ELTE-IK Matematikai alapok 2021. őszi félév
1. Algebrai és gyökös kifejezések I.
az "Órai feladatok" szakasz 1., 3b., 4b., 6., 9., 12c., 13., 19b., 19c., 20a. feladatainak megoldása, valamint a "Horner-plusz" feladat és megoldása
(írta: Csörgő István)

1.2.1. Órai feladatok / 1.

Mutassuk meg, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^2 + ab + b^2 = 3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 .$$

Számítsuk ki ennek alapján $a^3 - b^3$ pontos értékét, ha $a - b = 2$ és $a + b = \sqrt{5}$.

Megoldás:

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 3 \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{a^2-2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{3a^2+6ab+3b^2+a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{4a^2+4ab+4b^2}{4} = a^2+ab+b^2 = \text{bal oldal}$$

Ennek alapján:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) = (a-b)\cdot\left[3\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 2\cdot\left[3\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = 2\cdot\left(3\cdot\frac{5}{4}+\frac{4}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{19}{2}}}$$

1.2.1. Órai feladatok / 3b.

Bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2+b^2} - \frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4} = 0$$

Megoldás:

A bal oldal nevezőinek legkisebb közös többszöröse $a^4 - b^4$, mivel:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a - b) \cdot (a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \\ a^4 - b^4 &= (a + b) \cdot (a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3) \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a bal oldalt közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{a(a-b) + b(a+b) + 1(a^2+b^2) - 1(a^2-b^2) - (a^2+3b^2)}{a^4 - b^4} =$$

$$= \frac{a^2 - ab + ab + b^2 + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - a^2 - 3b^2}{a^4 - b^4}$$

A számlálóban minden tag kiesik, így a tört értéke valóban 0.

1.2.1. Órai feladatok / 4b.

Igazoljuk, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a + b + c = 0$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Megoldás:

Mivel $a + b + c = 0$, ezért $c = -(a + b)$. Ezt behelyettesítjük a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + (-(a+b))^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 =$$

$$= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3) = a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2 b - 3ab^2 - b^3) =$$

$$= -3a^2 b - 3ab^2 = -3ab(a+b) = 3ab \cdot (-(a+b)) = 3abc = \text{jobb oldal}$$

1.2.1. Órai feladatok / 6.

Egyszerűsítsük a következő kifejezést az x, y változók olyan valós értékei mellett, melyekre $x \neq y$:

$$E(x, y) = \frac{x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2 y}{x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2 y}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a fenti egyszerűsített kifejezésben az x, y változóknak az alábbi értékeket adva az új kifejezés nem függ a z paramétertől:

$$x = \frac{k(1 - z^2)}{1 + z^2}; \quad y = \frac{2kz}{1 + z^2} \quad (k, z \in \mathbb{R}).$$

Megoldás:

A számlálót szorzattá alakítjuk:

$$x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y = (x^3 - y^3) - (x - y) - (x^2y - xy^2) =$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - (x-y) - xy(x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2-1-xy) =$$

$$= (x-y)(x^2+y^2-1)$$

Hasonló módon a nevezőt is szorzattá alakítjuk:

$$x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y = (x^3 - y^3) + (x - y) - (x^2y - xy^2) =$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y) - xy(x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2+1-xy) =$$

$$= (x-y)(x^2+y^2+1)$$

Ezzel:

$$E(x,y) = \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{(x-y)(x^2+y^2+1)} = \underline{\underline{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}}$$

A feladat második részéhez először számítsuk ki az $x^2 + y^2$ összeget:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k(1-z^2)}{1+z^2}\right)^2 + \left(\frac{2kz}{1+z^2}\right)^2 = \frac{k^2(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2} + \frac{4k^2z^2}{(1+z^2)^2} =$$

$$= k^2 \cdot \frac{1-2z^2+z^4+4z^2}{(1+z^2)^2} = k^2 \cdot \frac{1+2z^2+z^4}{1+2z^2+z^4} = k^2$$

Tehát:

$$E(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \frac{k^2-1}{k^2+1}\,,$$

ami valóban független z-től.

$\boxed{\text{1.2.1. Órai feladatok / 9.}}$

Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x) := \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}); \quad g(x) := \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ valós szám esetén:

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) + 1 = 0.$$

<u>Megoldás:</u>

$$f\left(g(x)\right) = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1 - \dfrac{1+x}{1-x}}{1 + \dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{\dfrac{1-x-1-x}{1-x}}{\dfrac{1-x+1+x}{1-x}} = \frac{-2x}{2} = -x$$

továbbá:

$$g\left(f(x)\right) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1 + \dfrac{1-x}{1+x}}{1 - \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\dfrac{1+x+1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x-1+x}{1+x}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

Ezeket az eredményeket beírjuk a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába:

$$f\left(g(x)\right) \cdot g\left(f(x)\right) + 1 = -x \cdot \frac{1}{x} + 1 = -1 + 1 = 0 = \text{jobb oldal}$$

$\boxed{\text{1.2.1. Órai feladatok / 12c.}}$

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) \qquad (0 < x \neq y)$$

Megoldás:

A szorzat első tényezője:

$$A = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$$

$$= \frac{x + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} - y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

A szorzat második tényezője:

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} = \frac{x - \sqrt{xy}) + \sqrt{xy} + y + 2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{x - y} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$$

Szorzatuk:

$$AB = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} = \underline{\underline{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}$$

$\boxed{\text{1.2.1. Órai feladatok / 13.}}$

Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, a változók megengedett értékei mellett ($0 < x, y;\ \ x \neq y$)*:*

$$E(x, y) := \left(\frac{x^{-1/6} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{y}}}{\dfrac{1}{x^{1/3}} - y^{-1/3}} - 5 \cdot \frac{x^{-1/6} - y^{-1/6}}{x^{-1/3} - \sqrt[3]{y^{-1}}} \right)^{-1} \cdot \frac{6\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Megoldás:

Célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket:

$$a = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}\ , \qquad b = y^{1/6} = \sqrt[6]{y}$$

Ezzel:

$$a^2 = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}\ , \qquad b^2 = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}$$

Az első tényezőben a hatvány alapja:

$$A = \frac{x^{-1/6} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{y}}}{\dfrac{1}{x^{1/3}} - y^{-1/3}} - 5 \cdot \frac{x^{-1/6} - y^{-1/6}}{x^{-1/3} - \sqrt[3]{y^{-1}}} = \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{5}{b}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} - 5 \cdot \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{5}{b} - \dfrac{5}{a} + \dfrac{5}{b}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} = \frac{-\dfrac{4}{a}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} = \frac{-\dfrac{4}{a}}{\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}} = -\frac{4}{a} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} = \frac{4ab^2}{a^2 - b^2}$$

Ezzel:

$$E(x, y) = A^{-1} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{a^2 - b^2}{4ab^2} \cdot \frac{6a}{a^2 - b^2} = \frac{3}{2b^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{y}}}}$$

1.2.1. Órai feladatok / 19b.

Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből:

$x_0 = 3, \quad P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18$

Megoldás:

1. Megoldás (Függelék 27.1):

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 18 \\ P(3) &= 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 18 = 54 - 36 - 18 = 0 \end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$P(x) = P(x) - 0 = P(x) - P(3) = 2(x^3 - 3^3) - 4(x^2 - 3^2) = 2(x-3)(x^2 + 3x + 9) - 4(x-3)(x+3) =$$

$$= (x-3)(2x^2 + 6x + 18 - 4x - 12) = \underline{\underline{(x-3)(2x^2 + 2x + 6)}}$$

2. Megoldás (Függelék 27.2, Horner-táblázat):

A táblázat:

	2	−4	0	−18
$x_0 = 3$	2	2	6	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 3 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x-3)(2x^2 + 2x + 6)$$

1.2.1. Órai feladatok / 19c.

Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből:

$x_0 = -1, \quad P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

Megoldás:

1. Megoldás (Függelék 27.1):

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \\ P(-1) &= 2\cdot(-1)^4 - 5\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 2 = 2 + 5 - 6 - 3 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$P(x) = P(x) - 0 = P(x) - P(-1) = 2(x^4 - 1) - 5(x^3 + 1) - 6(x^2 - 1) + 3(x + 1) =$$

$$= 2(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) - 5(x+1)(x^2 - x + 1) - 6(x+1)(x-1) + 3(x+1) =$$

$$= (x+1)(2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 - 5x^2 + 5x - 5 - 6x + 6 + 3) = \underline{\underline{(x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)}}$$

2. Megoldás (Függelék 27.2, Horner-táblázat):

A táblázat:

	2	−5	−6	3	2
$x_0 = -1$	2	−7	1	2	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a −1 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 = (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$$

1.2.1. Órai feladatok / 20a.

Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet $(2x^2 + x + k)$−ből $(x+3)$−at $\quad (x \in \mathbb{R})$ kiemelni? Emeljük is ki!

Megoldás:

A "Kiegészítés az elmélethez" szakaszban említett állítás szerint az $x+3$ gyöktényező akkor és csak akkor emelhető ki a P polinomból, ha a -3 gyöke P-nek, azaz, ha $P(-3) = 0$.

Jelen esetben $P(x) = 2x^2 + x + k$, tehát a feltétel:

$$\begin{aligned} P(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + (-3) + k &= 0 \\ 15 + k &= 0 \\ k &= -15 \end{aligned}$$

A gyöktényezős alak (többféle módszerrel is megkapható):

$$P(x) = 2x^2 + x - 15 = (x+3) \cdot (x-5)$$

"Horner-plusz" feladat

Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből ahányszor csak lehet. Hányszoros gyöke az x_0 szám a P polinomnak?

$x_0 = 3, \quad P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$

Megoldás:

A "Kiegészítés az elmélethez" szakaszban leírtak szerint a P polinomból ki kell emelni az $x-3$ gyöktényezőt. A hányadospolinomból ismét, stb., ameddig csak lehet. A kiemeléseket a Horner-táblázattal végezzük el (Függelék 27.2 szakasz).

Az első kiemelés táblázata:

	1	-8	16	18	-81	54
$\alpha = 3$	1	-5	1	21	-18	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 3 valóban gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54 = (x-3) \cdot (x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18)\,.$$

Most vizsgáljuk meg ugyanezzel az eljárással, hogy a 3 gyöke-e a hányadosként kapott

$$x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$$

polinomnak (második táblázat):

	1	-5	1	21	-18
$\alpha = 3$	1	-2	-5	6	0

Azt kaptuk, hogy igen, gyöke. Ezzel:

$$x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = (x-3) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,,$$

azaz

$$P(x) = (x-3)^2 \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,.,$$

Ismét vizsgáljuk a hányadospolinomot, gyöke-e vajon a 3 (harmadik táblázat):

	1	-2	-5	6
$\alpha = 3$	1	1	-2	0

Tehát igen, gyöke. Így az előző gondolatmenet alapján:

$$P(x) = (x-3)^3 \cdot (x^2 + x - 2)\,.$$

Ismét vizsgáljuk a hányadospolinomot, gyöke-e a 3 (negyedik táblázat, bár az alacsony fokszám miatt ez Horner-táblázat nélkül is könnyen eldönthető):

	1	1	-2
$\alpha = 3$	1	4	10

Azt látjuk, hogy nem gyöke (mivel a második sor utolsó eleme nem 0). Így az $(x-3)$ gyöktényező maximálisan 3-szor emelhető ki P-ből, vagyis a 3 a P-nek 3-szoros gyöke (más szóval a 3 mint gyök multiplicitása a P polinomban 3):

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54 = \underline{\underline{(x-3)^3 \cdot (x^2 + x - 2)}}\,.$$

Amint látjuk, a második, a harmadik és a negyedik táblázat első sora lényegében a megelőző táblázat második sorával azonos, ezért az eljárás röviden és tömören felírható az alábbi, ún. összevont Horner-táblázattal:

	1	-8	16	18	-81	54
$\alpha = 3$	1	-5	1	21	-18	0
$\alpha = 3$	1	-2	-5	6	0	
$\alpha = 3$	1	1	-2	0		
$\alpha = 3$	1	4	10			

Házi feladat a Horner-plusz témában:

Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt P-ből ahányszor csak lehet. Hányszoros gyöke az x_0 szám a P polinomnak?

$x_0 = -2, \quad P(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$