Глава 2

Евклидовы и унитарные пространства

§§ 1-2 Определение и основные св-ва Евклидовых пространств + ортогонализация

N 4.63 (а)

$\mathbb{R}^2$

$\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \Rightarrow (\bar{x}; \bar{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

Доказать выполнение аксиом евкл. пр-ва.

1) $(\bar{y}; \bar{x}) = 2y_1x_1 + 5y_2x_2 = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 =$

$= (\bar{x}; \bar{y})$

2) $\bar{z} = (z_1, z_2)$

$(\bar{x} + \bar{y}; \bar{z}) = 2(x_1 + y_1)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2 =$

$= 2x_1z_1 + 2y_1z_1 + 5x_2z_2 + 5y_2z_2 = 2x_1z_1 + 5x_2z_2 +$

$+ 2y_1z_1 + 5y_2z_2 = (\bar{x}; \bar{z}) + (\bar{y}; \bar{z})$

3) $(\alpha\bar{x}; y) = 2(\alpha x_1)y_1 + 5(\alpha x_2)y_2 =$

$= \alpha \cdot 2 \cdot x_1y_1 + \alpha \cdot 5x_2y_2 = \alpha(2x_1y_1 + 5x_2y_2) =$

$= \alpha(\bar{x};\bar{y})$

4) $(\bar{x};\bar{x}) = 2x_1 \cdot x_1 + 5x_2 \cdot x_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 \geq 0$

Предположим, $(\bar{x};\bar{x}) = 0$

$2x_1^2 + 5x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Обычно скалярное произведение в R^n определяется так: $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$\Rightarrow (\bar{x};\bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

№4.67. $\bar{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (3, 3, -1, -1)$, $\bar{f}_3 = (-2, 0, 6, 8)$. Применить процесс ортогонализации

$\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2;\bar{e}_1)}{(\bar{e}_1;\bar{e}_1)} \cdot \bar{e}_1$$

$(\bar{f}_2;\bar{e}_1) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 4$

$(\bar{e}_1;\bar{e}_1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$

$$\vec{e}_2 = (3, 3, -1, -1) - \frac{4}{4} \cdot (1, 1, 1, 1) =$$

$$= (3, 3, -1, -1) - (1, 1, 1, 1) = (2, 2, -2, -2)$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(\overline{f_3}; \overline{e_1})}{(\overline{e_1}; \overline{e_1})} \cdot \overline{e_1} - \frac{(\overline{f_3}; \overline{e_2})}{(\overline{e_2}; \overline{e_2})} \cdot \overline{e_2}$$

$$(f_3; e_1) = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 12$$

$$(f_3; e_2) = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2) =$$

$$= -4 - 12 - 16 = -32$$

$$(\overline{e_2}; \overline{e_2}) = 2^2 + 2^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 16$$

$$e_3 = (-2; 0; 6; 8) - \frac{12}{4} \cdot (1, 1, 1, 1) - \left(-\frac{32}{16}\right) \cdot (2; 2; -2; -2) =$$

$$= (-2; 0; 6; 8) - 3(1; 1; 1; 1) + 2 \cdot (2, 2, -2, -2) =$$

$$= (-2; 0; 6; 8) - (3; 3; 3; 3) + (4; 4; -4; -4) =$$

$$= (-1; 1; -1; 1)$$

Проверка:

$$(\overline{e_1}; \overline{e_2}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = 0$$

$$(\overline{e_1}; \overline{e_3}) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = 0$$

$$(\overline{e_2}; \overline{e_3}) = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 0$$

б/к. Выполнить нормировку $\overline{e_i}$ из предыдущей задачи.

$$\overline{e_i'} = \frac{\overline{e_i}}{\|\overline{e_i}\|}$$

$$\|\overline{e_1}\| = \sqrt{(\overline{e_1};\overline{e_1})} = \sqrt{4} = 2$$

$$\overline{e_1'} = \frac{1}{2}\cdot(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overline{e_2}\| = \sqrt{(\overline{e_2};\overline{e_2})} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{e_2'} = \frac{1}{4}(2;2;-2;-2) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

$$\|e_3\| = \sqrt{(\overline{e_3};\overline{e_3})} = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\overline{e_3'} = \frac{1}{2}(-1;1;-1;1) = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overline{e_i'}\| = \sqrt{(e_i';e_i')} = \sqrt{\left(\frac{\overline{e_i}}{\|e_i\|};\frac{\overline{e_i}}{\|e_i\|}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\|e_i^2\|}\cdot(\overline{e_i};\overline{e_i})} =$$

$$= \frac{1}{\|e_i\|}\cdot\sqrt{(\overline{e_i};\overline{e_i})} = \frac{1}{\cancel{\|e_i\|}}\cdot\cancel{\|\overline{e_i}\|} = 1$$

№ 4.76

$\overline{e_1} = (1,1,1,2)$, $\overline{e_2} = (1,2,3,-3)$

Дополнить до ортогонального базиса

$$\begin{cases} (\bar{e}_1; \bar{x}) = 0 \\ (\bar{e}_2; \bar{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + 2\bar{x}_4 = 0 \\ \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 - 3\bar{x}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}_{II-I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}_{I-II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 + 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_3 = (1; -2; 1; 0); \quad \bar{f}_4 = (-7; 5; 0; 1)$$

$$\bar{e}_4 = \bar{f}_4 - \frac{(\bar{f}_4; \bar{e}_3)}{(\bar{e}_3; \bar{e}_3)} \cdot \bar{e}_3$$

$$(\bar{f}_4; \bar{e}_3) = 1 \cdot (-7) + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -7 - 10 = -17$$

$$(\bar{e}_3; \bar{e}_3) = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 = 6$$

$$\bar{e}_4 = (-7; 5; 0; 1) - \frac{(-17)}{6} \cdot (1; -2; 1; 0) =$$

$$= (-7; 5; 0; 1) + \frac{17}{6} (1; -2; 1; 0) =$$

$$= (-7; 5; 0; 1) + \left(\frac{17}{6}; \frac{-17}{3}; \frac{17}{6}; 0\right) =$$

$$= \left(-\frac{25}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{17}{6}; 1\right) \parallel (-25, -4, 17, 6)$$

$$\vec{e_3} = (1; -2; 1; 0)$$

$$\vec{e_4} = (-25; -4; 17; 6)$$