$$f(x) + \lambda g(x)$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 = r^2$$

$$x_1 + x_2 - 9 = 0$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 9) = L(x_1, x_2, \lambda)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 8) + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 6) + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 16 - 2x_1$

$$\begin{cases} 2x_2 - 12 + 16 - 2x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 3.5$

$x_2 = 5.5$

ф-ция выпукла и мн-во выпуклое

обобщим: $f(x) = x^T \overset{A}{A} x + b^T x + c$

$\to f(x) = x^T A x$ – квадратичная ф-ция

условие $g(x) = k^T x - d = 0$ $\quad \exists\, k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = 9$

$f(x) = c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

$g_j(x) = a_j^T x - b_j = 0$, $j = 1, \dots, m$

λ - вектор, как x, т.к много ограничений

$L(x, \lambda) = c^T x + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) =$

$= \langle c, x \rangle + \langle \lambda, Ax - b \rangle$

$\nabla f(x) = \langle c, dx \rangle + \langle \lambda, A dx \rangle =$
$= \langle c, dx \rangle + \langle A^T \lambda, dx \rangle$

$\nabla_x L = c + A^T \lambda = 0$ $\qquad \nabla f(\lambda) = \langle d\lambda, d(Ax-b) \rangle$

$\nabla_\lambda L = Ax - b = 0$ $\qquad \nabla f(\lambda) = \langle Ax - b, d\lambda \rangle$

$$\boxed{\begin{cases} A^T \lambda = -c \\ Ax = b \end{cases}}$$

$m \times n$

если $m > n$
rank $A = n$
S пустое д. мн-во

$Ax = b$ $\qquad A \in R$, $b \in R$ $\quad x - ?$

1) $m = n$
кол-во неизв = кол-во ур-ний $\quad x^* = A^{-1} \times b \quad$ $\det A \neq 0$
сост. из 1ой (.) $\qquad$ rank $= n$

2) $m < n$ ур-ний < неизв.
(недоопределенная система)

$x + y = 0$ — решений ∞ много

Выбираем то, что обладает наименьшей нормой

подменяем на $\|x\|_2^2 \to \min\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax = b}}$

норма

можем дописать

$\frac{1}{2} \|x\|_2^2$

множитель Лагранжа

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle + \langle \lambda, Ax-b\rangle$$

система лин. ур-ний - задача выпуклая s.f - вип

$$\nabla_x L_* = \frac{1}{2}\times 2x + A^T\lambda = 0 \quad \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T}\underset{m\times 1}{\lambda} = \underset{n\times 1}{-x}$$

$$\nabla_\lambda L = Ax - b = 0 \quad \Rightarrow x = -A^T\lambda$$

невырожден. матуа

$$A\times(-A^T\times\lambda) - b = 0 \Rightarrow \underset{m\times n}{A}\underset{n\times m}{A^T}\times\underset{m\times 1}{\lambda} = \underset{m\times 1}{-b} \Rightarrow \lambda = -(AA^T)^{-1}\times b$$

$m\times m$

если бы мат-ца $n\times n$ $m<n$ вней - это мат-ца неполного ранга

$$x = -A^T(-(AA^T)^{-1}\times b)$$

$$x^* = \underbrace{A^T(AA^T)^{-1}}_{A^+}\times b \quad = A^+\times b$$

псевдообратная мат

3) $m>n$ переопред. сист. / решений нет

поменяем на $\|Ax-b\|_2^2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$

$$f(x) = \langle Ax-b, Ax-b\rangle \quad]\times 1/2$$

$$df = \frac{1}{2}\times 2\langle Ax-b, Adx\rangle$$

$$\nabla f = A^TAx - A^Tb = 0$$

$$\underset{n\times n}{(A^TA)}x = \underset{\text{вект. } n\times 1}{A^Tb}$$

$n\times m$ $m\times n$ $n\times 1$ $n\times m$ $m\times 1$

$n<m$ мат-ца имеет полный ранк $\Rightarrow$ невырожд.

обратн. мат.

$$x^* = \underbrace{(A^TA)^{-1}\times A^T}_{A^+}\times b$$

- тоже псевдообр. $\int$

$g(x) = 0$

$\min f(x)$

$g(x) \le 0 \rightarrow \text{argmin} \in S'$

$\min f(x)$

$g(x) = 0$

$\text{argmin } f(x) \in S'$

реш. как безусл.

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 - 9 \ge 0$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 = \cancel{x_1 + x_2 - 9} \; r^2$$

$$(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 9) = L(x_1, x_2, \lambda)$$

$$x_1^2 - 2 \times 8 \times x_1 + 64 = 0$$

$$x_1^2 - 16x_1 + 64 = 0$$

$$D = 256 - 256 = 0$$

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{0}}{2} = 8 \qquad x_1 = \frac{16 + \sqrt{0}}{2} = 8$$

$$(x_2 - 6)^2 = 0$$

$$x_2^2 - 12x_2 + 36 = 0$$

$$D = 144 - 144$$

$$x_2 = 6 \quad x_2 = 6$$

$x_1 \ (8; 8)$

$x_2 \ (6; 6)$

(·) лежит в центре окружности

т.к д. мн-во входит в состав окружностей.