

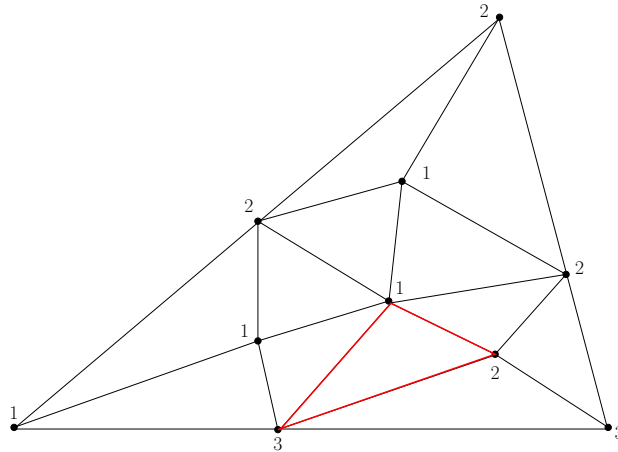
### 3.10 Die Existenz eines Nash-Gleichgewichts für endliche $n$ -Personen-Spiele

Der Beweis dieses Satzes von Nash erfolgte durch Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, wir werden deshalb zunächst einen möglichen Beweis für diesen skizzieren.

**Satz 3.86** (Lemma von Sperner (im  $\mathbb{R}^2$ ))

Gegeben sei ein Dreieck in der Ebene, dessen Ecken mit den Ziffern 1, 2 und 3 markiert seien. Im Inneren dieses Dreiecks sei eine endliche Anzahl von Punkten gewählt, welche so durch Strecken verbunden werden, daß eine Triangulation entsteht. Alle zusätzlichen Punkte werden auch mit einer der Ziffern 1, 2 oder 3 markiert – im Inneren des Dreiecks beliebig, auf den Seiten so, daß die Punkte zwischen  $i$  und  $j$  ( $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ) genau eine der Marken  $i$  oder  $j$  erhalten.

Dann ist die Anzahl der Teildreiecke, deren Ecken mit 1, 2 und 3 markiert sind (d.h. genau so wie das vollständige Dreieck) ungerade – insbesondere existiert also ein solches Teildreieck.



**Beweis:** Wir betrachten alle Seiten von Teildreiecken und nennen eine solche Strecke gut, wenn ihre Endpunkte verschiedene Markierungen haben und schlecht andernfalls. Ein vollständiges Teildreieck (eines mit drei verschiedenen Markierungen an den Eckpunkten) hat drei gute Seiten. Ein Teildreieck ohne diese Eigenschaft hat entweder drei gleiche Eckmarkierungen – also keine gute Seite – oder genau zwei gleiche Eckmarkierungen und eine andere. Im letzteren Falle sind es zwei gute Seiten und eine schlechte. Somit hat ein vollständiges Teildreieck eine ungerade Anzahl von guten Seiten, ein unvollständiges eine gerade Anzahl. Nun zählen wir die guten Seiten in der Triangulierung.

Liegt ein Endpunkt einer solchen Seite im Inneren des Dreiecks, so gehört die Seite zu zwei Teildreiecken, wird also doppelt gezählt. Die Anzahl der guten Seiten aller Teildreiecke ist demzufolge:  $2 \cdot$  Anzahl der inneren guten Seiten + Anzahl der guten Seiten auf dem Rand.

Betrachten wir eine Randseite zwischen  $i$  und  $j$ . Alle Zwischenpunkte sind nach Voraussetzung mit  $i$  oder  $j$  markiert. Gehen wir von  $i$  nach  $j$ . Jedesmal, wenn wir einen Punkt mit einer anderen Markierung als den vorangegangenen treffen, haben wir eine gute Seite. Da die äußeren Punkte verschiedene Markierungen haben, muß dies eine ungerade Anzahl von Malen geschehen. Wir haben also drei ungerade Anzahlen von guten Seiten auf dem Rand, damit auch insgesamt eine ungerade Anzahl von guten Seiten. Dies bedeutet aber, daß es eine ungerade Anzahl von vollständigen Dreiecken gibt, denn nur vollständige haben eine ungerade Anzahl von guten Seiten.

□

Die Übertragung dieses Beweises für das Lemma von Sperner auf höhere Dimensionen erfolgt mittels Induktion. Dies ist allerdings nicht 1:1 möglich, weil wir wesentlich benutzt haben, daß ein Simplex im  $\mathbb{R}^2$  (ein Dreieck) eine ungerade Anzahl von Seiten hat. Dies gilt z.B. im  $\mathbb{R}^3$  nicht, ein Tetraeder hat 4 Seiten.

Der Beweis muss also etwas anders geführt werden. Zunächst ein einfacher Satz über Graphen.

**Satz 3.87** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph und für  $v \in V$  bezeichne  $d(v)$  den Grad des Knotens, d.h. die Anzahl der zu  $v$  inzidenten Kanten. Dann gilt*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \text{card}(E)$$

**Beweis:** Jede Kante hat genau zwei Endpunkte, bei der Summe der Knotengrade werden die Kanten also doppelt gezählt wird.  $\square$

**Folgerung 3.88** *Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eines Graphen ist gerade.*

**Satz 3.89** (Lemma von Sperner (im  $\mathbb{R}^n$ ))

*Gegeben sei ein Simplex im  $\mathbb{R}^n$ , dessen Ecken mit den Ziffern  $1, 2, \dots, n+1$  markiert seien. Im Inneren dieses Simplex sei eine endliche Anzahl von Punkten gewählt, welche so durch Hyperebenen-Stücke verbunden werden, daß eine Zerlegung in Teilsimplizes entsteht. Alle zusätzlichen Punkte werden auch mit einer der Ziffern  $1, 2, \dots, n+1$  markiert – im Inneren des Simplex beliebig, auf den Seiten so, daß die Punkte nur genau eine der Marken der Ecken dieser Seite erhalten.*

*Dann ist die Anzahl der vollständigen Teilsimplizes, d.h. deren Ecken mit paarweise verschiedenen Marken  $1, \dots, n+1$  markiert sind, ungerade – insbesondere existiert also ein solches Teilsimplex.*

**Beweis:**

Induktionsanfang: der Fall  $n = 1$  wurde auch im Beweis von Satz 3.86 für  $n = 2$  benötigt. Da nur zwei Marken vorkommen und die beiden Endpunkte der Strecke verschieden markiert sind, muß es eine ungerade Zahl von Teilstrecken geben, deren Endpunkte verschiedene Marken haben.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für den  $\mathbb{R}^{n-1}$

Induktionsschritt: Wir betrachten einen Teilgraphen des dualen Graphen:

Jedem Teilsimplex wird ein Knoten zugeordnet und ein Knoten dem Komplement des großen Simplex.

Jeder Seitenfläche maximaler Dimension  $n - 1$  eines Teilsimplex, deren Ecken die Marken  $1, \dots, n$  tragen, wird eine Kante zugeordnet, welche die Knoten zu den zur Seitenfläche inzidenten Teilsimplizes bzw. dem Äußeren des Simplex verbindet.

Auf allen Seitenflächen des Simplex, welche den Knoten mit der Marke  $n+1$  enthält, können nach Konstruktion der Markierung nicht alle Marken  $1, \dots, n$  vorkommen. Es gibt also keine Kante des dualen Graphen, welche diese Seitenflächen passiert.

Ein vollständiges Teilsimplex hat so wie das große Simplex nur genau eine Seite mit den Marken  $1, \dots, n$ , im dualen Graphen entspricht einem solchen Teilsimplex also ein Knoten des ungeraden Grades 1.

Haben die Ecken eines Teilsimplex nicht alle verschiedene Marken, so gibt es zwei Fälle:

wenn eine der Marken  $1, \dots, n$  nicht vorkommt, so ist der Grad des zugeordneten Knoten 0

wenn alle Marken  $1, \dots, n$  vorkommen, aber die Marke  $n+1$  nicht vorkommt, so kommt genau eine der Marken  $1, \dots, n$  doppelt vor. Dies sei o.B.d.A. die Marke 1. Die Seite der Dimension  $n - 2$  des Teilsimplex mit den Marken  $2, \dots, n$  ist zu genau zwei Seiten der Dimension  $n - 1$  inzident. Der Grad des zugeordneten Knoten ist somit in diesem Fall 2.

Die Seitenfläche mit den Marken  $1, \dots, n$  an den Ecken ist ein Simplex im  $\mathbb{R}^{n-1}$  und enthält nach Induktionsvoraussetzung eine ungerade Anzahl von Teilsimplizes mit den Marken  $1, \dots, n$  an den Ecken, denen also im dualen Graphen eine Kante zugeordnet ist. Der Knoten zum Komplement des Simplex hat somit ungeraden Grad.

Nach Folgerung 3.88 ist im dualen Graphen die Anzahl von Knoten ungeraden Grades gerade, es gibt also eine ungerade Anzahl von Teilsimplizes, deren zugeordneter Knoten ungeraden Grad hat. Dies können nur vollständige Teilsimplizes sein.  $\square$

**Satz 3.90** (Brouwerscher Fixpunktsatz)

*Es sei  $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt,  $f : C \rightarrow C$  eine stetige Funktion. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.*

**Bemerkung:**

- Die Form spielt keine Rolle, jede zu einer gegebenen Menge homöomorphe Menge hat die selbe Eigenschaft. Insbesondere kann man sich für den Beweis auf die Einheitskugel oder ein Simplex zurückziehen.
- Konvexität spielt eine Rolle (eigentlich: einfach zusammenhängend) – auf einem Torus z.B. ist jede Drehung um  $0 < \alpha < \Pi$  eine stetige Selbstabbildung ohne Fixpunkt.
- Kompaktheit ist ebenfalls wesentlich: Betrachten wir die unbeschränkte konvexe Menge  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x) = x + v$  mit  $v \neq 0$ , so ist  $f$  eine stetige Selbstabbildung ohne Fixpunkt. Betrachten wir andererseits die offene beschränkte konvexe Menge  $B(0, 1)$  (offene Einheitskugel um den Ursprung) mit  $f(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)^T$ . Die Selbstabbildung  $f$  hat keinen Fixpunkt auf  $B(0, 1)$ , denn der einzige Fixpunkt auf der abgeschlossenen Einheitskugel ist  $(1, 0, \dots, 0)^T \notin B(0, 1)$ .

**Beweis:** (für  $n = 1$  und  $n = 2$ )

$n = 1$ :  $C = [0, 1]$  Jede stetige Funktion  $f : C \rightarrow C$  muß einen Punkt mit  $g(x) = x$  gemeinsam haben.

Beweis: Ist  $f(0) = 0$  oder  $f(1) = 1$ , so sind wir fertig. Ist  $f(0) \neq 0$  und  $f(1) \neq 1$ , so betrachten wir die Hilfsfunktion  $h(x) = f(x) - x$ . Es gilt

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - 0 > 0 \\ h(1) &= f(1) - 1 < 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein  $x \in ]0, 1[$  mit  $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ .

$n = 2$ : Mit dem Sperner-Lemma für  $\mathbb{R}^2$ : jede stetige Funktion von einem Dreieck auf das Dreieck hat einen Fixpunkt.

Beweis: Wir stellen die Punkte im Dreieck mit baryzentrischen Koordinaten dar. Die Ecken seien mit  $E^1, E^2, E^3$  bezeichnet.  $x = (a, b, c) \iff x = a \cdot E^1 + b \cdot E^2 + c \cdot E^3$ ,  $a, b, c \geq 0$ ,  $a + b + c = 1$ . Wir bezeichnen  $f(x) = (a', b', c')$ .

Sei nun eine Folge von Triangulationen des Dreiecks betrachtet, für welche der Durchmesser der Teildreiecke der  $k$ -ten Triangulation kleiner als  $\frac{1}{k}$  ist. Jeder Eckpunkt der Triangulation wird wie folgt markiert:

- ist  $a' < a$ , so wird  $(a, b, c)$  mit 1 markiert,
- ist  $a' \geq a$ , aber  $b' < b$ , so wird  $(a, b, c)$  mit 2 markiert,
- ist  $a' \geq a$  und  $b' \geq b$  (somit folgt  $c' \leq c$ ) und ist  $c' < c$ , so wird  $(a, b, c)$  mit 3 markiert.

Kann ein Punkt so nicht markiert werden, gilt  $a' \geq a$ ,  $b' \geq b$  und  $c' \geq c$ .

Wegen  $a + b + c = 1 = a' + b' + c'$  folgt daraus, daß  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $c' = c$  und der Punkt ist ein Fixpunkt, der Beweis ist damit in diesem Fall abgeschlossen.

Können alle Punkte so markiert werden, ist dies eine Sperner-Markierung:

Ist  $f(1, 0, 0) = (a', b', c')$  so entweder  $a' = 1$  und der Punkt ist ein Fixpunkt oder  $a' < 1$  und er erhält die Marke 1.

Ist  $f(0, 1, 0) = (a', b', c')$  so gilt  $a' \geq 0$  und entweder  $b' = 1$  und der Punkt ist ein Fixpunkt oder  $b' < 1$  und er erhält die Marke 2.

Ist  $f(0, 0, 1) = (a', b', c')$  so gilt  $a' \geq 0$ ,  $b' \geq 0$  und entweder  $c' = 1$  und der Punkt ist ein Fixpunkt oder  $c' < 1$  und er erhält die Marke 3.

Markierung auf den Seiten: Betrachten wir den Punkt  $(a, b, 0)$  zwischen  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$ . Ist  $a' \geq a$ ,  $b' \geq b$ , so gilt wegen  $a + b = 1$ :  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $c' = 0$  und der Punkt ist ein Fixpunkt. Andernfalls erhält er eine der Marken 1 oder 2. Analog gilt dies für die anderen Seiten.

Die Markierung erfüllt also die Bedingungen des Lemmas von Sperner, es gibt also in jeder der Triangulierungen ein vollständiges Teildreieck. Dieses Teildreieck in der  $n$ -ten Triangulierung habe die Ecken  $(x_{n,1}, y_{n,1}, z_{n,1})$ ,  $(x_{n,2}, y_{n,2}, z_{n,2})$ ,  $(x_{n,3}, y_{n,3}, z_{n,3})$ . Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert nun: Es gibt eine Teilfolge  $n_k$ , so daß  $(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \rightarrow (x, y, z)$  für  $i = 1, 2, 3$ . Dies geht für alle drei Ecken, da die Durchmesser der Teildreiecke gegen Null gehen.

Als Alternative zur Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß könnte man jeweils eine Triangulierung des vollständigen Teildreiecks betrachten.

Es seien  $f(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) = (x'_{n_k,i}, y'_{n_k,i}, z'_{n_k,i})$ ,  $f(x, y, z) = (x', y', z')$ .

Wegen der Vollständigkeit des Teildreiecks in der Sperner-Markierung gilt

$$\begin{aligned} x'_{n_k,1} &< x_{n_k,1} \\ y'_{n_k,2} &< y_{n_k,2} \\ z'_{n_k,3} &< z_{n_k,3} \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt daraus  $x' \leq x$ ,  $y' \leq y$ ,  $z' \leq z$  und damit ist  $(x, y, z)$  ein Fixpunkt.  $\square$

**Satz 3.91** *Die gemischte Erweiterung eines endlichen  $n$ -Personen-Spiels hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

**Beweis:** Zu der reinen Strategie  $s_j^i$  des Spielers  $i$  und  $x \in \hat{S}$  wird definiert

$$\Phi_{ij}(x) = \max\{0, \hat{u}_i(s_j^i, x^{-i}) - \hat{u}_i(x)\}$$

und damit die Abbildung  $f : \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}^{(\sum_{i=1}^n m_i)}$ ,  $f(x) = (f_1^1(x), f_2^1(x), \dots, f_{m_1}^1(x), \dots, f_{m_n}^n(x))$  mittels

$$f_j^i(x) = \frac{x_j^i + \Phi_{ij}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \Phi_{ik}(x)}$$

Der Nenner ist stets größer gleich 1, der Zähler nichtnegativ, es gilt

$$\sum_{j=1}^{m_i} f_j^i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} x_j^i + \sum_{j=1}^{m_i} \Phi_{ij}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \Phi_{ik}(x)} = 1$$

Somit bildet  $f$  die Menge  $\hat{S}$  in sich selbst ab.  $\hat{S}$  ist konvex und kompakt,  $f$  ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen (da der Nenner nie Null wird). Der Brouwersche Fixpunktsatz liefert also die Existenz eines Fixpunktes  $\bar{x}$ , d.h.

$$\bar{x}_j^i = \frac{\bar{x}_j^i + \Phi_{ij}(\bar{x})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \Phi_{ik}(\bar{x})} \quad \forall i, j$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Nenner, so erhalten wir

$$\bar{x}_j^i + \bar{x}_j^i \sum_{k=1}^{m_i} \Phi_{ik}(\bar{x}) = \bar{x}_j^i + \Phi_{ij}(\bar{x}) \quad \forall i, j \quad (*)$$

Nach Lemma 3.37 gibt es für jeden Spieler  $i$  ein  $j_i$ , so daß  $\bar{x}_{j_i}^i > 0$  und  $\hat{u}_i(s_{j_i}^i, \bar{x}^{-i}) - \hat{u}_i(\bar{x}) \leq 0$ , somit ist  $\Phi_{ij_i}(\bar{x}) = 0$ . Wir wählen dieses  $j_i$  in der Gleichung  $(*)$  und erhalten  $\bar{x}_{j_i}^i \sum_{k=1}^{m_i} \Phi_{ik}(\bar{x}) = 0$ , woraus wegen  $\bar{x}_{j_i}^i > 0$  und  $\Phi_{ik}(\bar{x}) \geq 0$  folgt  $\Phi_{ik}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i, k$  und damit ergibt sich

$$\hat{u}_i(s_k^i, \bar{x}^{-i}) \leq \hat{u}_i(\bar{x}) \quad \forall i, k$$

nach Satz 3.38 ist der Punkt  $\bar{x}$  also ein Nash-Gleichgewicht.  $\square$

### 3.11 Existenz eines Nash-Gleichgewichts für $n$ -Personen-Spiele mit kompakten Strategiemengen

Die Existenz eines Nash-Gleichgewichts läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen auch für nicht-endliche Spiele beweisen, was wir im folgenden tun. Der Beweis in diesem Fall beruht auf einer Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf mengenwertige Abbildungen, dem Fixpunktsatz von Kakutani.

**Definition 3.92** Eine Punkt-Menge-Abbildung  $G : X \rightrightarrows Y$  heißt oberhalbstetig (im Sinne von Berge) in  $x^0 \in X$ , wenn für jede offene Menge  $M$  mit  $G(x^0) \subseteq M$  eine Umgebung  $V(x^0)$  existiert, so daß  $G(x) \subseteq M \forall x \in V(x^0)$ . Sie heißt oberhalbstetig, wenn sie für alle  $x \in X$  oberhalbstetig in  $x$  ist.

#### Satz 3.93 (Fixpunktsatz von Kakutani)

Sei  $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt. Ist  $F : X \rightrightarrows X$  eine oberhalbstetige Punkt-Menge-Abbildung und  $F(x)$  nichtleer, konvex und abgeschlossen für alle  $x \in X$ . Dann existiert ein  $x^0 \in X$  mit  $x^0 \in F(x^0)$ .

$x^0$  heißt Fixpunkt von  $F$ .

**Beweis:** Betrachten als Menge  $X$  ein  $n$ -Simplex. Unterteile  $X$  in einen  $n$ -simplicialen Komplex (verallg. Triangulierung), so daß jedes Teilsimplex in einer  $\frac{1}{k}$ -Kugel enthalten ist. Wir definieren eine Funktion  $f_k : X \rightarrow X$  wie folgt: für jede Ecke  $v$  eines Teilsimplex wähle  $f_k(v) \in F(v)$  beliebig und setze  $f_k$  linear über jedem Teilsimplex fort. Dann ist  $f_k$  stetig und hat nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt  $x^k$ . Wegen Kompaktheit von  $X$  existiert eine konvergente Teilfolge von  $\{x^k\}$ , o.B.d.A. sei die gesamte Folge konvergent und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$ .

Wir zeigen, daß  $x^0$  Fixpunkt von  $F$  ist. Seien  $x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k$  die Ecken eines Teilsimplex  $S^k$ , welches den Punkt  $x^k$  enthält (könnte nicht eindeutig sein, wenn  $x^k$  auf einer Seite liegt). Nach Wahl der Unterteilung geht der Durchmesser der  $S^k$  gegen Null. Wir bezeichnen  $f(x_i^k) = y_i^k$ . Dann ist ( $f$  wurde linear über  $S^k$  fortgesetzt)  $x^k = f(x^k) = \sum_{i=0}^n \lambda_i^k y_i^k$  mit  $\sum_{i=0}^n \lambda_i^k = 1$ ,  $\lambda_i^k \geq 0 \forall i, k$ . Die  $y_i^k$  sind aus einer kompakten Menge, ebenso die  $\lambda_i^k$ . Es existieren jeweils konvergente Teilfolgen. Wir nehmen wieder zur Vereinfachung der Schreibweise an, daß die gesamten Folgen konvergieren:  $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$ ,  $y_i^k \rightarrow y_i$ . Da für alle  $k$  gilt  $\sum_{i=0}^n \lambda_i^k = 1$ ,  $\lambda_i^k \geq 0 \forall i$ , gelten diese Bedingungen auch für die Grenzwerte. Somit ist

$$x^0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i y_i, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \forall i$$

Wegen der Oberhalbstetigkeit von  $F$  und der Abgeschlossenheit von  $F(x^0)$  folgt aus  $x^k \rightarrow x^0$ ,  $y_i^k \rightarrow y_i$  und  $y_i^k \in F(x_i^k)$ , daß  $y_i \in F(x^0)$  für  $i = 0, \dots, n$ . Aus der Konvexität von  $F(x^0)$  ergibt sich  $x^0 \in F(x^0)$ .  $\square$

**Definition 3.94** Sei  $C$  eine konvexe Menge,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  heißt quasikonvex auf  $C$ , wenn für alle  $x, y \in C$  gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad \forall \lambda \in ]0, 1[$$

$f$  heißt quasikonkav, wenn  $-f$  quasikonvex ist.

**Satz 3.95** Das  $n$ -Personen-Spiel  $\Gamma = (\mathcal{P}, S, \mathcal{U})$  erfülle die folgenden Bedingungen

- i)  $S^i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$  kompakt und konvex für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$
- ii) Die Funktion  $u_i : S^i \times S^{-i}$  sei stetig und für festes  $s^{-i} \in S^{-i}$  sei sie quasikonkav auf  $S^i$  für alle  $i$ .

Dann besitzt  $\Gamma$  ein Nash-Gleichgewicht.

Für den Beweis brauchen wir noch Eigenschaften der Abbildung der besten Antwort.

**Lemma 3.96** Die Abbildung  $r$  der besten Antwort ist unter den Voraussetzungen des Satzes 3.95 wohldefiniert und alle Mengen  $r(s)$  für  $s \in S$  sind konvex und abgeschlossen.

**Beweis:** Da  $u_i$  stetig ist und  $S^i$  kompakt, existiert nach dem Satz von Weierstraß das Maximum in der Definition der Abbildung  $r^i$ . Damit ist  $r^i$  wohldefiniert für alle  $i$ , also auch  $r$ . Das definierende Maximum ist das Maximum einer quasikonkaven Funktion über einer konvexen Menge, damit ist  $r^i(s^{-i})$  als Menge aller Punkte, in denen das Maximum angenommen wird, konvex (ÜA). Das Kreuzprodukt konvexer Mengen ist wieder konvex, somit  $r(s)$  konvex für alle  $s \in S$ . Die Abgeschlossenheit von  $r(s)$  folgt aus der Stetigkeit der  $u_i$ , denn für jede konvergente Folge  ${}^k t \in r(s)$  folgt aus der Ungleichung  $u_i({}^k t^i, s^{-i}) \geq u_i(s^i, s^{-i})$  die Gültigkeit der Ungleichung im Grenzpunkt.  $\square$

**Lemma 3.97** Die Abbildung  $r$  der besten Antwort ist unter den Voraussetzungen des Satzes 3.95 oberhalbstetig.

**Beweis:** Wir betrachten zwei konvergente Folgen  ${}^k s \in S$  und  ${}^k t \in r({}^k s)$ , es gelte  ${}^k s \rightarrow {}^0 s$ ,  ${}^k t \rightarrow {}^0 t$ . Zu zeigen ist:  ${}^0 t \in r({}^0 s)$ .

Zunächst ist  ${}^0 t \in S$  wegen der Kompaktheit von  $S$ .

Seien für jeden Spieler  $i$  die Punkte  $z^i \in r^i({}^0 s^{-i})$  betrachtet. Nach Definition von  $r$  gilt für diese insbesondere

$$u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) \leq u_i(z^i, {}^0 s^{-i})$$

Angenommen, für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelte  $u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) < u_i(z^i, {}^0 s^{-i})$ , dann betrachten wir

$$\varepsilon = u_i(z^i, {}^0 s^{-i}) - u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) > 0 \quad (*)$$

Da nach Voraussetzung  $u_i$  stetig ist, existiert zu jedem  $\delta > 0$  ein  $k_\delta \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $k \geq k_\delta$

$$|u_i({}^k t^i, {}^k s^{-i}) - u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i})| < \delta \quad (**)$$

und

$$|u_i(z^i, {}^0 s^{-i}) - u_i(z^i, {}^k s^{-i})| < \delta \quad (***)$$

Wählen wir  $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ , dann folgt

$$u_i(z^i, {}^k s^{-i}) \underset{(***)}{>} u_i(z^i, {}^0 s^{-i}) - \frac{\varepsilon}{4} \underset{\text{subtr. } \frac{\varepsilon}{2}}{>} u_i(z^i, {}^0 s^{-i}) - \frac{3\varepsilon}{4} \underset{(*)}{=} u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) + \frac{\varepsilon}{4} \underset{(**)}{>} u_i({}^k t^i, {}^k s^{-i})$$

woraus folgen würde  ${}^k t^i \notin r^i({}^k s^{-i})$  im Widerspruch zur Wahl der  ${}^k t$ .

Somit muß für alle  $i$  gelten  $u_i({}^0 t^i, {}^0 s^{-i}) = u_i(z^i, {}^0 s^{-i})$  für  $z^i \in r^i({}^0 s^{-i})$ , damit  ${}^0 t \in r({}^0 s)$  und Oberhalbstetigkeit ist gezeigt.  $\square$

**Beweis von Satz 3.95:** Die Abbildung  $r : S \rightarrow S$  ist oberhalbstetig mit nichtleeren, konvexen und abgeschlossenen Bildern.  $S$  ist konvex und kompakt nach Voraussetzung i), alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Kakutani sind damit erfüllt.  $r$  hat also einen Fixpunkt in  $S$ , was ein äquivalenter Ausdruck dafür ist, daß dieser Punkt Nash-Gleichgewicht ist.  $\square$

### 3.12 Spiele auf dem Einheitsquadrat

Als Spiel auf dem Einheitsquadrat bezeichnet man ein Zweipersonen-Nullsummenspiel mit den unendlichen Strategiemengen  $S^1 = S^2 = [0, 1]$  und einer Auszahlungsfunktion  $u(x, y)$ .

**Beispiel 3.98**  $u(x, y) = (x - y)^2$  Interpretation: Spieler 1 möchte so weit wie möglich von Spieler 2 entfernt sein (Verfolgungsspiel). Wie sehen hier unterer und oberer Spielwert aus?

$$\underline{v} = \sup_{x \in [0,1]} \inf_{y \in [0,1]} u(x, y) = \sup_{x \in [0,1]} \inf_{y \in [0,1]} (x - y)^2$$

Das innere Infimum ist Null. da  $(x - y)^2 \geq 0$  und  $y = x$  eine mögliche Wahl ist, also

$$\underline{v} = \sup_{x \in [0,1]} (x - x)^2 = 0$$

$$\bar{v} = \inf_{y \in [0,1]} \sup_{x \in [0,1]} (x - y)^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\Phi(y)}$

Die Funktion  $(x - y)^2$  ist konvex, das Supremum wird auf dem Rand angenommen, also

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \sup_{x \in [0,1]} (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \max\{1 - 2y + y^2, y^2\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $\bar{v} = \inf_{y \in [0,1]} \Phi(y) = \Phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > \underline{v}$ .

Somit gibt es in diesem Spiel keinen Gleichgewichtspunkt – ÜA welche Voraussetzung von Satz 3.95 ist nicht erfüllt?

Die folgenden Verallgemeinerungen von Lemma 3.24 und Satz 3.26 zeigen, wann ein Gleichgewicht existiert.

**Lemma 3.99** Sei  $\Gamma = (\{P_1, P_2\}, S^1 \times S^2, u)$  ein Zweipersonen-Nullsummenspiel mit beliebigen Strategiemengen. Dann gilt  $\underline{v} \leq \bar{v}$ .

**Beweis:** Seien  $x \in S^1$ ,  $y \in S^2$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \inf_{w \in S^2} u(x, w) &\leq u(x, y) \leq \sup_{z \in S^1} u(z, y) \\ \implies \inf_{w \in S^2} u(x, w) &\leq \sup_{z \in S^1} u(z, y) \quad \forall x \in S^1 \quad \forall y \in S^2 \end{aligned}$$

Die linke Seite hängt nicht von  $y$  ab, wir können zum Infimum übergehen:

$$\inf_{w \in S^2} u(x, w) \leq \inf_{y \in S^2} \sup_{z \in S^1} u(z, y)$$

und die rechte Seite hängt nicht von  $x$  ab, also

$$\underline{v} = \sup_{x \in S^1} \inf_{w \in S^2} u(x, w) \leq \inf_{y \in S^2} \sup_{z \in S^1} u(z, y) = \bar{v}$$

□

**Satz 3.100** Sei  $\Gamma = (\{P_1, P_2\}, S^1 \times S^2, u)$  ein Zweipersonen-Nullsummenspiel mit beliebigen Strategiemengen. Dann existiert in  $\Gamma$  ein Gleichgewichtspunkt genau dann, wenn gelten

i) In der Definition von  $\underline{v}$  wird das äußere Extremum angenommen, d.h.

$$\exists x^* \in S^1 : \underline{v} = \inf_{y \in S^2} u(x^*, y)$$

und in  $\bar{v}$  wird das äußere Extremum angenommen

$$\exists y^* \in S^2 : \bar{v} = \sup_{x \in S^1} u(x, y^*)$$

ii)  $\underline{v} = \bar{v}$ .

**Beweis:**

( $\Rightarrow$ ):  $\exists(x^*, y^*) \in S^1 \times S^2$  :

$$u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y) \quad \forall x \in S^1 \quad \forall y \in S^2$$

$\Rightarrow \sup_{x \in S^1} u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq \inf_{y \in S^2} u(x^*, y)$  und es folgt

$$\bar{v} = \inf_{y \in S^2} \sup_{x \in S^1} u(x, y) \leq \sup_{x \in S^1} u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq \inf_{y \in S^2} u(x^*, y) \leq \sup_{x \in S^1} \inf_{y \in S^2} u(x, y) = \underline{v}$$

Mit Lemma 3.99 folgt Gleichheit und daß jeweils die äußeren Extrema angenommen werden in  $x^*$  bzw.  $y^*$ .

( $\Leftarrow$ ): Die äußeren Extrema werden angenommen, also folgt mit ii):  $\exists x^* \in S^1 \exists y^* \in S^2$  :

$\underline{v} = \inf_{y \in S^2} u(x^*, y) = \bar{v} = \sup_{y \in S^2} u(x, y^*)$ . Allgemein gilt  $\inf_{y \in S^2} u(x^*, y) \leq u(x^*, y^*) \leq \sup_{x \in S^1} u(x, y^*)$ ,

aus den Voraussetzungen folgt die Gleichheit und damit

$$\begin{aligned} u(x^*, y^*) &= \sup_{x \in S^1} u(x, y^*) \geq u(w, y^*) & \forall w \in S^1 \\ u(x^*, y^*) &= \inf_{y \in S^2} u(x^*, y) \leq u(x^*, z) & \forall z \in S^2 \end{aligned}$$

d.h.  $(x^*, y^*)$  ist Gleichgewichtspunkt.  $\square$

### Folgerung 3.101 (Rechteckeigenschaft)

Sei  $\Gamma = (\{P_1, P_2\}, S^1 \times S^2, u)$  ein Zweipersonen-Nullsummenspiel. Sind  $(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$  und  $(\hat{s}^1, \hat{s}^2)$  zwei Gleichgewichte in  $\Gamma$ , so auch  $(\bar{s}^1, \hat{s}^2)$  und  $(\hat{s}^1, \bar{s}^2)$  und es gilt

$$u(\bar{s}^1, \bar{s}^2) = u(\bar{s}^1, \hat{s}^2) = u(\hat{s}^1, \bar{s}^2) = u(\hat{s}^1, \hat{s}^2)$$

**Beweis:** ÜA

Satz 3.100 und das Beispiel 3.98 zeigten, daß ein Spiel auf dem Einheitsquadrat im Allgemeinen kein Nash-Gleichgewicht besitzt. Es stellt sich die Frage: hilft auch hier der Übergang zu gemischten Strategien?

$S^i = [0, 1] \rightarrow \hat{S}^i$  Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $[0, 1]$ . Analog zu endlichen Spielen definieren wir die Gewinnfunktion als Erwartungswert:

$F \in \hat{S}^1, G \in \hat{S}^2$  seien Verteilungsfunktionen  $\hat{u}(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dF(x) dG(y)$  (Riemann-Stieltjes-

Integral, dieses existiert, wenn  $u$  stetig auf  $S$  oder beschränkt auf  $S$  ist).  $S$  ist wiederum eingebettet in  $\hat{S}$  durch Wahl der Verteilungsfunktionen

$$F = I_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < a \\ 1 & \text{wenn } x \geq a \end{cases} \quad \text{für } a \in [0, 1]$$

Satz 3.100 ist anwendbar auf  $\hat{\Gamma}$ .

**Satz 3.102** Sei  $\Gamma = (\{P_1, P_2\}, S, u)$  ein Spiel auf dem Einheitsquadrat und  $\hat{\Gamma} = (\{P_1, P_2\}, \hat{S}, \hat{u})$  seine gemischte Erweiterung. Ist  $u$  stetig (als Funktion zweier Variablen), so besitzt  $\hat{\Gamma}$  ein Nash-Gleichgewicht.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst:  $\exists F_0 \in \hat{S}^1$ , so daß  $\underline{v} = \inf_{G \in \hat{S}^2} \hat{u}(F_0, G)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \sup_{F \in \hat{S}^1} \inf_{G \in \hat{S}^2} \hat{u}(F, G) \\ &= \sup_{F \in \hat{S}^1} \inf_{G \in \hat{S}^2} \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dF(x) dG(y) \\ &= \sup_{F \in \hat{S}^1} \min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 u(x, y) dF(x) \end{aligned}$$



Die letzte Gleichung gilt, da  $\inf_{G \in \hat{S}^2} \int_0^1 \Phi(y) dG(y) = \min_{0 \leq y \leq 1} \Phi(y)$  für alle stetigen  $\Phi$ .

Sei  $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$  gegeben, dann existiert nach Definition des Supremums ein  $F_n \in \hat{S}^1$ , so daß

$$\min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 u(x, y) dF_n(x) \leq \underline{v} \leq \min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 u(x, y) dF_n(x) + \varepsilon_n \quad (*)$$

Zur Folge  $(\varepsilon_n)$  existiert so eine Folge  $(F_n)$  von Verteilungsfunktionen, in welcher es eine schwach konvergente (= punktweise Konvergenz der Verteilungsfunktionen in Stetigkeitspunkten der Grenzfunktion = Konvergenz in Verteilung) Teilfolge gibt (Auswahlsatz von Helly für Folgen von Verteilungsfunktionen). Die Grenzfunktion muß keine Verteilungsfunktion sein, da nicht unbedingt rechtsseitig stetig.

O.B.d.A. sei die ganze Folge schwach konvergent, also existiert eine Funktion  $F_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ . Wir setzen

$$\bar{F}_0(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F_0(x + \varepsilon) & x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

Damit ist  $\bar{F}_0 \in \hat{S}^1$  und unterscheidet sich von  $F_0$  nur in den Unstetigkeitsstellen von  $F_0$ . Wegen der Monotonie und Beschränktheit ist die Menge der Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen) abzählbar, somit gilt

$$\int_0^1 u(x, y) dF_0(x) = \int_0^1 u(x, y) d\bar{F}_0(x)$$

und wegen der Stetigkeit von  $u$  gilt mit der schwachen Konvergenz der Folge  $(F_n)$  auch

$$\int_0^1 u(x, y) d\bar{F}_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u(x, y) dF_n(x)$$

Aus (\*) erhalten wir für  $n \rightarrow \infty$ :  $\underline{v} \leq \min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 u(x, y) d\bar{F}_0(x)$ . Andererseits gilt für jedes Element von  $\hat{S}^1$  nach der Definition von  $\underline{v}$  als Supremum die umgekehrte Ungleichung, deshalb

$$\underline{v} = \min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 u(x, y) d\bar{F}_0(x) = \inf_{G \in \hat{S}^2} \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) d\bar{F}_0(x) dG(y) = \inf_{G \in \hat{S}^2} \hat{u}(\bar{F}_0, G).$$

das äußere Supremum wird also angenommen. Ähnlich zeigt man dies für das äußere Extremum in  $\bar{v}$ .

Bleibt zu zeigen  $\underline{v} = \bar{v}$ . Dazu betrachten wir die Punkte  $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$  mit  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Die Matrix  $A_n = (a_{ij}^n)_{i,j=1}^n$  sei definiert durch

$$a_{ij}^n = u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \quad \forall n, i, j$$

Das Matrixspiel mit der Matrix  $A_n$  hat nach dem Hauptsatz über Matrixspiele einen Sattelpunkt  $(r^n, s^n)$  und der Wert des Spiels ist  $w_n = r^{nT} A_n s^n$ .

$u$  ist stetig auf der kompakten Menge  $S$  und daher gleichmäßig stetig auf  $S$ . Somit existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß  $|u(x, y) - u(x', y')| < \varepsilon$  falls  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| < \delta$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann wählen wir  $n$  so groß, daß für das zugehörige  $\delta$  gilt:  $\frac{1}{n} < \delta$ .

Sei nun  $y \in [0, 1]$  gegeben und bezeichnen wir  $j(y) = \lfloor ny \rfloor$ . Dann gilt  $\left| y - \frac{j(y)}{n} \right| < \frac{1}{n} < \delta$  (\*\*),

Der Lösung  $(r^n, s^n)$  des Matrixspiels mit  $A_n$  wird die Verteilungsfunktion (Treppenfunktion)  $F_n$  zugeordnet mit

$$F_n(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k r_i^n & \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Wir betrachten nun die Punkte  $(x, y) \in S$  und  $(x, \frac{j(y)}{n})$ . (\*\*) liefert  $\left\| (x, y) - (x, \frac{j(y)}{n}) \right\| < \frac{1}{n} < \delta$ , woraus wegen gleichmäßiger Stetigkeit folgt

$$\left| u\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) - u(x, y) \right| < \varepsilon$$

Es ergibt sich

$$\int_0^1 \left( u\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) - u(x, y) \right) dF_n(x) \leq \int_0^1 \left| u\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) - u(x, y) \right| dF_n(x) \leq \varepsilon \int_0^1 dF_n(x) = \varepsilon$$

und daher für jedes  $y \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x, y) dF_n(x) &\geq \int_0^1 u\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) dF_n(x) - \varepsilon \\ &\stackrel{F_n \text{ Treppenfunktion}}{=} \sum_{i=0}^n u\left(\frac{i}{n}, \frac{j(y)}{n}\right) r_i^n - \varepsilon \\ &\stackrel{\text{Def. von } A_n}{=} \sum_{i=0}^n a_{ij(y)}^n r_i^n - \varepsilon \\ &= r^{nT} A_n \underbrace{e^{j(y)}}_{\text{eine Strat.}} - \varepsilon \geq \underbrace{w_n}_{\text{optimal}} - \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \sup_{F \in \hat{S}^1} \inf_{G \in \hat{S}^2} \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dF(x) dG(y) \\ &\geq \inf_{G \in \hat{S}^2} \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dF_n(x) dG(y) \\ &= \min_{y \in [0, 1]} \int_0^1 u(x, y) dF_n(x) \geq w_n - \varepsilon \end{aligned}$$

Analog läßt sich zeigen  $\bar{v} \leq w_n + \varepsilon$  und mit Lemma 3.99 somit

$$w_n - \varepsilon \leq \underline{v} \leq \bar{v} \leq w_n + \varepsilon \quad (***)$$

Dabei ist zu beachten, daß  $n$  durch die Wahl von  $\varepsilon$  bestimmt ist (durch die Forderung  $\frac{1}{n} < \delta$ ) und somit bei Verkleinerung von  $\varepsilon$  ein größeres  $n$  gewählt werden muß. Wir können also noch nicht einfach daraus, daß die Ungleichung für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, auf Gleichheit schließen – dazu brauchen wir Konvergenz der  $w_n$ .

Wir wissen aber:  $w_n = r^n A_n^T s^n$  mit  $a_{ij}^n = u(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$  und  $u$  ist stetig auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Daher existiert eine reelle Konstante  $c$  mit  $|u(x, y)| \leq c \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , somit

$$|w_n| = \left| \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_i^n a_{ij}^n s_j^n \right| \leq c \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_i^n s_j^n = c$$

Aufgrund der Beschränktheit der Folge  $(w_n)$  existiert eine konvergente Teilfolge, der Grenzwert sei  $\bar{w}$ . Für diese folgt aus (\*\*\*) im Grenzwert

$$\bar{w} \leq \underline{v} \leq \bar{v} \leq \bar{w} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \bar{v}$$

Satz 3.100 ist also anwendbar und liefert die Existenz eines Nash-Gleichgewichts.  $\square$

Die im Beweis konstruierten Matrixspiele approximieren das stetige Spiel beliebig genau, ihre optimalen Strategien approximieren die optimale Strategie des Spiels auf dem Einheitsquadrat. Dabei hängt die Anzahl der für eine hinreichende Genauigkeit benötigten Strategien des Matrixspiels von den Eigenschaften von  $u(x, y)$  (über die gleichmäßige Stetigkeit) ab und kann sehr groß werden, in dem Prozeß sind also immer größer werdende lineare Optimierungsprobleme zu lösen, welche optimale Strategien  $F_n(x)$  für den ersten Spieler und mit der gleichen Konstruktion und dem Problem für den zweiten Spieler  $G_n(y)$  liefern. Wir erhalten für eine konvergente Teilfolge der  $w_n$ :  $F_n \rightarrow F^*$ ,  $G_n \rightarrow G^*$  (schwache Konvergenz) und aus Satz 3.100 erhalten wir:  $(F^*, G^*)$  ist ein Paar optimaler Strategien genau dann, wenn

$$\inf_{G \in \hat{S}^2} \hat{u}(F^*, G) = \sup_{F \in \hat{S}^1} \inf_{G \in \hat{S}^2} \hat{u}(F, G) = \inf_{G \in \hat{S}^2} \sup_{F \in \hat{S}^1} \hat{u}(F, G) = \sup_{F \in \hat{S}^1} \hat{u}(F, G^*) = \hat{u}(F^*, G^*)$$

Kann man also (unter Ausnutzung der bereits verwendeten Eigenschaft der Stieltjes-Integrale) zeigen, daß

$$\min_{y \in [0,1]} \int_0^1 u(x, y) dF^*(x) = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 u(x, y) dG^*(y)$$

so ist gezeigt, daß beide Strategien optimal sind.

**Satz 3.103 (Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten)**

Für die gemischte Erweiterung  $\hat{\Gamma}$  eines Spiels auf dem Einheitsquadrat mit Spielwert  $v$  gilt

- i) Sei  $G^*$  eine Minimax-Strategie für Spieler 2 und  $I_< = \left\{ x \in [0, 1] \mid \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) < v \right\}$ , so gilt  $P_{F^*}(I_<) = 0$  für jede Maximin-Strategie von Spieler 1.
- ii) Ist  $F^*$  Maximin-Strategie für Spieler 1 und  $J_> = \left\{ y \in [0, 1] \mid \int_0^1 u(x, y) dF^*(x) > v \right\}$ , so gilt  $P_{G^*}(J_>) = 0$  für jede Minimax-Strategie  $G^*$  von Spieler 2.

**Beweis:** Beweis von i):  $G^*$  Minimax und  $x \in [0, 1]$  beliebig, so gilt  $\int_0^1 u(x, y) dG^*(y) \leq v$ , damit  $[0, 1] = I_< \cup I_=$  mit  $I_= = \left\{ x \in [0, 1] \mid \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) = v \right\}$ . Ist nun  $F^*$  eine beliebige Maximin-Strategie von Spieler 1, dann gilt

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) dF^*(x) \\ &= \int_{I_=} \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) dF^*(x) + \int_{I_<} \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) dF^*(x) \\ &= v \int_{I_=} dF^*(x) + \int_{I_<} \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) dF^*(x) \\ \iff &v \left( 1 - \int_{I_=} dF^*(x) \right) = v \int_{I_<} dF^*(x) = \int_{I_<} \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) dF^*(x) \\ \iff &\int_{I_<} \left( v - \int_0^1 u(x, y) dG^*(y) \right) dF^*(x) = 0 \\ \implies &P_{F^*}(I_<) = \int_{I_<} \overset{>0}{dF^*(x)} = 0 \end{aligned}$$

Analog für ii) □

**Beispiel 3.104** Wir betrachten das Spiel auf dem Einheitsquadrat mit  $u(x, y) = \frac{1}{1+(x-y)^2}$  und die gemischten Strategien  $F^*(x) = I_{\frac{1}{2}}(x)$  und  $G^*(y) = \frac{1}{2}I_0(y) + \frac{1}{2}I_1(y)$  (d.h. diskrete Verteilungen mit

einer bzw. zwei Punkten positiver Wahrscheinlichkeitsmasse – Spieler 1 wählt stets  $x = \frac{1}{2}$ , Spieler 2 wählt jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  die Werte 0 und 1). Wir wollen zeigen, daß  $(F^*, G^*)$  ein Nash-Gleichgewicht ist. Wenn dies gilt, so ergibt sich für den Wert der gemischten Erweiterung des Spiels

$$\hat{v} = \hat{u}(F^*, G^*) = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) dF^*(x) dG^*(y)$$

Es ist  $F^*$  konstant auf  $[0, 1]$  außer in  $x = \frac{1}{2}$ , dort ein Sprung um 1, also

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + (x - y)^2} dF^*(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - y)^2} \cdot 1$$

also: wenn  $(F^*, G^*)$  optimal, so

$$\hat{v} = \int_0^1 \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - y)^2} dG^*(y) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - 0)^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - 1)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{5}$$

$$a) \Phi(y) := \int_0^1 \frac{1}{1 + (x - y)^2} dF^*(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - y)^2}$$

Behauptung:  $\Phi(y)$  ist konkav auf  $[0, 1]$ . Die Funktion ist zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall, also können wir mit der zweiten Ableitung die Krümmung ermitteln:

$$\Phi'(y) = - \left( \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - y)^2} \right)^{-2} \cdot 2(\frac{1}{2} - y) \cdot (-1) = \frac{1 - 2y}{(1 + (\frac{1}{2} - y)^2)^2}$$

$$\Phi''(y) = \frac{6(y - \frac{1}{2})^2 - 2}{(1 + (\frac{1}{2} - y)^2)^3}$$

Der Nenner ist stets größer als Null, der Zähler eine nach oben offene Parabel mit Scheitel in  $y = \frac{1}{2}$  und mit Werten auf dem Rand von  $6(0 - \frac{1}{2})^2 - 2 = 6(1 - \frac{1}{2})^2 - 2 = -\frac{1}{2} < 0$ , also ist  $\Phi$  konkav. Somit nimmt  $\Phi$  seine Minima auf dem Rand an, d.h.

$$\min_{y \in [0, 1]} \Phi(y) = \min\{\Phi(0), \Phi(1)\} = \frac{4}{5}$$

$$b) \Psi(x) := \int_0^1 \frac{1}{1 + (x - y)^2} dG^*(y) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + (x - 0)^2} + \frac{1}{1 + (x - 1)^2} \right)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2x - 1)^2(x^2 + (x - 1)^2) && \forall x \in [0, 1] \\ \iff 0 &\leq 8x^4 - 16x^3 + 14x^2 - 6x + 1 && \forall x \in [0, 1] \\ \iff 10x^2 + 15 &\leq 8x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 16 \geq 0 && \forall x \in [0, 1] \\ \iff 5((1 + (x - 1)^2) + (1 + x^2)) &\leq 8(1 + x^2)(1 + (x - 1)^2) && \forall x \in [0, 1] \\ \iff \Psi(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (x - 1)^2} \right) &\leq \frac{4}{5} && \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

und wegen  $\Psi(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$  gilt  $\max_{x \in [0, 1]} \Psi(x) = \frac{4}{5}$