5. Вещественнозначная функция f определена на отрезке $[a;b]$ $(b - a \geqslant 4)$ и дифференцируема на нём. Докажите, что найдётся точка $x_0 \in (a;b)$, для которой

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

Заметим, что можно написать так

$$f'(x) < 1 + f^2(x)$$

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} < 1$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} f(x) < 1$$

Если $g(x)$ — непр на $[a, b]$ и дифф-ма на (a, b), то $\exists\ c \in (a, b)$:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

(Теорема Лагранжа о среднем)

$$\operatorname{arctg} f(x) := g(x)$$

Имеем:

$$g'(x) < 1$$

$$\exists\ c \in (a, b):$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} < 1$$

В силу $b - a \geq 4$

$$g(b) - g(a) \leq$$

$$\leq \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)$$

$$\leq \pi$$

Получаем, что для c, которую мы подобрали по Т Лагранжа н-во выполнено