1. Лёша и Марина договорились встретиться между $8{:}00$ и $9{:}00$ и вместе пойти на экзамен в ШАД. Каждый из них приходит на место встречи в случайный момент времени, ждёт $15$ минут и уходит (никому не хочется опоздать на экзамен). Являются ли независимыми события «Лёша и Марина не встретились» и «хотя бы один из них пришел после $8{:}45$»? Время считайте непрерывным.

2. Известно, что $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$. Чему равен предел $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

3. Верно ли, что для любых линейно-независимых $v, w \in \mathbb{R}^n$ найдётся матрица $A$ размера $n \times n$, для которой вектор $v$ является собственным с собственным значением $5$, а вектор $w$ не лежит в образе? Если да, то как найти хотя бы одну такую матрицу? Обязательно объясните ответ.

4. Дан массив вещественных чисел $\mathrm{A}[1{:}\mathrm{n}]$. Предложите алгоритм, находящий для каждого элемента $\mathrm{A}$ индекс ближайшего справа элемента, большего его хотя бы в два раза. Если такого элемента нет, то должно возвращаться значение $\mathrm{None}$. Ограничение по времени $O(n \log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. В корзине лежит $m$ чёрных шаров и $n$ красных. Вася достаёт из корзины случайный шар и, если он чёрный, то заменяет его на красный, а если он красный, то кладёт его обратно. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа красных шаров в корзине после $k$ итераций этой процедуры. Оба ответа должны быть компактными выражениями (то есть не содержать знаков суммирования, многоточий и пр.).

6. Матрицы $A$ и $B$ таковы, что $A^2 = A$, $B^2 = B$ и матрица $E - (A + B)$ обратима. Докажите, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$.

7. Пусть $M$ — множество непрерывных убывающих функций на отрезке $[0; 1]$, для которых $f(1) = 0$. Найдите

$$\inf_{f\in M} \sup_{x\in[0;1]} \frac{x f(x)}{\int_0^1 f(t)dt}.$$

8. Дан граф с $40$ вершинами. Известно, что среди любых $5$ вершин найдется одна, соединенная с четырьмя остальными. Каково минимально возможное число ребер в этом графе?