1. Заполните третий столбец матрицы

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$$

если известно, что это матрица ортогональной проекции на некоторую плоскость.

Проектор по определению:

$A^2 = A$

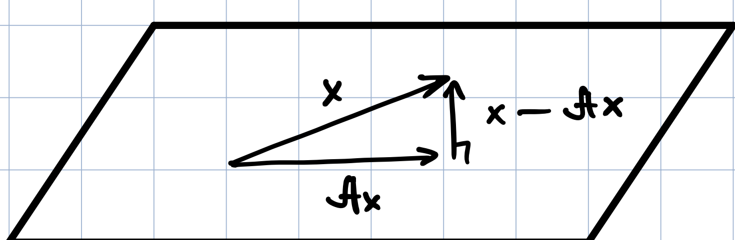
Ортогональность проекции:

$A = A^T$

Это доказывается вот так:

ортогональность $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x - Ax, Ax) = 0$



с.п.

$$(x - Ax)^T B\, Ax = 0$$

$$((\mathbb{I} - A)x)^T B\, Ax = 0$$

$$x^T (\mathbb{I} - A)^T B\, Ax = 0$$

Поскольку это должно выполняться $\forall\, x$, то приходим к выводу что матрица

$(\mathbb{I} - A)^T B A$ — кососимметрическая

$$M := (\mathbb{I} - A)^T B A$$

$$M^T = -M$$

То есть:

$$A^T B^T (\mathbb{I} - A) = -(\mathbb{I} - A)^T B A$$

$$A^T B^T - A^T B^T A = -BA + A^T B A$$

$B = B^T$, $\Delta B \neq 0$, т.к. B — с.п. $\Rightarrow \exists\, B^{-1}$

Домножая справа на A

$$A^T B^T A - A^T B^T A^2 = -BA^2 + A^T B A^2$$

Откуда

$$BA = A^T B A$$

Транспонируя:

$$A^T B = A^T B A$$

т.е.

$$A^T B = BA$$

Когда $B = \lambda I$ доказательство очевидно, остальные случаи не знаю как доказать.

Решение

Проективность:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & -2 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix}^2$$

Откуда:

$$25 + 4 - x = 30$$
$$-10 - 4 - y = -12$$
$$-5 + 4 - z = -6$$

Или

$$x = -1$$
$$y = -2$$
$$z = 5$$

Решение 2:

На основе $A = A^T$ находим x, y

Далее из $A = A^2$ находим z