

3. auditorna vježba

Projektiranje regulatora u frekvencijskom području

3. studenog 2023.

Projektiranje kompenzacijskog člana s faznim prethodjenjem

1. zadatak

Zadan je proces

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + 0.2s}. \quad (1)$$

Potrebno je projektirati regulator kojim se postižu sljedeći zahtjevi:

1. pogreška slijeđenja skokovite pobude iznosi $e_{ss} = 0$,
2. nadvišenje zatvorenog kruga $\sigma_m \leq 10\%$
3. vrijeme prvog maksimuma $t_m \approx 0.06$ s.

Rješenje:

Kako je zadano da zatvoreni krug mora slijediti skokovitu pobudu, u otvorenom krugu je potreban astatizam prvog reda. Kako proces nema astatizma, potrebno je integralno djelovanje u regulatoru.

Pretpostavimo regulator tipa

$$G_{R1}(s) = \frac{K_R}{s}. \quad (2)$$

Kako bi se zadovoljio zahtjev za nadvišenjem, potrebno je fazno osiguranje $\gamma = 70^\circ - \sigma_m[\%] = 60^\circ$.

Kako bi se zadovoljio zahtjev za vremenom prvog maksimuma, potrebno je osigurati sljedeću presječnu frekvenciju $\omega_c \approx \frac{3}{t_m} = 50 \text{ s}^{-1}$.

Kako bismo odredili potrebno pojačanje regulatora, pretpostavimo da je pojačanje regulatora $K_R = 1$ i provjerimo amplitudu na frekvenciji $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$.

Vrijedi

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2\omega)^2}} \quad (3)$$

Pojačanje regulatora se može izračunati kao:

$$K_R = \frac{1}{A(\omega = 50)} = 502.5. \quad (4)$$

Potrebno je provjeriti fazno osiguranje

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan(0.2\omega). \quad (5)$$

Fazno osiguranje se može izračunati kao:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 5.71^\circ. \quad (6)$$

Fazu je potrebno podići za

$$\phi_m = 60^\circ - \gamma = 54.29^\circ. \quad (7)$$

Za to se koristi kompenzator s faznim prethodjenjem.

$$G(s) = \sqrt{\alpha} \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}. \quad (8)$$

Iz željenog iznosa korekcije faze, računa se α

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)} = 0.1038. \quad (9)$$

Budući da kompenzator s faznim prethodjenjem ima maksimum na frekvenciji

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}, \quad (10)$$

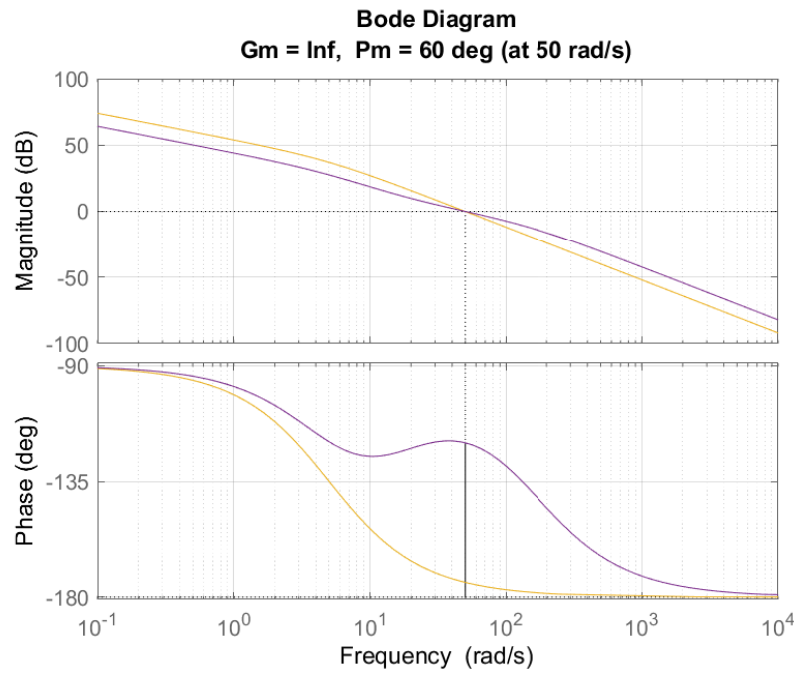
a želimo da se faza podigne na frekvenciji ω_c , slijedi:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c} = 0.062s. \quad (11)$$

Konačni regulator glasi:

$$G_R = \frac{502.5}{s} \frac{0.02s + 0.3221}{0.006443s + 1}. \quad (12)$$

Bodeov dijagram otvorenog kruga procesa s izračunatim pojačanjem i integratorom, te naknadno dodanim kompenzatorom s faznim prethodjenjem dan je na Sl. 1.



Slika 1: Bodeov dijagram otvorenog kruga za proces s integratorom i pojačanjem te dodanim kompenzatorom

2. zadatak

Proces

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(Ts + 1)s} \quad (13)$$

se upravlja PI regulatorom

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + sT_I}{T_I s}. \quad (14)$$

Zadano je $K_p = 1$, $T = 1$ s.

Potrebno je izračunati parametre regulatora kojim se postiže da presječna frekvencija bude na vrhu fazne karakteristike te da fazno osiguranje iznosi $\gamma = 37^\circ$.

Rješenje:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s^2} \cdot \underbrace{\frac{1 + T_I s}{1 + T s}}_{G_{c1}(s)} \quad (15)$$

Uz $T_I > T$ član $G_{c1}(s)$ odgovara članu s faznim prethodjenjem te se može napisati sljedeća relacija

$$G_{c1}(s) = \frac{1 + T_I s}{1 + \alpha T_I s}, \quad (16)$$

gdje $T = \alpha T_I$.

Fazna karakteristika glasi

$$\phi(\omega) = \arctan(\omega T_I) - \arctan(\omega \alpha T_I). \quad (17)$$

Iz $\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 0$ slijedi

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T_I}. \quad (18)$$

Uvrstimo li to u izraz za faznu karakteristiku (17), dobije se da maksimum fazne karakteristike iznosi

$$\phi_m = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}) \quad (19)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\right)\right) \quad (20)$$

Iz $\phi_m = 37^\circ$, slijedi $\alpha = 0.25$. Kako je $T = 1$ s, dobije se $T_I = 4$ s.

Kako je zadano da presječna frekvencija mora biti na maksimumu fazne karakteristike, potrebno je provjeriti amplitudu sustava na željenoj presječnoj frekvenciji $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T_I} = 0.5 \text{ s}^{-1}$ i pojačanjem regulatora korigirati pojačanje.

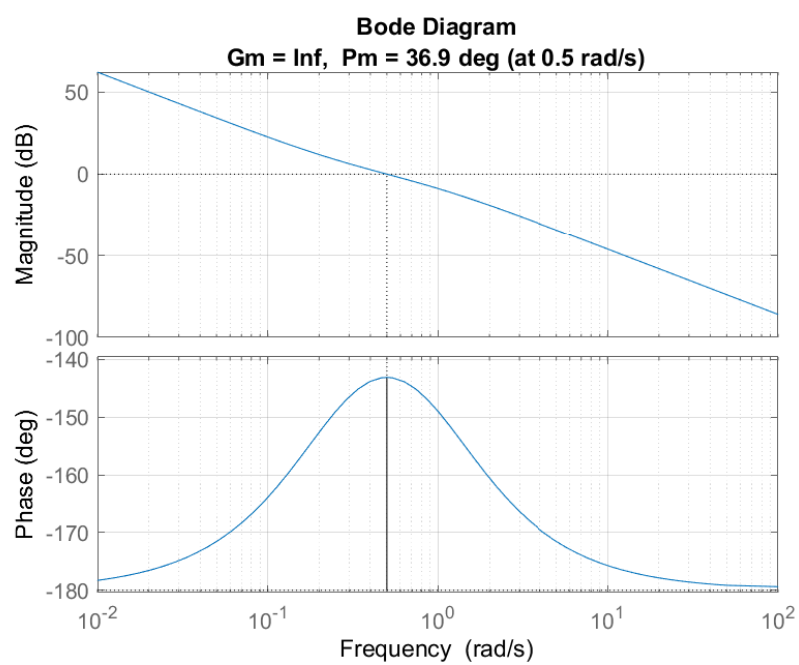
Uz pretpostavku da je $K_R = 1$, pojačanje na frekvenciji ω_m bi iznosilo

$$A(\omega_m) = \frac{1}{T_I \omega_m^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + (\omega_m T_I)^2}}{\sqrt{1 + (\omega_m \alpha T_I)^2}} = 2 \quad (21)$$

Kako pojačanje treba iznositi jedan, treba korigirati amplitudnu karakteristiku pojačanjem

$$K_R = \frac{1}{A(\omega_m)} = 0.5. \quad (22)$$

Bodeov dijagram je prikazan na Sl. 2.



Slika 2: Bodeov dijagram otvorenog kruga

Projektiranje kompenzacijskog člana s faznim kašnjenjem

3. zadatak

Identificiran je proces prvog reda

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + 0.2s}. \quad (23)$$

Potrebno je projektirati regulator kojim se postižu sljedeći zahtjevi:

1. pogreška slijeđenja linearno rastuće pobude uz grešku $e_{ss} = 0.02$.
2. Fazno osiguranje treba iznositi približno $\gamma = 48^\circ$.
3. Presječna frekvencija mora biti na niskim frekvencijama $\omega_c \leq 10 \text{ s}^{-1}$, budući da stvarni proces ima nemodeliranu dinamiku na visokim frekvencijama te stvarni proces glasi $G_p(s) = \frac{1}{1+0.2s+0.0075s^2}$.

Rješenje:

Kako je zadano da zatvoreni krug mora slijediti linearno rastuću pobudu uz konstantnu pogrešku, u otvorenom krugu je potreban astatizam prvog reda. Kako proces nema astatizma, potrebno je integralno djelovanje u regulatoru.

Pretpostavimo regulator tipa

$$G_{R1}(s) = \frac{K_R}{s}. \quad (24)$$

Kako bismo zadovoljili pogrešku slijeđenja linearno rastuće pobude, potrebno je izračunati odgovarajuće pojačanje otvorenog kruga na niskim frekvencijama (pojačanje regulatora u ovom primjeru):

Mora vrijediti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \leq 0.02. \quad (25)$$

Koristeći teorem o konačnoj vrijednosti, uvjet se može napisati kao:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = s \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s) \leq 0.02. \quad (26)$$

Kako se radi o linearno rastućoj pobudi, $R(s) = \frac{1}{s^2}$, vrijedi

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K_R}{s} \frac{1}{0.2s+1}} \frac{1}{s^2} \quad (27)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.2s+1}{0.2s^2+s+K_R} = \frac{1}{K_R}. \quad (28)$$

Uvjet (26) je zadovoljen, ako je $K_R \geq 50$. Biramo $K_R = 50$.

Potrebno je izračunati presječnu frekvenciju. Vrijedi $A(\omega_c) = 1$, odnosno iz

$$\frac{K_R}{\omega_c} \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2\omega_c)^2}} = 1 \quad (29)$$

presječna frekvencija dobiva se rješavanjem bikvadratne jednadžbe:

$$\omega_c^2(1 + 0.2^2\omega_c^2) = 50^2. \quad (30)$$

Presječna frekvencija iznosi:

$$\omega_c = 15.42 \text{ s}^{-1} \quad (31)$$

Kako je zadano da mora vrijediti $\omega_c \leq 10 \text{ s}^{-1}$, umjesto podizanja fazne karakteristike na ovoj frekvenciji potrebno je spustiti amplitudnu karakteristiku tako da se presječna frekvencija premjesti na vrijednost na kojoj se dobije željeno fazno osiguranje.

Potrebno je pronaći frekvenciju na kojoj faza iznosi $\phi(\omega_c^*) = -132^\circ$, te odrediti koliko je potrebno spustiti amplitudu prije te frekvencije.

Iz jednadžbe:

$$-90 - \arctan(0.2\omega_c^*) = -132^\circ, \quad (32)$$

dobije se $\omega_c^* = 4.5 \text{ s}^{-1}$

Vrijedi

$$A(\omega_c^*) = \frac{K_R}{\omega_c^*} \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2\omega_c^*)^2}} = 8.25. \quad (33)$$

Kako bi se osiguralo da $\omega_c^* = \omega_c$, potrebno je spustiti amplitudnu karakteristiku.

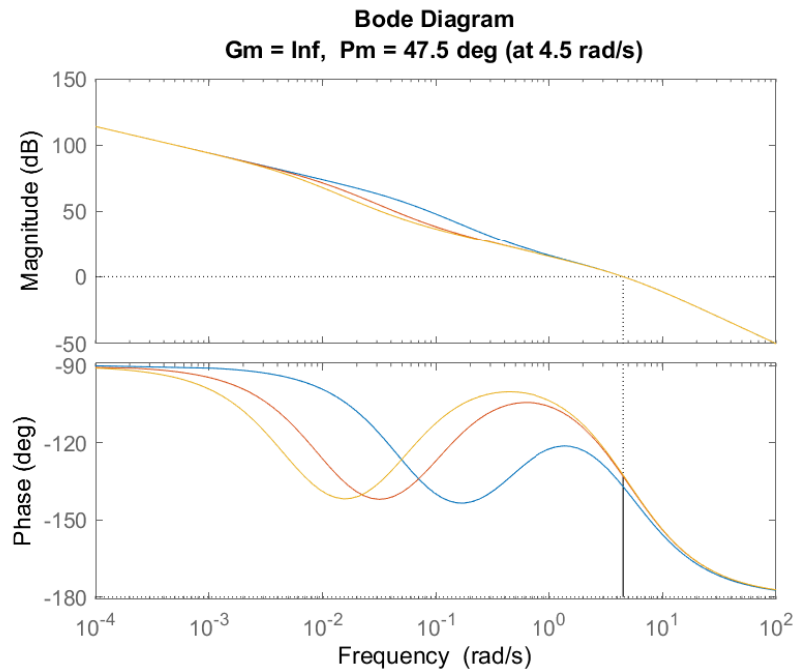
Za to se može koristiti kompenzator s faznim kašnjenjem oblika

$$G_c = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad (34)$$

gdje $\alpha = 8.25$. Vremensku konstantu treba odabrati tako da kompenzator minimalno utječe na faznu karakteristiku oko ω_c^* . Npr. može se odabrati

$$T \geq \frac{10}{\omega_c^*} \quad (35)$$

S povećanjem vremenske konstante T utjecaj na fazno osiguranje se smanjuje. Bodeov dijagram uz $T = \frac{10}{\omega_c}$, $T = \frac{50}{\omega_c}$ i $T = \frac{100}{\omega_c}$ je prikazan na Sl. 3.



Slika 3: Bodeov dijagram uz različit odabir vremenske konstante T

Projektiranje kompenzacijskog člana s faznim prethođenjem i kašnjenjem

4. zadatak

Zadan je proces

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + 0.2s}. \quad (36)$$

Potrebno je projektirati regulator koristeći kompenzator s faznim prethođenjem kojim se postižu sljedeći zahtjevi:

1. pogreška slijeđenja linearno rastuće pobude uz grešku $e_{ss} = 0.02$.
2. fazno osiguranje treba iznositi $\gamma = 48^\circ$.

Ako je potrebno, može se dodati i kompenzator s faznim kašnjenjem za korekciju amplitudne karakteristike na niskim frekvencijama.

Rješenje:

Kako je zadano da zatvoreni krug mora slijediti linearno rastuću pobudu uz konstantnu pogrešku, u otvorenom krugu je potreban astatizam prvog reda. Kako proces nema astatizma, potrebno je integralno djelovanje u regulatoru.

Pretpostavimo regulator tipa

$$G_{R1}(s) = \frac{K_R}{s}. \quad (37)$$

Kako bismo zadovoljili pogrešku slijeđenja mora vrijediti $K_R \geq 50$. Biramo $K_R = 50$.

Potrebno je izračunati presječnu frekvenciju. Iz

Vrijedi $A(\omega_c) = 1$, odnosno iz

$$\frac{K_R}{\omega_c} \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2\omega_c)^2}} = 1 \quad (38)$$

presječna frekvencija dobiva se rješavanjem bikvadratne jednadžbe:

$$\omega_c^2(1 + 0.2^2\omega_c^2) = 50^2. \quad (39)$$

Presječna frekvencija iznosi:

$$\omega_c = 15.42 \text{ s}^{-1} \quad (40)$$

Fazno osiguranje se može izračunati kao:

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 18^\circ. \quad (41)$$

Fazu je potrebno podići za

$$\phi_m = 48^\circ - \gamma = 30^\circ. \quad (42)$$

Za to se može koristiti kompenzator s faznim prethođenjem.

$$G(s) = \sqrt{\alpha} \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}. \quad (43)$$

Iz željenog iznosa korekcije faze, računa se α

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)} = 0.33. \quad (44)$$

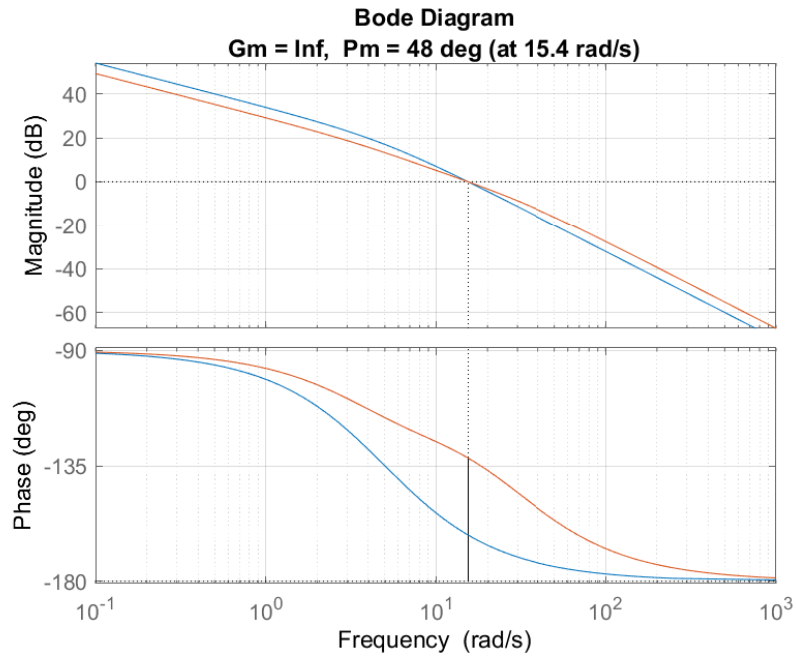
Budući da kompenzator s faznim prethođenjem ima maksimum na frekvenciji

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}, \quad (45)$$

a želimo da se faza podigne na frekvenciji ω_c , slijedi:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c} = 0.1124s. \quad (46)$$

Bodeov dijagram sustava s pojačanjem i integratorom te naknadno dodanim kompenzatorom je prikazan na Sl. 4.



Slika 4: Bodeov dijagram otvorenog kruga za proces s integratorom i pojačanjem te dodanim kompenzatorom

Sa Sl. 4, vidljivo je da je pojačanje promijenjeno za $\sqrt{\alpha}$, što dovodi do spuštanja amplitudne karakteristike.

Rješenje je dodati u seriju još i kompenzator s *faznim kašnjenjem*, kako bi se amplituda podigla za $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ na niskim frekvencijama.

Mogući kompenzator s faznim kašnjenjem je

$$G_{c2} = \beta \frac{1 + T_2 s}{1 + \beta T_2 s}, \quad (47)$$

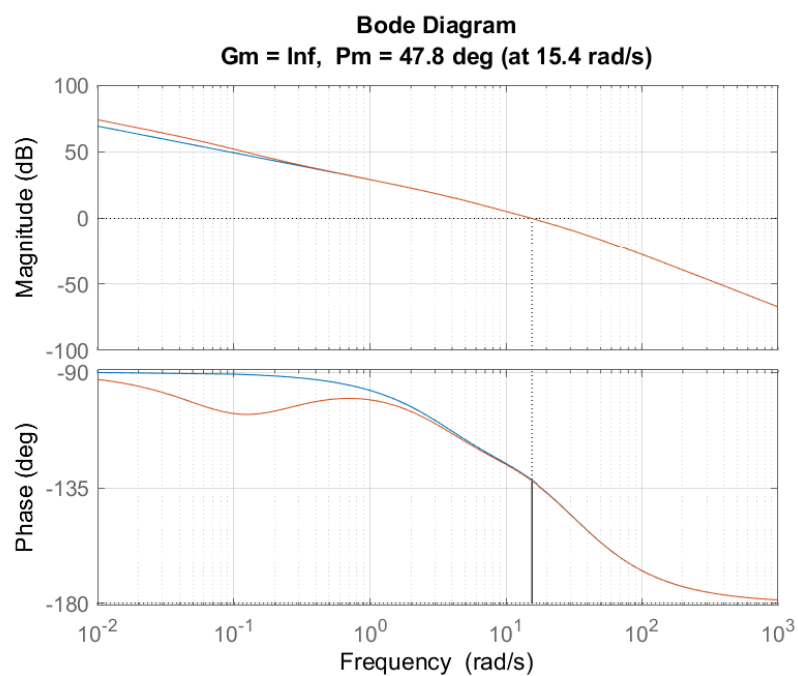
gdje $\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, a frekvenciju T_2 treba odabrati dovoljno lijevo od ω_c kako ne bi utjecala na fazno osiguranje.

Npr. $T_2 = \frac{100}{\omega_c}$

Ukupni regulator glasi

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} \frac{1 + T s}{1 + \alpha T s} \frac{1 + T_2 s}{1 + \beta T_2 s}. \quad (48)$$

Bodeov dijagram uz oba kompenzatora prikazan je na Sl. 5.



Slika 5: Bodeov dijagram otvorenog kruga za proces s kompenzatorom s faznim prethođenjem i kombinacijom dva kompenzatora