8. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}.$$

$p = 1/5$

$q = 4/5$

$C_{k-1}^{n-1}\, p^{n}\, q^{k-n} =$

$= C_{k-1}^{n-1}\, p^{n-1}\, q^{(k-1)-(n-1)} \cdot p$

Вероятность того, что среди первых $k-1$ испытаний произошло ровно $n-1$ успехов

Добавляя p в конце получаем вероятность события, что на k-ом испытании будет n-ый успех

Сумма вероятностей под пределом — вероятность того что n-ый успех случится не раньше n-ого и не позже $5n$-ого испытания

Утв. ξ — с.в. равная номеру n-го успеха в серии из $k \geq n$ испытаний в схеме Бернулли.

ξ_i — с.в. равная номеру первого успеха в сх. Бернулли

ξ_i — iid

$\sum_{1}^{n} \xi_i = \xi$

Док-во:

Покажем, что их распределения совпадают

С ξ все ясно:

$\mathbb{P}(\xi = m \geq k)$

$= C_{k-1}^{m-1} p^{m-1} \cdot q^{(k-1)-(m-1)} \cdot p$

$$= C_{k-1}^{m-1}\, p^{m}\, q^{k-m}$$

Hassen $\mathbb{P}\left(\sum \xi_i = m \geq k\right) \overset{iid}{=}$

$$\sum_{\substack{|\alpha| = m \\ \alpha_i \geq 1}} \mathbb{P}(\xi_1 = \alpha_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n = \alpha_n)$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ \alpha_i \geq 1}} q^{\alpha_1 - 1} \cdot p \cdot \ldots \cdot q^{\alpha_n - 1} p$$

$$= p^{n} \cdot q^{-n} \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ \alpha_i \geq 1}} q^{\alpha_1} \cdot q^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q^{\alpha_n}$$

$$= p^{n} \cdot q^{m-n} \; \otimes$$

$$\otimes \; \# \{ \alpha \mid |\alpha| = m, \; \alpha_i \geq 1 \}$$

Немного пояснений

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — это вектор индексов

т.е. $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$|\alpha| := \sum \alpha_i$

Ищем $\# \{\alpha \mid |\alpha| = m, \alpha_i \geq 1\}$

$= \# \{\alpha \mid |\alpha| = m - n, \alpha_i \geq 0\}$

Сколькими способами можно разложить $m-n$ шаров по n лункам?

Это $\left(\!\binom{n}{m-n}\!\right)$

выбираем лунку

для каждого шара

Не $\left(\!\binom{m-n}{n}\!\right)$

Утв. $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Далее:

$$\left(\!\!\binom{n}{m-n}\!\!\right) = \binom{m-1}{m-n} = \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \binom{m-1}{m-1-(m-n)} =$$

$$= \binom{m-1}{n-1} = C_{m-1}^{n-1}$$

Получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\sum \xi_i = m \geq k\right)$$

$$= p^n \cdot q^{n-m} \cdot C_{m-1}^{n-1} =$$

$$= \mathbb{P}(\xi = m \geq k)$$

Короче, если $\xi \longmapsto \sum \xi_i$,
то просят найти:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(n \leqslant \sum \xi_i \leqslant 5n\right)$$

Ну, оно и ежу понятно, что
$\sum \xi_i$ всегда больше n, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum \xi_i \leqslant 5n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum \xi_i - \underline{M}\sum \xi_i}{\sqrt{D\sum \xi_i}} \leqslant \frac{5n - \underline{M}\sum \xi_i}{\sqrt{D\sum \xi_i}}\right)$$

Вообще говоря,

$$M\sum \xi_i = \sum M\xi_i =$$

$$= n\cdot M\xi_i$$

$$M\xi_i = 1\cdot p + 2\cdot q\cdot p + 3\cdot q^2\cdot p + \dots$$

$$\dots$$

$$= p\left(1 + 2q + 3q^2 + \dots\right)$$

Вообще говоря, надо показать, что ряд сходится, но я откажу себе в этом удовольствии

Заметим, что

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots =$$

$$= \frac{d}{dq}\left(\int\left(1 + 2q + 3q^2 + \dots\right)dq\right)$$

$$= \frac{d}{dq}\left(q + q^2 + q^3 + \dots \right)$$

$$= \frac{d}{dq} \cdot \frac{q}{1-q} =$$

$$= \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

Получается, что

$$M \sum_i \xi_i = n \cdot p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{n}{p} =$$

$$= \left[p = 1/5 \right] = 5n$$

Короче, можно уже сказать, что вот это нас интересует:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_1 \xi_i - M\sum_1 \xi_i}{\sqrt{D\sum_1 \xi_i}} \leq 0 \right)$$

По ЦПТ, если η_i — iid,

$M\eta_i = \mu \in \mathbb{R} \setminus \{\infty\}$

$D\eta_i = \sigma^2 \in \mathbb{R} \setminus \{\infty\}$

то величина

$$H(n) = \frac{\sum_1^n \eta_i - M\sum_1^n \eta_i}{\sqrt{D\sum_1^n \eta_i}}$$

$$H(n) \xrightarrow[\text{по распр}]{n\to\infty} N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Ну, если простыми словами, то

спрашивается: с какой P
некоторое нормальное р-ре
меньше своего М.О.

Ответ: $1/2$