2. Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X — с параметром $\lambda = 1$, а Y — с параметром $\lambda = 2$. Пусть $Z = \max(X, Y)$. Найдите математическое ожидание случайной величины Z.

$$P_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Значит, $F_X(x) = 1 - e^{-x}$

$$F_Y(x) = 1 - e^{-2x}$$

$$F_{\max(X,Y)}(x) :=$$

$$= \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq x) =$$

$$= \mathbb{P}((X \leq x) \wedge (Y \leq x))$$

$$\overset{\text{нез}}{\underset{X \text{ и } Y}{=}} \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq x)$$

$$= F_X(x) \cdot F_Y(x) =$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-2x})$$

Найдем $P_{max(X,Y)}(x)$

$$= \frac{d}{dx} F_{max(X,Y)}(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(1 + e^{-3x} - e^{-x} - e^{-2x}\right)$$

$$= -3e^{-3x} + e^{-x} + 2e^{-2x}$$

Хочется вычислить

$$M(max(X,Y)) =$$

$$= \int_0^{+\infty} x\left(-3e^{-3x} + e^{-x} + 2e^{-2x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} 3xe^{-3x}\,d(3x) + \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2x\, e^{-2x}\, d(2x) =$$

Если наплевать, то можно своими руками придти к заключению, что:

$$\int_0^{+\infty} y\, e^{-y}\, dy = 1$$

$$\int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy = -\int_0^{+\infty} y\, d e^{-y} =$$

$$= -\left(y e^{-y}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= 0 - \int_0^{+\infty} d\left(e^{-y}\right)$$

$$= -\left(e^{-y}\right)\Big|_0^{+\infty} = -(0-1)$$

$$= 1$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{6} =$$

$= 7/6$