

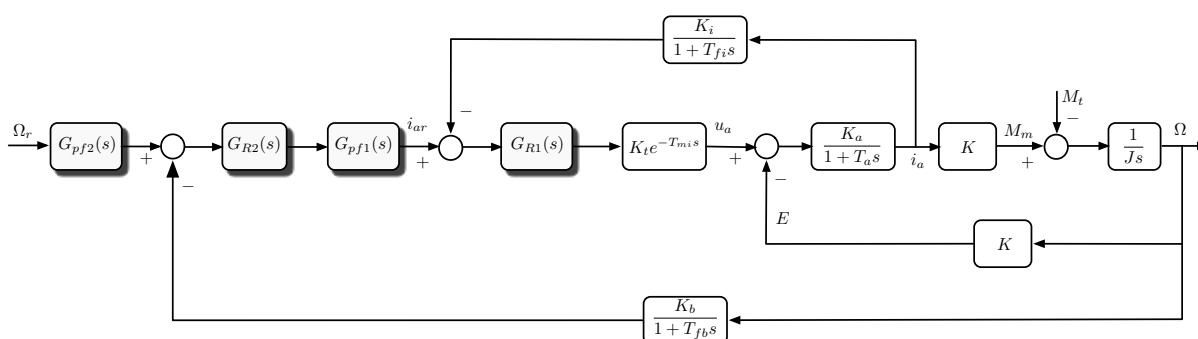
## 4. auditorna vježba

### Kaskadno upravljanje

15. studenog 2023.

#### 1. zadatak

Kaskadna struktura upravljanja brzinom istosmjernog motora prikazana je na Slici 1, pri čemu pojedini parametri iznose:  $K_a = 4.5 \text{ A/V}$ ,  $T_a = 0.025 \text{ s}$ ,  $K = 1.33 \text{ Vs/rad}$ ,  $K_t = 44$ ,  $K_i = 0.1 \text{ V/A}$ ,  $T_{fi} = 2 \text{ ms}$ ,  $K_b = 0.0318$ ,  $T_{fb} = 15 \text{ ms}$ ,  $J = 2.4 \text{ kgm}^2$ . Motor je napajan iz trofaznog tiristorskog usmjerivača. Mrtvo vrijeme usmjerivača može se aproksimirati kao  $T_{mi} = \frac{1}{2mf}$ , gdje je  $m$  broj pulzacija ispravljenog istosmjernog napona tijekom jedne periode ulaznog napona, a  $f$  frekvencija napajanja mreže.



Slika 1: Blokovska shema kaskadnog upravljanja brzinom DC motora s nezavisnom uzbudom.

Potrebno je:

- Projektirati PI regulator struje armature  $G_{R1}(s)$  prema tehničkom optimumu, kao i prefiltar referentne vrijednosti struje armature  $G_{pf1}(s)$ , uz pretpostavku da je usmjerivač napajan iz mreže frekvencije 50 Hz.
- Projektirati realni PID regulator struje armature  $G_{R1}(s)$  prema tehničkom optimumu uz pretpostavku da je parazitna vremenska konstanta PID regulatora  $T_v = \frac{T_D}{10}$ . Odabrati skup parametara kojim se postiže brži odziv.
- Što bi se dogodilo s nadvišenjem kada bi tiristorski usmjerivač spojili na mrežu frekvencije  $f = 60 \text{ Hz}$ , a regulator je podešen uz pretpostavku  $f = 50 \text{ Hz}$ ?
- Projektirati PI regulator brzine vrtnje motora  $G_{R2}(s)$  prema simetričnom optimumu kojim se postiže fazno osiguranje  $\gamma = 37^\circ$ , ako se koristi regulator struje iz a) zadatka. Također je potrebno projektirati prefiltar u referentnoj grani brzine vrtnje  $G_{pf2}(s)$  kojim se krata nula prijenosne funkcije zatvorenog kruga.
- Za isti motor potrebno je odrediti parametre regulatora tako da minimalno fazno osiguranje iznosi  $\gamma_{min} = 37^\circ$ , ako se moment tromosti može mijenjati u granicama  $J \in [\frac{1}{3}J_n, 3J_n]$ , gdje  $J_n = 2.4 \text{ kgm}^2$ .
- Uz pretpostavku da je PI regulator brzine vrtnje podešen po simetričnom optimumu, potrebno je odrediti što se događa s brzinom odziva i nadvišenjem, ako se pojačanje regulatora  $K_R$  smanji 10 puta.
- Pokazati da, ako se prefiltrom krati nula regulatora, sustav ima pogrešku slijeđenja na referencu u obliku funkcije linearnog porasta.

**RJEŠENJA:****Zadatak 1**

- a) Za projektiranje regulatora prema tehničkom optimumu potrebno je svesti regulacijski krug struje armature na sustav s jediničnom povratnom vezom:

$$G_{cl} = \frac{G_R G_p}{1 + G_R G_p G_f} \rightsquigarrow \frac{1}{G_f} \cdot \frac{G_R G_p G_f}{1 + G_R G_p G_f} \quad (1)$$

tj. premjestiti filtar struje ( $G_f(s) = K_i/(1 + sT_{fi})$ ) u direktnu granu i dodati član ( $1/G_f(s)$ ) u referentnu granu. Uz aproksimaciju mrtvog vremena usmjerivača:

$$K_t e^{-T_{mi}s} \approx \frac{K_t}{1 + T_{mi}s}, \quad T_{mi} = \frac{1}{2mf} = \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 50} = 1.66 \text{ ms} \quad (2)$$

te promatranje induciranog napona kao sporo promjenjivog poremećaja, prijenosna funkcija otvorenog kruga struje armature dana je izrazom:

$$G_{o1}(s) = G_{R1}(s) \cdot \frac{K_t}{1 + T_{mi}s} \cdot \frac{K_a}{1 + T_a s} \cdot \frac{K_i}{1 + T_{fi}s} \approx K_{R1} \frac{1 + sT_{I1}}{sT_{I1}} \cdot \frac{K_i K_t K_a}{(1 + sT_a)(1 + T_{\Sigma}s)}, \quad (3)$$

uz  $T_{\Sigma} = T_{fi} + T_{mi} = 3.66 \text{ ms}$ . Integralnom vremenskom konstantom regulatora kompenziramo dominantnu vremensku konstantu:

$$T_{I1} = T_a = 0.025 \text{ s}, \quad (4)$$

dok pojačanje određujemo iz zahtjeva da relativni koeficijent prigušenja zatvorenog kruga iznosi  $\sqrt{2}/2$ , što daje:

$$K_{R1} = \frac{1}{2K_i K_t K_a} \frac{T_a}{T_{\Sigma}} = 0.1725. \quad (5)$$

Uz tako određene parametre PI regulatora i filtar struje u direktnoj grani, prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja glasi:

$$G_{cl1}(s) = \frac{1 + sT_{fi}}{K_i} \cdot \frac{1}{1 + 2T_{\Sigma}s + 2T_{\Sigma}^2 s^2} \quad (6)$$

Prefiltrom u grani referentne vrijednosti potrebno je pokratiti nulu koja se pojavi usljed svođenja kruga upravljanja po struji na sustav s jediničnom povratnom vezom:

$$G_{pf1}(s) = \frac{1}{1 + sT_{fi}}. \quad (7)$$

S obzirom na činjenicu da se radi o podređenoj petlji svejedno je ima li zatvoreni regulacijski krug po struji jednično pojačanje ili nema. Ukoliko želimo jedinično pojačanje tada se odabire prefiltar u obliku:

$$G_{pf1}(s) = \frac{K_i}{1 + sT_{fi}}. \quad (8)$$

- b) Prijenosna funkcija realnog PID regulatora glasi:

$$G_R(s) = K_R \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_D)}{T_I s(1 + sT_{\nu})} \quad (9)$$

Uz jediničnu povratnu vezu vrijedi:

$$G_o(s) = K_R \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_D)}{T_I s(1 + sT_{\nu})} \cdot \frac{K_a K_t K_i}{(1 + sT_a)(1 + sT_{mi})(1 + sT_{fi})} \quad (10)$$

Dominantnu vremensku konstantu moguće je pokratiti integralnim djelovanjem, a sljedeću dominantniju derivativnim djelovanjem:

$$T_I = T_a = 25 \text{ ms}, \quad T_D = T_{fi} = 2 \text{ ms}, \quad T_{\nu} = \frac{T_D}{10} = 0.2 \text{ ms} \quad (11)$$

Međutim, dodavanje realnog derivatora utječe na ukupnu nedominantnu vremensku konstantu pa je potrebna korekcija pojačanja:

$$T'_\Sigma = T_{mi} + T_\nu = 1.86 \text{ ms} \rightsquigarrow K_{R1} = \frac{1}{2K_i K_t K_a} \frac{T_a}{T'_\Sigma} = 0.3382 \quad (12)$$

- c) Promjenom frekvencije mreže dolazi do promjene nedominantne vremenske konstante,  $T_\Sigma^* < T_\Sigma$ . Uz prijenosnu funkciju procesa i regulatora podešenog po tehničkom optimumu:

$$G_P(s) = \frac{K}{(1 + sT_a)(1 + sT_\Sigma^*)}, \quad G_R(s) = \frac{1}{2K} \frac{T_a}{T_\Sigma} \frac{1 + sT_a}{sT_a} \quad (13)$$

prijenosna funkcija otvorenog kruga upravljanja glasi:

$$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_P(s) = \frac{1}{2T_\Sigma s(1 + sT_\Sigma^*)} \quad (14)$$

iz čega slijedi prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_{cl}(s) = \frac{1}{2T_\Sigma T_\Sigma^* s^2 + 2T_\Sigma s + 1} \quad (15)$$

Usporedba s općenitom prijenosnom funkcijom drugog reda,  $G(s) = \frac{1}{s^2/\omega_n^2 + (2\zeta/\omega_n)s + 1}$ , daje:

$$\frac{1}{\omega_n^2} = 2T_\Sigma T_\Sigma^*, \quad \frac{2\zeta}{\omega_n} = 2T_\Sigma \rightsquigarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{T_\Sigma}{T_\Sigma^*}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (16)$$

Budući da prigušenje raste u odnosu na originalnu vrijednost, nadvišenje se smanjuje.

- d) U nastavku pretpostavljamo da je unutarnji krug projektiran prema tehničkom optimumu uz prefiltar (7). Uz zanemarenje članova višeg reda u nazivniku, unutarnji krug po struji se može nadomjestiti dinamikom prvog reda:

$$G_{ei}(s) = \frac{1}{K_i} \frac{1}{1 + 2T_\Sigma s}. \quad (17)$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga po brzini vrtnje može se zapisati kao:

$$G_{o2}(s) = G_{R2}(s) \cdot G_{ei}(s) \cdot G_{i\omega}(s) \cdot G_{fb}(s) = K_{R2} \frac{1 + sT_{I2}}{sT_{I2}} \cdot \frac{1}{K_i} \frac{1}{1 + 2T_\Sigma s} \cdot \frac{K}{J s} \cdot \frac{K_b}{1 + T_{fb}s} \quad (18)$$

odnosno aproksimirati kao:

$$G_{o2}(s) \approx K_{R2} \frac{1 + sT_{I2}}{sT_{I2}} \cdot \frac{K_{s2}}{1 + sT_\Sigma^*} \frac{1}{T_m s} = K_{R2} K_{s2} \cdot \frac{1}{T_{I2} T_m s^2} \cdot \frac{1 + sT_{I2}}{1 + sT_\Sigma^*} \quad (19)$$

pri čemu je:  $T_m = J/(K_a K^2)$ ,  $K_{s2} = K_b/(K_a K_i K)$  i  $T_\Sigma^* = 2T_\Sigma + T_{fb}$ . Takav je sustav prikladan za projektiranje regulatora prema simetričnom optimumu. Zahtjev za faznim osiguranjem od  $\gamma = 37^\circ$  definira omjer  $T_{I2}/T_\Sigma^* = a^2$ :

$$\gamma = \text{atan} \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right) \rightsquigarrow a = \frac{1 + \sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = 2 \quad (20)$$

iz čega slijede parametri regulatora:

$$T_{I2} = a^2 T_\Sigma^* = 89.3 \text{ ms} \quad (21)$$

$$K_{R2} = \frac{1}{a K_{s2}} \frac{T_m}{T_\Sigma^*} = 127.31 \quad (22)$$

Uz tako određene parametre PI regulatora i filter brzine u direktnoj grani, prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja glasi:

$$G_{cl1}(s) = \frac{1 + sT_{fb}}{K_b} \cdot \frac{1 + s4T_\Sigma^*}{1 + 4T_\Sigma^2 s + 8T_\Sigma^{*2} s^2 + 4T_\Sigma^{*3} s^3} \quad (23)$$

Kraćenje nepovoljnih nula i osiguravanje jediničnog pojačanja moguće je dodavanjem prefiltra u referentnoj grani koji ima oblik:

$$G_{pf2}(s) = \frac{K_b}{(1 + sT_{fb})(1 + s4T_{\Sigma}^*)} \quad (24)$$

- e) Iz navedenih granica za moment tromosti i izraza (19) proizlazi da se efektivno pojačanje sustava mijenja za faktor 3. Ako je sustav podešen prema simetričnom optimumu, može se pretpostaviti da je presječna frekvencija na dijelu amplitudne karakteristike s padom od 20 dB po dekadi. Uz to, moguća je aproksimacija karakteristike (u okolini presječne frekvencije) integratorom i pojačanjem,  $G(s) = K'/s$ . Iz izraza za amplitudu nadomjesnog integratora na presječnoj frekvenciji slijedi:

$$1 = |G(j\omega_c)| = \left| \frac{K'}{j\omega_c} \right| = \frac{|K'|}{|\omega_c|} \rightsquigarrow K' = \omega_c \quad (25)$$

što znači da promjena pojačanja procesa za faktor  $b$  mijenja presječnu frekvenciju za isti faktor. Fazna karakteristika otvorenog kruga (19) glasi:

$$\phi(\omega) = -180^\circ + \text{atan}(T_{I2}\omega) - \text{atan}(T_{\Sigma}^*\omega) \quad (26)$$

Uz  $\frac{d(\text{atan}(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$  i  $T_{I2} = a^2T_{\Sigma}^*$ , iz  $\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 0$  slijedi  $\omega_m = \frac{1}{aT_{\Sigma}^*}$ . Prema simetričnom optimumu vrijedi  $\omega_c = \omega_m$ , iz čega slijedi:

$$\phi(b\omega_c) = -180^\circ + \text{atan}(ba) - \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (27)$$

Iz zahtjeva za faznim osiguranjem,  $b = 3$  i  $\text{atan}(x) - \text{atan}(y) = \text{atan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$  slijedi:

$$37^\circ = \text{atan}(ba) - \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \rightsquigarrow a = 2.86 \quad (28)$$

što definira parametre regulatora:

$$T_{I2} = a^2T_{\Sigma}^* = 182.6 \text{ ms} \quad (29)$$

$$K_{R2} = \frac{1}{aK_{s2}} \frac{T_m}{T_{\Sigma}^*} = 88.89 \quad (30)$$

- f) Budući da je regulator podešen prema simetričnom optimumu, maksimum fazne karakteristike nalazi se na presječnoj frekvenciji. Smanjenjem pojačanja smanjuje se i presječna frekvencija, tj. amplitudna karakteristika se pomiče ulijevo. Presječna frekvencija povezana je s brzinom odziva, iz čega slijedi da se i brzina odziva smanjuje. Dodatno, pomicanjem presječne frekvencije i fazno osiguranje više nije maksimalno, iz čega slijedi da nadvišenje raste.
- g) Za određivanje pogreške slijeđenja na referencu u općem slučaju, potrebno je koristiti teorem o konačnoj vrijednosti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_{o2}(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_{R2} \frac{1+sT_{I2}}{sT_{I2}} \frac{K_{s2}}{1+sT_{\Sigma}^*} \frac{1}{T_ms}} \frac{1}{s^2} \quad (31)$$

što nakon rješavanja dvojnog razlomka iznosi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2T_{I2}T_m(1 + sT_{\Sigma}^*)}{s^2T_{I2}T_m(1 + sT_{\Sigma}^*) + K_{R2}(1 + sT_{I2}(1 + sT_{\Sigma}^*))K_{s2}} \frac{1}{s^2} = 0 \quad (32)$$

U slučaju postojanja prefiltra, signal pogreške  $e(t)$  predstavlja pogrešku slijeđenja filtrirane reference, dok je stvarna pogreška slijeđenja definirana kao:

$$\begin{aligned} E_r(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s) \left( 1 - G_{pf2}(s) \frac{G_{o2}(s)}{1 + G_{o2}(s)} \right) \\ &= R(s) \left( \frac{4T_{\Sigma}s + 8T_{\Sigma}^2s^2 + 8T_{\Sigma}^3s^3}{1 + 4T_{\Sigma}s + 8T_{\Sigma}^2s^2 + 8T_{\Sigma}^3s^3} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

iz čega slijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \left( \frac{4T_\Sigma s + 8T_\Sigma^2 s^2 + 8T_\Sigma^3 s^3}{1 + 4T_\Sigma s + 8T_\Sigma^2 s^2 + 8T_\Sigma^3 s^3} \right) = 4T_\Sigma. \quad (34)$$

Sustav slijedi filtriranu rastuću referentnu veličinu i zbog toga uvijek kasni za stvarnom referencom.