

Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

**1.1.1.** Существуют ли графы с пятью вершинами, степени которых равны:

- а) 0, 0, 0, 0, 0;
- б) 4, 4, 4, 4, 4;
- в) 2, 3, 2, 4, 2;
- г) 2, 2, 2, 2, 2;
- д) 1, 1, 1, 1, 1;
- е) 3, 5, 4, 2, 2;
- ж) 4, 4, 4, 4, 2?

**1.1.2.** В графе 100 вершин и 800 рёбер.

- а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
- б) Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

**1.1.3.** Существует ли выпуклый многогранник, у которого 15 граней и все грани являются треугольниками?

**1.1.4.** В графе на 17 вершинах степень каждой вершины не меньше 8. Докажите, что этот граф связан.

**1.1.5.** Докажите, что при любых  $0 \leq k < n$  таких, что  $kn$  — чётное, существует граф на  $n$  вершинах, степени которого равны  $k$ .

**Замечание.** Если вы решили и сдали все задачи выше во время занятия, вы можете решать и сдавать домашние задачи также во время занятия.

Дополнением  $\bar{G}$  графа  $G$  называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа  $G$ , в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в  $G$  эта пара вершин ребром не связана.

**1.1.6.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

**1.1.7.** В гости придут либо 5, либо 7 человек. На какое минимальное число кусков нужно порезать торт, чтобы гарантированно можно было раздать всем поровну?

**1.1.8.** Вершинным покрытием в графе называется подмножество вершин, содержащее хотя бы один конец каждого ребра. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, и находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.

---

---

### Домашнее задание 1, часть 1

Дедлайны: 28 и 30 сентября 2021, 19:00

**Правила сдачи и оценивания.** Это первая часть домашнего задания 1. Всего в домашнем задании 6 задач, каждая оценивается в 2,5 баллов. Максимальная оценка за домашнее задание составляет 10 баллов. Если вы наберете больше, то баллы сверх 10 пойдут в виде бонуса в баллы итогового теста.

Дедлайн первого домашнего задания — 30 сентября в 19:00. Решения нужно отправить по адресу [hw.graphs.sber@gmail.com](mailto:hw.graphs.sber@gmail.com). Решения будут проверены до 19:00 1 октября.

Также можно отправить решения до 19:00 28 сентября. Тогда они будут проверены до 19:00 29 сентября и в случае наличия ошибок можно будет успеть их исправить до основного дедлайна.

**1.1.9.** Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

**1.1.10.** Существует ли неориентированный граф с шестью вершинами, степени которых равны 4, 2, 4, 3, 1, 2? Если такого графа не существует, докажите это, если существует постройте пример.

**1.1.11.** Куб со стороной  $n \geq 3$  разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?