

Név:, NEPTUN-kód, Csoport, gyak.vez.:

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 2. zárthelyi, 2021. november 26.*

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. a) (7 pont) Tekintsük az alábbi komplex számokat:

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 3i, \quad z_3 = 5 + \sqrt{7} \cdot i$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét, és adjuk meg az eredményt algebrai alakban:

$$|z_3|^2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{10}$$

- b) (4 pont) Oldjuk meg a $z^4 - 4z^3 + 5z^2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. Adott az az alábbi mátrix :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) (2 pont) Számítsuk ki az A mátrix determinánsát.
- (b) (1 pont) Reguláris vagy szinguláris az A mátrix?
- (c) (6 pont) Számítsuk ki az A mátrix inverzét az előjelezett aldeterminánsok (kofaktorok) használatával (tehát a Gauss-Jordan-módszerrel való számolás itt nem fogadható el).

3. (4 pont) Altér-e az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortérben az alábbi részhalmaz?

$$M := \left\{ A := \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ és } \det(A) = 0 \right\}$$

4. Tekintsük az \mathbb{R}^4 vektortér alábbi altérét:

$$W = \{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z + u = 0 \text{ és } 2x + y + 2z - u = 0 \}$$

- (a) (6 pont) Adjunk meg egy véges generátorrendszert W -ben.
- (b) (2 pont) Hány dimenziós a W altér?

5. Adott az alábbi $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrix, és a $b \in \mathbb{R}^4$ vektor:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- a) (6 pont) Oldjuk meg az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval. Írjuk fel a megoldást skalár alakban is és vektor alakban is.
- b) (3 pont) Írjuk fel az $A \cdot x = 0$ homogén egyenletrendszer összes megoldását vektor alakban, és adjuk meg \mathcal{M}_h egy bázisát.
- c) (2 pont) Mennyi az A mátrix rangja, és mennyi a $\text{Ker}(A)$ altér dimenziója?