Предельные теоремы. Свойства оценок. Оценивание характеристик распределения.

Леонид Иосипой

Курс «Вероятностные модели и статистика»
Центр непрерывного образования, ВШЭ

15 апреля 2021

- Повторение
- Закон больших чисел
- Центральная предельная теорема. Концентрация II
- Свойства оценок
- Оценивание характеристик распределения

Повторение

1. Функции распределения.

   Функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ задаваемая следующей формулой
$$F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u).$$

Повторение

1. Функции распределения.

Важное свойство функции распределения:

Любую случайную величину X можно задать через функцию распределения. То есть по функции распределения можно восстановить распределение случайной величины X:

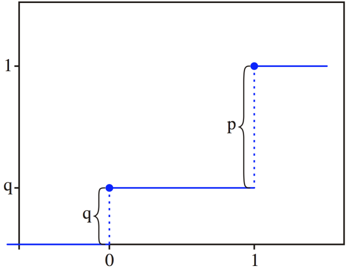
— в дискретном случае можно восстановить a_k и p_k;

— в непрерывном случае можно восстановить $f(u)$.

Повторение

1. Функции распределения.

График $F_X(u)$ для $X \sim \mathbf{B}_p$, $p \in [0, 1]$.

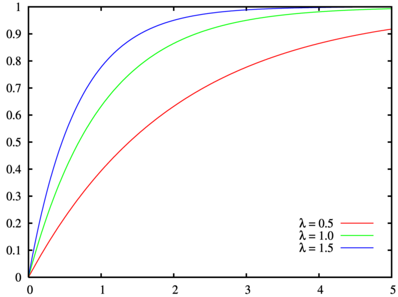


$$F_X(u) = \mathbb{P}(X \le u).$$

Повторение

1. Функции распределения.

График $F_X(u)$ для $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.



$$F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u).$$

$$\boxed{F'_X(u) = f(u)}$$

Повторение

1. Функции распределения.

   Как найти плотность $Y = g(X)$, зная плотность X?

   1) Выразить функцию распределения $F_Y(u)$ через функцию распределения $F_X(u)$;
   2) Продифференцировать $F_Y(u)$.

Повторение

2. Неравенства концентрации.

Теорема (Неравенство Маркова)

Пусть X — произвольная случайная величина. Тогда для любого $t > 0$

$$\mathbb{P}\big(|X| > t\big) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{t}.$$

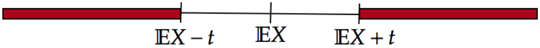
Повторение

2. Неравенства концентрации.

Теорема (Неравенство Чебышёва)

Пусть X — произвольная случайная величина и $|\mathbb{E}X| < \infty$. Тогда для любого $t > 0$

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| > t\big) \leq \frac{\operatorname{Var} X}{t^2}.$$



Повторение

3. Распределение суммы случайных величин.

Пусть даны две независимые случайные величины X и Y:

- Дискретная свертка: если X и Y дискретные и принимают значения из $\mathbb{Z}$, то для произвольного $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) \cdot \mathbb{P}(Y = k - j).$$

- Непрерывная свертка: если X и Y непрерывные и имеют плотности $f_X(u)$ и $f_Y(u)$ соответственно, то для $u \in \mathbb{R}$

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) f_Y(u - z) dz.$$

Повторение

4. Базовые операции.

1) Центрирование: вычитание из X ее мат. ожидания $\mathbb{E}X$,

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0;$$

2) Нормирование: деление X на $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$,

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 1;$$

3) Стандартизация: центрирование + нормирование,

$$\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}.$$

Закон больших чисел

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

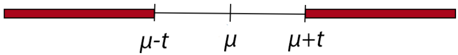
Определим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Пусть $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ и $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$.

Теорема (Закон больших чисел, ЗБЧ)

В обозначениях выше, для любого $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > t\right) \to 0 \quad \textit{при } n \to \infty.$$



Закон больших чисел

Иногда закон больших чисел записывают так:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Знак «$\xrightarrow{\mathbb{P}}$» обозначает сходимость «по вероятности».

То есть правильно читать эту формулу так:

«Случайная величина S_n/n сходится к μ по вероятности».

Закон больших чисел

Доказательство. Найдем мат. ожидание и дисперсию S_n/n:

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\cdot\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}\cdot\Big(\mathbb{E}[X_1]+\ldots+\mathbb{E}[X_n]\Big) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu,$$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\operatorname{Var}X_1+\ldots+\operatorname{Var}X_n\Big) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Воспользуемся неравенством Чебышёва:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{Var}(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Итак, $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$, но как ведут себя отклонения? Нормально!

Теорема (Центральная предельная теорема, ЦПТ)

В обозначениях выше (которые для ЗБЧ), для любых $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} < b\right) \to \mathbb{P}(a < Z < b) \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Если $\Phi(u)$ — функция распределения Z,

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Обратите внимание, что:

- Стандартизация S_n/n и S_n дает один и тот же результат:

$$\frac{S_n/n - \mathbb{E}[S_n/n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n/n)}} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}.$$

- Нормировка разности $S_n/n - \mathbb{E}[S_n/n]$ на $\sqrt{\mathrm{Var}(S_n/n)}$ увеличивает ее значение в $\sqrt{n}$ раз:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n/n)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

- Функция распределения $\Phi(u)$ стандартного нормального закона явно не вычисляется! Найти ее значение можно либо с помощью какого-либо программного обеспечения, либо по таблице.

  Если Вы пользуетесь таблицей, то может быть полезна формула, которая следует из симметрии распределения:

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \quad \text{для} \quad u > 0.$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Задача

Правильная монета подбрасывается 10 000 раз. Оцените с помощью неравенства Чебышёва и центральной предельной теоремы вероятность того, что число гербов отличается от 5000 не более, чем на 100.

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Решение.

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathbf{B}_{1/2}$, $n = 10\,000$.

Как обычно: $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Найдем сначала мат. ожидание и дисперсию S_n:

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = np = 5\,000,$$
$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1) = np(1-p) = 2500.$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

По неравенству Чебышёва:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n - 5000| \le 100) &= \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \le 100)\\ &= 1 - \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > 100)\\ &\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{100^2}\\ &= 1 - \frac{2500}{100^2}\\ &= 0.75.\end{aligned}$$

Что это значит?

Центральная предельная теорема. Концентрация II

По центральной предельной теореме:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n - 5000| \le 100) &= \mathbb{P}\left(4900 \le S_n \le 5100\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{4900-5000}{\sqrt{2500}} \le \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{5100-5000}{\sqrt{2500}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2 \le \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le 2\right) \\
&\approx \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&\approx 0.9544.
\end{aligned}$$

Что это значит? Правильный ответ: 0.9545.

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Задача

Мой дед любит ходить. Его шаги — независимые одинаково распределенные случайные величины, равномерно распределенные на $[70, 80]$ см. С какой вероятностью он за $10\,000$ шагов пройдет расстояние, отличное от 7.5 км. не более, чем на 10 м.?

Центральная предельная теорема. Концентрация II

Решение. Заметим, что в условии задачи числа даны в разных единицах измерения. Приведем все к метрам.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на $[0.7, 0.8]$ м., $n = 10\,000$.

Как обычно: $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Найдем сначала мат. ожидание и дисперсию S_n:

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot \frac{0.8 + 0.7}{2} = 7\,500,$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1) = n \cdot \frac{(0.8 - 0.7)^2}{12} = \frac{100}{12}.$$

Центральная предельная теорема. Концентрация II

По неравенству Чебышёва:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n - 7500| \le 10) &= \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \le 10) \\
&= 1 - \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > 10) \\
&\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{10^2} \\
&= 1 - \frac{100}{12 \cdot 10^2} \\
&= \frac{11}{12}.
\end{aligned}$$

Что это значит?

Центральная предельная теорема. Концентрация II

По центральной предельной теореме:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n - 7500| \le 10) &= \mathbb{P}\left(-10 \le S_n - \mathbb{E}[S_n] \le 10\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{10}{\sqrt{100/12}} \le \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{10}{\sqrt{100/12}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2\sqrt{3} \le \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le 2\sqrt{3}\right) \\
&\approx \Phi\left(2\sqrt{3}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{3}\right) \\
&\approx 0.9994.
\end{aligned}$$

Что это значит?

Лемма Джонсона-Линденштраусса

Поговорим о задаче снижения размерности.

Будем рассматривать наблюдения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ как точки $\mathbb{R}^D$.

	Признак 1	Признак 2	...	Признак D
u_1				
u_2				
...				
u_n				

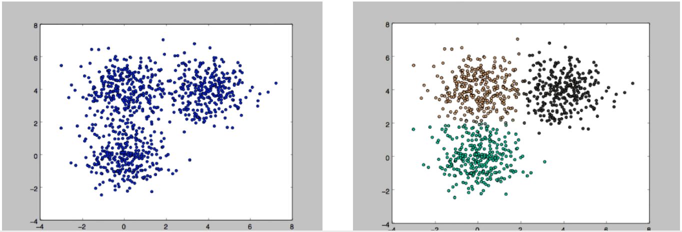
Хранить все D координат каждой точки u_i может быть «дорого».

Лемма Джонсона-Линденштраусса

Мы хотим придумать такое отображение $F : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$ для данных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которое бы сохраняло их «структуру» и d было бы намного меньше D.

Что можно понимать под «структурой» данных?

Один из вариантов ответа на этот вопрос — попарные расстояния между точками $u_1, u_2, \ldots, u_n$.



Лемма Джонсона-Линденштраусса

Формально можно записать так:

1) $\|F(u_i) - F(u_j)\| = \|u_i - u_j\|$ для всех $i \neq j$.

   В этом случае можно понизить размерность до

$$d = n - 1.$$

2) $(1-\delta)\|u_i - u_j\|^2 \leq \|F(u_i) - F(u_j)\|^2 \leq (1+\delta)\|u_i - u_j\|^2$ для некоторого $\delta \in (0,1)$ всех $i \neq j$.

   В этом случае можно понизить размерность до

$$d = n - 1.$$

Лемма Джонсона-Линденштраусса

Что делать дальше?

3) Потребуем, чтобы с вероятностью не менее $1-\varepsilon$, для некоторого $\varepsilon > 0$:

$$(1-\delta)\|u_i - u_j\|^2 \leq \|F(u_i) - F(u_j)\|^2 \leq (1+\delta)\|u_i - u_j\|^2$$

для некоторого $\delta \in (0,1)$ всех $i \neq j$.

В этом случае можно понизить размерность до

$$d \geq \frac{16}{\delta^2} \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right).$$

Лемма Джонсона-Линденштраусса

$$\boxed{d \geq \frac{16}{\delta^2} \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)}$$

- Логарифмическая зависимость от n!
- Отображение $F(u)$ можно построить явно!

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{d}} X u,$$

  где X — матрица размера $d \times D$, у которой все элементы — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ величины.

- Можно использовать алгоритм онлайн (не зная наперед данные).

Свойства оценок

Пусть дана реализация выборки $x_1, \ldots, x_n$ из некоторого распределения с неизвестным параметром θ. Для простоты будем считать, что θ одномерный.

Допустим, мы построили оценку $\widehat{\theta}$ для параметра θ. Как понять, является она хорошей или нет.

Свойства оценок

Оценка $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ параметра θ называется несмещенной, если

$$\mathbb{E}_\theta \left[\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right] = \theta \ \text{ для всех } \theta \in \Theta.$$

Здесь индекс θ у математического ожидания $\mathbb{E}_\theta$ означает, что мы считаем математическое ожидание случайной величины $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$, где X_i распределены с параметром θ.

Несмещенность означает, что при многократном вычислении оценки на разных данных среднее арифметическое полученных оценок будет стремится к истинному значению параметра θ.

Свойства оценок

Оценка $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ параметра θ называется состоятельной, если для всех $\theta \in \Theta$

$$\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \theta \quad \text{при } n \to \infty.$$

Состоятельность оценки означает концентрацию оценки около истинного значения параметра с ростом размера выборки n (что устремив $n \to \infty$, оценка сойдется к истинному значению параметра θ).

Свойства оценок

Какими свойствами обладают оценки, полученные методом максимального правдоподобия?

При некоторых условиях на регулярность модели:

- Возможная смещённость
- Состоятельность
- Асимптотическая эффективность

  Это означает, что дисперсия при $n \to \infty$ является наименьшей возможной среди многих других оценок.

Оценивание характеристик распределения

Теперь допустим нам дана реализация выборки $x_1, \ldots, x_n$ из некоторого распределения, о котором мы ничего не знаем. Что можно сделать в данном случае?

Естественно, точно восстановить распределение по конечной выборке нельзя. Но можно оценить какие-то параметры распределения!

Оценивание характеристик распределения

Допустим, мы хотим оценить $\mathbb{E}[g(X)]$, где X — случайная величина, из распределения которой получена выборка, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая (известная) функция.

Это можно сделать с помощью оценки Монте-Карло:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

Оценивание характеристик распределения

Оценка Монте-Карло является несмещенной и состоятельной.

1. Несмещенность:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right] = \frac{1}{n}\Big(\mathbb{E}[g(X_1)] + \ldots \mathbb{E}[g(X_n)]\Big) = \mathbb{E}[g(X)].$$

2. Состоятельность: согласно закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} \quad \mathbb{E}[g(X)].$$

Оценивание характеристик распределения

Примеры:

1. Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. Моменты большего порядка: для $k > 1$

$$\mathbb{E}[X^k] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

3. Более сложные функции. Например:

$$\mathbb{E}[X^3 \sin(X) \log(X)] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sin(x_i) \log(x_i).$$

Оценивание характеристик распределения

Чтобы оценить погрешность метода Монте-Карло, можно воспользоваться центральной предельной теоремой.

Аналогично тому, как было в законе больших чисел

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[g(X_i)] = \mathbb{E}[g(X)],$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[g(X_i)] = \frac{\sigma^2}{n},$$

где $\sigma^2 = \mathrm{Var}[g(X)]$ по определению.

Оценивание характеристик распределения

По центральной предельной теореме: для произвольных $a < b$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)]}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b \right) \approx \mathbb{P}(a \leq Z \leq b),$$

где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Если взять $a = -3$ и $b = 3$ («правило трех сигм»), то мы получим $\mathbb{P}(-3 \leq Z \leq 3) \approx 0.997$.

В результате:

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)] \right| \leq 3\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{с вероятностью} \approx 0.997.$$

Оценивание характеристик распределения

А как на основе реализация выборки $x_1, \ldots, x_n$ из некоторого распределения X оценить дисперсию $\mathrm{Var}(X)$? Или какой-то другой центральный момент?

Оценивание характеристик распределения

Если бы математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$ было бы известным, можно было бы воспользоваться оценкой Монте-Карло:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mathbb{E}[X]\right)^2.$$

Но что делать, если $\mathbb{E}[X]$ неизвестно?

Оценивание характеристик распределения

Plug-in principle: если оценка неизвестного параметра требует знания каких-то других неизвестных параметров, то можно попробовать подставить в эту оценку вместо неизвестных параметров их оценки.

При этом, естественно, нет никаких гарантий, что полученная оценка будет хорошей.

Оценивание характеристик распределения

Обозначим оценку для математического ожидания через $\overline{x}$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Подставим ее в оценку для дисперсии, которая была выше:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Данная оценка будет состоятельной, но смещенной.

Оценивание характеристик распределения

Действительно, используя свойства математического ожидания, получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}X_iX_j\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}^{n}\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{n}\mathbb{E}[X^2] - \frac{n-1}{n}(\mathbb{E}X)^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\operatorname{Var} X.
\end{aligned}$$

Оценивание характеристик распределения

Чтобы устранить смещение, достаточно домножить оценку на $n/(n-1)$. Мы получили несмещенную оценку для дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Смещенную оценку дисперсии будем обозначать через:

$$S_b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2.$$

Оценивание характеристик распределения

Оценка стандартного отклонения по смещённой оценки дисперсии:

$$\hat{\sigma}_b = \sqrt{S_b^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Оценка стандартного отклонения по несмещённой оценки дисперсии:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Оценивание характеристик распределения

Обе оценки являются смещёнными, так как извлечение квадратного корня «портит» несмещённость. Но при этом обе оценки являются состоятельными.

Доверительные интервалы

Пусть имеется реализация выборки $x_1, \ldots, x_n$ из некоторого распределения с неизвестным (одномерным) параметром

$$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}.$$

До сих пор мы занимались «точечным оцениванием» неизвестного параметра — находили оценку, способную в некотором смысле заменить параметр.

Существует другой подход к оцениванию, при котором мы указываем интервал, накрывающий параметр с заданной наперед вероятностью. Такой подход называется «интервальным оцениванием».

Доверительные интервалы

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Две оценки $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ определяют границы доверительного интервала для параметра θ с коэффициентом доверия $1 - \alpha$, если для выборки $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из закона распределения F_θ при всех $\theta \in \Theta$ справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\Big(\widehat{\theta}_1(\mathbf{X}) < \theta < \widehat{\theta}_2(\mathbf{X})\Big) \geq 1 - \alpha.$$

Как правило, длина доверительного интервала возрастает при увеличении коэффициента доверия $1 - \alpha$ и стремится к нулю с ростом размера выборки n.

Спасибо за внимание!