8. Верно ли, что почти все (все, кроме конечного числа) натуральные числа представимы в виде $n + \tau(n)$, где $\tau(n)$ — количество делителей числа n?

Слава богу, решение на просторах интернета нашлось:

Из китайской теоремы об остатках следует, что для любого k существует такое n, что n делится на 2^k, n+1 делится на 3^k, n+2 делится на 5^k, и так далее. То есть существуют сколь угодно длинные отрезки последовательных чисел, имеющих более k делителей. Рассмотрим число M такое, что в конце последовательности 1, 2, ... , M имеется k подряд идущих чисел с таким свойством. Все они после прибавления t(i) к i выходят за пределы [1..M]. Значит, в этом отрезке есть не менее k чисел, которые ничем не "покрываются", так как число может быть "покрыто" только меньшим. Значит, количество не "покрываемых" чисел принимает сколь угодно большие значения, то есть это множество бесконечно.

Осталось его понять:
Китайская Т.:

Формулировка [править | править код]

Если натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты, то для любых целых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, найдётся число N, которое при делении на a_i даёт остаток r_i при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Более того, если найдутся два таких числа N_1 и N_2 (соответствующих утверждению выше), то $N_1 \equiv N_2 \pmod{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Короче, мужичок в решении пишет, что можно предложить сколь угодно большой набор последовательных натуральных чисел, таких, что у каждого точно будет k делителей.

Сложность (лично у меня) возникает, когда пытаешься соотнести это с КТ.

Цепляемся за КТ: в качестве

a_i, нужно взять p_i^k, где

p_i — очередное простое число

$\{p_i\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$

Отлично, теперь в качестве

r_i берем такие числа:

$\{r_i\} = \{0, 2, 3 \dots\}$

n

n+1 нужно прибавить 1, чтобы делилось на 3

n+2 нужно прибавить 2, чтобы делилось на 5

Вуаля! Утверждение о том, что

Найдется число N, которое при делении на p_i^k дает остатки r_i
Эквивалентно тому, что $\exists$ последовательные числа, к-е будут делится на p_i^k (иметь миним k делителей)

Согласно последнему утверждению можно представить ряд последов-х натур-х чисел:

$$1, 2, 3, \dots, M$$

таких что, в конце будет ровно k чисел, которые имеют ровно k делителей.

Теперь нужно на каждое число подействовать функцией

$$n \longmapsto n + \tau(n)$$

Утверждается, что эти самые

последние k чисел после приме-
нения функции "выбудут" за
пределы множества $\{1, \ldots, M\}$.
Выпадут, потому что каждое
из этих чисел имеет k делителей,
каждый делитель точно уж больше
единицы $\Longrightarrow$ прибавляя k
делителей, надбавка будет доста-
точной, чтобы все числа

$$\{M-k+1, M-k+2, \ldots, M\}$$

"вышвырнуть" за пределы M

Получается, что в последователь-
ном ряду (применив функцию)
мы получили все возможные
образы $n + \tau(n)$. Нетрудно дога-
даться, что ровно k чисел сре-
ди всех образов будут отсутствовать.
Если эти числа я не смог полу-
чить из всего ряда меньших,
то, если я и дальше по
обобщенному ряду буду

добить $n + \tau(n)$, они у меня не появятся.

Короче, выше описан алгоритм, по которому можно найти конечное множество в котором будет ровно k чисел, которые не представляются в виде

$$n + \tau(n)$$

Осталось ещё раз прочитать утверждения повыше и понять, что число k можно сделать сколь угодно большим $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ множество чисел, к-е не представляются в виде $n + \tau(n)$ — бесконечное.