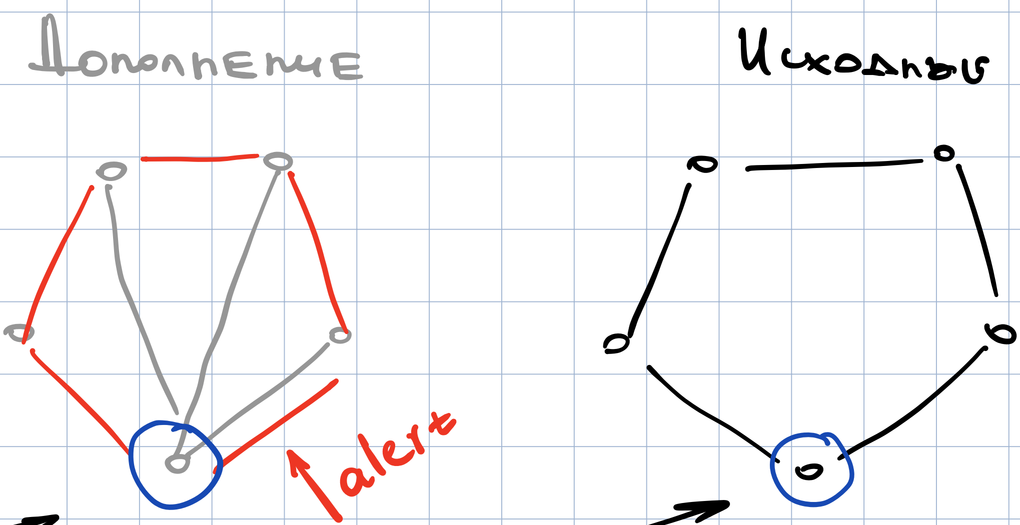
7. Дан граф с 30 вершинами. Известно, что для любых 5 вершин в графе есть цикл длины 5, содержащий эти вершины. Докажите, что найдётся 10 вершин, попарно соединённых рёбрами друг с другом.

Рассмотрим дополнение исходного графа.

Утв. В дополнении степень каждой вершины не превосходит 2

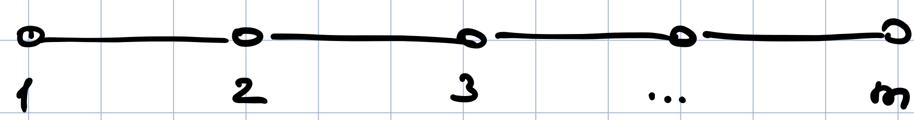
Док-во: От противного. Рассмотрим 5 вершин



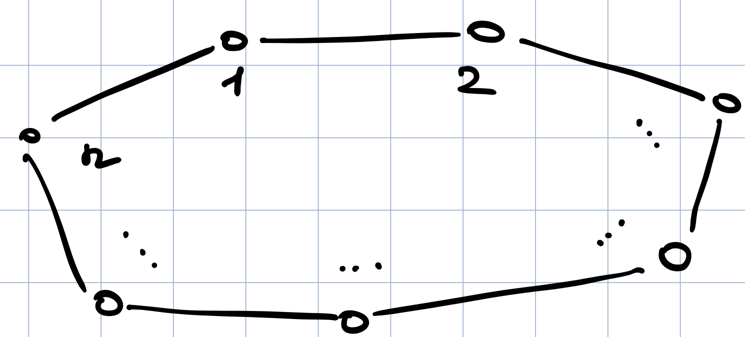
Видно, что синяя вершина, должна не иметь хотя бы 2 ребра в дополнении. Но тогда, в дополнении останется только 2 ребра. Противоречие.

В силу последнего утверждения дополнение исходного графа состоит либо из

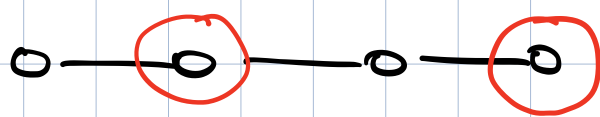
1) цепей



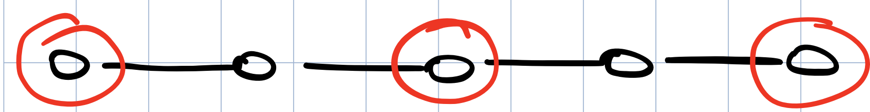
2) простых циклов



Утв. Цепь $1, \dots, m$ содержит $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ попарно не соединённых вершин

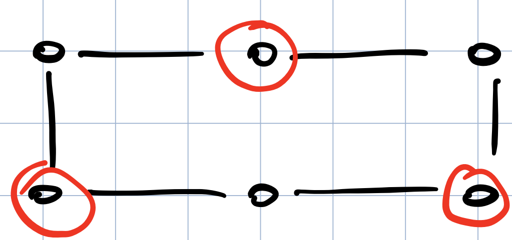


чет

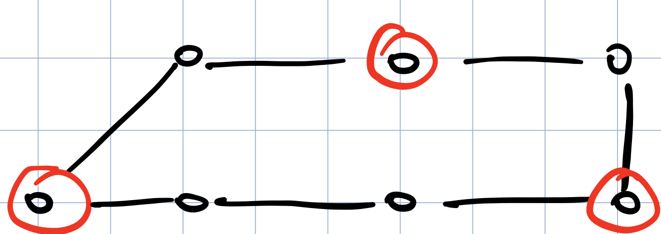


нечет

Утв. Цикл $1, \dots, n$ содержит $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ попарно не соединённых вершин



чет



нечет

Общее количество попарно не соединенных вершин:

$$\sum_{\text{цепи}} \left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil + \sum_{\text{циклы}} \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$$

Что я делаю: я ищу количество попарно не соединенных вершин в дополнении (полный граф в исходном)

По последней сумме видно, что чтобы уменьшить кол-во попарно не соединенных точек нужно

1) Инвестировать свободные точки в циклы / графы

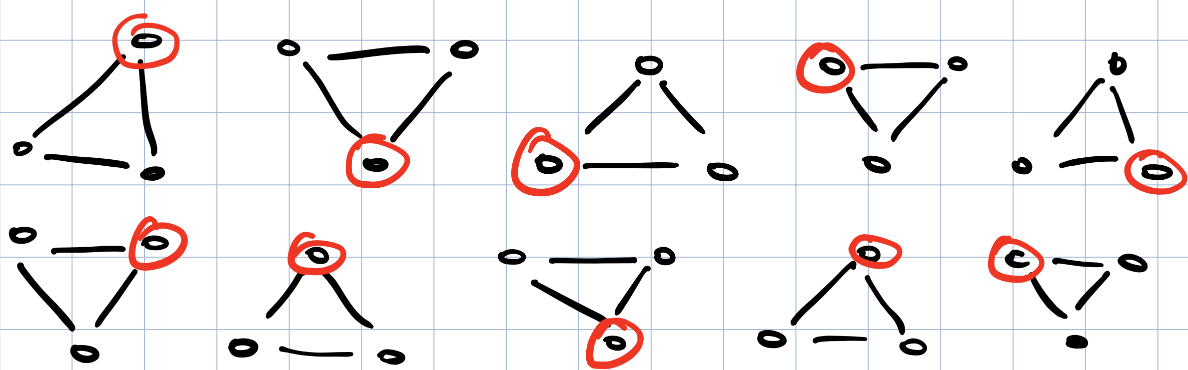
Потом можно сообразить, что в силу округления вниз нужно

2) Все инвестировать в циклы.

Ну и в самом конце

3) Сделать количество циклов максимальным

Минимум числа попарно не соед-х точек достигается тут:



Их: 10

Аргументация в пользу того, что данная конструкция соответствует минимуму:

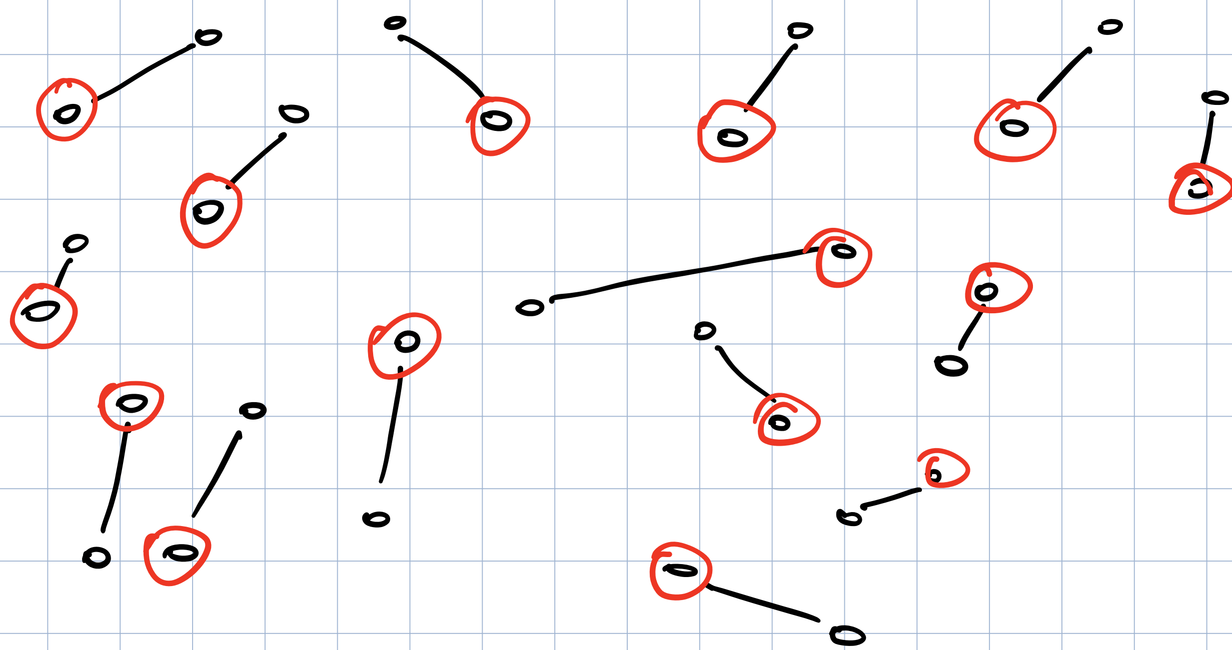
Мы добиваемся "плохого" округления

$\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$

Мы добиваемся максимального числа

плохих округлений. Можно показать, что

1) Это:



Даже меньше, но нет:

15

Короче, в дополнении нашлось 10 попарно не соединённых точек

$\Longrightarrow \exists K_{10}$ в исходном.