Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2021. december 13.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(14 pont)* Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, adjuk meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. *(13 pont)* Tekintsük az alábbi W alteret és x vektort $\mathbb{R}^4$-ben:

$$W := \operatorname{Span}\,(\ (1,1,-1,0);\ (1,1,1,-1);\ (2,1,2,1)\ )\,,\quad x := (-1,1,-2,1)$$

a) Döntsük el, hogy a W altér fent megadott generátorrendszere ortogonális rendszer-e.

b) Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.

c) Bontsuk fel az x vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. *(8 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú f függvény:

$$f(x) := x^2 - 12x + 11 \qquad (x \in (-\infty; 5])$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.
(FIGYELEM: itt a "rajzos" megoldás nem fogadható el.)

4. *(8 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - x^2 - 5x + 1}{2x^3 + x + 4} = \frac{3}{2}$$