



## 3. laboratorijska vježba

## Estimacija položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje

Ime i prezime:

JMBAG:

## Uvodne napomene

## • Svrha vježbe

Implementacija Kalmanova filtra za estimaciju stanja dinamičkog stohastičkog nelinearnog sustava.

## • Priprema

Ova se vježba radi u Matlabu. Primjenjuju se različiti oblici Kalmanova filtra za praćenje položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje. Uz vježbu dobivate m-funkciju modela sustava koju je potrebno upotpuniti traženim izvedbama Kalmanova filtra. Proučite poglavlja predavanja o svojstvima i izvedbama Kalmanova filtra.

## • Grafovi i jednadžbe

Odzive snimate kao slike te ih priložite u izvještaj u naznačena polja. Jednadžbe napišite u alatu po svojem izboru te ih priložite u izvještaj također kao slike u naznačena polja. (Za Adobe Reader: Tools->Comment & Markup->Attach a File as a Comment).

## • Korisne Matlab funkcije:

help, diag, trace, expm, cond, chol, std, mean

## Rad na vježbi

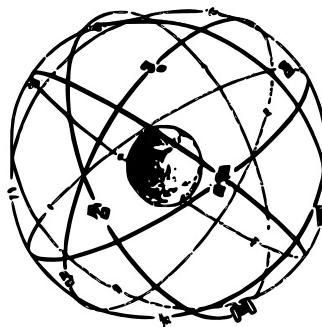


## Zadatak 1: Estimacija položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje

Planarni model satelita koji se giba u Zemljinoj orbiti dan je sljedećim sustavom nelinearnih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2} + w \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{\theta}\dot{r}}{r}, \quad (2)$$



Slika 1: Sustav satelita

gdje je  $r$  udaljenost satelita od središta Zemlje,  $\theta$  kutna pozicija satelita na njegovoj orbiti,  $G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$  univerzalna gravitacijska konstanta,  $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  masa Zemlje te  $w \sim (0, 10^{-6})$  kontinuirani Gaussov bijeli šum koji je posljedica poremećaja na satelit uslijed međudjelovanja drugih objekata u orbiti, atmosferskog otpora, propuštanja materijala u niskotlačnoj atmosferi itd. Pretpostavite da mjerenja radijusa satelita  $r$  i njegova otklona  $\theta$  dolaze svake minute. Pogreške mjerenja modeliraju se kao diskretni Gaussov bijeli šum nultog očekivanja i standardne devijacije 100 m i 0.1 rad.

- a) Odredite model sustava u prostoru stanja  $\dot{x} = f(x, u, w)$ ,  $z = h(x, v)$  uz varijable stanja  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \dot{r}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$ .

Model sustava u prostoru stanja

- b) Kolika mora biti nazivna kutna brzina satelita  $\omega_0 = \dot{\theta}$  da bi orbita satelita imala konstantan radijus uz  $w = 0$ ?

- c) Linearizirajte dobiveni model u točki  $r = r_0$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = \omega_0 T$ ,  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Napišite matrice  $A = \left. \frac{\partial f(x, u, w)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f(x, u, w)}{\partial u} \right|_{u=u_0}$ ,  $H = \left. \frac{\partial h(x, v)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ .

Linearizirane matrice sustava

- d) Diskretizirajte u nazivnoj točki dobiveni linearizirani model sustava egzaktnom metodom i aproksimacijom uz pretpostavku dovoljno malog vremena uzorkovanja uz vrijeme diskretizacije  $T = 60$  s. Rezultat aproksimativne metode prikazati u analitičkom obliku. Napišite matrice  $A$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $H$ ,  $M$ .

Diskretizirani model sustava

U nastavku vježbe odaberite jednu od metoda diskretizacije. U zaključku obrazložite odabir!

- e) Projektirajte diskretni linearizirani Kalmanov filtar (LKF)<sup>1</sup> za estimaciju danog sustava. Implementirajte filtar u dobivenoj m-funkciji `Satelit.m` te u prostor ispod izdvojite jednadžbe predikcije i korekcije estimacije tog filtra.

Jednadžbe predikcije

Jednadžbe korekcije

- f) Simulirajte vladanje LKF-a kroz 3 sata. Inicijalizirajte sustav s  $x(0) = [r_0; 0; 0; 1.1\omega_0]$ ,  $\hat{x}(0) = x(0)$  i  $P(0) = \text{diag}([0, 0, 0, 0])$ . Kako ste inicijalizirali matrice kovarijanci procesnog i mjernog šuma,  $Q$  i  $R$ , diskretnog filtra?

Q	R

- g) Iscrtaajte pogrešku estimacije radijusa satelita.

Pogreška estimacije radijusa satelita

<sup>1</sup>LKF radi na istom principu kao Kalmanov filtar, osim što koristi diskretni linearni model sustava dobiven linearizacijom nelinearnog sustava u nazivnoj točki.

Koji je razlog relativno lošeg vladanja LKF-a? Kako možete popraviti vladanje LKF-a?

- h) Simulirajte sustav s predloženim izmjenama te iscertajte pogrešku estimacije radijusa satelita i vremensku ovisnost traga a posteriori matrice kovarijanci estimacije.

Pogreška estimacije radijusa satelita (s izmjenama)
--

Trag a posteriori matrice kovarijanci estimacije
---

- i) Ponovite e) i f), ali s diskretnim proširenim Kalmanovim filtrom (EKF). Inicijalizirajte  $Q$  i  $R$  jednako kao kod LKF-a prije izmjena. Za predikciju stanja koristite diskretni nelinearni model korišten za simulaciju sustava u skripti `Satelit.m`. Napišite jednadžbe predikcije i korekcije EKF-a.

Jednadžbe predikcije
----------------------

Jednadžbe korekcije
---------------------

Iscertajte pogrešku estimacije radijusa satelita i trag a posteriori matrice kovarijanci estimacije. U zaključku usporedite i objasnite razlike u odnosu na LKF!

Pogreška estimacije radijusa satelita
--

Trag a posteriori matrice kovarijanci estimacije
---

- j) Za model mjerenja pod i) projektirajte diskretni iterativni prošireni Kalmanov filter (IEKF). Simulacijom pronađite dovoljan broj iteracija filtra  $N_{\text{iter}}$ , te usporedite na istoj slici pogrešku estimacije radijusa IEKF-a i EKF-a ( $N_{\text{iter}} = 0$ ).

$N_{\text{iter}} =$

Usporedba pogreške estimacije radijusa satelita
--

---

**Zaključak**

---

Vaš zaključak nakon vježbe koji daje sažet prikaz i komentar dobivenih rezultata.