A1. Неравенство

Пусть

$$f(x) = \frac{cx^2(1-c)^2}{(x^2+c^3)(x^2+c)}$$

Найдите, при каких значениях параметра c во всех точках, в которых $f(x)$ определена, выполняется неравенство $0 \le f(x) \le 1$.

В качестве ответа укажите минимальное целое значение c_0 параметра c, при котором $0 \le f(x) \le 1$ во всех точках области определения функции $f(x)$.

E1. Много граней

Вася бросает 20-гранную кость, на гранях которой написаны числа от 1 до 20, а вероятность выпадения каждой из граней равна $\frac{1}{20}$. Он видит, что у него выпало, и имеет возможность один раз бросить кость заново (в таком случае результат первого броска забывается).
Петя тоже бросает «честную» кость, но уже 10-гранную, с числами на гранях от 1 до 10. Петя побеждает, если у него выпало число больше, чем у Васи, иначе побеждает Вася.
Проигравший платит победителю столько, сколько выпало у победителя на кости. При каком максимальном результате первого броска Васи ему стоит бросить заново, чтобы максимизировать математическое ожидание своего выигрыша? Укажите это целое число в качестве ответа.

G1. Собственные значения

Пусть матрицы A и I имеют размерность $n \times n$,

$$M = \begin{pmatrix} E & A \\ A^T & E \end{pmatrix}$$

причём матрица E единичная, а A представима в виде $A = U\Lambda V^T$ — матрицы U и V ортогональные, а Λ - диагональная с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. Найдите собственны значения матрицы M.

В качестве ответа укажите собственные значения для $n = 3$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения должны быть выведены через пробел и упорядочены по неубыванию случае наличия кратных собственных значений их следует указать в количестве, соответствующем кратности. Вещественные числа вводите округлёнными до 5 знаков после запятой.

B1. Линейная оболочка

Семинарист по линейной алгебре Никодим придумал для своих студентов задачу, в которой нужно найти размерность линейной оболочки системы из m векторов размерности n. Ответом в задаче было число k. Лектор Афанасий Андреевич, посмотрев на условие, решил, что числа в нём недостаточно красивые. Он выбрал какие-то $d < n$ координат и у каждого вектора заменил их на какие-то случайные числа. Найдите, какие значения может принимать ответ в обновлённой задаче.
В качестве ответа введите два разделённых пробелом целых числа — минимальное и максимальное значения размерности для $m = 15, n = 19, k = 12, d = 4$.

C1. Математическое ожидание

Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 - независимые случайные величины, распределённые экспоненциально с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ соответственно. Найдите $E(\max(X_1+Y_1, X_2+Y_2))$. В качестве ответа напишите значение этого математического ожидания при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_1 = 1, \mu_2 = 1$, округлённое до пяти знаков после запятой.

H1. Вторая производная

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причём $f(0) = f(1) = 0$. Известно, что $|f''(x)| \le A \; \forall \, x \in (0,1)$. Найдите максимальное возможное значение $|f'(x)|$ при $x \in [0,1]$.
В качестве ответа укажите это значение для $A = 60$, округлённое до пятого знака после запятой, или число 0, если максимального значения не существует.

F1. Быки-коровы

В созвездии Тау-Кита в игру быки-коровы играют по странным правилам: один игрок загадывает комбинацию из 4 цифр (нули в начале не запрещены), а второй пишет цепочку цифр любой длины. После этого первый игрок говорит второму, есть ли внутри его цепочки загаданная четырёхзначная комбинация.
Какой минимальной длины цепочку можно написать, чтобы быть уверенным, что в ней будет любая возможная комбинация? Укажите это целое число в качестве ответа. Если такой длины не существует введите число 0.