8. i 9. auditorna vježba

24. siječnja 2024.

Analitički postupci sinteze digitalnih regulatora

Ragazzinijev postupak

1. zadatak

Prijenosna funkcija procesa u z-domeni dobivena ZOH diskretziacijom uz $T_s = 0,1$ glasi:

$$G(z) = \frac{(z+0,972)(z-1,1052)}{(z-1)(z-0,8187)(z-0.6703)}. \tag{1}$$

Primjenom Ragazzinijevog postupka potrebno je projektirati regulator u diskretnom području kojim se postiže stacionarna točnost na skokovitu referentnu vrijednost. Polove karakterističnog polinoma diskretne modelske prijenosne funkcije potrebno je odrediti preslikavanjem polova iz s domene u z domenu, uz pretpostavku da je karakteristični polinom u s domeni odabran koristeći binomni oblik uz $\omega_n = 1$ rad/s.

2. zadatak

Zadana je sljedeća prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(s) = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Prijenosnu funkciju procesa potrebno je diskretizirati ZOH diskretizacijom uz $T_s = 0,1$ te primjenom Ragazzinijevog postupka projektirati regulator u diskretnom području kojim se postiže stacionarna točnost na skokovitu referentnu vrijednost. Polove karakterističnog polinoma diskretne modelske prijenosne funkcije potrebno je odrediti preslikavanjem polova iz s domene u z domenu, uz pretpostavku da je karakteristični polinom u s domeni odabran koristeći binomni oblik uz $\omega_n = 1$ rad/s.

Podsjetnik:

Iz tablice Z-transformacija poznato je da vrijedi

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{z}{z-1}, \tag{3}$$

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{z}{z-e^{-aT}}. \tag{4}$$

Polinomski regulator

3. zadatak

Zadan je proces:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}. \tag{5}$$

Potrebno je projektirati polinomski regulator tako da prijenosna funkcija zatvorenog kruga odgovara sljedećoj prijenosnoj funkciji:

$$G_m(s) = \frac{1}{(s+1)^2}. \tag{6}$$

Diskretni polinomski regulator

4. zadatak

Prijenosna funkcija ovisnosti brzine vrtnje motora o referenci struje armature diskretizirana je primjenom ZOH metode uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.01$ s i glasi:

$$G_p(z) = \frac{0,08z + 0,02}{z^2 - z + 0,007} \tag{7}$$

Potrebno je projektirati digitalni polinomski regulator (RST) tako da karakteristični polinom $A_M(z)$ modelske prijenosne funkcije odgovara kontinuiranom karakterističnom polinomu koji ima polove na sljedećim lokacijama:

$$p_{1,2} = -40 \pm 40i. \tag{8}$$

Polinom $A_0(z)$ potrebno je odabrati tako da se postigne najbrža kompenzacija poremećaja, a postojeće nule trebaju ostati nepromijenjene.

Implementacija algoritama u aritmetici sa nepomičnim zarezom

5. zadatak

Zadan je proces:

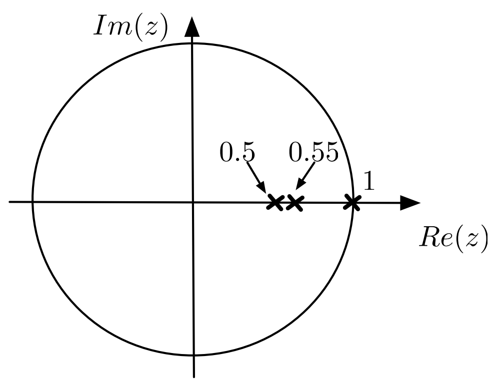
$$G_p(s) = \frac{1}{1+s}. \tag{9}$$

Potrebno odrediti je prijenosnu funkciju diskretnog regulatora implementiranog u 8-bitnom mikrokontroleru u aritmetici s nepomičnim zarezom EMUL2 metodom koristeći Tustinovu diskretizaciju uz $T = 0.1$ s i upravljanje s unutarnjim modelom uz minimalni sred filtra. Vremensku konstantu filtra odabrati 5 puta manju od dominantne vremenske konstante procesa.

Doprinos A/D i D/A pretvornika modelirati kao $G_{A/D}(s) \cdot G_{D/A}(s) \approx e^{-sT} \approx 1 - sT$.

Potrebno je odabrati broj bitova tako da se postigne najveća moguća preciznost, uz istovremeno osiguravanje točnog prikazivanja cijelih brojeva koeficijenata prijenosne funkciji.

6. zadatak



Slika 1: Polovi diskretnog regulatora

Neka je upravljački algoritam opisan prijenosnom funkcijom u diskretnom području:

$$G_R(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{10}$$

Polovi regulatora p_i određeni su korijenima polinoma $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-n}$.

a) Izvesti izraz za osjetljivost položaja polova p_i o iznosu koeficijenata a_k.

b) Polovi diskretnog regulatora prikazani su na slici 1. Odrediti osjetljivost pojedinih polova o iznosu koeficijenta a_1. Kolike se promjene položaja polova Δp_i mogu očekivati ako se koristi aritmetika s nepomičnim zarezom s 4 bita iza binarnog zareza.

7. zadatak

Regulator je napisan u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k) \\
u(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Polovi regulatora iznose $p_1 = 1$ i $p_2 = 0,5$, uz pretpostavku da koeficijent $a_{11} = 2,5$. Potrebno je procijeniti promjenu položaja pola p_1 koristeći funkciju osjetljivosti ako se koeficijent a_{11} promijeni na $\tilde{a}_{11} = 2.51$. Usporediti procijenjenu vrijednost sa stvarnim položajem pola p_1.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Raggazzinijev postupak predstavlja diskretnu verziju postupka projektiranja regulatora prema TG-u. Slično kao i za TG postupak, cilj je izjednačiti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga s željenom prijenosnom funkcijom. Ragazzinijev postupak pretpostavlja kraćenje dinamike procesa:

$$\frac{G_R(z)G_p(z)}{1+G_R(z)G_p(z)} = G_m(z) \quad \rightarrow \quad G_R(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_m(z)}{1-G_m(z)}. \tag{12}$$

Proces ima dvije nule. Jedna nula je neminimalno fazna, dok se druga nula nalazi na negativnom dijelu realne osi unutar jedinične kružnice. Kako bi se izbjegli nestabilni polovi regulatora, ali i polovi na negativnom dijelu realne osi koji uzrokuju oscilatorno ponašanje, modelska prijenosna funkcija treba sadržavati obje nule. Kao i kod TG postupka, odabire se modelska prijenosna funkcija koja ima isti ili veći polni višak od polnog viška procesa, koji iznosi 1.

Da bi modelska prijenosna funkcija zadržala obje nule, odabire se karakteristični polinom modelske prijenosne funkcije 3. reda. Polovi u z-domeni određuju se preslikavanjem polova iz s domene. Karakteristični polinom u s domeni ima sve tri nule u -1. Preslikavanjem iz s u z domenu, koristeći izraz $z = e^{sT_s}$, dobivaju se tri pola u $0,9048$.

Da bi se osiguralo jedinično pojačanje, mora vrijediti $G_m(1) = 1$. Dobiva se sljedeća modelska prijenosna funkcija:

$$G_m(z) = -0,0042 \cdot \frac{(z+0,972)(z-1,052)}{(z-0,9048)^3}. \tag{13}$$

Iz modelske prijenosne funkcije regulator se dobiva korištenjem sljedećeg izraza:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_m(z)}{1-G_m(z)} = \frac{-0.0042 \cdot (z-0.8187)(z-0.6703)}{z^2 - 1.71z + 0.7453}.} \tag{14}$$

Zadatak 2

Prijenosna funkcija procesa u z-domeni dobiva se ZOH diskretizacijom korištenjem sljedećeg izraza:

$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}. \tag{15}$$

Prijenosnu funkciju $\frac{G_p(s)}{s}$ potrebno je razložiti na parcijalne razlomke kako slijedi:

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}. \tag{16}$$

Uvrštavanjem izraza iz tablice Z-transformacije, može se dobiti diskretna prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(z) = -1 + \frac{z-1}{z-e^{-aT}} = \frac{0.1052}{z-1.105}. \tag{17}$$

Vidljivo je da proces ima jedan pol izvan jedinične kružnice. Taj pol je u nastavku označen sa $p_N = 1.105$. Kako bi se osiguralo da regulator nema neminimalno faznu nulu koja krati nestabilan pol, potrebno je osigurati da $1 - G_m(z)$ sadrži nulu na istoj lokaciji kao nestabilni pol procesa.

Kako bismo mogli birati položaj nula prijenosne funkcije $1-G_m(z)$, biramo modelsku prijenosnu funkciju 2. reda, s polnim viškom 1.

Pretpostavimo da modelska prijenosna funkcija glasi:

$$G_m(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}. \tag{18}$$

Kako bismo osigurali jedinično pojačanje, mora vrijediti $G_m(1) = 1$, odnosno mora vrijediti $b_1 + b_0 = 1 + a_1 + a_0$.

Nule prijenosne funkcije $1 - G_m(z)$ su dane sljedećim polinomom:

$$\tilde{B}(z) = z^2 + (a_1 - b_1)z + (a_0 - b_0). \tag{19}$$

Ako nestabilan pol označimo sa p_N tada mora vrijediti

$$\tilde{B}(z) = (z - p_N)(z - a) = z^2 - (p_N + a)z + p_N a \tag{20}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije varijable z, slijede sljedeće tri jednadžbe:

$$b_1 + b_0 = 1 + a_1 + a_0 \tag{21}$$
$$a_1 - b_1 = 1 - (p_N + a) \tag{22}$$
$$a_0 - b_0 = 1 + p_N a. \tag{23}$$

Oba pola postavljamo na željenu vrijednost prema tekstu zadatka, $s_{1,2} = -1$. Preslikavanjem polova iz s u z domenu dobivamo da karakteristični polinom modelske prijenosne funkcije glasi:

$$A_m(z) = (z - e^{s_1 T})(z - e^{s_2 T}) = z^2 - 1.81z + 0.8187. \tag{24}$$

Iz željenog karakterističnog polinoma dobivamo $a_1 = -1.81$, $a_0 = 0.8187$.

Rješavanjem sustava jednadžbi dobije se $a = 1$, $b_0 = -0.2865$, $b_1 = 3.915$, odnosno dobije se sljedeća modelska prijenosna funkcija:

$$G_m(z) = \frac{3.915z - 0.2865}{z^2 + 1.81z + 0.8187}. \tag{25}$$

Prijenosna funkcija regulatora glasi:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{37.223(z - 0.07319)}{z - 1}.} \tag{26}$$

Zadatak 3

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga uz polinomski regulator glasi

$$G_{cl}(s) = \frac{T(s)B(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)}, \tag{27}$$

gdje je proces opisan prijenosnom funkcijom

$$G_p(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{28}$$

dok su $R(s)$, $S(s)$ i $T(s)$ polinomi koje treba odrediti.

Prijenosnu funkciju zatvorenog kruga je potrebno izjednačiti sa modelskom prijenosnom funkcijom kod koje je brojnik i nazivnik proširen polinomom A_0.

$$G_m = \frac{B_m(s)A_0(s)}{A_m(s)A_0(s)} \tag{29}$$

Redovi polinoma glase:

$$degR = degS = degT = degA_0 = degA - 1 = 1. \tag{30}$$

Polinom A_0 potrebno je odabrati tako korjeni polinoma $A_0(s)$ budu lijevo od polova željenog karakterističnog polinoma $A_m(s)$

Bira se

$$A_0(s) = 0,1s + 1. \tag{31}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga glasi:

$$\frac{t_1 s + t_0}{r_1 s^3 + r_0 s^2 + s_1 s^2 + s_0} = \frac{0,1s + 1}{0,1s^3 + 1,2s^2 + 2,1s + 1} \tag{32}$$

Polinomi regulatora glase:

$$\boxed{R(s) = 0,1s + 1,2,\ S(s) = 2,1s + 1,\ T(s) = 0,2s + 1.} \tag{33}$$

Zadatak 4

Modelska prijenosna funkcija određuje se kao

$$A_M(z) = (z - e^{p_1 T})(z - e^{p_2 T}) = z^2 - 1,235z + 0,4493. \tag{34}$$

Stupnjevi pojedinih polinoma su:

$$\deg A_o = \deg R = \deg S = \deg T = \deg A - 1 = 1$$

Kako se traži najbrža kompenzacija poremećaja, polinom A_o je odabran kao

$$A_o(z) = z.$$

Kako bi se postiglo jedinično pojačanje, potrebno je osigurati da vrijedi $G_m(1) = 1$.
Kako je potrebno zadržati postojeće nule, može se zapisati:

$$B_M(z) = K(z - 0.25).$$

Parametar K je moguće odrediti iz uvjeta $G_m(1) = 1$:

$$K = \lim_{z \to 1} \frac{z^2 - 1,235z + 0,4493}{z - 0.25} = 0.2857$$

Rješavanjem Diophantske jednadžbe dobiju se konačni polinomi regulatora:

$$\boxed{R(z) = 3.7029z - 0.1859, \quad S(z) = z - 0.5312, \quad T(z) = 3.5717z.}$$

Zadatak 5

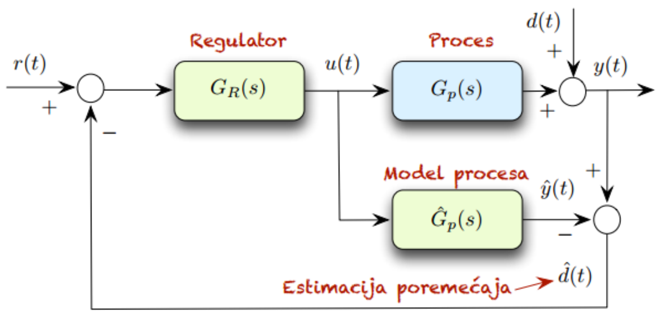
Kako je potrebno projektirati regulator EMUL2 metodom uzimajući u obzir diskretizaciju, potrebno je projektirati regulator za nadomjesni sustav.

Ako doprinos A/D i D/A pretvornika modeliramo kao $G_{A/D}(s) \cdot G_{D/A}(s) \approx e^{-sT} \approx 1 - sT$, proces je potrebno zamijeniti sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{1 - 0.1s}{1 + s}. \tag{35}$$

Ideja je ostvariti idealno upravljanje za sustav u otvorenoj petlji te dodatno estimirati i kompenzirati poremećaj (Sl. 2). Regulator uključuje model procesa.

Filtar ima ulogu prigušenja visokofrekvencijskih komponenata i dobivanja ostvarive prijenosne funkcije regulatora. Proces je potrebno razdvojiti na dio procesa koji se može invertirati i dio procesa koji se ne može invertirati:



Slika 2: Načelna shema sustava upravljanja

$$\begin{aligned}\tilde{G}_p^+(s) &= \frac{1}{1+s} \\ \tilde{G}_p^-(s) &= 1 - 0.1s.\end{aligned} \tag{36}$$

Kako bi se izbjegao nekauzalan inverz procesa, dodan je filtar s 5 puta manjom vremenskom konstantom od vremenske konstante procesa, odnosno odabrano je $T_f = 0.2$ s:

$$\begin{aligned}G_{IMC}(s) &= G_{pf}(s)(\tilde{G}_p^+)^{-1} \\ &= \frac{(1+s)}{1+0.2s}\end{aligned} \tag{37}$$

Regulator se implementira u sljedećem obliku:

$$\tilde{G}_R(s) = \frac{\tilde{G}_{IMC}(s)}{1 - \tilde{G}_{IMC}(s)\tilde{G}_p} = \frac{30}{3}\frac{1+s}{s}. \tag{38}$$

Tustinovom diskretizacijom (uvrštavanjem $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$) dobije se:

$$G_R(z) = \frac{3.5z - 3.167}{z-1}. \tag{39}$$

Za prikaz cijelog dijela najvećeg koeficijenta, dovoljna su 2 bita; jedan bit je potreban za predznak, dok ostaje 5 bitova za frakciju.

Ako je sa n označen broj bitova frakcije, tada se kvantizirana vrijednost $\tilde{x}$ koficijenta x, može izračunati koristeći izraz:

$$\tilde{x} = round(x \cdot 2^n) \cdot 2^{-n} \tag{40}$$

Prijenosna funkcija uz kvantizirane koeficijente glasi:

$$\boxed{G_R^*(z) = \frac{3.5z - 3.1562}{z-1}.} \tag{41}$$

Zadatak 6

Rješenje:

a)

$$S_{p_i}^{a_k} = \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\frac{\partial A(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial A(z)}{\partial p_i}} = -\frac{z^{-k}}{z^{-1}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(1-p_j z^{-1})}\Big|_{z=p_i} = -\frac{p_i^{n-k}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(p_i - p_j)} \tag{42}$$

b)

$$p_1 = 0.5,\ p_2 = 0.55,\ p_3 = 1, \Delta\bar{a}_i = 2^{-5}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_1} = \frac{-p_1^{n-k}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = -10.0000 \rightarrow \Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial a_1}\Delta\bar{a}_1 = -0.625, \tag{44}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial a_1} = \frac{-p_2^{n-k}}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} = 13.4444 \rightarrow \Delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial a_1}\Delta\bar{a}_1 = 0.8403, \tag{45}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial a_1} = \frac{-p_3^{n-k}}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = -4.4444 \rightarrow \Delta p_3 = \frac{\partial p_3}{\partial a_1}\Delta\bar{a}_1 = -0.2778. \tag{46}$$

Zadatak 7

Prijenosna funkcija regulatora glasi:

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{u(z)}{e(z)} &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} a_{11} & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(z - a_{11})}{z^2 + (1 - a_{11})\, z + 3 - a_{11}}. \end{aligned} \tag{47}$$

Ako promjena koeficijenta iznosi $\Delta a_{11} = 0.01$, promjenu pola je moguće procijeniti korištenjem funkcije osjetljivosti:

$$\Delta p_1 = \frac{\frac{\partial A}{\partial a_{11}}}{\frac{\partial A}{\partial p_1}} \Delta a_{11} = 0.04. \tag{48}$$

Procijenjena vrijednost pola $\tilde{p}_1 = p_1 + \Delta p_1$ iznosi 1.04.

Ako se umjesto koeficijenta a_{11} uvrsti nova vrijednost koeficijenta $\tilde{a}_{11} = 2.51$ karakteristični polinom glasi:

$$\tilde{A}(z) = z^2 - 1.51z + 0.49 = (z - 1.0379)(z - 0.4721). \tag{49}$$

Stvarna vrijednost pola iznosi $\tilde{p}_1$ iznosi 1.0379.