

Решения вступительных испытаний в ШАД

8 июня 2019

1. Заполните третий столбец матрицы

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$$

если известно, что это матрица ортогональной проекции на некоторую плоскость.

2. Что вы можете сказать о сходимости (абсолютной или условной) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2019)a_n$, если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n - 2019)a_n$ сходится (а) абсолютно, (б) условно?
3. Алёна очень любит алгебру. Каждый день, заходя на свой любимый алгебраический форум, она с вероятностью $\frac{1}{4}$ находит там новую интересную задачу про группы, а с вероятностью $\frac{1}{10}$ интересную задачку про кольца. С вероятностью $\frac{13}{20}$ новых задач на форуме не окажется. Пусть X — это минимальное число дней, за которые у Алёны появится хотя бы одна новая задача про группы и хотя бы одна про кольца. Найдите распределение случайной величины X . В ответе должны участвовать только компактные выражения (не содержащие знаков суммирования, многоточий и пр.).
4. Дан массив $A[1:n]$ вещественных чисел, отсортированный по возрастанию, а также числа p, q, r . Предложите алгоритм, строящий массив $B[1:n]$, состоящий из чисел $px^2 + qx + r$, где $x \in A$, также отсортированный по возрастанию. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.
5. Вещественнозначная функция f определена на отрезке $[a; b]$ ($b - a \geq 4$) и дифференцируема на нём. Докажите, что найдётся точка $x_0 \in (a; b)$, для которой
$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$
6. Квадратная вещественная матрица A такова, что $A^T = p(A)$, где $p(x)$ — многочлен с ненулевым свободным членом. Докажите, что A обратима. Верно ли, что для любого оператора $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдётся многочлен $p(x)$ и некоторый базис, в котором матрица φ удовлетворяет условию $A^T = p(A)$?
7. Дан граф с 30 вершинами. Известно, что для любых 5 вершин в графе есть цикл длины 5, содержащий эти вершины. Докажите, что найдётся 10 вершин, попарно соединённых рёбрами друг с другом.
8. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}.$$