4. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\cos(t^3)}{t+x}dt.$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\cos(t^3)}{t+x}dt =$$

$$= \lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\cos t^3 - 1 + 1}{t+x}dt$$

$$\overset{?}{\underset{\substack{\text{если}\\\text{оба}\\\exists}}{=}} \lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\cos t^3 - 1}{t+x} +$$

$$+ \lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{dt}{t+x}$$

Второе: $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \frac{dt}{t+x} =$

$$\lim_{x\to 0} \ln(t+x)\Big|_0^x =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\ln(2x) - \ln(x) \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln 2 = \ln 2$$

Первое:

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{\cos t^3 - 1}{t + x}\, dt =$$

$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos t^3 - 1 = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{t^{6n}}{(2n)!}$$

Надо заметить, что тут зашито 2 случая:

$x \to +0$ и $x \to -0$

И для обоих случаев интеграл отрицательный

$x \to +0$:

$\cos t^3 - 1 < 0$

$t + x > 0$

$x \longrightarrow -0$:

$$\int_0^x = -\int_x^0$$

$\cos t^3 - 1 < 0$

$t + x < 0$

$$\leq \lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{t^{6n}}{(2n)!}}{t + x} \geq$$

у отрицательного
числа уменьшим
по модулю
зн-ль

$$\geq \lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{t^{6n}}{(2n)!}}{t} dt =$$

ряд сходится
можно

$$= \lim_{x \to 0} \int_0^x \sum_1^\infty (-1)^n \frac{t^{6n-1}}{(2n)!} dt =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{6n-1} dt$$

$$\overset{\text{если } \lim \int t}{\underset{\exists}{=}} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \lim_{x\to 0} \int_0^x t^{6n-1}\,dt$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \lim_{x\to 0} \left(\frac{t^{6n}}{6n}\right)_0^x$$

$$= 0$$

Ответ: $\ln 2$