Функции нескольких переменных (ФНП)

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, D - мн-во т. из R^n, т.е. $D \subset R^n$. Если $\forall$ т. $\bar{x} \in D$ $\exists!$ $y = f(\bar{x})$, то на D ($\mathcal{D}(y)$) задана ф-ция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём мн-во $\{y = f(\bar{x}),\ \bar{x} \in D\}$ – мн-во значений ф-ции.

При $n=2$, $y = f(x_1, x_2)$ можно записывать $z = f(x,y)$. Для ф-ции двух переменных $z = f(x,y)$ область определения D расположена на пл-ти xOy, $(x,y) \in D \subset R^2$

График ф-ции 2-ух переменных - мн-во точек $\{(x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in D\}$ - подмножество R^3 и иногда может быть представлен поверхностью

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D$$

При $n=3$, $y=f(x_1,x_2,x_3)$ можно записать $u=f(x,y,z)$. Для $u=f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in D\subset R^3$ область определения расположена в пр-ве R^3; для представления графика ф-ции 3-ёх переменных используется R^4.

Пример 1. Выразить $V_{цил}$, $R=x$, $h=y$ через эти переменные.

$$V(x,y)=\pi x^2\cdot y$$

$$D(V):\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$$

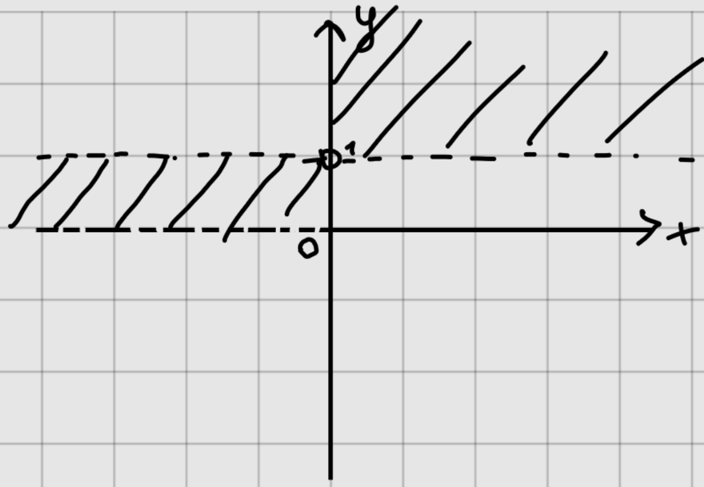
Пример 2. Найти и построить $D(f)$

$$f(x,y)=\ln(x\cdot\ln y)$$

$$f(x,y)=\ln(x\cdot\ln y)$$

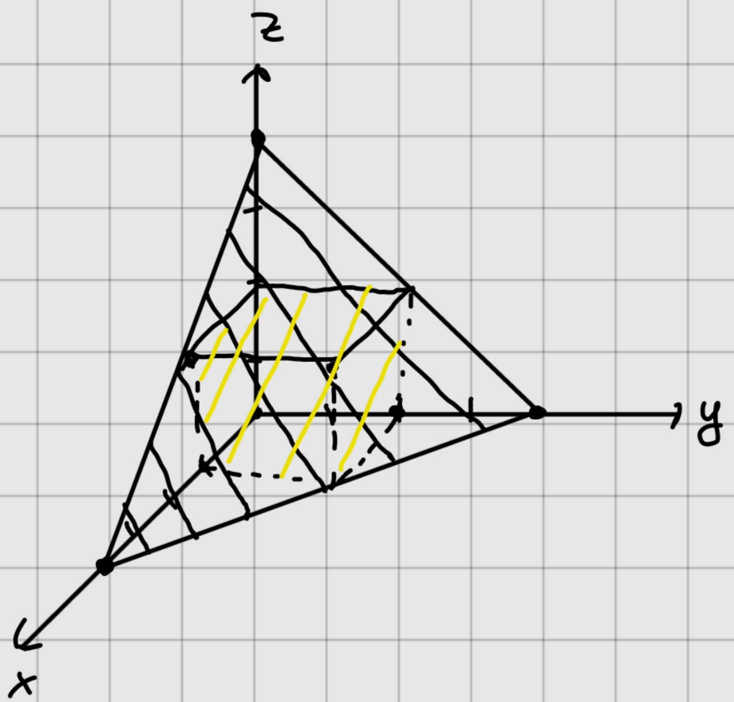
$$D(f):\begin{cases}x\cdot\ln y>0\\ y>0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ \ln y>0 \Rightarrow y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \ln y<0 \Rightarrow 0<y<1 \end{cases} \end{array}\right. \\ y>0 \end{cases}$$



Пример 3. Построить график явной ф-ции $z = 4 - x - y$ на $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

$x + y + z = 4$



Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется мн-во точек (x,y) плоскости xOy, в которых ф-ция принимает одно и то же значение C. При различных C получаются различные линии уровня для данной ф-ции.

Пример 5. Построить линии уровня

для ф-ции $z = xy$

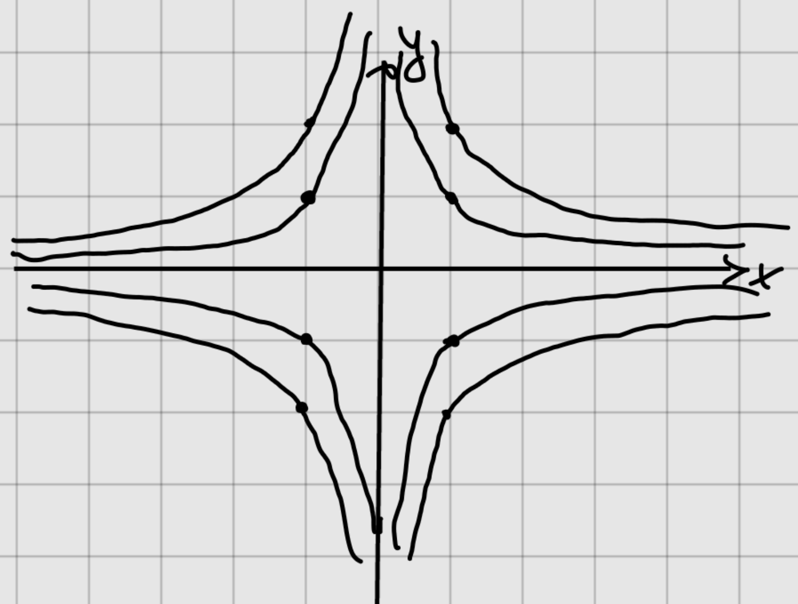
$z = 0 \qquad x \cdot y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

$z = 1 \qquad x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$z = 2 \qquad x \cdot y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

$z = -1 \qquad x \cdot y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$

$z = -2 \qquad x \cdot y = -2 \Rightarrow y = -\frac{2}{x}$



Окрестность $S_\varepsilon(\bar{x}^0)$ радиуса $\varepsilon > 0$ точки $\bar{x}^0$ является мн-во всех точек $\bar{x}$, удалённых от $\bar{x}^0$ менее чем на ε, т.е.

$$S_\varepsilon(\bar{x}^0) = \left\{\bar{x} \in R^n : d(\bar{x}, \bar{x}^0) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\right\}$$

В частности, для одномерного пр-ва:

$$S_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{x \in R^1 : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$\bar{x}^0 = (x_0, y_0) \in R^2$$

Для двумерного:

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \varepsilon$$

Пусть D - мн-во точек из R^n, т.е. $D \subset R^n$. Точка $\bar{x}^0$ - **внутренняя** точка мн-ва D, если $\exists$ ок-ть $S_\varepsilon(\bar{x}_0)$, содержащаяся во мн-ве D, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(\bar{x}^0) \subset D$.

Мн-во D - **открытое** в R^n, если каждая его точка является внутренней точкой мн-ва D.

Точка $\bar{x}^0$ - **граничная** точка мн-ва D, если в любой её ок-ти $\exists$ т. $\bar{x} \in D$ и $\exists$ т. $\bar{x}^* \in R^n \notin D$.

Мн-во всех граничных точек мн-ва D образует **границу** мн-ва D и обозн. $\Gamma(D)$

Ок-ть $S_x(\bar{x}^\circ)$ с присоединённой границей иногда называют „**замкнутым шаром**" и обозначают $S_\varepsilon[\bar{x}^\circ]$, т.е.

$$S_\varepsilon[\bar{x}^\circ] = \{\bar{x} \in R^n : d(\bar{x},\bar{x}^\circ) \leq \varepsilon\}$$

Мн-во D - **ограниченное** в R^n, если

$$\exists R>0 \quad \exists \bar{x}^* \in R^n : D \subset S_R[\bar{x}^*].$$

Мн-во D - **связное** в R^n, если всякие его две точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей только из точек мн-ва D.

Всякое ограниченное связное открытое мн-во - **область**, область D вместе со своей границей $D \cup \Gamma(D)$ - замкнутая область.

Точка $\bar{x}^\circ$, $\bar{x}^\circ \in R^n$, называется **предельной** точкой мн-ва D, $D \subset R^n$, если в любой её окр-ти $\exists$ т. $\bar{x}$, отличная от $\bar{x}^0$ и принадлежащая мн-ву D.

Мн-во D, $D \subset R^n$, называется замкнутым в R^n, если оно содержит все свои предельные точки.

Понятие „открытое мн-во" и „замкнутое мн-во" не отрицают друг друга. Существуют мн-ва открытые и замкнутые одновременно, например $(-\infty; +\infty)$ в R^1, а также $\exists$ мн-ва не открытые и не замкнутые, например $[a, b)$ в R^1.

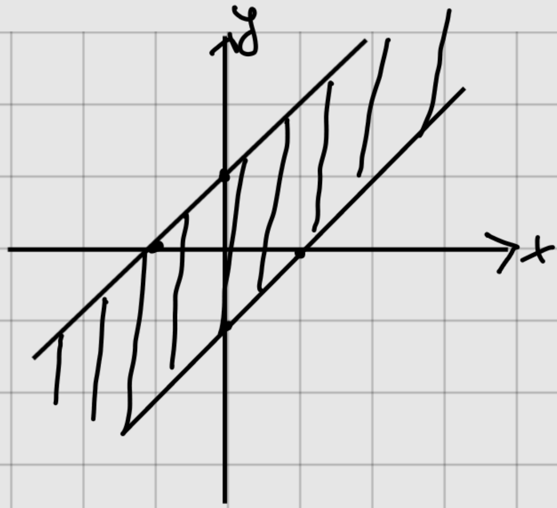
Пример. Найти и построить $D(f)$ $f = (x, y) = \arcsin(y - x)$ и указать св-ва мн-ва $D(f)$: ограниченность, связность, открытость, замкнутость.

$D(f)$: $|y - x| \leq 1$

$-1 \leq y - x \leq 1$

$x - 1 \leq y \leq x + 1$

границы $\begin{cases} y = x+1 \\ y = x-1 \end{cases}$



а) не ограничена
б) связное
в) нет
г) да

Пусть $\bar{x}^0$ - предельная точка мн-ва D.
Тогда $A = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}^0} f(\bar{x})$, если выполняется соотношение $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \bar{x} \in S_\delta(\bar{x}^0), \bar{x} \neq \bar{x}^0;$

$f(\bar{x}) \in S_\varepsilon(A)$

Пример. Д-ть по определению $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x+3y-1) = 6$

$$|f(\bar{x}) - A| = |x+3y-1+6| = |x-1+3(y-2)| \leq$$

$$\leq |x-1| + 3|y-2| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + 9(y-2)^2} \leq 3\sqrt{2} \underbrace{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}_{\delta} =$$
$$= 3\sqrt{2} \cdot \delta = \varepsilon$$

$|a| + |b| \vee \sqrt{a^2+b^2}$

$2ab \vee a^2+b^2$

$0 \vee (a^2 - 2ab + b^2)$
$\leq$

$a^2 + 2ab + b^2 \vee (a^2+b^2) \cdot 2$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}$$

Пример. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$

1-й путь: $y=0$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

2-й путь: $x=0$ $\quad \lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$

$\Rightarrow$ предела нет.

Функция $f(\bar{x})$ непрерывна на мн-ве D, если оно непрерывна в каждой точке этого мн-ва. Другие определение непрерывности и св-ва функции нескольких переменных (ФНП), непрерывной на ограниченном связном замкнутом мн-ве, формулиру-ется аналогично соотв. св-вам ф-ции одной переменной, непрерывной на замкнутом отрезке.

Теорема. Если ф-ция $f(\bar{x})$ непрерывна на ограниченном замкнутом мн-ве D, то она на этом мн-ве:

1) ограничена, т.е. $\exists R>0 \ \forall \bar{x} \in D: |f(\bar{x})| \le R$
2) имеет точки, в которых принимает наиб. и наим. значения
3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение между m и M.

Пусть $z = f(x,y)$ $'(x,y) = M \in D$, $'(x_0, y_0) = M_0 \in D$.

Частные производные первого порядка ф-ции $z = f(x,y)$ вводятся соответственно соотношениями

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

ф-ция $\bar{x}$ дифференцируется отдельно по каждой переменной, при этом значение всех остальных переменных остаются неизменными.

Пример. Найти частные производные первого порядка ф-ции $f(x,y) = \ln(x+2y^2)$ в т. $M(0;1)$

$$f(x,y) = \ln(x+2y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+2y^2} \cdot (1+0) = \frac{1}{x+2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+2y^2} \cdot (0+4y) = \frac{4y}{x+2y^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \frac{1}{2} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \frac{4}{2} = 2$$