

Név:, NEPTUN-kód

Csoport, gyak.vez.:

Pontszám:

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi a 2. zh anyagából
2019. január 3.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

A 6. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. (7 pont) Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

2. a) (7 pont) Tekintsük a $z_1 = 20 - 5i$, $z_2 = 7 + 6i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2} \right)^4$$

- b) (5 pont) Oldjuk meg az $5x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

3. (7 pont) Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Számítsuk ki: $(AB^T)^{-1} \cdot (A - B)$.

4. a) (5 pont) Altér-e \mathbb{R}^6 -ban az alábbi részhalmaz?

$$S := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \geq 0\}$$

- b) (4 pont) Adjunk meg véges generátorrendszert \mathbb{R}^4 alábbi altérében:

$$W := \{(x - y, x + y + 2z, y + z, x) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ és } x + y - z = 0\}$$

5. (8 pont) Döntsük el, hogy a következő vektorrendszer bázist alkot-e \mathbb{R}^4 -ben:

$$x_1 = (1, 1, 1, 1), \quad x_2 = (1, -1, 1, -1), \quad x_3 = (2, 2, 1, 4), \quad x_4 = (2, 1, 1, 3)$$

6. (7 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):

A generált altérrel (W^*) szóló tétel. (W^* definícióját is kérjük megadni.)