6. auditorna vježba
Analitički postupci sinteze regulatora Truxal-Guillemin

8. prosinca 2023.

---

1. zadatak

Zadan je proces:

$$G_p(s) = \frac{2}{s+1} \tag{1}$$

Potrebno je projektirati regulator prema Truxal-Guilleminu, tako da dinamika zatvorenog kruga bude 10 puta brža od dinamike procesa te da se osigura jedinično pojačanje.

2. zadatak

Za podređenu petlju po struji istosmjernog motora s konstantnom i nezavisnom uzbudom, modeliranu prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{K_a}{(1+sT_a)(1+sT_\Sigma)} \tag{2}$$

potrebno je Truxal-Guilleminovim postupkom projektirati ostvariv regulator.

Cilj je postići nadvišenje $\sigma_m = 5\%$ i vrijeme prvog maksimuma $t_p = 4T_\Sigma$. Zadane vrijednosti su $K_a = 1$, $T_a = 10$ ms, $T_\Sigma = 2$ ms.

3. zadatak

Nadređena petlja upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog motora s konstantnom i nezavisnom uzbudom modelirana je prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{K}{Js(1+sT_\Sigma)} \tag{3}$$

Potrebno je Truxal-Guilleminovim postupkom projektirati ostvariv regulator minimalnog reda s minimalnim dopuštenim polnim viškom. Karakteristični polinom zatvorenog kruga treba odabrati prema Butterworthovoj modelskoj prijenosnoj funkciji za koju vrijeme prvog maksimuma iznosi približno $t_p = 10T_\Sigma$, a da se pritom osigura slijeđenje linearno rastuće pobude. Vrijednosti parametara su $K = 1.33$ Vs/rad, $J = 1$ kgm^2, $T_\Sigma = 10$ ms.

4. zadatak

Zadan je proces:

$$G_p(s) = \frac{1-s}{s+1} \tag{4}$$

Potrebno je projektirati regulator prema Truxal-Guilleminu, gdje željena prijenosna funkcija zatvorenog kruga treba biti što je bliže moguće sljedećoj prijenosnoj funkciji:

$$G_m^*(s) = \frac{1}{0.1s+1} \tag{5}$$

5. zadatak

Zadan je proces:

$$G_p(s) = \frac{1}{s-1} \tag{6}$$

Potrebno je projektirati regulator prema Truxal-Guilleminu, gdje željena prijenosna funkcija zatvorenog kruga treba biti što je bliže moguće sljedećoj prijenosnoj funkciji:

$$G_m^*(s) = \frac{1}{s+1} \tag{7}$$

6. zadatak

Zadan je proces:

$$G_p(s) = \frac{0.03s^2 - 0.2s - 1}{0.2s^2 - 0.8s - 1} \tag{8}$$

Potrebno je projektirati regulator prema Truxal-Guilleminu, tako da karakteristični polinom zatvorenog kruga bude odabran koristeći Binomnu formulu uz $\omega_n = 1$ te da se postigne jedinično pojačanje.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Prijenosnu funkciju zatvorenog kruga potrebno je izjednačiti sa željenom prijenosnom funkcijom. Kako se koristi TG postupak, pretpostavlja se kraćenje dinamike procesa:

$$\frac{G_R(s)G_p(s)}{1+G_R(s)G_p(s)} = G_m(s) \quad \rightarrow \quad G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}. \tag{9}$$

Kako je proces stabilan i nema neminimalno faznih nula, moguće je odabrati bilo koju modelsku prijenosnu funkciju koja zadovoljava uvjet da je polni višak modelske prijenosne funkcije veći ili jednak polnom višku procesa.

Odabrana je sljedeća modelska prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_m(s) = \frac{1}{0.1s+1} \tag{10}$$

Prijenosnu funkciju regulatora moguće je dobiti direktno iz izraza (9).

$$G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_m(s)}{1-G_m(s)} = 5 \cdot \frac{1+s}{s}. \tag{11}$$

Zadatak 2

Prijenosna funkcija procesa je drugog reda. Polni višak procesa iznosi 2. Proces je stabilan i minimalno fazni. Potrebno je odabrati modelsku prijenosnu funkciju sa polnim viškom većim ili jednakim 2.

Odabiremo modelsku prijenosnu funkciju drugog reda bez nula.

Izračunajmo ζ pomoću izraza za nadvišenje:

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05 \tag{12}$$

Uzimanjem prirodnog logaritma s obje strane dobivamo:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)\right)^2}} \approx 0.69 \tag{13}$$

Sada možemo izračunati ω_n pomoću izraza za vrijeme prvog maksimuma:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 542.62\,\mathrm{rad/s} \tag{14}$$

Sada imamo potrebne parametre za konstrukciju modelske funkcije:

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \approx \frac{2.944 \times 10^5}{s^2 + 748.9s + 2.944 \times 10^5} \tag{15}$$

Regulator je definiran kao:

$$G_R(s) = \frac{G_m}{1-G_m}\left(\frac{1}{G_p}\right) = \frac{5.889s^2 + 3533s + 2.944 \times 10^5}{s^2 + 748.9s} \tag{16}$$

Zadatak 3

Proces je na rubu stabilnosti i nema neminimalno faznih nula. Polni višak procesa je 2. Možemo odabrati bilo koju modelsku prijenosnu funkciju s polnim viškom većim ili jednakim 2.

Kako bi se ispunio zahtjev za slijeđenjem linearno rastuće pobude, potrebno je osigurati da otvoreni krug sadržava dva integratora. Kako regulator krati dinamiku procesa, prijenosna funkcija $\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}$ mora sadržavati dva integratora, odnosno brojnik prijenosne funkcije $1 - G_m(s)$ mora sadržavati dvije nule u ishodištu.

Pritom je potrebno odabrati karakteristični polinom prema Butterworthu:

$$P_1(s) = s + \omega_n, \tag{17}$$

$$P_2(s) = s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2, \tag{18}$$

$$P_3(s) = s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3, \tag{19}$$

$$P_4(s) = s^4 + 2.6\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.6\omega_n^3 s + \omega_n^4, \tag{20}$$

gdje je ω_n prirodna frekvencija koju je potrebno očitati iz odziva nakon što se odabere prikladan red.

Ako se odabere prijenosna funkcija drugog reda uz polni višak 2, tada bi modelska prijenosna funkcija glasila:

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \rightarrow \quad \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s} \tag{21}$$

Ako je modelska prijenosna funkcija 2. reda, moguće je postići dvostruki integrator u otvorenom krugu uz odabir $a_1 = 0$. Promotrimo li željeni karakteristični polinom, vidljivo je da modelska prijenosna funkcija drugog reda nije odgovarajuća.

Ako se odabere modelska prijenosna funkcija trećeg reda, moguće je odabrati polni višak 2 i 3. Odaberemo li polni višak 3, modelska prijenosna funkcija glasi:

$$G_m(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \tag{22}$$

Tada vrijedi

$$\frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}. \tag{23}$$

Ponovno za dva integratora u otvorenom krugu mora vrijediti $a_1 = 0$. Prema tome modelska prijenosna funkcija 3. reda uz polni višak 3 nije odgovarajuća. Potrebno je unijeti dodatnu nulu u modelsku prijenosnu funkciju!

Odaberimo sada modelsku prijenosnu funkciju na sljedeći način:

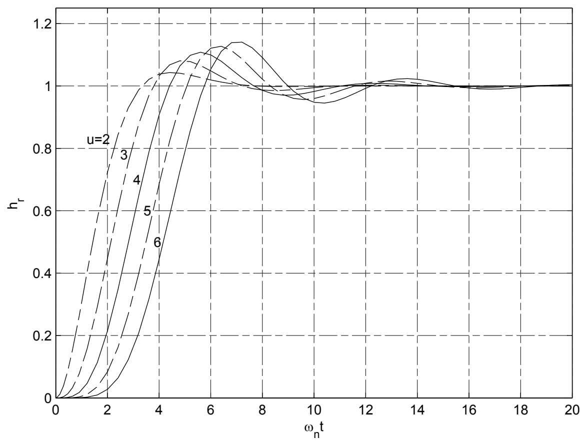
$$G_m(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{24}$$

Tada vrijedi

$$\frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + (a_1 - b_1) s} \tag{25}$$

Ako se izabere $b_1 = a_1$, dobivamo dva integratora u otvorenom krugu. Dodatno, radi osiguravanja jediničnog pojačanja potrebno je odabrati $b_0 = a_0$.

Karakteristične prijelazne funkcije prikazane su na slici.



Za 3. red, $\omega_n t_p \approx 5$, odnosno $\omega_n \approx \frac{5}{t_p} = 50$ rad/s.

Modelska prijenosna funkcija je odabrana kao:

$$G_m(s) = \frac{2\omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3} = \frac{5000s + 125000}{s^3 + 100s^2 + 5000s + 125000} \tag{26}$$

Regulator glasi:

$$G_R(s) = \frac{G_m}{1 - G_m} \frac{1}{G_p} = \frac{37.59s + 939.8}{s} \tag{27}$$

Zadatak 4

Kako proces ima neminimalno faznu nulu, potrebno je tu nulu uključiti u modelsku prijenosnu funkciju:

$$G_m(s) = \frac{1 - s}{0.1s + 1} \tag{28}$$

Prijenosna funkcija regulatora slijedi direktno:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = 0.9091 \cdot \frac{1 + s}{s} \tag{29}$$

Zadatak 5

Kako se radi o nestabilnom procesu, $1 - G_m(s)$ mora sadržavati nulu koja odgovara nestabilnom polu kako regulator ne bi imao neminimalno faznih nula. Radi kauzalnosti regulatora, polni višak modelske prijenosne funkcije mora biti veći ili jednak polnom višku procesa.

Kada bismo odabrali modelsku prijenosnu funkciju prvog reda:

$$G_m(s) = \frac{1}{s + 1} \quad \rightarrow \quad \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{1}{s} \tag{30}$$

što nije odgovarajuće jer bi regulator uvijek imao neminimalno faznu nulu koja odgovara nestabilnom polu procesa.

Ako odaberemo prijenosnu funkciju drugog reda bez nula:

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \rightarrow \quad \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s} = \frac{1}{s(1 + a_1 s)} \tag{31}$$

odnosno da bismo uveli nestabilan pol regulatora koji bi kratio neminimalno faznu nulu, modelska prijenosna funkcija bi morala biti nestabilna ($a_1 < 0$).

Potrebno je dodati nulu u modelsku prijenosnu funkciju. Ako odaberemo prijenosnu funkciju:

$$G_m(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{32}$$

vrijedi:

$$\frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + (a_1 - b_1)s + (a_0 - b_0)} \tag{33}$$

Prikladnim izborom nule regulatora, moguće je postići da $\frac{G_m}{1-G_m}$ sadrži nestabilan pol procesa.
Jedan od dva pola postavljamo na željenu vrijednost prema tekstu zadatka, a drugi biramo tako da ima 10 puta manju vremensku konstantu. Nula prijenosne funkcije je zatim odabrana tako da $1 - G_m(s)$ u brojniku sadržava nulu u $z = 1$ te da se osigura jedinično pojačanje. Iz prethodnih izraza slijedi $b_1 = a_1 + 1$ i $b_0 = a_0$, gdje su a_0 i a_1 definirani željenim polovima.
Konačno, modelska prijenosna funkcija glasi:

$$G_m(s) = \frac{1.2s + 1}{(s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{12s + 10}{s^2 + 11s + 10} \tag{34}$$

te izraz za regulator postaje:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} = 10 \cdot \frac{1.2s + 1}{s} \tag{35}$$

Zadatak 6

Razmatramo prijenosnu funkciju procesa $G_p(s)$ danu izrazom:

$$G_p(s) = \frac{0.03s^2 - 0.2s - 1}{0.2s^2 - 0.8s - 1} = \frac{(0.1s - 1)(0.3s + 1)}{(0.2s - 1)(s + 1)}. \tag{36}$$

Proces ima neminimalno faznu nulu i nestabilan pol. Polni višak mora biti veći od nule te modelska prijenosna funkcija mora sadržavati nestabilnu nulu, ali i dodatnu nulu kako bi prijenosna funkcija $\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}$ imala nestabilan pol.
Prema navedenom i pomoću binomne formule s $\omega_n = 1$, biramo sljedeću modelsku prijenosnu funkciju:

$$G_m(s) = \frac{(-0.1s + 1)(b_1 s + b_0)}{s^2 + 2s + 1} \tag{37}$$

Jedinično pojačanje postiže se uz $b_0 = 1$ te vrijedi:

$$\frac{G_m}{1 - G_m} = \frac{(-0.1s + 1)(b_1 s + 1)}{s\big(s(1 + 0.1b_1) + (2.1 - b_1)\big)} \tag{38}$$

Prijenosna funkcija ima pol u:

$$p = \frac{b_1 - 2.1}{1 + 0.1b_1} \tag{39}$$

Kako bi dobili nestabilan pol u $p = 5$, moramo odabrati $b_1 = 14.2$
Slijedi prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R = \frac{G_m}{1 - G_m}\frac{1}{G_p} = \frac{-3.912s^2 - 4.187s - 0.2755}{s^2 + 3.333s} = \frac{-3.9118(s + 1)(s + 0.07042)}{s(s + 3.333)}. \tag{40}$$

Vidimo da smo dobili stabilan regulator bez neminimalno faznih nula.