ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3b., 3c., 4c., 9. feladatainak megoldása
(írta: Csörgő István)

$\boxed{\text{2.2.1. Órai feladatok / 1a.}}$ $P(x) = x^2 - 6x + 3$

A középiskolában megismert módszer szerint:

$$P(x) = \underline{x^2 - 6x} + 3 = \underline{(x-3)^2 - 9} + 3 = (x-3)^2 - 6$$

Ennek alapján a $P(x) = 0$ egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ (x-3)^2 - 6 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 6 \end{aligned}$$

$$x - 3 = \sqrt{6}\ ; \quad \underline{\underline{x_1 = 3 + \sqrt{6}}}$$

$$x - 3 = -\sqrt{6}\ ; \quad \underline{\underline{x_2 = 3 - \sqrt{6}}}$$

$\boxed{\text{2.2.1. Órai feladatok / 1b.}}$ $P(x) = 2x^2 + 7x - 1$

Az előző feladathoz képest annyi az eltérés, hogy x^2 együtthatója most nem 1. Ezért az első két tagból kiemeljük x^2 együtthatóját.

$$P(x) = 2x^2 + 7x - 1 = 2 \cdot \left[x^2 + \frac{7}{2}x\right] - 1 = 2 \cdot \left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] - 1 =$$
$$= 2 \cdot \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} - \frac{8}{8} = 2 \cdot \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{57}{8}$$

Ennek alapján a $P(x) = 0$ egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ 2 \cdot \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{57}{8} &= 0 \\ \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 &= \frac{57}{16} \end{aligned}$$

$$x + \tfrac{7}{4} = \tfrac{\sqrt{57}}{4}\ ; \quad \underline{\underline{x_1 = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{\sqrt{57}}{4}}}$$

$$x + \tfrac{7}{4} = -\tfrac{\sqrt{57}}{4}\ ; \quad \underline{\underline{x_2 = -\tfrac{7}{4} - \tfrac{\sqrt{57}}{4}}}$$

2.2.1. Órai feladatok / 2.

Emlékeztető, *Viète*-képletek: Ha az ax^2+bx+c polinom gyökei x_1 és x_2, akkor

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ; \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Először oldjuk meg az (a) – (e) feladatokat a $P(x)=x^2-6x+3$ polinom esetén:

(a) $x_1+x_2=-\frac{-6}{1}=\underline{\underline{6}}$

(b) $x_1\cdot x_2=\frac{3}{1}=\underline{\underline{3}}$

(c) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6^2-2\cdot 3=36-6=\underline{\underline{30}}$

(d) $|\,x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{30-2\cdot 3}=\sqrt{30-6}=\underline{\underline{\sqrt{24}}}$

(e) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{6}{3}=\underline{\underline{2}}$

Ezek után oldjuk meg az (a) – (e) feladatokat a $P(x)=2x^2+7x-1$ polinom esetén:

(a) $x_1+x_2=\underline{\underline{-\frac{7}{2}}}$

(b) $x_1\cdot x_2=\frac{-1}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

(c) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{7}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{49}{4}+\frac{4}{4}=\underline{\underline{\frac{53}{4}}}$

(d) $|\,x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{\frac{53}{4}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{57}{4}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{57}}{2}}}$

(e) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}}=\underline{\underline{7}}$

2.2.1. Órai feladatok / 3b.

Az egyenlőtlenséget a 0-ra redukálás módszerével fogjuk megoldani. Ez a legelterjedtebb megoldási módszer törtes egyenlőtlenségekre. Az egyenlőtlenséget 0-ra redukáljuk, így a feladat ekvivalens lesz egy tört előjelének vizsgálatával, amit a számláló és a nevező előjelvizsgálatával végzünk el.

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} &< 2 \\
\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} - \frac{2(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3} &< 0 \\
\frac{3x^2+7x-4-2x^2-4x+6}{x^2+2x-3} &< 0 \\
\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3} &< 0
\end{aligned}$$

Egy tört pontosan akkor negatív, ha
- vagy számlálója negatív és nevezője pozitív $\left(\frac{-}{+} \text{ eset}\right)$
- vagy pedig számlálója pozitív és nevezője negatív $\left(\frac{+}{-} \text{ eset}\right)$

Ennek megfelelően:

1. eset, $\frac{-}{+}$:

$$\begin{aligned}
x^2+3x+2 &< 0 \qquad (1)\\
\text{és} \quad x^2+2x-3 &> 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

(1) bal oldalának gyökei:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; x_1 = -1 \\ \searrow \; x_2 = -2 \end{array}$$

Ezért (1) megoldása: $-2 < x < -1$.
Megoldáshalmaza: $\mathcal{M}_1 = (-2, -1)$.

Hasonlóan, (2) bal oldalának gyökei:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; x_1 = 1 \\ \searrow \; x_2 = -3 \end{array}$$

Ezért (2) megoldása: $x < -3$ vagy $x > 1$.
Megoldáshalmaza: $\mathcal{M}_2 = (-\infty,\ -3) \cup (1,\ +\infty)$.

Az (1), (2) -ből álló egyenlőtlenségrendszer, azaz az első eset megoldásai azok az $x \in \mathbb{R}$ számok, melyekre

$$(-2 < x < -1) \quad \text{és} \quad (x < -3 \text{ vagy } x > 1)$$

Ilyen x nem létezik, tehát az 1. eset nem ad megoldást. Halmazokkal leírva: $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$.

<u>2. eset, $\frac{+}{-}$:</u>

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \tag{3}$$
$$\text{és} \quad x^2 + 2x - 3 < 0 \tag{4}$$

A megfelelő egyenleteket már megoldottuk. Ennek alapján:
(3) megoldása: $x < -2$ vagy $x > -1$.
Megoldáshalmaza: $\mathcal{M}_3 = (-\infty,\ -2) \cup (-1,\ +\infty)$.

(4) megoldása:$-3 < x < 1$.
Megoldáshalmaza: $\mathcal{M}_4 = (-3,\ 1)$.

Így a (3), (4) -ből álló egyenlőtlenségrendszer, azaz a második eset megoldásai azok az $x \in \mathbb{R}$ számok, melyekre

$$(x < -2 \text{ vagy } x > -1) \quad \text{és} \quad (-3 < x < 1)$$

Másképp felírva:

$$-3 < x < -2 \quad \text{vagy} \quad -1 < x < 1)$$

Halmazokkal leírva: $\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4 = (-3,\ -2) \cup (-1,\ 1)$.

A feladat megoldását úgy kapjuk, hogy egyesítjük az 1. és a 2. esetben kapott megoldásokat:

$$\underline{\underline{-3 < x < -2 \quad \text{vagy} \quad -1 < x < 1}}$$

Halmazokkal leírva:

$$(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4) = \emptyset \cup ((-3,\ -2) \cup (-1,\ 1)) = \underline{\underline{(-3,\ -2) \cup (-1,\ 1)}}$$

$\boxed{\text{2.2.1. Órai feladatok / 3c.}}$

Itt is a 0-ra redukálás módszerét fogjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} &> \frac{3x+4}{1-2x} \\
\frac{x-1}{x+1} - \frac{3x+4}{1-2x} &> 0 \\
\frac{(x-1)(1-2x)-(x+1)(3x+4)}{(x+1)(1-2x)} &> 0 \\
\frac{x-1-2x^2+2x-3x^2-3x-4x-4}{(x+1)(1-2x)} &> 0 \\
\frac{-5x^2-4x-5}{(x+1)(1-2x)} &> 0
\end{aligned}$$

A számlálóban lévő másodfokú polinom diszkriminánsa: $(-4)^2-4\cdot(-5)\cdot(-5) = 16-100 < 0$, ezért a számlálónak nincs valós gyöke. Mivel e polinomban x^2 együtthatója negatív, ezért a polinom értéke bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén negatív. Ezért a tört értéke pontosan akkor pozitív, ha a nevező negatív:

$$(x+1)(1-2x) < 0$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $\underline{\underline{x < -1 \quad \text{vagy} \quad x > \frac{1}{2}}}$

Megoldáshalmaz: $\underline{\underline{(-\infty,\, -1) \cup (\frac{1}{2},\, +\infty)}}$

$\boxed{\text{2.2.1. Órai feladatok / 4c.}}$

A vizsgált egyenlőtlenség:

$$\underbrace{(p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 1}_{f(x)} > 0$$

Az f függvény $p^2 - 1 \neq 0$ esetén másodfokú (képe egy függőleges tengelyű parabola), egyébként legfeljebb elsőfokú (képe egy egyenes).

<u>1. eset, $p = 1$:</u>

$$\begin{aligned}
(1^2-1)x^2 + 2(1-1)x + 1 &> 0 \\
0x^2 + 0x + 1 &> 0
\end{aligned}$$

Ez minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz, tehát $p = 1$ egy jó paraméterérték.

2. eset, $p = -1$:

$$\begin{aligned} ((-1)^2 - 1)x^2 + 2(-1-1)x + 1 &> 0 \\ 0x^2 - 4x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Ez nem igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát $p = -1$ nem jó paraméterérték.

A $p^2 - 1 \neq 0$ másodfokú esetet két részre bontjuk aszerint, hogy x^2 együtthatója pozitív (felfelé néző parabola), vagy pedig negatív (lefelé néző parabola). Az $f(x) > 0$ feltétel egyenértékű azzal, hogy a parabola teljes egészében az x-tengely feletti félsíkban (felső félsík) van.

3. eset, $p^2 - 1 > 0$, azaz $p < -1$ vagy $p > 1$:

Ekkor a parabola felfelé néz, és pontosan akkor van a felső félsíkban, ha f-nek nincs valós gyöke, azaz, ha diszkriminánsa negatív.

$D = (2(p-1))^2 - 4 \cdot (p^2-1) \cdot 1 = 4(p^2 - 2p + 1) - 4(p^2 - 1) = 4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 = -8p + 8$

$$\begin{aligned} -8p + 8 &< 0 \\ p &> 1 \end{aligned}$$

Ez megfelel az esetet kijelölő $p < -1$ vagy $p > 1$ feltételnek is, tehát minden $p > 1$ érték jó.

4. eset, $p^2 - 1 < 0$, azaz $-1 < p < 1$:

Ekkor a parabola lefelé néz, ezért nem lehet teljesen a felső félsíkban, tehát a $-1 < p < 1$ paraméterértékek nem jók.

Összefoglalva (vagyis egyesítve az egyes esetekben kapott jó paraméterértékeket), a feladat megoldása: $p \geq 1$.

2.2.1. Órai feladatok / 9.

Azt kell igazolni, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\frac{7 - \sqrt{52}}{3} \leq \frac{x+3}{x^2 - x + 1} \leq \frac{7 + \sqrt{52}}{3}$$

A bal oldali egyenlőtlenséget fogjuk igazolni, a jobb oldali igazolása hasonló. Mivel az $x^2 - x + 1$ polinom minden helyettesítési értéke pozitív, ezért beszorozhatjuk vele az egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \frac{7 - \sqrt{52}}{3} &\leq \frac{x+3}{x^2 - x + 1} \\ (7 - \sqrt{52})(x^2 - x + 1) &\leq 3(x+3) \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (7 - \sqrt{52})x + (7 - \sqrt{52}) - 3x - 9 &\leq 0 \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (10 - \sqrt{52})x + (-2 - \sqrt{52}) &\leq 0 \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (10 - \sqrt{52})x + (-2 - \sqrt{52}) &\leq 0 \end{aligned}$$

A bal oldalon x^2 együtthatója negatív, a parabola lefelé néz. Azt kell igazolni, hogy a parabola teljes egészében az zárt alsó félsíkban van, ami azzal egyenértékű, hogy a bal oldal diszkriminánsa ≤ 0.

$$\begin{aligned}
&D = \left(-(10-\sqrt{52})\right)^2 - 4(7-\sqrt{52})(-2-\sqrt{52}) = \\
&= (10-\sqrt{52})^2 - 4(-14+2\sqrt{52}-7\sqrt{52}+52) = 100-20\sqrt{52}+52+20\sqrt{52}-152 = \\
&= 152-152 = 0 \leq 0
\end{aligned}$$

Ezzel a bal oldali egyenlőtlenséget igazoltuk.