Вопросы на понимание

Перед тем как приступить к решению домашних задач, попробуйте ответить на следующие вопросы. Это простые вопросы на понимание. Ответы на них включать в домашнюю работу не нужно.

1. Каких значений не может принимать вероятность?
2. Что такое плотность распределения?
3. Может ли плотность распределения принимать отрицательные значения?
4. Может ли плотность распределения равняться нулю при всех значениях аргумента? Единице?
5. Чему для любого $a \in \mathbb{R}$ равна $\mathbb{P}(X = a)$, если X — непрерывная случайная величина?
6. Может ли условная вероятность равняться единице? Нулю?
7. Чему равна сумма вероятностей событий из разбиения?
8. Для чего нужна формула Байеса?
9. Пусть для дискретных случайных величин X и Y оказалось, что
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0).$$
Следует ли отсюда независимость величин X и Y ?
10. Какой физический смысл имеет математическое ожидание?
11. Какой физический смысл имеет дисперсия?
12. Всегда ли математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий?
13. Всегда ли дисперсия суммы равна сумме дисперсий?

Случайные величины

Упражнение 1 (5 баллов). Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2, 4]$. Найти вероятность $\mathbb{P}(2.5 < X < 3.5)$.

Упражнение 2 (10 баллов). Плотность распределения случайной величины X имеет следующий вид:
$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{C}{u^4} & \text{при } x \geq 1, \\ 0, & \text{при } x < 1, \end{cases}$$
где C — некоторая константа. Найти: а) постоянную C; б) $\mathbb{P}(X < 3)$; в) $\mathbb{P}(X > 7)$.

Условная вероятность

Упражнение 3 (10 баллов). В продажу поступила партия запасных деталей, произведенных на двух станках. Известно, что 70% продукции произведено на первом станке. Среди деталей, произведенных на первом станке, 4% бракованных, а среди деталей, произведенных на втором станке, 1% бракованных. Найти вероятность того, что купленная делать оказалась бракованной. Если купленная делать оказалась бракованной, то с какой вероятностью она была произведена на первом станке? А на втором?

Упражнение 4 (10 баллов). Сначала бросается идеальная игральная кость, затем — симметричные монеты в количестве, равном номеру, выпавшему на кости. Какова вероятность получить в результате ровно 6 «орлов»? А ровно 1 «орел»?

Упражнение 5 (15 баллов). При перелете из Москвы в Париж я летел с двумя пересадками, и мой багаж не прибыл вместе со мной. Он пересылался тремя разными авиакомпаниями, и вероятности того, что каждая авиакомпания потеряла мой багаж, равны 4/10, 2/10, 1/10 соответственно очередности пересылок. Чему равна вероятность того, что оплошала первая из авиалиний?

Математическое ожидание и дисперсия

Упражнение 6 (5 баллов). Пусть распределение случайной величины X задано следующей таблицей (в верхней строке написаны значения X, а в нижней — вероятности, с которыми X принимает эти значения):

X	0	2	4	8
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}X$.

Упражнение 7 (5 баллов). Если случайная величина X имеет распределение Бернулли, $X \sim \mathbf{B}_p$, каким будет распределение случайной величины $e^X + 2$? Найдите ее математическое ожидание и дисперсию.

Упражнение 8 (10 баллов). Время работы электрической лампочки (в днях) хорошо описывается экспоненциальным распределением с плотностью

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{u}{30}}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Каким будет среднее время работы лампочки? Чему равна вероятность того, что лампочка проработает не более 3-х дней? А больше 10 дней? А больше 30 дней?

Упражнение 9 (15 баллов). Автоматический механизм производит дефектную деталь с вероятностью 2%. Когда это происходит, выполняется регулировка механизма. Найдите среднее число качественных деталей, производимых между регулировками.

Упражнение 10 (15 баллов). Игрок пришел к выводу, что он может всегда обыграть казино, удваивая ставку каждый раз, чтобы компенсировать прошлые потери. Точнее говоря, он решил закончить игру, как только выиграет, в противном случае он станет удваивать ставку до тех пор, пока не выиграет (в случае выигрыша игрок получает от казино сумму, равную сделанной ставке). Единственным недостатком его стратегии является то, что ему придется прекратить игру, когда у него закончатся деньги. Допустим, что у игрока есть 150$, и он начинает со ставки в 1$. Предположим также, что в каждой из игр его шансы на победу равны 50%. Какова вероятность того, что он окажется победителем, и сколько он тогда выиграет? Какова вероятность того, что ему придется прекратить игру после очередного проигрыша из-за недостатка денег для удвоения ставки, и сколько он в таком случае проиграет? Чему равно математическое ожидание дохода при такой стратегии?