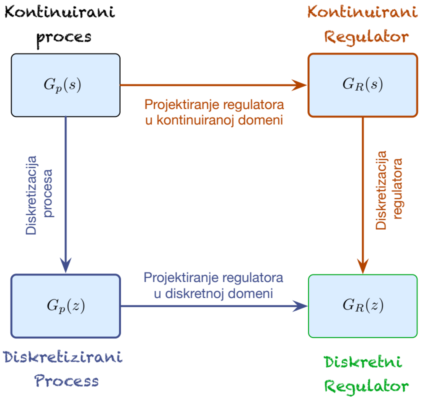
Projektiranje diskretnih sustava upravljanja

Jadranko Matuško
Šandor Ileš

Fakultet elektrotehnike i računarstva

17. siječnja 2024.

Projektiranje regulatora u diskretnom području

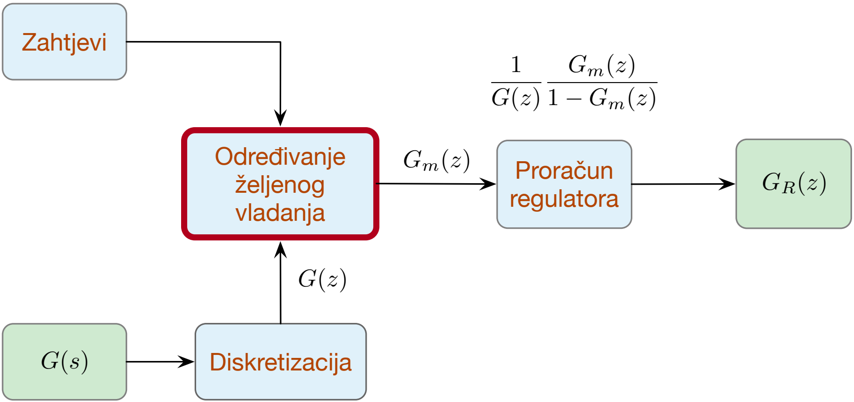


- U ovom predavanju obrađuju se dva postupka:
  - Diskretna verzija TG postupka (Raggazzini postupak)
  - Diskretni postupak postavljanja polova (RST)

Projektiranje regulatora u diskretnom području

- Postupak projektiranja regulatora emulacijom kontinuiranih regulatora daje dobre rezultate ako je iznos vremena uzorkovanja značajno manji od najmanje relevantne vremenske konstante procesa $T < T_{dom}$ uz m diskretnih nula koje potječu od nula kontinuiranog sustava će pojaviti i $n - m - 1$ **diskretizacijska nula**

Diskretni postupak projektiranja regulatora prema TG-u (Raggazzinijev postupak)



Diskretni postupak projektiranja regulatora prema TG-u (Raggazzinijev postupak)

Uvjet kauzalnost modela; Nestabilni i neminimalno-fazni procesi

- Modelska prijenosna funkcija treba imati isti iznos polnog viška (ili veći) kao i proces. Ovaj uvjet može se interpretirati da kašnjenje u prijenosnoj funkciji $G_m(z)$ mora biti jednako ili veće nego kašnjenje procesa.
- Ako proces $G(z)$ ima **neminimalno-fazne nule** (nule izvan jedinične kružnice) tada te nule mora sadržavati i $G_m(z)$
- Ako je proces nestabilan, tj. ima polove izvan jedinične kružnice tada $1 - G_m(z)$ mora imati nule na mjestu nestabilnih polova

Diskretni postupak projektiranja regulatora prema TG-u (Raggazzinijev postupak)

Uvjet stacionarne točnosti

- Obično se zahtjeva da sustav upravljanja mora posjedovati stacionarnu točnost na skokovitu referentnu veličinu, što povlači da mora vrijediti:

$$\lim_{t \to \infty} h_m(t) = 1 \;\rightarrow\; \lim_{z \to 1} (z-1) G_m(z) \frac{z}{z-1} = G_m(1) = 1 \qquad (1)$$

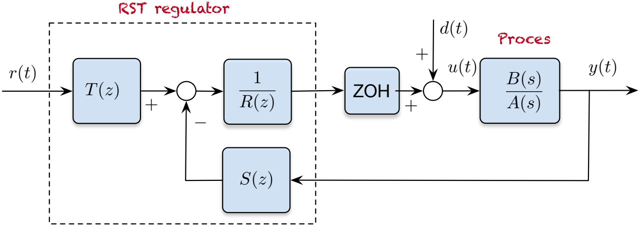
Diskretni postupak projektiranja regulatora prema TG-u (Raggazzinijev postupak)

Proračun regulatora

- Nakon što je definirano ostvarivo željeno vladanje regulator se proračunava analogno kontinuiranom slučaju:

$$G_R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} \tag{2}$$

Polinomski regulator - postupak sinteze



- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_{z\omega R} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_M(z)A_o(z)}{A_M(z)A_o(z)} = \frac{B_z(z)}{A_z(z)} \tag{3}$$

- Polovi zatvorenog kruga definirani su tzv. Diophantovom jednadžbom:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_M(z)A_o(z) = A_z(z) \tag{4}$$

Polinomski regulator - postupak sinteze (2)

- Nule prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga definirane su relacijom:

$$B(z)T(z) = B_M(z)A_o(z) = B_z(z). \tag{5}$$

- Diophantova jednadžba (4) ima rješenja samo ako su $A(z)$ i $B(z)$ koprim polinomi, tj. nemaju zajedničkih faktora. Ako imaju zajednički faktor tada on mora biti sadržan i u polinomu $A_z(z)$, kako bi postojalo rješenje.
- Regulator minimalnog reda dobije se uz sljedeće uvjete:

$$\deg B_M = \deg B, \tag{6}$$

$$\deg A_M = \deg A = n, \tag{7}$$

$$\deg A_o = \deg A - 1 = n - 1. \tag{8}$$

$$\deg R = \deg S = \deg T = \deg A_z - \deg A = n - 1. \tag{9}$$

Polinomski regulator - postupak sinteze (3)

- Red polinoma A_M jednak je redu polinoma A što znači da se n polova otvorenog kruga premješta na n novih lokacija određenih polinomom A_M.
- Budući da je mjerljiva samo jedna varijabla stanja y tada je preostalih $n-1$ potrebno "estimirati", te stoga red observerskog polinoma $A_o(s)$ iznosi $n-1$.
- Kako observerski polinom ne bi utjecao na dinamiku po referentnoj veličini tada polinom $T(z)$ treba u sebi sadržavati polinom $A_o(z)$:

$$T(z) = \frac{A_z(1)}{B(1)} A_o(z) \tag{10}$$

- Član $A_z(1)/B(1)$ dodaje se radi osiguranja točnosti u ustaljenom stanju.
- U tom slučaju prijenosna funkcija zatvorenog kruga prema referentnoj veličini glasi:

$$G_{zr\omega} = \frac{B(z)}{A_M(z)} \tag{11}$$

Rješavanje Diophantove jednadžbe

- U slučaju regulatora minimalnog reda Diophantova jednadžba

$$AX + BY = C^1 \tag{12}$$

ima jedinstveno rješenje.

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \ddots & b_1 \\ 0 & a_n & \dots & \vdots & 0 & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

[1] $A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$

Rješavanje Diophantove jednadžbe (2)

- Prethodna se matrična jednadžba može matrično zapisati kao:

$$S_{AB}\bar{X} = \bar{C}, \tag{14}$$

  pri čemu se matrica S_{AB} naziva Sylvesterovom matricom.

- Rješenje prethodne matrične jednadžbe dano je izrazom:

$$\bar{X} = S_{AB}^{-1}\bar{C}, \tag{15}$$

- Ako je red regulatora veći od minimalnog tada rješenje nije jedinstveno.

Dodavanje integralnog djelovanja

- Da bi polinomski regulator imao integralno djelovanje polinom $R(z)$ mora imati nultočku u $z = 1$, koji se u tom slučaju može zapisati kao:

$$R^*(z) = (z-1)R(z). \tag{16}$$

- Uvrštenjem u Diophantsku jednadžbu slijedi:

$$A(z)(z-1)R(z) + B(z)S(z) = A^*(z)R(z) + B(z)S(z) = A_z(z), \tag{17}$$

  gdje je $A^*(z) = (z-1)A(z)$.
- Regulator minimalnog reda koji zadovoljava Diophantsku jednadžbu u ovom slučaju treba zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\deg R^* = n-1,\ \deg S = \deg T = \deg A^* - 1 = \deg A + 1 - 1 = n, \tag{18}$$

$$\deg A_M = \deg A = n,\ \ \deg A_o = \deg A^* - 1 = n \tag{19}$$

- Daljnji je postupak identičan kao u slučaju kada nema integralnog djelovanja.

Kraćenje polova i nula

- Prikazani postupak sinteze pretpostavlja da nema kraćenja polova i nula procesa s nulama i polovima regulatora.
- Međutim, ako proces sadrži stabilne i dobro prigušene polove i nule tada se one mogu pokratiti i time se postupak sinteze značajno pojednostavljuje, odnosno dobiva se Diophantova jednadžba nižeg reda.
- Pretpostavimo da se polinomi $A(z)$ i $B(z)$ u prijenosnoj funkciji procesa mogu prikazati:

$$A(z) = A^{+}(z)A^{-}(z), \tag{20}$$

$$B(z) = B^{+}(z)B^{-}(z), \tag{21}$$

  pri čemu su polinomi $A^{+}(z)$ i $B^{+}(z)$ sadržavaju dobro prigušene polove odnosno nule procesa. Polinomi $A^{-}(z)$ i $B^{-}(z)$ sadržavaju nestabilne ili slabo prigušene polove i nule procesa.

Kraćenje polova i nula (2)

- Ako želimo pokratiti dobro prigušene polove i nule procesa tada polinomi regulatora trebaju sadržavati sljedeće faktore:

$$R(z) = B^+(z)\bar{R}(z), \tag{22}$$

$$S(z) = A^+(z)\bar{S}(z), \tag{23}$$

$$T(z) = A^+(z)\bar{T}(z). \tag{24}$$

- U tom slučaju nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga glasi:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A^+(z)A^-(z)B^+(z)\bar{R}(z) + B^+(z)B^-(z)A^+(z)\bar{S}(z) \tag{25}$$

odakle slijedi:

$$A^+(z)B^+(z)\left[A^-(z)\bar{R}(z) + B^-(z)\bar{S}(z)\right] = A^+(z)B^+(z)\bar{A}_M(z)\bar{A}_o(z) \tag{26}$$

Kraćenje polova i nula (3)

- S druge strane, za polinom u brojniku prijenosne funkcije zatvorenog kruga vrijedi:

$$B(z)T(z) = B^+(z)B^-(z)A^+(z)\bar{T}(z) = B_M(z)A_o(z) \tag{27}$$

odakle slijedi:

$$A^+(z)B^+(z)B^-(z)\bar{T}(z) = A^+(z)B^+(z)\bar{B}_m(z)\bar{A}_o(z) \tag{28}$$

- Pritom su:

$$A_o(z) = A^+(z)\bar{A}_o(z)$$
$$A_M(z) = B^+(z)\bar{A}_M(z)$$
$$B_M(z) = B^+(z)\bar{B}_M(z)$$

- Dakle, očito je da se sada dobiva Diophantova jednadžba nižeg reda:

$$A^-(z)\bar{R}(z) + B^-(z)\bar{S}(z) = \bar{A}_M(z)\bar{A}_o(z), \tag{29}$$

koja sadržava samo polove i nule procesa koji se ne smiju pokratiti.

Postupak projektiranja polinomskog regulatora

Bez kraćenja polova i nula

1. Proračunati diskretnu prijenosnu funkciju procesa $B(z)/A(z)$ uzevši u obzir doprinose ekstrapolatora nultog reda te mjernih članova.
2. Odrediti redove polinoma $R(z)$, $S(z)$, $T(z)$, $A_M(z)$, $A_o(z)$ prema izrazima (6)-(9) (bez integratora) ili izrazima (18) i (19) (s integratorom)
3. Definirati željeno vladanje sustava $A_M(z)$, te observerski polinom $A_o(z)$ (npr. deadbeat polinom).
4. Formirati Sylvesterovu matricu S_{AB}, prema izrazu (13), te riješiti sustav linearnih jednadžbi $S_{AB}X = C$. Rezultat su polinomi $R(z)$ i $S(z)$.
5. Polinom $S(z)$ odrediti kao $T(z) = A_z(1)/B(1) \cdot A_o(z)$.