Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi $\boxed{\textit{a 3. zh anyagából}}$
2022. január 4.

$\boxed{\textit{Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.}}$

1. *(14 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, adjuk meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. Tekintsük az alábbi W alteret és x vektort $\mathbb{R}^4$-ben:

$$W = \left\{ (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a - b + c + d = 0 \right\}, \qquad x = (4,\, 0,\, 4,\, -4)$$

a) *(8 pont)* Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.

b) *(5 pont)* Bontsuk fel az x vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. *(8 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú f függvény:

$$f(x) = x^2 - 10x + 9 \qquad (x \in [\,6\,,\, +\infty)\,)$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

(FIGYELEM: itt a "rajzos" megoldás nem fogadható el.)

4. *(8 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{2x^4 - 2x^3 - 3x - 1} = 1$$