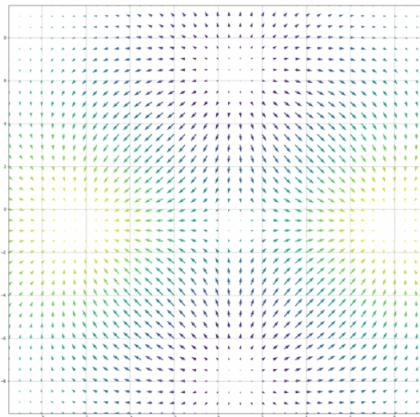


1. На картинке ниже изображены градиенты бесконечно гладкой функции  $f(x, y)$  в узлах решетки с шагом 0.5 (вектор исходит из той точки, в которой вычисляется градиент).



Утверждается, что существуют прямые (более одной), вдоль которых матрица вторых производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

вырождена.

- (а) Найдите и укажите их количество и угловые коэффициенты (то есть коэффициенты  $a$  в уравнении  $y = ax + b$ ).  
 (б) Верно ли, что существуют точки, в которых градиент не равен нулю, но, стартовав из которых, нельзя с помощью градиентного спуска прийти в точку минимума?

2. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и экспоненциально распределены,  $X$  — с параметром  $\lambda = 1$ , а  $Y$  — с параметром  $\lambda = 2$ . Пусть  $Z = \max(X, Y)$ . Найдите математическое ожидание случайной величины  $Z$ .

3. При каком значении параметра  $a \in \mathbb{R}$  матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4-a-a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a-1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  в различных базисах?

4. Найдите предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z \frac{\cos(t^3)}{t+x} dt.$$

5. В обществе анонимных подарков состоят  $3n$  человек. Они готовят подарки друг другу на Новый год. Известно, что ровно  $n$  человек хотели бы получить в подарок галстук,  $n$  человек — носки, а  $n$  человек — ручного динозавра. Каждый из членов общества случайно выбирает и покупает подарок среди тех двух, что он сам не хотел бы получить (например, если он хочет получить носки, то купит галстук или динозавра). Собравшись на новогоднюю вечеринку, члены общества сложили свои подарки в общую кучу, а в конце праздника разобрали их случайно. Алиса и Боб входят в общество анонимных подарков. Алиса хотела бы получить в подарок ручного динозавра, а Боб — носки. Найдите вероятность того, что ни Алиса, ни Боб не получат те подарки, которые хотели.

6. В королевстве Грек некоторые города соединены двусторонними магическими порталами, причем из каждого города можно попасть в каждый за несколько телепортаций. Когда из города  $A$  в город  $B$  отправляют груз, то по закону стоимости пересылки равна *кратчайшему расстоянию* между  $A$  и  $B$ : минимально возможному количеству ребер на пути между  $A$  и  $B$ .

В архиве почтовой службы вы нашли упоминание о диаметре королевства — то есть о максимально возможном кратчайшем расстоянии между парой вершин, — а также следующий способ его вычисления. Занумеруем все города числами от 1 до  $n$ . Выберем в качестве  $A_0$  город с номером 1 и найдем кратчайшее расстояние от него до всех остальных городов. Выберем в качестве города  $A_1$  наиболее удаленный от  $A_0$ , среди всех таких выберем город с минимальным индексом. Теперь найдем кратчайшее расстояние от города  $A_1$  до всех остальных городов, и в качестве  $A_2$  выберем наиболее удаленный, а среди таковых город с минимальным номером (это может быть снова  $A_0$ ). Далее аналогично построим  $A_3$ ,  $A_4$  и так далее до  $A_k$  для некоторого  $k$ . Теперь в качестве диаметра выберем максимальное расстояние между всеми парами  $(A_i, A_{i+1})$  для  $i$  от 0 до  $k-1$ . Приведите пример, который покажет, что такое решение не сработает, как бы мы ни выбирали значение параметра  $k$ . В вашем королевстве должно быть не более 10 городов, соединенных не более чем 100 порталами.

7. Для квадратной вещественной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  и вектора  $v \in \mathbb{R}^n$  положим:

$$U(A) = \{X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}, \quad W(A, v) = \langle v, Av, A^2v, A^3v, \dots \rangle$$

- (а) Пусть матрица  $A$  такова, что  $\dim W(A, v) = n$  для любого  $v \neq 0$ . Какова максимально возможная размерность  $U(A)$ ?  
 (б) Пусть матрица  $A$  такова, что  $\dim W(A, v) < n$  для любого  $v$ . Какова минимально возможная размерность  $U(A)$ ?

8. Верно ли, что почти все (все, кроме конечного числа) натуральные числа представимы в виде  $n + \tau(n)$ , где  $\tau(n)$  — количество делителей числа  $n$ ?