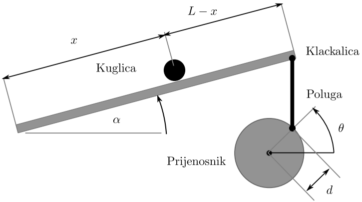
Upravljanje po varijablama stanja

Jadranko Matuško
Šandor Ileš

Fakultet elektrotehnike i računarstva

17. studenoga 2023,

Matematički model kuglice na klackalici



- Ubrzanje kuglice na klackalici ovisi o poziciji klackalice α:

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha \rightarrow \frac{X(s)}{\alpha(s)} \approx \frac{5g}{7s^2} \tag{1}$$

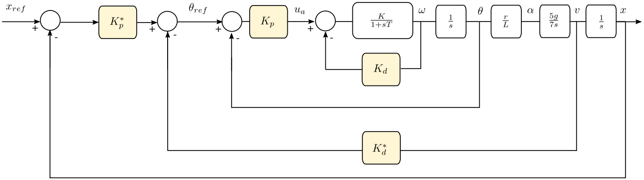
- Kut klackalice ovisi o poziciji motora spojenog na prijenosnik:

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{r}{L}. \tag{2}$$

- Pretpostavlja se da je krug regulacije pozicije reduktora opisan prijenosnom funkcijom:

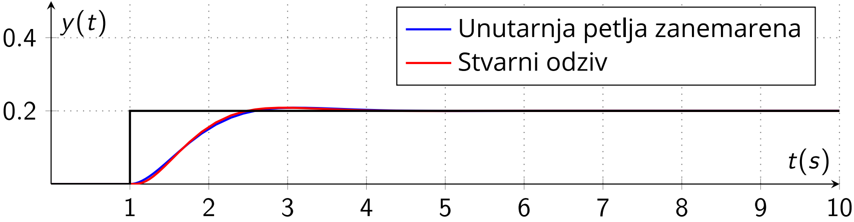
$$\frac{\theta}{U_a} = \frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s}. \tag{3}$$

Blokovska shema kaskadnog sustava upravljanja kuglicom na klackalici



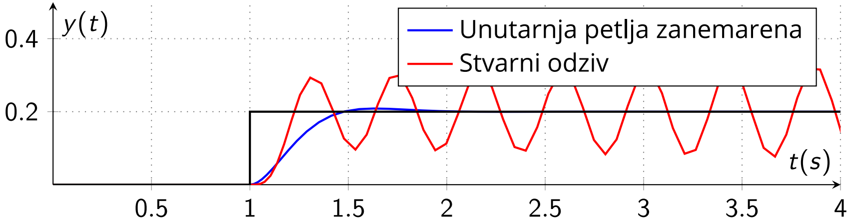
- Koristi se kaskadna struktura koja se sastoji od 2 PD regulatora
- Regulator za svaku petlju je moguće podesiti prema željenoj brzini odziva i željenom relativnom faktoru prigušenja ζ.
- Odabran je $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ te $\omega_{2n} = \frac{\omega_{2n}}{K}$.

Utjecaj odnosa brzina unutarnje i vanjske petlje



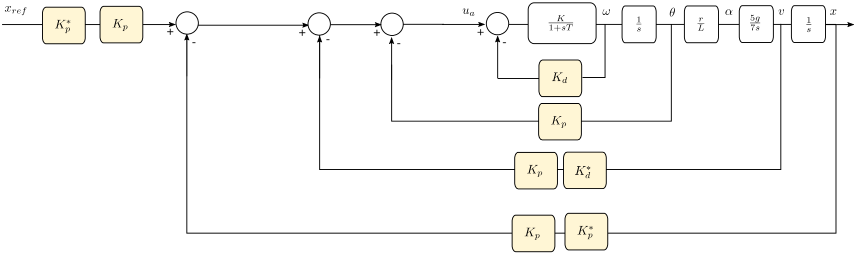
- Ako je unutarnja petlja dovoljno brža od vanjske, unutarnja petlja se može zanemariti i može se koristiti kaskadna struktura upravljanja.

Utjecaj odnosa brzina unutarnje i vanjske petlje



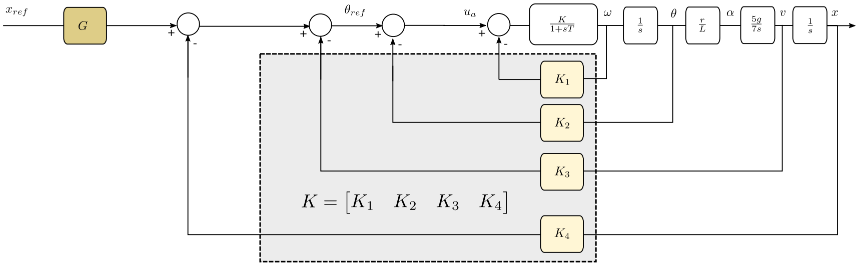
- Vanjska petlja je odabrana da bude 2x sporija od unutarnje ($K = 2$).
- Odziv stvarnog sustava je oscilatoran. Dinamike su spregnute i kaskadno upravljanje se više ne može koristiti.

Regulator po varijablama stanja



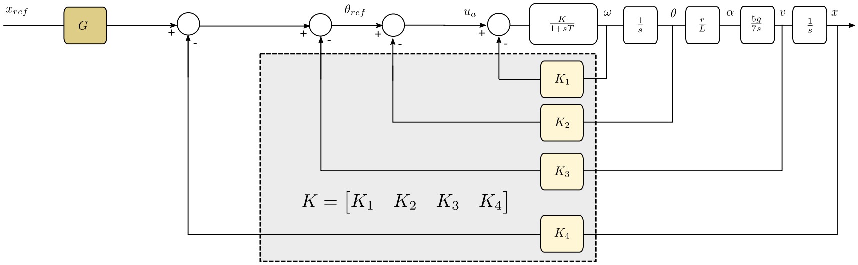
- Kaskadna regulacija koja koristi PD regulatore i koristi sve mjerljive varijable stanja može se prikazati kao ekvivalentan regulator po varijablama stanja.

Regulator po varijablama stanja



- Kako odrediti pojačanje K i G tako da se postigne željeni odziv zatvorenog kruga?

Regulator po varijablama stanja



- Možemo pronaći prijenosnu funkciju zatvorenog kruga i izjednačiti s modelskom prijenosnom funkcijom.

Regulator po varijablama stanja

- Uvedemo li $K^* = \frac{r}{L}\frac{5g}{7}$, prijenosnu funkciju zatvorenog kruga možemo zapisati kao:

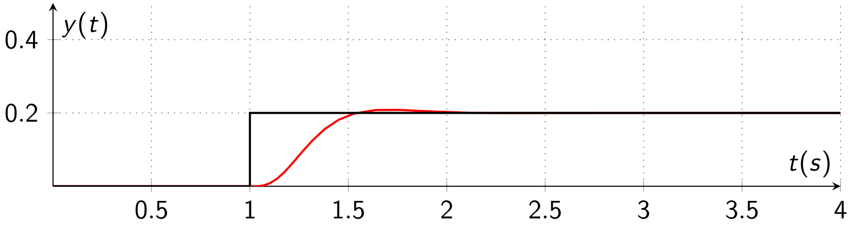
$$G_{cl}(s) = \frac{KK^*G}{Ts^4 + (1+KK_1)s^3 + KK_2s^2 + KK^*K_3s + KK^*K_4}. \tag{4}$$

- Pojačanje G treba odabrati da se postigne jedinično pojačanje $\rightarrow G = K_4$.
- Treba izjednačiti sljedeće polinome:

$$s^4 + \frac{(1+KK_1)}{T}s^3 + \frac{KK_2}{T}s^2 + \frac{KK^*K_3}{T}s + \frac{KK^*K_4}{T} =$$

$$(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4).$$

Regulator po varijablama stanja



- Vanjska petlja je odabrana da bude 2x sporija od unutarnje ($K = 2$)
- Sprega među sustavima uzeta je u obzir u fazi sinteze regulatora.

Može li to automatski?

- Zapis sustava po varijablama stanja:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$

- Uz odabir vektora stanja $x = \begin{bmatrix} \omega & \theta & v & x \end{bmatrix}$, matrice A i B glase:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{r}\frac{5g}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{K}{T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

- Tražimo zakon upravljanja

$$u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} x + Gr. \tag{7}$$

- Odaberemo polove p i željeni vektor možemo dobiti naredbom acker u Matlabu.

Uvod

Ciljevi predavanja:

- Upoznati se s generalnom procedurom kako odrediti pojačanje za regulator po varijablama stanja metodom postavljanja polova.
- Upoznati s postupcima sinteze regulatora u slučaju kada nije moguće postaviti sve polove na željene lokacije.
- Upoznati se načinima kako osigurati stacionarnu točnost.

Regulator po varijablama stanja

- Razmatrat ćemo linearni vremenski nepromjenjivi sustav bez nula:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8}$$

- Pretpostavljamo da je regulator po varijablama stanja zapisan u obliku:

$$u = -Kx + Gr \tag{9}$$

- U slučaju sustava s jednim ulazom i jednim izlazom zakon upravljanja glasi:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Gr(t) \tag{10}$$

Regulator za MIMO sustave

- Pojačanje regulatora po varijablama stanja za slučaj MIMO sustava ima pojačanje K u obliku matrice dimenzije $m \times n$.
- Matrica G koja množi referencu $r(t)$ ima dimenziju $m \times m$.

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

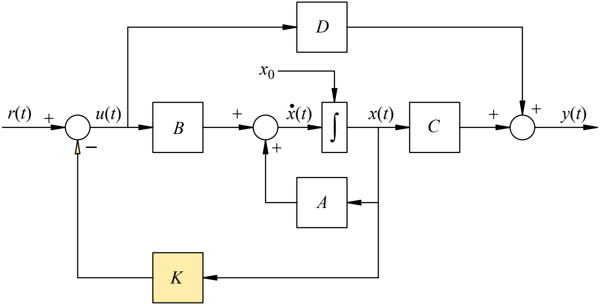
Regulator po varijablama stanja

- Zatvoreni krug može se opisati sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + BGr \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{12}$$

- U slučaju da vrijedi $r = 0$, glavna zadaća regulatora po varijablama stanja je dovesti sustav iz nekog početnog uvjeta x_0 u ravnotežno stanje $\tilde{x} = 0$ uz prihvatljivu prijelaznu pojavu te smanjiti utjecaj poremećaja.
- Svojstvene vrijednosti matrice $A - BK$ predstavljaju polove zatvorenog kruga.

Blokovska shema sustava upravljanja po varijablama stanja



- Zadatak je pronaći pojačanje K kojim se postiže željeno vladanje sustava.
- U nastavku će se obraditi metoda postavljanja polova.

Kako odabrati polove zatvorenog sustava upravljanja?

- Zatvoreni krug mora biti stabilan (polove je potrebno postaviti u lijevoj poluravnini)
- Pomicanje polova daleko od polova sustava zahtijeva velik upravljački signal.
- Polove je moguće postavljati na različite načine npr. metodom postavljanja dominantnih polova ili koristeći prototipni odziv sustava višeg reda:
- Za dobivanje prototipnog odziva višeg reda često se koristi:
  - Optimum dvostrukog odnosa
  - Integralni kriteriji kakvoće
  - Binomna formula

Metoda postavljanja dominantnih polova

- Konjugirano-kompleksni par najbliži imaginarnoj osi odabire se tako da se postigne željeno vladanje sustava.
- Željeno vladanje sustava odabire se na temelju odziva modelske prijenosne funkcije za sustav 1. ili 2. reda.
- Nedominantne polove je potrebno postaviti dovoljno daleko od dominantnih polova prema negativnom dijelu realne osi s ravnine.
- Uobičajeno se nedominantni polovi postavljaju tako da realni dio bude po apsolutnoj vrijednosti najmanje 3 do 5 puta veći od realnog dijela dominantnih polova.
- Zbog ograničenja na upravljački signal i utjecaja mjernog šuma treba paziti da se polovi ne pomaknu previše u lijevo.

Utjecaj položaja polova na vladanje sustava - 1

Prvi red:

- Sustav:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{13}$$

- Pol:

$$p_1 = -\frac{1}{\tau}. \tag{14}$$

- U slučaju sustava 1. reda, brzinu odziva određuje odabir vremenske konstante
- Nakon vremena koje iznosi jednu vremensku konstantu sustav će dostići 63.2% vrijednosti u ustaljenom stanju.

Utjecaj položaja polova na vladanje sustava - 2

Drugi red:

- Sustav:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \tag{15}$$

- Polovi:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{16}$$

- $\zeta < 0$ - sustav je nestabilan
- $\zeta = 0$ - sustav je oscilatoran (polovi na imaginarnoj osi)
- $0 < \zeta < 1$ - sustav ima konjugirano kompleksan par polova
- $\zeta = 1$ - dva realna i jednaka pola
- $\zeta > 1$ - dva realna i različita pola

Utjecaj položaja polova na vladanje sustava - 2

- Nadvišenje (%):

$$\sigma_m = 100 e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (17)$$

- Vrijeme porasta (od 0 - 90%):

$$t_{\mathrm{R}} \cong \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} \quad (18)$$

- Vrijeme prvog maksimuma:

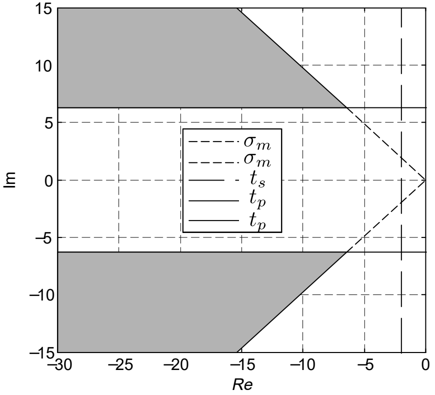
$$t_{\mathrm{P}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (19)$$

- Vrijeme smirivanja:

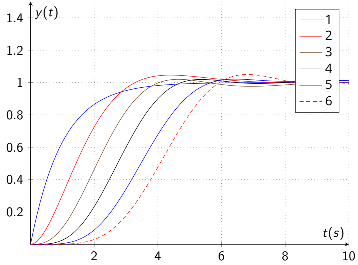
$$t_{\mathrm{S}} \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (20)$$

Primjer:

- Zahtjevi se uobičajeno zadaju u obliku nejednakosti:
- Odabrati položaj polova kojim se postiže $\sigma_m \leq 4\%$, $t_s \leq 2$ s, $t_p \leq 0.5$ s.
- Dopušteno područje za polove je prikazano slikom:

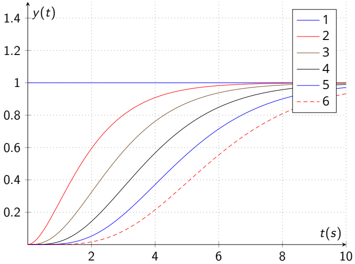


Odabir polova za sustav višeg reda (ITAE kriterij)



Red	Karakteristični polinom
Prvi	$s + \omega_n$
Drugi	$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$
Treći	$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
Četvrti	$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
Peti	$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
Šesti	$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.6\omega_n^2 s^4 + 8.6\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$

Odabir polova za sustav višeg reda (Binomni oblik)



Red	Karakteristični polinom
Prvi	$s + \omega_n$
Drugi	$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2$
Treći	$s^3 + 3\omega_n s^2 + 3\omega_n^2 s + \omega_n^3$
Četvrti	$s^4 + 4\omega_n s^3 + 6\omega_n^2 s^2 + 4\omega_n^3 s + \omega_n^4$
Peti	$s^5 + 5\omega_n s^4 + 10\omega_n^2 s^3 + 10\omega_n^3 s^2 + 5\omega_n^4 s + \omega_n^5$
Šesti	$s^6 + 6\omega_n s^5 + 15\omega_n^2 s^4 + 20\omega_n^3 s^3 + 15\omega_n^4 s^2 + 6\omega_n^5 s + \omega_n^6$

Zapis po varijablama stanja u kanoničkom upravljivom obliku

- Razmotrimo prijenosnu funkciju procesa

$$G_p = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \; m < n. \tag{21}$$

- Sustav se može zapisati u obliku:

$$\dot{x}_{\mathrm{CCF}} = A_{\mathrm{CCF}} x_{\mathrm{CCF}} + B_{\mathrm{CCF}} u \tag{22}$$

$$y = C_{\mathrm{CCF}} x_{\mathrm{CCF}} \tag{23}$$

Matrice sustva u upravljivom kanoničkom obliku

- Matrice A_{CCF} i B_{CCF} glase:

$$A_{\mathrm{CCF}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_{\mathrm{CCF}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$C_{\mathrm{CCF}} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \tag{25}$$

- Karakteristični polinom se može direktno napisati iz matrice A_{CCF}:

$$|sI - A_{\mathrm{CCF}}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \tag{26}$$

Regulator za sustav u upravljivom kanoničkom obliku

- Ako se odabere pojačanje regulatora:

$$K_{\mathrm{CCF}} = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{27}$$

- Dobije se sljedeća matrica zatvorenog kruga:

$$A_{\mathrm{CCF}} - B_{\mathrm{CCF}} K_{\mathrm{CCF}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \delta_0 & -a_1 - \delta_1 & -a_2 - \delta_2 & \cdots & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

- Karakteristični polinom glasi

$$\begin{aligned} |sI - A_{\mathrm{CCF}} + B_{\mathrm{CCF}} K_{\mathrm{CCF}}| =& s^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \delta_2) s^2 \\ & + (a_1 + \delta_1) s + (a_0 + \delta_0) . \end{aligned} \tag{29}$$

Što ako imamo generalni zapis sustava po varijablama stanja?

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{30}$$

$$y = Cx + Du \tag{31}$$

- Ako za proizvoljan vektor po varijablama stanja postoji matrica tranformacije
$$x = T_{CCF} x_{CCF}, \tag{32}$$
- Tada
$$u = K_{CCF} x_{CCF} = K_{CCF} T_{CCF}^{-1} x. \tag{33}$$

  Novi vektor pojačanja glasi:

$$K = K_{CCF} T_{CCF}^{-1}. \tag{34}$$

Transformacija sustava iz jednog oblika u drugi

- Odabir varijabli stanja nije jedinstven
- Za različit odabir varijabli stanja, imamo različite matrice koje opisuju vladanje sustava:

$$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \tag{35}$$

- Neka vrijedi:

$$\tilde{x} = Tx \tag{36}$$

- Opis vladanja sustava u novom prostoru stanja se može izvesti kako slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T\dot{x} \\ &= TAx + TBu \\ &= TAT^{-1}\tilde{x} + TBu. \end{aligned} \tag{37}$$

- Odnosno matrice $(\tilde{A}, \tilde{B})$ se mogu izračunati iz matrica (A, B) korištenjem matrice transformacije: $\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB$.

Upravljivost

Upravljivost

Sustav je upravljiv (eng. *Controllable*) ako se može pronaći upravljačka funkcija $u(t), 0 < t \leq T$ pomoću koje se može doći u ishodište prostora stanja iz bilo kojeg početnog stanja x_0 u konačnom vremenu T.

- Sustav je upravljiv ako i samo ako matica upravljivosti P ima puni rang.
- Matrica upravljivosti sustava glasi:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Kada možemo postaviti polove na proizvoljnim lokacijama?

Teorem

Za bilo koji simetrični skup od n kompleksnih brojeva $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, postoji matrica pojačanja K takva da $\sigma(A - BK) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ ako i samo ako je par (A, B) upravljiv.

Kako odrediti matricu T?

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B \,\big|\, \left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}B\right) \big| & \cdots \,\big|\, \left(T^{-1}A^{n-1}T\right)\left(T^{-1}B\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B \,\big|\, T^{-1}AB \big| \cdots \,\big|\, T^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}P \end{aligned} \tag{39}$$

Matrica transformacije

$$T = P\tilde{P}^{-1} \tag{40}$$

Matrica upravljivosti za upravljivi kanonički oblik

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{CCF}}^{-1} &= \begin{bmatrix} B_{\mathrm{CCF}} & A_{\mathrm{CCF}} B_{\mathrm{CCF}} & A_{\mathrm{CCF}}^{2} B_{\mathrm{CCF}} & \cdots & A_{\mathrm{CCF}}^{n-1} B_{\mathrm{CCF}} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Bass-Gura formula

Bass-Gura

$$K = K_{\mathrm{CCF}} T_{\mathrm{CCF}}^{-1} \tag{42}$$

$$T_{\mathrm{CCF}} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Bass-Gura formula

Postupak:

1. Izračunati karakteristični polinom sustava $a(s)$
2. Izračunati željeni karakteristični polinom $\alpha(s)$
3. Izračunati pojačanje za upravljivi kanonički oblik K_{CCF}.
4. Izračunati matricu upravljivosti za sustav P
5. Izračunati T_{CCF}.
6. Izračunati pojačanje za originalni zapis sustava u prostoru stanja K.

Primjer

Promotrimo sustav $\dot{x} = Ax + Bu$, gdje matrice iznose:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Želimo postaviti 3 pola u -1.

Izračun polova otvorenog kruga

- Matrica A je dijagonalna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Karakteristični polinom otvorenog kruga glasi:

$$a(s) = s(s-1)(s-2) = s^3 - 3s^2 + 2s + 0. \tag{44}$$

- Koeficijenti: $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 2$, $a_0 = 0$.

Matrica upravljivosti

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Matrica P je punog ranga.
- Sustav je upravljiv.

Pojačanje za upravljivi kanonički oblik

- Željeni karakteristični polinom zatvorenog kruga:

$$\alpha(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \tag{45}$$

- Koeficijenti: $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_0 = 1$.
- Pojačanje za upravljivi kanonički oblik:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{CCF}} &= \begin{bmatrix} (\alpha_0 - a_0) & (\alpha_1 - a_1) & (\alpha_2 - a_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-0) & (3-2) & (3-(-3)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica transformacije

$$
\begin{aligned}
T_{CCF} &= P P_{CCF}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
T_{CCP}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad .
$$

Izračun pojačanja regulatora

$$
\begin{aligned}
K &= K_{\mathrm{CCF}} T_{\mathrm{CCF}}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -8 & \frac{27}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ackermannova formula

Ackermannova formula

Pojačanje regulatora je moguće dobiti na sljedeći način:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}\alpha(A),$$

gdje je $P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ matrica upravljivosti, dok $\alpha(A)$ predstavlja

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$

Odabir pojačanja u grani referentne vrijednosti

- Zatvoreni krug se može zapisati kako slijedi:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BGr(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga glasi:

$$G_{\mathrm{CL}}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BG.$$

- Pojačanje zatvorenog kruga:

$$G_{\mathrm{CL}}(0) = -C(A - BK)^{-1}BG.$$

- Matrica pojačanja:

$$G = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}.$$

Primjer: Istosmjerni motor s konstantnom i nezavisnom uzbudom

Uzbudni krug

$$U_u = R_u i_u + N_u \frac{d\Phi_u}{dt} \tag{46}$$

- Za linearni odnos između Φ_u i i_u:

$$U_u = R_u i_u + L_u \frac{di_u}{dt} \tag{47}$$

- Općenito je ovisnost uzbudne struje o uzbudnom toku nelinearna:

$$i_u = f_2(\Phi_u). \tag{48}$$

Armaturni krug

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E \tag{49}$$

$$E = K_e \Phi_u \Omega \tag{50}$$

- Razvijeni moment

$$M_m = K_m \Phi_m i_a \tag{51}$$

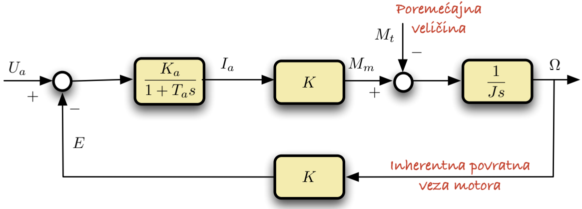
- Jednadžba ravoteže

$$M_m = M_t + M_f + J\frac{d\Omega}{dt} \tag{52}$$

$J\frac{d\Omega}{dt}$ - dinamički moment.

Blokovska shema istosmjernog motora

- Blokovska shema lineariziranog modela motora uz pretpostavku konstantne uzbude. ti. $\Phi_u = const$:



Primjer: Sinteza regulatora brzine vrtnje

- Zapis jednadžbi istosmjernog motora s konstantnom i nezavisnom uzbudom u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & -\frac{C_e}{L_a} \\ \frac{C_m}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} m_t. \tag{53}$$

- Parametri sustava su: $C_e = 0.01$ Vs/rad, $R_a = 2.6\ \Omega$, $L_a = 2.6$ mH, $J = 0.01$ kg m^2.

Zadatak:

- Odrediti parametre regulatora po varijablama stanja tako da $\sigma_m \leq 4\%$, $t_s \leq 2$ s, $t_p \leq 0.5$ s. Usporediti rezultat dobiven Bass-Gura formulom i Ackermannovom formulom.
- Osigurati da sustav slijedi referentnu veličinu u obliku skokovite pobude za slučaj kada nema poremećaja.
- Provjeriti što se događa u slučaju konstantnog poremećaja.

Karakteristični polinom zatvorenog kruga

- Maksimalno nadvišenje, određuje minimalnu vrijednost faktora prigušenja:

$$\sigma_{m,max} \leq 4\% \rightarrow \zeta_{min} = \frac{|ln(\frac{4}{100})|}{\sqrt{\pi^2 + \left[ln(\frac{4}{100})\right]^2}} = 0,716. \tag{54}$$

- Faktor prigušenja određuje odnos između realnog i imaginarnog dijela polova:

$$\frac{Re(p)}{Im(p)} \geq \frac{\zeta_{min}}{\sqrt{1-\zeta_{min}^2}} = 1,026 \rightarrow Re(p) \geq 1.026 Im(p). \tag{55}$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga

- Vrijeme smirivanja određuje realni dio polova zatvorenog kruga:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 2 \rightarrow \zeta\omega_n \geq 2. \qquad (56)$$

- Vrijeme prvog maksiumuma određuje ograničenje na imaginarni dio:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \geq 2\pi. \qquad (57)$$

- Odabrani polovi: $p_{1,2} = -10 \pm 7i$.
- Karakteristični polinom: $\alpha(s) = s^2 + 20s + 149$.
- Koeficijenti željenog karakterističnog polinoma zatvorenog kruga: $\alpha_0 = 149$, $\alpha_1 = 20$.

Zapis modela i pojačanje u upravljivom kanoničkom obliku

- Prijenosna funkcija motora glasi:

$$\frac{\omega(s)}{u_a(s)} = \frac{\frac{1}{C_e}}{T_{em} T_a s^2 + T_{em} s + 1} = \frac{\frac{1}{T_{em} T_a C_e}}{s^2 + \frac{1}{T_a} s + \frac{1}{T_a T_{em}}}. \tag{58}$$

- Na temelju prijenosne funkcije, mogu se zapisati matrice modela u kanoničkom upravljivom obliku:

$$A_{CCF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_a T_{em}} & \frac{1}{T_a} \end{bmatrix}, \; B_{CCF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

- Koeficijenti karakterističnog polinoma otvorenog kruga: $a_0 = \frac{1}{T_a T_{em}}$, $a_1 = \frac{1}{T_a}$.
- Pojačanje u upravljivoj kanoničkoj formi glasi:

$$K_{CCF} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 143.8428 & -980.0000 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Izračun pojačanja za originalni zapis po varijablama stanja

- Matrica transformacije $T_{CCF}^{-1} = P_{CCF} P^{-1}$.
- Pojačanje se može izračunati kao:

$$K = K_{CCF} T_{CCF}^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5480 & 0.2789 \end{bmatrix} \tag{61}$$

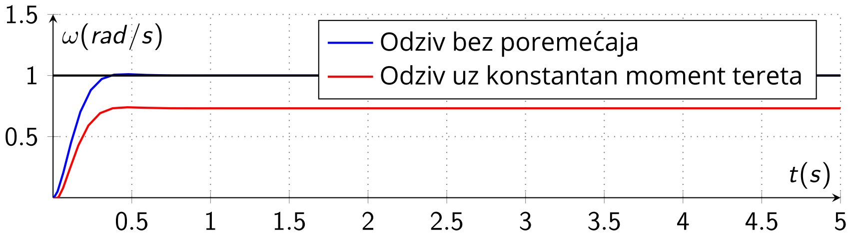
- Isto pojačanje se dobije i Ackermannovom formulom

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1} (A^2 + 20A + 149I) = \begin{bmatrix} -2.5480 & 0.2789 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

- U grani reference potrebno je koristiti sljedeće pojačanje:

$$G = -(C(A - BK)^{-1} B)^{-1} = 0.2889. \tag{63}$$

Odziv brzine vrtnje motora



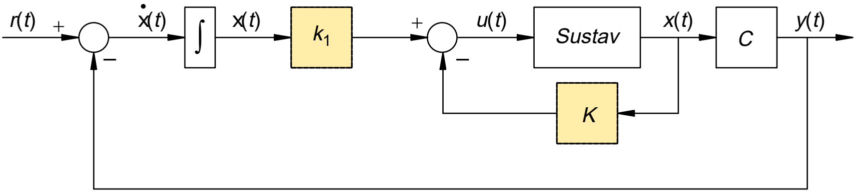
- Regulator po varijablama stanja za nominalni sustav osigurava praćenje reference
- U slučaju konstantnog poremećaja dolazi do pogreške u ustaljenom stanju budući da regulator ne sadržava integralno djelovanje.

Dodavanje integralnog djelovanja

- Kako bi se izbjegla pogreška u ustaljenom stanju dodaje se integralno djelovanje.
- Zakon upravljanja glasi:

$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t)$$
$$u(t) = -Kx(t) + k_1\xi(t)$$

Blokovska shema sustava proširenog integratorom



- Sustav proširen integratorom ima dodatno stanje.
- Potrebno je pronaći prošireni vektor pojačanja.

Jednadžbe stanja sustava proširenog dodatnim stanjem

Prošireni model po varijablama stanja daje sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

- Sinteza regulatora za prošireni sustav obavlja se na isti način kao i za originalni sustav.

Sustav proširen integralnim djelovanjem

Zatvoreni krug proširenog modela po varijablama stanja daje sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_{\mathrm{I}} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

Primjer: Sinteza regulatora stanja za regulaciju brzine vrtnje istosmjernog motora s konstantnom i nezavisnom uzbudom

- Zapis jednadžbi istosmjernog motora s konstantnom i nezavisnom uzbudom u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & -\frac{C_e}{L_a} \\ \frac{-C_m}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \tag{64}$$

Zadatak:

- Proširiti regulator stanja integralnim djelovanjem.
- Odrediti parametre regulatora po varijablama stanja tako da karakteristični polinom odgovara polinomu dobivenom koristeći simetrični optimum: $\alpha(s) = 1 + a^2 T_\Sigma s + a^3 T_\Sigma^2 s^2 + a^3 T_\Sigma^3 s^3$, uz $a = 2$ i $T_\Sigma = 0.05$ s.

Rješenje:

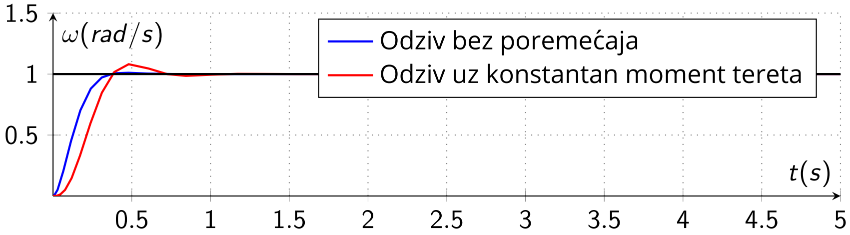
- Prošireni sustav:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & -\frac{C_e}{L_a} & 0 \\ \frac{-C_m}{J} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} m_t \tag{65}$$

- Regulator za prošireni sustav:

$$u = \begin{bmatrix} -2.5480 & 0.3778 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + 1.9390 \begin{bmatrix} \xi \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Odziv brzine vrtnje motora



- Regulator s dodanim integratorom osigurava praćenje reference i u slučaju konstantnog poremećaja.

Što ako sustav nije upravljiv?

- Ako sustav nije upravljiv, ali je ustabiljiv, tada je moguće sintetizirati regulator kojim će se osigurati asimptotska stabilnost zatvorenog sustava upravljanja.

Ustabiljivost

Linearni sustav [par (A, B)]] je ustabiljiv ako postoji matrica pojačanja K za regulator po varijablama stanja kojima sve vlastite vrijednosti $A - BK$ imaju strogo negativan realni dio.

Primjer:

- Njihanje tereta je upravljivo u smjeru u kojem se gibaju kolica krana
- Njihanje tereta nije upravljivo u okomitom smjeru u odnosu na smjer gibanja kolica!
- Regulator je potrebno sintetizirati za dio dinamike procesa koja je upravljiva.

Kako pronaći upravljivu dinamiku?

Teorem

Ako matrica upravljivosti nema puni rang

$$\text{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = q < n$$

Postoji matrica transformacije $x(t) = Tz(t)$ takva da transformirane matrice $\hat{A}$ i $\hat{B}$ stanja imaju oblik

$$\hat{A} = T^{-1}AT \qquad \hat{B} = T^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdje je par (A_{11}, B_1) upravljiv.

- Matricu transformacije T moguće je dobiti odabirom linearno nezavisnih stupaca matrice upravljivosti i nadopunjavanjem stupcima tako da matrica T ima linearno nezavisne stupce.

Primjer

Promotrimo sljedeći sustav zapisan u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t)$$

Matrica upravljivosti ima rang 2:

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ -3 & 7 & -15 \end{bmatrix}$$

Primjer

- Prva dva stupca matrice upravljivosti su linearno nezavisni stupci.
- Potrebno je dodati dodatni stupac da matrica transformacije bude punog ranga:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer

- Transformirani sustav:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \qquad \hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

- Iz transformiranog sustava može se zapisati upravljivi par (A_{11}, B_1):

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Za upravljivi par moguće je postaviti polove na željene lokacije, npr. vektor pojačanja kojim se postavljaju oba pola u -1 iznosi:

$$K_c = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{67}$$

Primjer

- Taj vektor pojačanja potrebno je proširiti s nulom

$$\tilde{K}_c = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{68}$$

- Zatim je vektor pojačanja potrebno pomnožiti s inverznom matricom transformacije kako bi se mogao koristiti s originalnim varijablama stanja:

$$\tilde{K} = \tilde{K}_c T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Zaključak

- Ako je sustav upravljiv, polove zatvorenog kruga je moguće postaviti proizvoljno u s ravnini.
- Za dobivanje vektora pojačanja metodom postavljanja polova, moguće je koristiti gotove naredbe u Matlabu (acker, place).
- Vektor pojačanja ne osigurava automatski jedinično pojačanje zatvorenog kruga.
- Potrebno je proračunati vektor pojačanja koji se nalazi u grani referentne vrijednosti kako bi se osiguralo jedinično pojačanje.
- Regulator po varijablama stanja moguće je proširiti integralnim djelovanjem kako bi se osiguralo praćenje reference u obliku skokovite pobude za slučaj konstantnog poremećaja.
- U slučaju da sustav nije upravljiv, a neupravljivi dio sustava je stabilan, moguće je sintetizirati regulator kojim će se stabilizirati originalni sustav.