Aleksandra Krakowiak #30

Metody Numeryczne (MNUB) – Projekt
Zadanie #1: Analiza dokładności obliczeń komputerowych

1. Wyznaczyć współczynnik przenoszenia względnych błędów zmiennopozycyjnej reprezentacji danych – $T(x)$ – oraz współczynniki przenoszenia względnych błędów zaokrągleń operacji zmiennopozycyjnych – $K_1(x)$, $K_2(x)$,… – dla następującej funkcji:

$$y = \frac{\cos\left(x^4\right)}{\exp\left(x+2\right)} \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

Porównać wyniki otrzymane metodą różniczkowania analitycznego i metodą rachunku "epsilonów". Sporządzić wykresy zależności tych współczynników od x. Przedstawić algorytm obliczania wartości y wynikający z postaci powyższego wzoru w zapisie sekwencyjnym.

2. Przy założeniu, że wskaźnik dokładności reprezentacji zmiennopozycyjnej wynosi $eps = 5 \cdot 10^{-13}$, oszacować błąd całkowity wyznaczania wartości y metodą maksymalizacji sumy modułów współczynników przenoszenia względnych błędów danych i zaokrągleń:

$$\delta y_{\sup}^{(1)} = \sup\left\{ |T_x(x)| + |K_1(x)| + |K_2(x)| + \ldots \;\middle|\; x \in [0,1] \right\} * eps$$

3. Wynik otrzymany w punkcie 2 porównać z wynikiem otrzymanym metodą symulacyjną:

$$\delta y_{\sup}^{(2)} = \sup\left\{ |\delta y(x)| \;\middle|\; x \in [0,1] \right\}$$

gdzie $|\delta y(x)|$ jest największym co do modułu błędem obliczonej wartości funkcji y, jaki może się pojawić przy założeniu, że zarówno względne błędy danych jak i względne błędy zaokrągleń mogą przyjmować tylko dwie wartości: $-eps$ i $+eps$.

4. Metodą symulacji statystycznej, opisaną w punkcie 3, oszacować niepewność rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych:

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 58 & 47 & -150 & 12 & 153 \\ 144 & 131 & -405 & 36 & 414 \\ 90 & 80 & -250 & 20 & 260 \\ 16 & 14 & -45 & 9 & 46 \\ 26 & 24 & -75 & 4 & 81 \end{bmatrix}$$

Wiedząc, że dokładnym rozwiązaniem tego równania jest wektor $\dot{\mathbf{x}} = [1, 0, 1, -1, 1]^T$. Założyć, że względne błędy elementów macierzy $\mathbf{A}$ podlegają oszacowaniu

$$\left|\delta\left[a_{n,m}\right]\right| \le eps = 5 \cdot 10^{-13}$$

a błędy elementów wektora $\mathbf{b}$ są pomijalne. Jako wskaźnik niepewności rozwiązania przyjąć:

$$\delta_2 = \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}\|_2}{\|\dot{\mathbf{x}}\|_2}$$