6. Квадратная вещественная матрица A такова, что $A^{\mathrm{T}} = p(A)$, где $p(x)$ — многочлен с ненулевым свободным членом. Докажите, что A обратима. Верно ли, что для любого оператора $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся многочлен $p(x)$ и некоторый базис, в котором матрица φ удовлетворяет условию $A^{\mathrm{T}} = p(A)$?

$\Delta A \neq 0 \iff \dim\ker A = 0$

Предположим обратное

$\Delta A = 0 \iff \exists\, x^{\neq 0} : Ax = 0$

$Ax = 0$

$x^T A x = 0$

$x^T A^T x = 0$

$x^T p(A) x = 0$

$x^T (a_n A^n + \ldots + \mathbb{I} a_0) x = 0$

$x^T (a_n A^{n-1} \cdot Ax + \ldots + \mathbb{I} a_0 x) = 0$

$x^T \cdot \mathbb{I} a_0 x = 0$

$\|x\| \cdot a_0 = 0$

Но по усл. $a_0 \neq 0$
по предп-ю $\|x\| \neq 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ — обратимо.

Второй пункт:

Рассмотрим нулевой оператор

$\mathcal{A} = \mathcal{O}$

$\mathcal{O}^{T} = p(\mathcal{A})$

$\mathcal{O} = a_n \mathcal{A}^n + \ldots + a_0 \cdot \mathbb{I}$

$0 = 0 + \ldots + 0 + a_0$

$a_0 \neq 0$ по условию, значит, уже для $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ условие не выполнено