Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2018. december 14.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.
Az 5. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. *(11 pont)* *a)* Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a behelyettesítő módszerrel, írjuk fel a megoldást skalár alakban. *b)* Írjuk fel a megoldást vektor alakban is. *c)* Írjuk fel az egyenletrendszer együtthatómátrixát. *d)* Mennyi az együtthatómátrix rangja? *e)* Adjuk meg az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmazának ($\mathcal{M}_h$) egy bázisát. *f)* Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixokat diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

a) *(6 pont)* $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ b) *(10 pont)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

3. *(8 pont)* Igazoljuk, hogy az alábbi u_1, u_2, u_3 vektorrendszer ortogonális rendszer $\mathbb{R}^4$-ben, majd bontsuk fel az $x = (1, 1, 2, 1)$ vektort az u_1, u_2, u_3 vektorok által generált altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre:

$$u_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1), \quad u_2 = (1,\ -1,\ 1,\ -1), \quad u_3 = (-1,\ 1,\ 1,\ -1)$$

4. *(7 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5 - x^4 - 3}{x^4 + 3x^2 + 1} = +\infty$$

5. *(8 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):*

A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tétel