Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok (keresztfélév) 3. zárthelyi
2019. május 16.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.
Az 5. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. *(11 pont)* *a)* Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a behelyettesítő módszerrel, írjuk fel a megoldást skalár alakban. *b)* Írjuk fel a megoldást vektor alakban is. *c)* Írjuk fel az egyenletrendszer együtthatómátrixát. *d)* Mennyi az együtthatómátrix rangja? *e)* Adjuk meg az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmazának ($\mathcal{M}_h$) egy bázisát. *f)* Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixokat diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

   a) *(7 pont)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ b) *(9 pont)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

3. Adott az
$$u_1 = (2,\ 1,\ 0,\ -1), \quad u_2 = (-1,\ 1,\ 1,\ -1), \quad u_3 = (1,\ 0,\ 3,\ 2)$$
vektorrendszer $\mathbb{R}^4$-ben.

   a) *(2 pont)* Igazoljuk, hogy az $u_1,\ u_2,\ u_3$ vektorrendszer ortogonális rendszer.

   b) *(5 pont)* Bontsuk fel az $x = (1, 2, -1, 1)$ vektort az $u_1,\ u_2$ vektorok által generált altér (azaz $\mathrm{Span}\,(u_1,\ u_2)$) szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

4. *(8 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x}{x^4 + x^2 + 3} = 2$$

5. *(8 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):*
A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tétel