3. При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 - a - a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -a - 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ в различных базисах?

Если глянуть теорию по БФ, то сразу приходит в голову формула

$$B = C^T A C, \quad \Delta C \neq 0$$

(Надо быть на чеку
У БФ: $C^T A C$, у ЛО: $C^{-1} A C$)

Если заметить, что $B = B^T$, то

$$C^T A C = B = B^T = C^T A^T C$$

$$C^T A C = C^T A^T C$$

$$(C^T)^{-1} C^T A C C^{-1} = (C^T)^{-1} C^T A^T C C^{-1}$$

$$A = A^T$$

т.е. $4 - a - a^2 = 2$

Или $(a = 1) \vee (a = -2)$

Думается мне, что штука $|A - \lambda E|$ является инвариантом относительно $C^T A C$

Смотрим:

$$|C^T A C - \lambda E| =$$

$$= |(C^T)^{-1}| \, |C^T A C - \lambda E| \, |C^{-1}|$$

$$= |A - (C^T)^{-1} \lambda E C^{-1}|$$

Нет, это справедливо, только в случае ортогонального пр-я

$C^T = C^{-1}$

Короче, инвариантов в случае БФ не наблюдается (не надо заниматься чем-то типа: $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \ldots$)

Однако, всё же есть одна штука, к-то нужно проверять —

— ранг

Есть такое утверждение, что

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} CA = \operatorname{rk} AC$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Delta C \neq 0$$

Короче, должно быть так:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$$

Нужно подставлять $a = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}\right.$

в матрицу B и убедиться, что

$$\forall a \in \{1, -2\} \quad \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 2$$

Ответ: 1; -2