Spieltheorie - WiSe 2014/15
Übungsblatt 5 - Felix Dosch

Aufgabe 5.1

a) Zu zeigen:

$$\Sigma_i = \Delta(S_i) = \{\sigma : S_i \longrightarrow [0,1] | \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) = 1\}$$

ist kompakt. Dazu benutzen wir den Satz von Heine-Borel und zeigen

- i) Σ_i ist abgeschlossen
- ii) Σ_i ist beschränkt

Zu i)

Zu zeigen:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x - y\| < \epsilon : y \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i$$

, wobei n die Anzahl der Spieler sein möge. In Worten: Für jeden Punkt ausserhalb von Σ_i gibt es eine Umgebung mit "Radius"ϵ, sodass jeder Punkt in dieser Umgebung ebenfalls ausserhalb von Σ_i liegt.

Wir betrachten die Elemente von Σ_i als Vektoren des $\mathbb{R}^n$:

$$\Sigma_i = \{v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} v_i = 1, v_i \geq 0 \quad \forall i\}$$

Σ_i ist Teilmenge einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, welche durch die Punkte $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, ..., 0)$ ... $(0, 0, ..., 1)$ verläuft. Der Normalenvektor zu dieser Hyperebene ist der Vektor $\overrightarrow{n}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})^T$.
Die Entfernung eines beliebigen Punktes in $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i$ zu Σ_i ist also in dieser Richtung (gleichmäßig in jeder Dimension) am kleinsten.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i$ beliebig mit $\sum_{i \in \{1,...,n\}} x_i = 1 + \delta$. Per Definition von Σ_i ist $\delta \neq 0$.
Wir verteilen δ gleichmäßig auf alle Dimensionen „auf dem Weg“ zu einem Element in Σ_i. Wie oben argumentiert, erreichen wir ein solches mit minimalem Abstand in dieser Richtung.
Wir betrachten den Punkt y, den wir erreichen, mit

$$\|x - y\| = \sqrt{(\frac{\delta}{n})^2 + (\frac{\delta}{n})^2 + ... + (\frac{\delta}{n})^2} = \sqrt{n \cdot (\frac{\delta}{n})^2} = \sqrt{n} \cdot \frac{\delta}{n} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

y ist entweder in Σ_i oder nicht, es gibt aber keinen Punkt, der näher an x liegt und in Σ_i ist (wg. Normalenvektor).

Daher:

Für jedes $x = (1+\delta) \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i$ wähle $\epsilon = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, womit $\forall y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-y\| < \epsilon : y \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_i$.

Zu ii)

Wir betrachten Σ_i wieder als Menge von Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Wir können die Vektoren nach ihrer Länge ordnen und eine obere und untere Schranke angeben, womit die Menge beschränkt ist.

Als obere Schranke kann man 1 wählen (Einheitsvektoren in jede Richtung).

Als untere Schranke kann man den Abstand der Hyperebene zum Ursprung wählen, also $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 5.2

a) X ist nicht leer, da Σ_i nicht leer für alle i. $X \subseteq \mathbb{R}^m$, da $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^l \forall i$ und $X = \bigtimes_i \Sigma_i \Rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^{n \times l} = \mathbb{R}^m$. X ist als Kreuzprodukt konvexer und kompakter Mengen ebenfalls kompakt und konvex (in Aufgabe 2.4 bewiesen).

b) Zu zeigen: Die Menge der „besten Antworten“ ist nicht leer und konvex.

- nicht leer: U_i liefert immer einen Wert zurück, also ist für $argmax$ immer mindestens ein Wert verfügbar, der zurückgegeben werden kann. Also ist die zurückgegebene Menge nicht leer.
- Konvexität: Entweder gibt es genau eine Strategie, die die beste Antwort ist (Einelementige Menge trivialerweise konvex) oder es gibt mehrere gemischte Strategien als beste Antworten - Dann sind auch alle möglichen Konvex.Kombinationen zweier solcher Strategien Elemente der besten Antworten. (Es ist egal wie Spieler i seine Strategie wählt, es hat keinen Einfluss auf das Ergebnis)

c) Zu zeigen: Der Graph von f ist abgeschlossen.

Wie das zu zeigen ist, weiß ich nicht. Das einzige was ich jetzt dazu gefunden habe ist folgendes, was sich aber nicht auf den Graph von f, sondern auf f bezieht:

Die Abgeschlossenheit von $BR_i(\sigma)$ folgt aus der Stetigkeit der U_i, denn für jede konvergente Folge ${}^k t \in U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})(s)$ folgt aus der Ungleichung $U_i({}^k t^i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ die Ungleichung im Grenzpunkt.[1]

[1] https://www.uni-due.de/~hn215go/gollmer/teaching/Spieltheorie_3.pdf - S.6, Beweis zu Lemma 3.96

d) Da alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind (wie in a) bis c) gezeigt), hat BR_i einen Fixpunkt. Das heißt $\exists \sigma_i' \in \Sigma_i : \sigma_i' \in BR_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$. In anderen Worten: Es gibt eine Kombination gemischter Strategien der anderen Spieler, sodass bei Wahl von σ_i' als Strategie von Spieler i, seine beste Antwort σ_i' ist, bzw. keine andere Antwort besser ist.

Da dies nicht nur für einen Spieler, sondern für alle Spieler gilt (betrachte BR statt nur BR_i), hat kein Spieler eine bessere Antwort als seine aktuell gewählte Strategie. Daher besitzt das Spiel ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Aufgabe 5.3

Das einzige symmetrische Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel ist $((0 \cdot Dove, 1 \cdot Hawk), (0 \cdot Dove, 1 \cdot Hawk))$, da bei(Dove, Dove) z.B. in der Zeile eine Abweichung in Richtung Hawk einen Nutzenzuwachs bringt.

Im Gleichgewicht (Hawk, Hawk) ist bei einer Abweichung um ϵ (Störung) Hawk immer noch die beste Antwort, sowohl für den Zeilenspieler (bei Abweichung des Spaltenspielers), als auch umgekehrt für den Spaltenspieler (aufgrund der Symmetrie). Insbesondere gilt dies, da für alle reinen Strategien gilt, dass der Nutzen bei Wahl von Hawk IMMER größer ist als der Nutzen von Dove - unabhängig von der Strategie des Gegners. Es ist also IMMER die beste Strategie, Hawk zu spielen, somit ist es auch immer die beste Antwort und damit natürlich auch bei geringer Störung des Spiels. Daher ist (Hawk, Hawk) auch evolutionär stabile Strategie.

Anmerkung:

Ich habe den Eindruck, dass die Aufgaben nochmal etwas schwerer geworden sind - entgegen deiner Aussage, dass die Aufgaben etwas leichter werden sollten. Normalerweise habe ich keine übermäßig großen Probleme mit mathematischen Aufgaben, jedoch habe ich den Eindruck, dass mein mathematisches Wissen hier und da bei den Aufgaben an seine Grenzen stößt...Ich habe den Mittwoch-Nachmittag und fast den gesamten Donnerstag und nun noch Montag-Abend mit der Bearbeitung der Aufgaben verbracht. Ich finde das etwas viel.