* $1 - 0.4z^{-1} + 0.05z^{-2}$, *i to više ne rastavljamo dalje jer imamo kompleksna rješenja. Naposljetku, serijska realizacija sastojat će se od jednog člana 1. reda i jednog člana 2. reda:*

$$G_R(z) = 15\frac{z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1}}\frac{1 + 0.6z^{-1} + 0.08z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.05z^{-2}} .$$

Očitavamo koeficijente $a_{10} = 15$, $a_{20} = 0, a_{21} = 1$, $b_{21} = -0.3$, $a_{30} = 1$, $a_{31} = 0.6$, $a_{32} = 0.08$, $b_{31} = -0.4$, $b_{32} = 0.05$. *Shema realizacije dana je slikom 23. Pritom je opet moguće ispustiti pojačala koja imaju pojačanje jednako nuli. Također, ovdje se ne traži optimalna izvedba, pa pojačanje iznosa 15 nije potrebno raspodijeliti po pojedinim članovima.*



Slika 23: Serijska realizacija

Moguća implementacija u C-u:

```
double Serijski(double e)
{
    // Koeficijenti brojnika
    const double a10 = 15, a21 = 1, a30 = 1, a31 = 0.6, a32 = 0.08;
    // Koeficijenti nazivnika
    const double b21 = -0.3, b31 = -0.4, b32 = 0.05;
    // Stanja elemenata za kasnjenje
    static double v21, v31, v32;

    // 1. dio
    double u = a10*e;

    // 2. dio
    double v20 = u - b21*v21;
    u = v21;

    // 3. dio
    double v30 = u - b31*v31 - b32*v32;
    u = v30 + a31*v31 + a32*v32;

    // Raspisivanjem bi se moglo i optimirati proracun kao:
    // u = v21 + (a31-b31)*v31 + (a32-b32)*v32;

    v21 = v20;
    v32 = v31;
    v31 = v30;

    return u;
}
```

c) *Za paralelnu realizaciju potrebno je prijenosnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke, čime se dobije:*

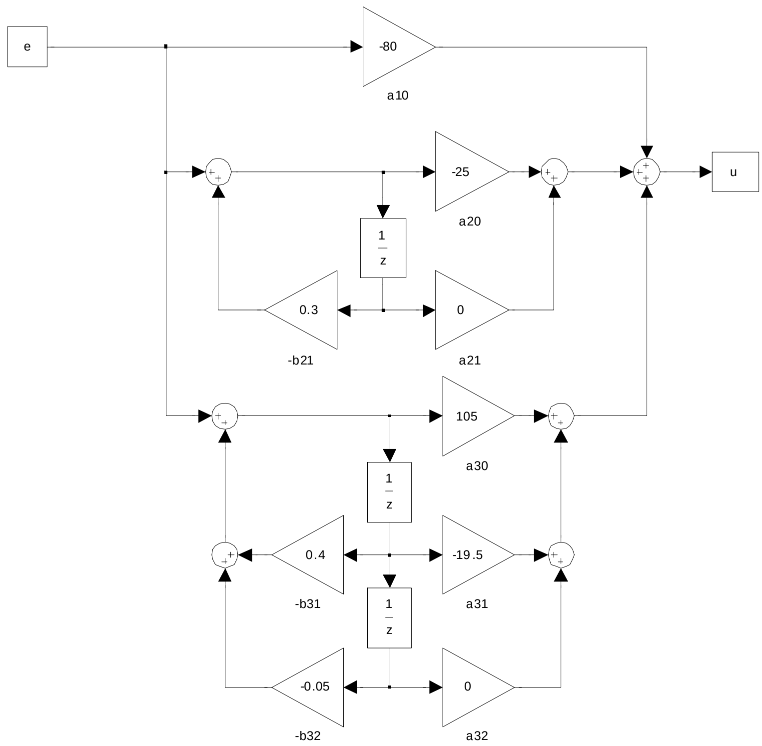
$$G_R(z) = \frac{15z^{-1} - 9z^{-2} + 1.2z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.17z^{-2} - 0.015z^{-3}} = A + \frac{B}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{C + Dz^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.05z^{-2}} \Rightarrow$$

$$A = -80, B = -25, C = 105, D = -19.5$$

Očitavamo koeficijente: $a_{10} = -80$, $a_{20} = -25, a_{21} = 0$, $b_{21} = -0.3$, $a_{30} = 105$, $a_{31} = -19.5$, $a_{32} = 0$, $b_{31} = -0.4$, $b_{32} = 0.05$. *Shema realizacije dana je slikom 24.*

Implementacija u C-u:

```
double Paralelni(double e)
{
    // Koeficijenti brojnika
    const double a10 = -80, a20 = -25, a30 = 105, a31 = -19.5;
    // Koeficijenti nazivnika
    const double b21 = -0.3, b31 = -0.4, b32 = 0.05;
    // Stanja elemenata za kasnjenje
    static double v21, v31, v32;

    // 1. dio
    double u = a10*e;

    // 2. dio
    double v20 = e - b21*v21;
    u += a20*v20;

    // 3. dio
    double v30 = e - b31*v31 - b32*v32;
    u += a30*v30 + a31*v31;
```



Slika 24: Paralelna realizacija

```
    v21 = v20;
    v32 = v31;
    v31 = v30;

    return u;
}
```

Zadatak 20

Za prijenosnu funkciju digitalnog kompenzatora:

$$G_R(z) = \alpha_0 + \frac{b_{10}z^{-1} + b_{11}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2}} + \frac{b_{20}z^{-1}}{1 + a_{21}z^{-1}}, \tag{20}$$

potrebno je:

a) *(3)* Odrediti osjetljivost polova p_1, p_2 i p_3 na koeficijente realizacije digitalnog regulatora $\alpha_0,\ a_{11},\ a_{12},\ a_{21}$.

b) *(2)* Pretvoriti prijenosnu funkciju $G_R(z) = \dfrac{1 + 1.9z^{-1} - 0.06z^{-2} - 0.68z^{-3}}{(1 + 0.2z^{-1})(1 + 0.7z^{-1})(1 - z^{-1})}$ u oblik dan izrazom (20) tako da se postigne najmanja osjetljivost polova na koeficijente realizacije digitalnog regulatora. Koristite se izrazima dobivenim u a) dijelu zadatka te odredite iznose osjetljivosti.

c) *(1)* Skicirati shemu realizacije regulatora te napisati jednadžbe diferencija.

d) *(1)* Odrediti vrijednosti koeficijenata regulatora korištenjem binarne aritmetike s nepomičnim zarezom u prikazu dvojnog komplementa, s 4 bita za cijeli broj i 3 bita za frakciju. Izračunajte položaj polova s novim koeficijentima.

Rješenje:

a) Kako se traži samo osjetljivost polova gledamo samo polinom nazivnika prijenosne funkcije:

$$A(z) = (1 + a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2})(1 + a_{21}z^{-1}) = [(1 - p_1z^{-1})(1 - p_2z^{-1})](1 - p_3z^{-1})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_{11}} = \frac{\frac{\partial A}{\partial a_{11}}}{\frac{\partial A}{\partial p_1}}|_{z=p_1} = -\frac{p_1}{p_1 - p_2},\ \frac{\partial p_1}{\partial a_{12}} = -\frac{1}{p_1 - p_2},\ \frac{\partial p_1}{\partial a_{21}} = 0,\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_0} = 0$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial a_{11}} = -\frac{p_2}{p_2 - p_1},\ \frac{\partial p_2}{\partial a_{12}} = -\frac{1}{p_2 - p_1},\ \frac{\partial p_2}{\partial a_{21}} = 0,\ \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_0} = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial a_{11}} = 0,\ \frac{\partial p_3}{\partial a_{12}} = 0,\ \frac{\partial p_3}{\partial a_{21}} = -1,\ \frac{\partial p_3}{\partial \alpha_0} = 0$$

b) Najmanja osjetljivost (najmanje apsolutne vrijednosti) dobiva se za najudaljenije polove u sekciji drugog reda: $p_1 = -0.7,\ p_2 = 1,\ p_3 = -0.2$. Rastav na parcijalne razlomke (izjednačavanje koeficijenata uz iste potencije):

$$G_R(z) = \frac{1 + 1.9z^{-1} - 0.06z^{-2} - 0.68z^{-3}}{(1 + 0.2z^{-1})(1 + 0.7z^{-1})(1 - z^{-1})} = \alpha_0 + \frac{b_{10}z^{-1} + b_{11}z^{-2}}{(1 + 0.7z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{b_{20}z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$-0.1 + b_{10} + b_{20} = 1.9$$

$$-0.76 + 0.2b_{10} + b_{11} - 0.3b_{20} = -0.06$$

$$-0.14 + 0.2b_{11} - 0.7b_{20} = -0.68$$

Rješavanjem sustava slijedi:

$$b_{10} = 1,\ b_{11} = 0.8,\ b_{20} = 1$$

Iznosi osjetljivosti:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_{11}} = -\frac{p_1}{p_1 - p_2} = -0.41, \quad \frac{\partial p_1}{\partial a_{12}} = -\frac{1}{p_1 - p_2} = 0.59,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial a_{11}} = -\frac{p_2}{p_2 - p_1} = -0.59, \quad \frac{\partial p_2}{\partial a_{12}} = -\frac{1}{p_2 - p_1} = -0.59$$

Primijetimo da se dobiju iznosi po apsolutnoj vrijednosti manje od 1 što je poželjno. Kod čiste paralelne realizacije (sve sekcije prvog reda) se dobiju iznosi 1 (osjetljivost jednaka promjeni parametara), međutim po svim drugim parametrima osjetljivost je 0. Sveukupno je ovakav oblik osjetljiviji od čiste paralelne realizacije, što pokazuje sljedeći približni izraz:

$$\Delta p_2 \approx \frac{\partial p_2}{\partial a_{11}}\Delta a_{11} + \frac{\partial p_2}{\partial a_{12}}\Delta a_{12} + \frac{\partial p_2}{\partial a_{21}}\Delta a_{21} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_0}\Delta \alpha_0$$

c) Jednadžbe diferencija:

$$\frac{U}{E} = \frac{V_1}{E} + \frac{V_2}{E} + \frac{V_3}{E} = 1 + \frac{z^{-1} + 0.8z^{-2}}{(1 + 0.7z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$v_1(k) = e(k)$$

$$v_2(k) = 0.3v_2(k-1) + 0.7v_2(k-2) + e(k-1) + 0.8e(k-2)$$

$$v_3(k) = -0.2v_3(k-1) + e(k-1)$$

$$u(k) = v_1(k) + v_2(k) + v_3(k)$$

d) *Koeficijenti* a_{11}, a_{12}, a_{21} *prebacuju se prema izrazu* $X = \mathrm{round}(x2^n)$, *gdje je* n *broj bitova frakcije. Broj se nadopiše vodećim nulama tako da se popune 1+4+3 kućice u registru, stavi se točka nakon prve kućice i preračuna nazad u dekadski sustav. Polovi se odrede rješavanjem kvadratne jednadžbe s novim koeficijentima:*

$$a_{11} = -0.3 \;\rightarrow\; round(0.3 \cdot 2^3) = round(2.4) = 2 = 0|0000.010_{(2)} \;\rightarrow\; 1|1111.110_{(2)} = -0.25$$

$$a_{12} = -0.7 \;\rightarrow\; round(0.7 \cdot 2^3) = round(5.6) = 6 = 0|0000.110_{(2)} \;\rightarrow\; 1|1111.010_{(2)} = -0.75$$

$$a_{21} = 0.2 \;\rightarrow\; round(0.2 \cdot 2^3) = round(1.6) = 2 = 0|0000.010_{(2)} = 0.25$$

$$p_{1,2} = roots([1 - 0.25 - 0.75]);$$

$$p_3 = -a_{21} = 0.25,\; p_1 = -0.75,\; p_2 = 1$$

Za provjeru možemo vidjeti da su se polovi promijenili u skladu s izrazima

$$\Delta p_1 \approx \frac{\partial p_1}{\partial a_{11}} \Delta a_{11} + \frac{\partial p_1}{\partial a_{12}} \Delta a_{12} = -0.41 \cdot 0.05 + 0.59 \cdot (-0.05) = -0.05$$

$$\Delta p_2 \approx \frac{\partial p_2}{\partial a_{11}} \Delta a_{11} + \frac{\partial p_2}{\partial a_{12}} \Delta a_{12} = -0.59 \cdot 0.05 - 0.59 \cdot (-0.05) = 0$$

Zadatak 21

Za prijenosnu funkciju digitalnog regulatora:

$$G_R(z) = 14.4 \frac{1 - 1.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 - 0.3z^{-1} + 0.02z^{-2}},$$

potrebno je:

a) odrediti shemu realizacije digitalnog regulatora u direktnom obliku I;

b) odrediti shemu realizacije digitalnog regulatora u paralelnom obliku;

c) odrediti shemu realizacije digitalnog regulatora u serijskom obliku;