7. Для квадратной вещественной матрицы A размера $n \times n$ и вектора $v \in \mathbb{R}^n$ положим:

$$U(A) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}, \quad W(A, v) = \langle v, Av, A^2v, A^3v, \ldots \rangle$$

(a) Пусть матрица A такова, что $\dim W(A, v) = n$ для любого $v \neq \mathbf{0}$. Какова максимально возможная размерность $U(A)$?
(b) Пусть матрица A такова, что $\dim W(A, v) < n$ для любого v. Какова минимально возможная размерность $U(A)$?

Пояснение.

$U(A)$ — ЛП
$W(A, v)$ — тоже ЛП

a) $\dim W(A, v) = n \quad \forall \; v \neq 0$

Имб ЛП пр-во вида

$W(A, v) = \langle v, Av, Av^2, \ldots \rangle$

— минимальное инвариантное подпр-во для A

Доказательство инвариантности тривиально. Как доказать его минимальность я не знаю (надо просто запомнить)

Пусть:

1) $\operatorname{rk} \mathcal{A} = 0$

$\Longrightarrow \dim W = 0$

$\Longrightarrow n = 0$

$\Longrightarrow \max \dim U(\mathcal{A}) = 0$

2) $\operatorname{rk} \mathcal{A} = 1$

$\Longrightarrow \dim W = 1$

$\Longrightarrow n = 1$

$\Longrightarrow \max \dim U(\mathcal{A}) =$

$= \max \dim \mathbb{R}^1 = 1$ $\quad X$ – числа

3) $\operatorname{rk} \mathcal{A} > 2$

Если у $\mathcal{A}$ есть сз $\lambda \in \mathbb{R}$
тогда

$$\dim W = 1$$

и

$$\max \dim U(\mathcal{A}) = 1$$

Если нет у $\mathcal{A}$ все $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

тогда

$$\dim W = 2$$

ex: плоского поворота

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_0 + \alpha) \\ \sin(\alpha_0 + \alpha) \end{pmatrix} = M_\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \cos\alpha - \sin\alpha_0 \sin\alpha \\ \sin\alpha_0 \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha_0 \end{pmatrix} =$$

$$= M \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(M) = -\lambda^2 + \operatorname{tr} M\,\lambda - \Delta M$$

$$= -\lambda^2 + 2\cos\alpha\,\lambda - 1$$

Нули: $\lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1 = 0$

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$D = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$$

$$\lambda = \cos\alpha \pm \sqrt{D}$$

$0 \le \alpha \le \pi$

$$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

Оба с.з. $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

И у матрицы поворота $\mathbb{R}^2$ — инвариант

Значит $\dim W = 2$

$\Longrightarrow n = 2$

Вопрос: какие матрицы коммутируют с $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ и которые 2 комплексных с. з?

Над $\mathbb{C}$: $D = \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{matrix}$

$$A = C^{-1} D C$$

Предлагается взглянуть на:

$X = C^{-1} B C$

$AX = C^{-1} D C C^{-1} B C = C^{-1} D B C$

$XA = C^{-1} B D C$

Какая B?

$BD = DB \Longrightarrow B$ — диаг-я

Короче над $\mathbb{C}$

$$X = C^{-1} B C$$

$$B \sim \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\dim X = 2$$

Внимание. ЛП $\mho(A) = \{X \mid AX = XA\}$ это ЛП решения системы уравнений

$$AX = XA$$

Если ее записать так:

$$AX - XA = 0$$

То становится ясно, что некоторая однородная с.у. на x_{ij}

Мне сложно мыслить матрицами поэтому я предлагаю

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

Осталось подобрать такое $\mathcal{A}$:

$$AX = XA \iff \mathcal{A}\overline{X} = 0$$

Осталось понять, что

$$\dim \ker \mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \dim \ker \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$$

пр-во решений — это ядро для краткости

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Видимо, этот факт просто становится самоочевидным, когда приходится решать разные СЛУ в различных полях и их расширениях.

Я сам это не осознаю

б) $\dim W(A, v) < n$

$\min \dim U(A)$ — ?

Сразу хочется вьякнуть, что — n

Если $A = 0$,

то

$\dim U(A) = n^2$

Если не есть хотя бы 2 различных у A

$\Longrightarrow \dim U(A) = n$

Может ли быть меньше — не думаю

Могу ли я это показать — нет.