

Молдавский Государственный Университет
Факультет Математики и Информатики
Департамент Информатики

Лабораторная работа №3
по курсу “Calcul Numeric si Metode de
Optimizare”

Тема: “Решение интерполяционных многочленов методом
Лагранжа-Ньютона”

Выполнил: Slavov Constantin,
студент группы I2302
Проверил: I. Verlan,
doctor, conferențiar universitar

Кишинев, 2025

Условие задачи:

- Даны начальные значения:

x	0.345	0.761	1.257	2.109	2.943
y	-1.221	-0.525	2.314	5.106	9.818

Шаблон записи многочлена Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 L(x) = & f_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} + \\
 & + f_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \\
 & + f_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \\
 & + f_3 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + \\
 & + f_4 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}
 \end{aligned}$$

Пошаговая формула для L(x):

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \\
 & -1.221 \cdot \frac{(x - 0.761)(x - 1.257)(x - 2.109)(x - 2.943)}{(0.345 - 0.761)(0.345 - 1.257)(0.345 - 2.109)(0.345 - 2.943)} + \\
 & -0.525 \cdot \frac{(x - 0.345)(x - 1.257)(x - 2.109)(x - 2.943)}{(0.761 - 0.345)(0.761 - 1.257)(0.761 - 2.109)(0.761 - 2.943)} + \\
 & +2.314 \cdot \frac{(x - 0.345)(x - 0.761)(x - 2.109)(x - 2.943)}{(1.257 - 0.345)(1.257 - 0.761)(1.257 - 2.109)(1.257 - 2.943)} + \\
 & +5.106 \cdot \frac{(x - 0.345)(x - 0.761)(x - 1.257)(x - 2.943)}{(2.109 - 0.345)(2.109 - 0.761)(2.109 - 1.257)(2.109 - 2.943)} + \\
 & +9.818 \cdot \frac{(x - 0.345)(x - 0.761)(x - 1.257)(x - 2.109)}{(2.943 - 0.345)(2.943 - 0.761)(2.943 - 1.257)(2.943 - 2.109)}
 \end{aligned}$$

Итоговый многочлен L(x):

$$L(x) = 1.884x^4 - 16.480x^3 + 25.656x^2 - 12.194x + 1.934$$

Разделенные разности с формулами:

- Столбец PP₀ (исходные значения):

$$pp_0^0 = -1.221, \quad pp_1^0 = -0.525, \quad pp_2^0 = 2.314, \quad pp_3^0 = 5.106, \quad pp_4^0 = 9.818$$

- Столбец PP₁:

$$(-0.525 - (-1.221))/(0.761 - 0.345) = 1.6731$$

$$(2.314 - (-0.525))/(1.257 - 0.761) = 5.7238$$

$$(5.106 - 2.314)/(2.109 - 1.257) = 3.2770$$

$$(9.818 - 5.106)/(2.943 - 2.109) = 5.6499$$

- Столбец PP₂:

$$(5.7238 - 1.6731)/(1.257 - 0.345) = 4.4416$$

$$(3.2770 - 5.7238)/(2.109 - 0.761) = -1.8151$$

$$(5.6499 - 3.2770)/(2.943 - 1.257) = 1.4074$$

- Столбец PP₃:

$$(-1.8151 - 4.4416)/(2.109 - 0.345) = -3.5469$$

$$(1.4074 - (-1.8151))/(2.943 - 0.761) = 1.4769$$

- Столбец PP₄:

$$(1.4769 - (-3.5469))/(2.943 - 0.345) = 1.9337$$

Таблица разделенных разностей:

i	X _i	PP ₀	PP ₁	PP ₂	PP ₃	PP ₄
0	0.345	-1.221	1.6731	4.4416	-3.5469	1.9337
1	0.761	-0.525	5.7238	-1.8151	1.4769	
2	1.257	2.314	3.2770	1.4074		
3	2.109	5.106	5.6499			
4	2.943	9.818				

Многочлен Ньютона $N(x)$:

$$\begin{aligned} N(x) = & -1.221 + 1.6731(x - 0.345) + 4.4416(x - 0.345)(x - 0.761) + \\ & -3.5469(x - 0.345)(x - 0.761)(x - 1.257) + \\ & +1.9337(x - 0.345)(x - 0.761)(x - 1.257)(x - 2.109) \end{aligned}$$

Реализация решения уравнения на примере языка программирования Python:

```
import numpy as np

x_vals = [0.345, 0.761, 1.257, 2.109, 2.943]
y_vals = [-1.221, -0.525, 2.314, 5.106, 9.818]

def lagrange_polynomial(x_vals, y_vals, x):
    total = 0
    n = len(x_vals)
    for i in range(n):
        xi, yi = x_vals[i], y_vals[i]
        term = yi
        for j in range(n):
            if i != j:
                term *= (x - x_vals[j]) / (xi - x_vals[j])
        total += term
    return total

def divided_differences(x_vals, y_vals):
    n = len(x_vals)
    table = [y_vals.copy()]
    for level in range(1, n):
        prev = table[-1]
        curr = []
        for i in range(n - level):
            diff = (prev[i+1] - prev[i]) / (x_vals[i+level] - x_vals[i])
            curr.append(diff)
        table.append(curr)
    return table

def print_dd_table(x_vals, dd_table):
    print("Таблица разделённых разностей:")
    for i in range(len(x_vals)):
        row = [f"x={x_vals[i]:.3f}"]
        for level in range(len(dd_table)):
            if i < len(dd_table[level]):
```

```

        row.append(f"{dd_table[level][i]:.5f}")
    else:
        row.append("")
    print(" | ".join(row))

# Вывод:
print("Значение многочлена Лагранжа в x = 2.0:")
print(lagrange_polynomial(x_vals, y_vals, 2.0))

print()
dd_table = divided_differences(x_vals, y_vals)
print_dd_table(x_vals, dd_table)

```

Вывод результата на экран. Для примера, возьмем значение многочлена Лагранжа в $x = 2.0$:

```

Значение многочлена Лагранжа в x = 2.0:
4.930589073696137

Таблица разделённых разностей:
x=0.345 | -1.22100 | 1.67308 | 4.44157 | -3.54688 | 1.93370
x=0.761 | -0.52500 | 5.72379 | -1.81513 | 1.47687 |
x=1.257 | 2.31400 | 3.27700 | 1.40740 |  |
x=2.109 | 5.10600 | 5.64988 |  |  |
x=2.943 | 9.81800 |  |  |  |

```

Видим, что все вычисления верны и совпадают с теми, которые были записаны выше.