Spieltheorie - WiSe 2014/15
Übungsblatt 3 - Felix Dosch, Julian Felix Rost

Aufgabe 3.2

Zu zeigen: Eine strikt dominierte Strategie ist niemals Teil eines Nash-Gleichgewichts.

Beweis durch Widerspruch: O.B.d.A. betrachten wir Strategien für Spieler I. Sei s_I eine strikt dominierte Strategie. Das heißt, $\exists t_I \in S_I$ mit

$$u_I(s_I, s_{-I}) < u_I(t_I, s_{-I}) \quad \text{für alle } s_{-I} \in S_{-I} \tag{1}$$

Annahme: s_I ist Teil eines Nash-Gleichgewichts, das heißt

$$\exists s^*_{-I} \in S_{-I} : u_I(s_I, s^*_{-I}) \geq u_I(s'_I, s^*_{-I}) \quad \text{für alle } s'_I \in S_I$$

Jedoch (1):

$$\exists t_I \in S_I : u_I(s_I, s^*_{-I}) \ngeq u_I(t_I, s^*_{-I})$$

Dies steht in Widerspruch zur Annahme, dass s_I Teil eines Nash-Gleichgewichtes ist.

Aufgabe 3.3

Wir betrachten das folgende Spiel in Strategieform:

↓ I / II →	*A*	*B*	*C*
a	(10,4)	(7,7)	(0,24)
b	(9,8)	(4,11)	(10,10)
c	(6,2)	(3,9)	**(10,10)**

Nash-Gleichgewicht: Der Strategievektor $s^* = ((c), (C))$ ist das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel. Für Spieler II lohnt es sich nicht, seine Strategie zu ändern (sein Nutzen würde auf 9, bzw. 2 reduziert). Für Spieler I lohnt es sich ebenfalls nicht (seine Nutzen würde gleich bleiben oder auf 0 sinken).

Der Strategievektor $((b), (C))$ ist kein Nash-Gleichgewicht, obwohl er für beide Spieler den gleichen Nutzen hat wie s^*. Jedoch könnte hier II mit einem Wechsel zu Strategie (B) seinen Nutzen verbessern.

Iterative Eliminierung schwach dominierter Strategien:

- Spieler I kann Strategie (c) eliminieren, da diese von (b) schwach dominiert wird ($9 > 6$, $4 > 3$, $10 = 10$). Damit verschwindet das ursprüngliche Nash-Gleichgewicht.

- Spieler II kann Strategie (A) eliminieren, da diese von (B) sogar strikt (und damit natürlich auch schwach) dominiert wird ($7 > 4$, $11 > 8$).

Es verbleibt das folgende Spiel:

$\downarrow$ I / II $\rightarrow$	B	C
a	(7,7)	(0,24)
b	(4,11)	(10,10)

Dieses Spiel besitzt kein Nash-Gleichgewicht. Die Strategien können im Uhrzeigersinn gewechselt werden, wobei sich für den wechselnden Spieler ein Vorteil ergibt.

Aufgabe 3.4

a) Da sich der Gewinn für Spieler i wie in der Vorlesung berechnet (falls i den Gegenstand bekommt aus der Differenz des Gegenstandswertes für den Spieler v_i und seinem Gebot b_i, ansonsten 0) ergibt sich für den Spieler i beim Spielen der Strategie $b_i = v_i$ immer ein Gewinn von 0.
Entweder ersteigert er den Gegenstand nicht, oder er muss genau b_i dafür bezahlen, womit er auch einen Gewinn von 0 hat.

Allerdings dominiert $b_i = v_i$ nicht alle anderen Strategien schwach, denn:

Bietet i nicht v_i sondern einen kleineren Wert $b_i = v_i^*$ mit $0 < v_i^* < v_i$, so ergibt sich für den Fall, dass alle anderen Spieler ein Gebot abgeben, welches kleiner als v_i^* ist ein Gewinn von $v_i - v_i^* > 0$.

b) siehe Aufgabe a).

Aufgabe 3.5

a) Zu zeigen:

$$\min_{a \in A} \max_{b \in B} u(a,b) \geq \max_{b \in B} \min_{a \in A} u(a,b)$$

Dazu zeigen wir zunächst folgendes:

$$\max_{b \in B} u(x,b) \geq u(x,y) \geq \min_{a \in A} u(a,y) \quad \text{mit } x \in A, y \in B$$

Die erste Ungleichung gilt, da der Nutzen für festes x mit b maximiert wird, d.h. $u(x,y)$ kann für freies y höchstens so groß werden, wie für $y = b$. Bei der zweiten Ungleichung ist das symmetrisch für festes y und freies x der Fall.

Daher:

$$\max_{b\in B} u(x,b) \geq \min_{a\in A} u(a,y)$$

$$\Leftrightarrow \min_{a\in A} \max_{b\in B} u(a,b) \geq \min_{a\in A} u(a,y)$$

$$\Leftrightarrow \min_{a\in A} \max_{b\in B} u(a,b) \geq \max_{b\in B} \min_{a\in A} u(a,b).$$

Die Ausdrücke sind wohldefiniert, da z.B. $\min_{a\in A} u(a,\_)$ die Menge aller $u \in \mathbb{R}$ liefert, die mögliche Ergebnisse bei Wahl von a beinhaltet, wovon durch $\max_{b\in B} \ldots$ das Maximum, also ein Wert $\in \mathbb{R}$ definiert wird. Die Relation $\geq$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

b) Zu zeigen: In einem Nullsummenspiel für zwei Spieler gilt:

$$\min_{s_I\in S_I} \max_{s_{II}\in S_{II}} u_{II}(s_I, s_{II}) = -\max_{s_I\in S_I} \min_{s_{II}\in S_{II}} u_I(s_I, s_{II})$$

Dazu benutzen wir die Definition des Nullsummenspiels für 2 Spieler:

$$\min_{s_I\in S_I} \max_{s_{II}\in S_{II}} u_{II}(s_I, s_{II}) = \min_{s_I\in S_I} \max_{s_{II}\in S_{II}} -u_I(s_I, s_{II})$$

$$= \min_{s_I\in S_I} (-\min_{s_{II}\in S_{II}} u_I(s_I, s_{II}))$$

$$= -\max_{s_I\in S_I} \min_{s_{II}\in S_{II}} u_I(s_I, s_{II}).$$

c) Ein Nullsummen-Spiel, für welches die Gleichung gilt, ist einfach anzugeben, da auf beiden Seiten der Gleichung der Gewinn von Spieler II maximiert wird, dabei ist die Reihenfolge egal. Wir geben $u_I(s_I, s_{II})$ an. Dabei ist nur darauf zu achten, dass der erreichte Gewinn für beide gleich ist, d.h. wenn alle anderen Werte der Tabelle größer sind als x, dann ist x der Wert, der jeweils für die Ausdrücke links und rechts der Gleichung heraus kommt. Um die Gleichung zu erfüllen muss dieser 0 sein:

$\downarrow$ I / II $\rightarrow$	A	B
a	0	2
b	2	4

Nun ist es nicht schwer, das Spiel so zu ändern, dass die Gleichung nicht mehr stimmt:

$\downarrow$ I / II $\rightarrow$	A	B
a	**1**	2
b	2	4