Spieltheorie - WiSe 2014/15
Übungsblatt 6 - Felix Dosch

Aufgabe 6.2

Wir suchen eine konvergente Folge von Strategievektoren σ^k, sodass jeder dieser Strategievektoren im ϵ^k-pertubierten Spiel Γ^k ein Nash-Gleichgewicht ist.

Zunächst brauchen wir eine Folge von ϵ_i-Pertubationsvektoren, welche die Voraussetzungen der Definition des perfekten Nash-Gleichgewichts aus der Vorlesung erfüllen:

$$\lim_{k\to\infty} M(\epsilon^k) = 0 \quad \text{mit } M(\epsilon) = \max_{i\in N, s_i\in S_i} \epsilon_i(s_i)$$

Der Einfachheit halber definieren wir die Folge $\epsilon_i^k = \frac{1}{k+|S_i|}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in S_i$. Diese konvergiert offensichtlich für jeden Spieler nach 0, womit $\lim_{k\to\infty} M(\epsilon^k) = 0$ erfüllt ist für $\epsilon =$ Vektor der Pertubationsvektoren für alle Spieler.[1]

Da B eine schwach dominierte Strategie ist, wird Spieler I immer so viel T wie möglich spielen und nur gerade so viel B wie unbedingt nötig $(\sigma_I^k(B) = \epsilon_I^k(B))$[2]. Für Strategie T hat er einen Gewinn von 1 garantiert, für B kommt es auf die Strategie von II an. Daher gibt es keinen Grund, für I mehr B zu spielen, unabhängig von Spieler II.

Für Spieler II macht es daher nun Sinn, Strategie L zu spielen, so viel er kann, und M nur gerade so viel wie nötig $(\sigma_{II}^k(M) = \epsilon_{II}^k(M))$[3] und davon nicht abzuweichen. Daher ist (T, L) im Ausgangsspiel ein Nash-Equilibrium[4], und sogar das einzige Nash-Equilibrium (Angenommen Spieler I spielt nicht T, dann macht es immer Sinn, zu T zu wechseln, da dort der erwartete Gewinn höher ist - Angenommen I spielt T und II spielt nicht L, dann ist der erwartete Gewinn für II in L höher, also sollte er zu L wechseln).[5]

Wir behaupten also, dass $\sigma = (T, L)$ das einzige perfekte Nash-Gleichgewicht ist.

$\overset{2,3}{\Longrightarrow}$ Für das Spiel Γ^k ist $(\sigma_I^k = ((1-\epsilon_I^k)\cdot T, \epsilon_I^k \cdot B), \sigma_{II}^k = ((1-\epsilon_{II}^k)\cdot L, \epsilon_{II}^k \cdot M))$ ein Nash-Equilibrum.[6]

$\overset{4,6}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \sigma^k = ((1\cdot T, 0\cdot B), (1\cdot L, 0\cdot M)) = \sigma$ ist ein Nash-Equilibrium.[7]

$\overset{1,5,7}{\Longrightarrow} \sigma = (T, L)$ ist ein perfektes Nash-Gleichgewicht und sogar das einzige (da ein perfektes Nash-Gleichgewicht immer ein Nash-Gleichgewicht ist (s. Vorlesung).

Aufgabe 6.3

a) Für das strikte symmetrische Nash-Gleichgewicht (σ', σ') gilt:

$$\forall i \in \{I, II\} \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \setminus \{\sigma'\} : u_i(\sigma_i, \sigma') < u_i(\sigma', \sigma')$$

Dies erfüllt genau eine der äquivalenten Definitionen für die ESS aus der Vorlesung:

- Intuitiv: Eine gemischte Strategie x^* heißt evolutionär Stabil, wenn x^* auch die beste Antwort auf alle Strategien ist, die ähnlich sind, wie x^*
- In Formel:
  - Für alle Strategien $x \neq x^*$ existiert $\epsilon_0 = \epsilon_0(x') > 0$ so dass
  - $\underbrace{(1-\epsilon)u_1(x, x^*) + \epsilon u_1(x, x)}_{\text{Wert von } x \text{ im gestörten Spiel}} < \underbrace{(1-\epsilon)u_1(x^*, x^*) + \epsilon u_1(x^*, x)}_{\text{Wert von } x^* \text{ im gestörten Spiel}}$
- Äquivalente Definition
  - Für alle Strategien $x \neq x^*$ gilt
  - Entweder $u_1(x, x^*) < u_1(x^*, x^*)$ (x hat Nachteil in aktueller Population)
  - Oder $u_1(x, x^*) = u_1(x^*, x^*)$ und $u_1(x, x) < u_1(x^*, x)$ (x ist genauso gut in aktueller Population aber schlechter, wenn sich die Population nach x ändert)

b) Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\sigma^* \neq \sigma'$.

σ^* ESS $\Rightarrow \sigma^*$ Nash-GG $\Rightarrow u_1(\sigma^*, \sigma^*) \geq u_1(\sigma', \sigma^*)$.

Da σ' beste Antwort auf $\sigma^* \Rightarrow u_1(\sigma^*, \sigma^*) = u_1(\sigma', \sigma^*)$.

Da σ^* ESS muss gelten $u_1(\sigma', \sigma') < u_1(\sigma', \sigma^*)$ (siehe äquivalente Def. für ESS aus Vorlesung).

Widerspruch, da (σ', σ') Nash-Gleichgewicht. Daher ist die Annahme falsch und es gilt $\sigma^* = \sigma'$.