Глава 2.

Евклидовы и унитарные пр-ва.

§1. Определение и основные св-ва Евклидовых пр-в.

Опр. 1. ЛП V над числовым полем $\mathbb{R}$ называется евклидовым пространством, если $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ определено число $(\bar{x}; \bar{y}) \in \mathbb{R}$, называемое скалярным произведением $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющее след. требованиям (аксиомам скалярного произв.):

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad (\bar{x}; \bar{y}) = (\bar{y}; \bar{x})$

2) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V \quad (\bar{x}+\bar{y}); \bar{z} = (\bar{x}; \bar{z}) + (\bar{y}; \bar{z})$

3) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha \bar{x}; \bar{y}) = \alpha \cdot (\bar{x}; \bar{y})$ – симм. ассоц.

4) $\forall \bar{x} \in V \quad (\bar{x}; \bar{x}) \geqslant 0$; причём $(\bar{x}; \bar{x}) = 0 \Rightarrow$

$\bar{x} = \bar{o}$ – св-во скалярного квадрата

Пример 1. ЛП геом. векторов с обычным

дим них скалярным произведением

Пример 2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_i \in \{1, 2 \dots, n\}\ x_i \in \mathbb{R}\}$

Операции сложение и умножение

на число из $\mathbb{R}$ - обычные

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow (\bar{x}; \bar{y}) =$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

мн-во ф-ций, непрерывных на $[a; b]$

Пример 3. $C[a; b]$

Операции сложение и умножение

на число - обычные $\forall f, g \in C[a, b]$ $(f; g) =$

$$= \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

Следствие из опр. 1:

1) $(\bar{0}; \bar{x}) = (\bar{x}; \bar{0}) = 0$

Д-во: $\bar{0} = 0 \cdot \bar{y}$

$(\bar{0}; \bar{x}) = (0 \cdot \bar{y}; \bar{x}) = 0(\bar{y}; \bar{x}) = 0$

2) $(\bar{z}; \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{z}; \bar{x}) + (\bar{z}; \bar{y})$

Д-во: $(\bar{z}; \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y}; \bar{z}) = (\bar{x}; \bar{z}) + (\bar{y}; \bar{z}) =$

$= (\bar{z}; \bar{x}) + (\bar{z}; \bar{y})$

3) $(\bar{x}; \alpha\bar{y}) = \alpha \cdot (\bar{x}; \bar{y})$

Д-во: $(\bar{x}; \alpha\bar{y}) = (\alpha\bar{y}; \bar{x}) = \alpha(\bar{y}; \bar{x}) =$

$= \alpha(\bar{x}; \bar{y})$

Опр. 2. Нормой вектора $\bar{x}$ в евклидовом пр-ве называется число $\|\bar{x}\| =$

$= \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})}$

Теорема (нер-во Коши-Буняковского)

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad |(\bar{x}; \bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

Д-во: $\forall x, y \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ (\bar{x} - \alpha\bar{y}; \bar{x} - \alpha\bar{y}) \geq 0$

$(\bar{x} - \alpha\bar{y}; \bar{x} - \alpha\bar{y}) = (\bar{x}; \bar{x}) - \alpha(\bar{x}; \bar{y}) - \alpha(\bar{y}; \bar{x}) + \alpha^2(\bar{y}; \bar{y}) =$

$= (\bar{x}; \bar{x}) - \alpha(\bar{x}; \bar{y}) - \alpha(\bar{x}; \bar{y}) + \alpha^2(\bar{y}; \bar{y}) =$

$= (\bar{y}; \bar{y})\alpha^2 - 2(\bar{x}; \bar{y})\alpha + (\bar{x}; \bar{x})$

$(\bar{y}; \bar{y})\alpha^2 - 2(\bar{x}; \bar{y})\alpha + (\bar{x}; \bar{x}) \geq 0$

1) $\bar{y} \neq \bar{0}$

$D \leq 0$

$$\mathcal{D} = 4(\bar{x};\bar{y})^2 - 4(\bar{y};\bar{y})\cdot(x;x)$$

$$4(\bar{x};\bar{y})^2 - 4(\bar{x};\bar{x})\cdot(\bar{y};\bar{y}) \leq 0$$

$$(x;y)^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2$$

$$|(\bar{x};\bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

2) $\bar{y} = \bar{0}$

$$(\bar{x};\bar{y}) = |(\bar{x};\bar{0})| = 0$$

$$\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{0}\| = \|\bar{x}\| \cdot \sqrt{(\bar{0};\bar{0})} = 0$$

$$0 \leq 0 \quad \blacksquare$$

Опр. 3. Ненулевых $\bar{x}, \bar{y} \in V$ углом называется число $(\widehat{\bar{x};\bar{y}}) = \arccos \dfrac{(\bar{x};\bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$

§ 2. Ортогональные системы векторов.

Опр. 1. Векторы $\bar{x}, \bar{y} \in V$ называются ортогональными, если $(\bar{x}; \bar{y}) = 0$

Обозначение: $\bar{x} \perp \bar{y}$

Опр. 2. Система векторов называется ортогональной, если её векторы попарно ортогональны. Ортогональная система векторов называется ортонормированной, если нормы её векторов равны единице.

Теорема 1 (о линейной независимости ортогональной системы). Если все векторы ортогональной системы $\neq \bar{0}$, то она линейно независима

Д-во: Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m \in V$ попарно ортогональны и $\neq \bar{0}$. Предположим, что для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 +$

$+ \dots + \alpha_m \bar{a}_m = \bar{0}$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{a}_{i-1} + \alpha_i \bar{a}_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots +$

$+ \alpha_m \bar{a}_m = \bar{0} \quad | \cdot \bar{a}_i$

$$\alpha_1 \overset{0}{(\bar{a}_1; \bar{a}_i)} + \dots + \alpha_{i-1} \overset{0}{(\bar{a}_{i-1}; \bar{a}_i)} + \alpha_i (\bar{a}_i; a_i) +$$

$$+ \alpha_{i+1} \overset{0}{(\bar{a}_{i+1}; \bar{a}_i)} + \dots + \alpha_m \overset{0}{(\bar{a}_m; \bar{a}_i)} = \overset{0}{(\bar{0}; \bar{a}_i)}$$

$$\alpha_i \overset{>0}{(\bar{a}_i; \bar{a}_i)} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

Т.е., $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ – ЛНС ∎

Теорема 2 (о процессе ортогонализации Грама – Шмидта)

Пусть $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$ – ЛНС.

$\vec{e}_1 = \vec{f}_1$

$$\forall k \in \{2; 3, \dots, m\} : \bar{e}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{f}_k; \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i; \bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_i$$

Тогда:

1) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ – тоже ЛНС

2) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ – ортогональная система векторов.

Д-во: 1) $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$ – ЛНС $\Rightarrow (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$ - базис $\langle \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m \rangle$

Матрица системы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ в указанном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

det = 1 ⇒ столбцы линейно независимы ⇒

⇒ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ – линейно независимы.

2) Индукцией по m.

БИ (m = 2).

$$\bar{e}_2 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2; \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1; \bar{e}_1)} \cdot \bar{e}_1 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2; \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1; \bar{e}_1)} \cdot \bar{f}_1$$

$$(\bar{e}_1; \bar{e}_2) = \left(\bar{f}_1; \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2; \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1; \bar{e}_1)} \cdot \bar{f}_1\right) = (\bar{f}_1; \bar{f}_2) -$$

$$- \frac{(\bar{f}_2; \bar{e}_1)}{\cancel{(\bar{e}_1; \bar{e}_1)}} \cdot \cancel{(\bar{f}_1; \bar{f}_1)} = 0$$

ШИ. Предположим, что $\bar e_1, \bar e_2, \dots, \bar e_{m-1}$ попарно ортогональны. Докажем, что тогда $\forall j \in \{1; 2; \dots; m-1\}$ $\bar e_m \perp \bar e_j$

$$(\bar e_m; \bar e_j) = \left(\bar f_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\bar f_m; \bar e_i)}{(\bar e_i; \bar e_i)} \cdot \bar e_i ; \bar e_j\right) =$$

$$= (\bar f_m; \bar e_j) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\bar f_m; \bar e_i)}{(\bar e_i; \bar e_i)} (\bar e_i; \bar e_j) = (\bar f_m; \bar e_j) -$$

$$- \frac{(\bar f_m; \bar e_j)}{\cancel{(\bar e_j; \bar e_j)}} \cdot \cancel{(\bar e_j; \bar e_j)} = 0 \quad \blacksquare$$

§3. Ортонормированные базисы