Spieltheorie - WiSe 2014/15
Übungsblatt 4 - Felix Dosch, Julian Felix Rost

Aufgabe 4.1

a) Wir suchen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\sigma_I = \sum_{s_I \in S_I} p(s_I) = p(T) + p(M) + p(B) = 1$$

, sodass für jede reine Strategie von Spieler II Spieler I den gleichen erwarteten Gewinn hat. Sei im folgenden $a = p(T), b = p(M), c = p(B)$. Dann ergeben sich folgende erwartete Gewinne für Spieler I:

Spieler II spielt L : $3a + 2b + 2c$
Spieler II spielt C : $-3a + 6b + 5c$
Spieler II spielt R : $0a + 4b + 6c$

Aus den Bedingungen der Gleichheit und der zusätzlichen Bedingung $a + b + c = 1$ lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit 3 linear unabhängigen Gleichungen und 3 Variablen aufstellen, welches eine eindeutige Lösung besitzt:

$$3a + 2b + 2c = -3a + 6b + 5c$$
$$\Leftrightarrow 6a - 4b - 3c = 0 \quad (A)$$

$$-3a + 6b + 5c = 4b + 6c$$
$$\Leftrightarrow -3a + 2b - c = 0 \quad (B)$$

$$a + b + c = 1 \quad (C)$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (A) & 6a & - & 4b & - & 3c & = & 0 \\ (B) & -3a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ (C) & a & + & b & + & c & = & 1 \\ & & & \ldots & & & & \\ (A) & 25a & & & & & = & 10 \\ (B) & -2a & + & 3b & & & = & 1 \\ (C) & a & + & b & + & c & = & 1 \\ & & & \ldots & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcl}
(A) & a & & & = & \frac{2}{5} \\
(B) & & b & & = & \frac{3}{5} \\
(C) & & & c & = & 0
\end{array}$$

Es ergibt sich also als gemischte Strategie für Spieler I:

$$\sigma_I^* = \sum_{s_I \in S_I} p(s_I) \text{ mit } p : S_I \mapsto [0,1], p(T) = \frac{2}{5}, p(M) = \frac{3}{5}, p(B) = 0$$

Der erwartete Gewinn ist hierbei $3 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot 0 = \frac{12}{5}$.

a) Wir suchen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\sigma_{II} = \sum_{s_{II} \in S_{II}} p(s_{II}) = p(L) + p(C) + p(R) = 1$$

, sodass für jede reine Strategie von Spieler I Spieler II den gleichen erwarteten Gewinn hat. Sei im folgenden $a = p(L), b = p(C), c = p(R)$. Dann ergeben sich folgende erwartete Gewinne für Spieler II:

Spieler I spielt T : $-3a + 3b$
Spieler I spielt M : $-2a - 6b - 4c$
Spieler I spielt B : $-2a - 5b - 6c$

Aus den Bedingungen der Gleichheit und der zusätzlichen Bedingung $a + b + c = 1$ lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit 3 linear unabhängigen Gleichungen und 3 Variablen aufstellen, welches eine eindeutige Lösung besitzt:

$$-2a - 6b - 4c = -2a - 5b - 6c$$
$$\Leftrightarrow -b + 2c = 0 \quad (A)$$

$$-3a + 3b = -2a - 6b - 4c$$
$$\Leftrightarrow -a + 9b + 4c = 0 \quad (B)$$

$$a + b + c = 1 \quad (C)$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
(A) & & - & b & + & 2c & = & 0 \\
(B) & -a & + & 9b & + & 4c & = & 0 \\
(C) & a & + & b & + & c & = & 1 \\
 & & & \dots & & & & \\
(A) & & & & & 25c & = & 1 \\
(B) & & & 10b & + & 5c & = & 1 \\
(C) & a & + & b & + & c & = & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & & \ldots & & & \\ (A) & & & c & = & \frac{1}{25} \\ (B) & & b & & = & \frac{2}{25} \\ (C) & a & & & = & \frac{22}{25} \end{array}$$

Es ergibt sich also als gemischte Strategie für Spieler II:

$$\sigma_{II}^{*} = \sum_{s_{II}} \in S_{II} p(s_{II}) \text{ mit } p : S_{II} \mapsto [0,1], p(L) = \frac{22}{25}, p(C) = \frac{2}{25}, p(R) = \frac{1}{25}$$

Der erwartete Gewinn ist hierbei $-3 \cdot \frac{22}{25} + 3 \cdot \frac{2}{25} = -\frac{66}{25} + \frac{6}{25} = -\frac{60}{25}$.

Aufgabe 4.2

a)

$$a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

Da A und B konvex:

$$(\lambda a_1 + (1-\lambda) \cdot a_2) \in A, (\lambda b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2) \in B$$

$$\begin{aligned} &(\lambda a_1 + (1-\lambda) \cdot a_2, \lambda b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2) \\ &= (\lambda a_1, \lambda b_1) + ((1-\lambda) \cdot a_2, (1-\lambda) \cdot b_2) \\ &= \lambda(a_1, b_1) + (1-\lambda) \cdot (a_2, b_2) \\ &\Rightarrow \lambda(a_1, b_1) + (1-\lambda) \cdot (a_2, b_2) \in A \times B \Rightarrow A \times B \text{ konvex.} \end{aligned}$$