

Experimentalphysik 4 - Boykott-Gruppenseminar

Fabs	Chris	Michi	Paul	Anton	Sören
	Hein	Martina	Mitsch		

3. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung - Ex3 Zusammenfassung	3
1.1	Notation der Quantenzahlen	3
1.2	Korrekturterme der Energieniveaus	4
1.3	Näherungen für mehrere Elektronen	4
1.4	Das Pauli-Prinzip	4
2	Ex4 - Atomphysik	6
2.1	Spektroskopische Notation	6
2.2	Hund'sche Regeln und Auswahlregeln	7
2.3	Vielelektronenprobleme	9
2.4	Moseley-Gesetz	10
2.5	LS-Kopplung, jj-Kopplung	11
3	Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik	14
3.1	Zerfallsgesetz	14
3.2	Fermis Goldene Regel	15
3.3	Wirkungsquerschnitt	17
3.4	Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen	19
4	Teilchendetektoren	22
4.1	Impulsmessung	22
4.2	Energiemessung	24
4.2.1	Messung von Photonen	24
4.3	Teilchenidentifikation	25
5	Elementarteilchen-Zoo	26
5.1	Leptonen	27
5.2	Quarks	28
5.3	Charakterisierung durch WW	29
5.4	Zerfallsbreite	29

1 Einleitung - Ex3 Zusammenfassung

Wir hatten die QUANTENMECHANIK eingeführt, siehe Theo 4:

$$\textbf{Axiom 4: Es gilt die Schrödingergleichung: } \hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \partial_t |\psi\rangle$$

wobei $\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$

Diese hatten wir für das Wasserstoffatom (H-At.) **analytisch** gelöst. (Coulombpotential, Kugelkoordinaten, Separation: Schwerpunkt/Relativbew., Winkel-/Radialanteil). Die Lösungen sind Polynome mit ganzzahligen Parametern, "Quantenzahlen":

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot \Theta_l^{m_l}(\vartheta) \cdot \phi_{m_l}(\varphi)$$
$$\psi_{n,l,m_l} \propto e^{-\frac{Zr}{na_0}} \underbrace{L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \cdot P_l^{m_l}(\cos \vartheta)}_{\text{zugeordnete Laguerre- bzw. Legendrepolynome.}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi}$$

Es gilt für physikalische Lösungen: $|m_l| \leq l < n$

1.1 Notation der Quantenzahlen

Hauptquantenzahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \{K, L, M, \dots\}$ "Schale"

Bahndrehimpulsquantenzahlen $l \in \{0, 1, 2, \dots\} = \{s, p, d, f, \dots\}$ "Unterschale"

Magnetbahnquantenzahlen $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ "Orbital" (zzgl. "Spin")

$$E(\psi_n) = E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

"Rydberg-Formel", mit $E_0 := Ry = 13.6 \text{ eV}$ und Z als Kernladungszahl.
Dem Übergang entspricht dann die Differenz $E_n - E_m$.

1.2 Korrekturterme der Energieniveaus

Die Energieniveaus (EN) werden korrigiert durch:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{\Delta\hat{E}_{\text{rel}} + \Delta\hat{E}_{S-B} + \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}}}_{\Sigma = \text{Feinstruktur } \Delta E_{FS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} + \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{rel}} = -\frac{\hat{p}^4}{8m_e^3c^2}$$

$$\Delta\hat{E}_{S-B} = \frac{Zq_e^2\mu_0}{8\pi m_e^2(r)^3} \hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{Zq_e^2\mu_0\hbar^2}{16\pi m_e^2(r)^3} \cdot \begin{cases} l, & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1), & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \Delta\hat{E}_{FS}^{\text{H-At.}} = E_0 \frac{Z^2}{n^2} \left[\frac{Z^2\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Darwin}} = \mu_0 \left(\frac{q_e\hbar}{m_e} \right)^2 Z \cdot \delta(\vec{r}) \text{ "Kernpotential"}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} \hat{=} \text{quantenelektrodynamische Wechselwirkung (WW) mit dem Vakuum}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{HFS}} \propto \vec{J} \cdot \underbrace{\vec{I}}_{\text{"Kernspin"}}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} = \frac{\mu}{\hbar} \left(\hat{L}_z + g_e \hat{S}_z \right) B_z \text{ "anomal", normal f\u00fcr } \hat{S}_z = 0, g_e \approx 2, \mu = \frac{q_e\hbar}{2m_e}$$

1.3 N\u00e4herungen f\u00fcr mehrere Elektronen

F\u00fcr mehrere Elektronen (e^-) m\u00fcssen wir N\u00e4herungen machen, denn die $e^- - e^- - WW$ verhindert das analytische L\u00f6sen.

Helium (He):

1. $E_B = -Z^2 E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$ "Bindungsenergie" (negativ!)
2. $E_B = -E_0 \left(\frac{Z^2}{1^2} + \frac{(Z-1)^2}{n_2^2} \right)$ Abschirmung des $n_2 - e^-$
3. $E_B = -E_0 \left(-2Z_R^2 + (4Z - \frac{5}{4})Z_R \right)$ minimiere $E_B(Z_R)$
4. wahrer Wert $E_B \approx -79.0 \text{ eV}$

1.4 Das Pauli-Prinzip

Die relativistische Quantenmechanik fordert f\u00fcr Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ [bzw. $0, 1, 2, \dots$] eine unter Teilchenvertauschung \hat{P}_{ij} antisymmetrische [bzw, symmetrische]

Gesamtwellenfunktion $|\psi\rangle = |\psi_{\text{Ort}}\rangle \otimes |\chi_{\text{Spin}}\rangle$. Wir nennen diese Teilchen **Fermionen** [bzw. **Bosonen**]. Aus diesem Postulat folgt das:

Pauli-Prinzip: Man kann nie mehr als ein Fermion im gleichen (Orts- & Spin-) Zustand haben.

Für zwei e^- (z.B. Helium) gilt daher:

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{symm.}} \Rightarrow \underbrace{|\chi_{-}\rangle}_{\text{Dies ist ein antisymmetrisches Singulett [2S+1=1]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \hat{=} \underbrace{|S=0, M_S=0\rangle}_{\text{[Großbuchstaben } S, M_S, J, \dots \text{ sind Gesamtquantenzahlen, Summen]}}$$

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{antisym.}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\chi_{+}, 1\rangle &= |\uparrow_1 \uparrow_2\rangle \\ |\chi_{+}, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \\ |\chi_{+}, -1\rangle &= |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle \end{aligned} \right\} \hat{=} \begin{aligned} &|S=1, M_S=0\rangle \\ &|1, 0\rangle \\ &|1, -1\rangle \end{aligned}$$

$|\chi_{+}, -\rangle$ ist ein **symmetrisches** Triplett [2S+1=3 heißt Multiplizität].

2 Ex4 - Atomphysik

In der Ex4-Vorlesung wird es um folgende Themen gehen:

- Atome
- Kerne und Elementarteilchen
- Symmetrien
- schwache und starke Wechselwirkung
- Spaltung und Fusion

Johanna Stachels Notation:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ fm} = 913 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs} = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

2.1 Spektroskopische Notation

Um den Zustand einer Unterschale nl anzugeben, führen wir die spektroskopische Notation ein:

$$\boxed{n \text{ } ^{2S+1}L_J} \quad (2.1)$$

mit

$$S := \left| \sum_i m_{s,i} \right| \quad L := \left| \sum_i m_{l,i} \right|$$

$$J := |\vec{L} + \vec{S}| = |M_L + M_S| = \left| \sum_i m_{l,i} + \sum_i m_{s,i} \right|$$

Die Notation für die Elemente des Periodensystems lautet:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Massenzahl } \frac{m}{u} \\ \text{Kernladungszahl } Z \end{array} El \frac{q}{e} \text{ Ionisierung}} \quad (2.2)$$

2.2 Hund'sche Regeln und Auswahlregeln

Die Elektronen werden für die Grundzustände so aufgefüllt, dass die Bindungsenergie (negativ) minimiert wird, das heißt deren Betrag maximal wird. Zwischen den Unterschalen gilt folgende Reihenfolge:

$5s^2$	$5p^6$	$5d^{10}$	$5f^{14}$
$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$
$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
$2s^2$	$2p^6$		
$1s^2$			

Abbildung 2.1. Auffüllung der Grundzustände

Pro Unterzustand hat man $N_e = 2(2l + 1)$ Elektronen. Die Gesamtzahl der Elektronen in der n -ten Schale entspricht somit $N_e = 2 \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 = 2n^2$

Innerhalb einer Unterschale gelten für die Grundzustände die hierarchischen **Hund'schen Regeln**:

1. Der Gesamtspin $S := |\sum_i m_{s,i}|$ wird maximal.
2. Der Gesamtdrehimpuls $L := |\sum_i m_{l,i}|$ wird maximal.
3. Ist die Unterschale bis zu (einschließlich) halb voll, so wird J minimal d.h. $J := |M_L + M_S| \stackrel{!}{=} |L - S|$, bei mehr als halb vollen Unterschalen muss $J \stackrel{!}{=} L + S$ sein.

Diese Regeln bestimmen die Feinstruktur des Elements. Regt man das Element an, so gelten diese Regeln nicht mehr.

Die Schalen-/Orbitalübergänge werden von den sog. **Auswahlregeln** beherrscht, die wohlgemerkt nicht hierarchisch sind.

1. $\Delta L \in \{-1, 1\}$ bei L-S-Kopplung
2. $\Delta M_L \in \{-1, 0, 1\}$
3. $\Delta S = 0$ für leichte Atome
4. $\Delta J \in \{-1, 0, 1\}$ wobei $J = 0 \rightarrow J = 0$ **verboten**

2.3 Vielelektronenprobleme

Für Elemente mit mehr als einem Elektron gibt es keine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung, auch numerische Verfahren sind mit zunehmender Elektronenzahl extrem aufwändig. Wir machen deshalb folgende Näherungen: **Alkaliatome (1.Hauptgruppe)**

- Alkaliatome haben nur ein Elektron außerhalb geschlossener Schalen. Die Grundzustände sind immer $^2S_{\frac{1}{2}}$ ($n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ nicht notiert).
- Wir betrachten zu Näherung ein **effektives Potential** $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2 Z_{eff}(r)}{r} \text{ mit } 1 < Z_{eff}(r) < Z \text{ und } Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1, Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow 0} Z$$

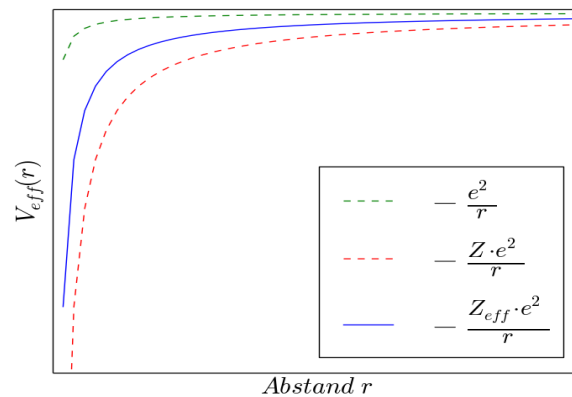


Abbildung 2.2. Effektives Potential

- Dies hebt die E_n -Entartung bezüglich Z bereits auf (Feinstruktur):
 $E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$ (für kleine n am stärksten)
- Für große n und r (wasserstoffähnlich) lässt sich dies so schreiben:

$$E_{n,l} = -E_0 \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = -\frac{E_0}{n_{eff}^2} = -\frac{E_0}{(n - \delta_{n,l})^2} \quad E_0 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.3)$$

wobei $\delta_{n,l}$ der sog. **Quantendefekt** ist: $\delta_{n,l} = n - \sqrt{\frac{E_0}{-E_{n,l}}}$
 $E_{n,l} < 0$ ist die real gemessene Energie.

Um allgemeine Vielelektronenprobleme zu lösen, können wir (zumindest bis jetzt) nur nähern indem wir zur Lösung eines Elektron die anderen Elektronen unabhängig voneinander gelöst haben und das entstehen $V_{eff}(r)$ **kugelsymmetrisch** ist.

Wir suchen deshalb eine **Gesamtwellenfunktion für N Teilchen**.

Diese muss antisymmetrisch unter Vertauschung sein, wir nehmen zusätzlich an, dass sie sich als Produkt der Einteilchenwellenfunktionen schreiben lässt.

Analog zu $\psi_{ges}(1, 2) = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)$ definieren wir die

Slaterdeterminante:

$$\psi_{ges}(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Diese ist total antisymmetrisch unter Spaltenvertauschung als Summe aus $N!$ Produkten.

2.4 Moseley-Gesetz

Für Elektronen-übergänge zwischen Zuständen wurde empirisch festgestellt, dass $\sqrt{f} \propto Z$ ist, wobei f die Frequenz des emittierten Lichts ist.

$$\text{Moseley Gesetz: } f = E_0 c (1/n_2^2 - 1/n_1^2) (Z - b)^2$$

$$\text{mit } c = \lambda f : \lambda = E_0 (1/n_2^2 - 1/n_1^2) (Z - b)^2$$

für Übergänge $n_1 \rightarrow n_2$, b - Abschirmkonstante

Für das Wasserstoffatom entspricht das Moseley-Gesetz der Rydberg-Formel.

Für wasserstoffähnliche Atome ($b=1$) gilt: K-Linie: $n_2 = 1$, $\alpha : n_1 = 2$, $\beta : n_1 = 3$

Für schwere Atome ($Z > 40$) gilt: L-Linie: $n_2 = 2$, $b \approx 7.4$, $\alpha : n_1 = 3$, $\beta : n_1 = 4$

Die Auswahlregeln müssen gelten.

2.5 LS-Kopplung, jj-Kopplung

LS-Kopplung

- Wasserstoff: Potential \rightarrow Störungen \rightarrow Spin-Bahn-Kopplung
- Spin-Bahn-Kopplung: nicht ℓ und s sondern j relevant
- Viele Elektronen: J relevant

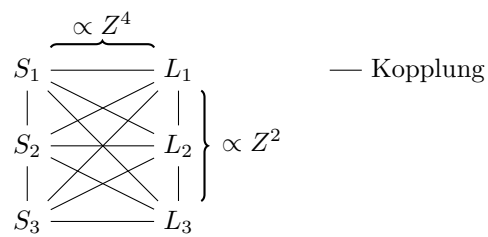


Abbildung 2.3. L-S-Kopplung

SATZ:

Sei die Spin-Bahnkopplung eines Elektrons \ll Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung zwischen den Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i \vec{\ell}_i + \sum_i \vec{s}_i$$

$$\begin{array}{ccc}
 s_1 & \ell_1 & \\
 + & + & \\
 s_2 & \ell_2 & \text{Anzahl der Feinstrukturaufspaltungen: } \min(2s+1; 2\ell+1). \\
 + & + & \\
 \underbrace{s_3 \quad \ell_3}_{L+S=J} & &
 \end{array}$$

Entscheidend für die Feinstrukturaufspaltung ist die Zusammensetzung von L und S .

Beispiel:Elektronenkonfiguration: $L = 2, S = 1 \rightarrow J = 1, 2, 3$.Anzahl der J_S : $\min(2S + 1; 2L + 1)$

Hier: 3

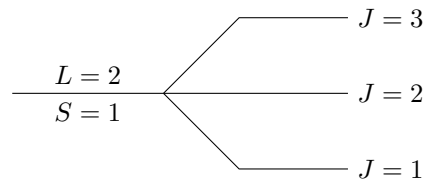


Abbildung 2.4. Termschema

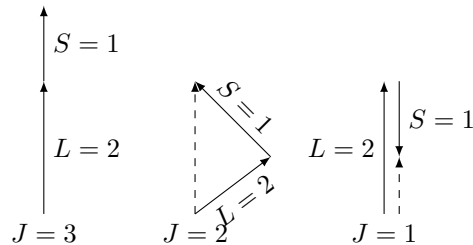


Abbildung 2.5. Vektordiagramme der möglichen Additionen

Feinstruktur ist sehr klein im verglichen mit den Energiedifferenzen zwischen verschiedenen L_S oder S .

Energien:

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + c \cdot L \cdot S = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - S(S+1) - L(L+1))$$

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - 8) \hbar^2$$

$$\rightarrow J = 3 : E(n, L, S) + 2c\hbar^2$$

$$J = 2 : E(n, L, S) - 1c\hbar^2$$

$$J = 1 : E(n, L, S) - 3c\hbar^2$$

c ist am größten für kleine n . \rightarrow Bei großen n nur noch sehr kleine Feinstruktur.

jj-Kopplung

SATZ:

Sei die Spin-Bahn-Kopplung eines Elektrons \gg Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung verschiedener Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i \left| \vec{s}_i + \vec{\ell}_i \right|$$

- Bei jj-Kopplung sind L und S nicht definiert, daher nur Gesamtdrehimpuls J
- Multiplett-Zustände nicht mehr erkennbar.

$$\begin{array}{c} s_1 \text{ --- } \ell_1 \\ + \\ s_2 \text{ --- } \ell_2 \\ + \\ s_3 \text{ --- } \ell_3 \end{array}$$

Abbildung 2.6. jj-Kopplung

3 Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

3.1 Zerfallsgesetz

Es gibt 3 verschiedene Zerfallsarten des Radioaktiven Zerfalls. (A: Nukleonenzahl, Z: Kernladungszahl)

- α - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$
 α -Strahlung wird mittels Heliumkernen vermittelt (positiv geladen).
- β - Zerfall:
 1. β^- - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$
Beim β^- -Zerfall wird im Kern ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Dabei werden ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert.
 2. β^+ - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$
Beim β^+ -Zerfall wird im Kern ein Proton in ein Neutron umgewandelt. Dabei werden ein Elektron und ein Elektron-Neutrino emittiert.
- γ -Zerfall : ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$
Falls nach einem α - Zerfall oder β - Zerfall ein Atomkern in einem angeregten Zustand vorliegt, ist γ - Zerfall möglich. Beim Übergang in einen energetisch günstigeren Zustand wird hochfrequente elektromagnetische Strahlung emittiert. Meist folgt der γ -Zerfall unmittelbar auf einen α - oder β - Zerfall.

Für die Zerfallsrate(Aktivität) $A = \frac{d}{dt}N(t)$ gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\lambda N(t) \quad (3.1)$$

λ : Zerfallskonstante beschreibt Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte radioaktive Zerfallsart. Sie ist unabhängig von Ort und Zeit, aber charakteristisch für den Kern.

Die Lösung dieser Gleichung gibt die Anzahl N der Atome zum Zeitpunkt t an:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.2)$$

Wobei man in diesem Zusammenhang noch folgende nützliche Größen definiert:

- Mittlere Lebensdauer: $\tau = 1/\lambda$
Nach dieser Zeit sind nur noch $1/e$ ($\approx 37\%$) der ursprünglichen Atome vorhanden.
- Halbwertszeit : $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ Nach dieser Zeit sind nur noch 50 % der ursprünglichen Atome vorhanden.

Der radioaktive Zerfall ist ein stat. Prozess. Die Wahrscheinlichkeit einen zerfallenden Kern anzutreffen ist bei $t=0$ am größten, danach fällt sie exponentiell ab. Diese Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell eine Binomial-Verteilung. Für eine hohe Anzahl an Versuchen und eine kleine Wahrscheinlichkeit konvergiert die Binomialverteilung gegen eine Poisson-Verteilung. Diese Näherung lässt sich auf den radioaktiven Zerfall anwenden, da man in der Regel viele Atome ($N \approx 10^{23}$) betrachtet, also eine hohe Anzahl Versuche durchführt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit in der Regel klein ist:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.3)$$

Somit lässt sich der Zerfall also durch eine Poisson-Verteilung beschreiben mit dem Mittelwert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu}$ wobei der Zerfall k -mal eintreten soll.

$$P(k) = \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!} \quad (3.4)$$

3.2 Fermis Goldene Regel

Wir wollen eine Voraussage für die Übergangsrate λ (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit), mit der ein Anfangszustand unter dem Einfluss einer Störung in einen anderen Zustand übergeht, treffen. Wir nehmen dabei an, dass es sich um ein an sich zeitlich konstantes System handelt, welches durch den Hamilton-Operator H_0 beschrieben wird, und durch einen Störoperator V , welcher vergleichsweise klein gegenüber H_0 ist, gestört wird. Der gesamte Hamiltonoperator lautet also $H = H_0 + V$. Wir formulieren Fermis Goldene Regel:

$$\lambda_{A \rightarrow E} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_E | V | \psi_A \rangle|^2 \cdot \rho_E = \frac{dP}{dt} \quad (3.5)$$

Die Übergangsrate hängt also davon ab wie stark die Störung V den Anfangszustand ψ_A und den Endzustand ψ_E koppelt. Außerdem skaliert die Übergangsrate mit der Anzahl der möglichen Übergänge welche durch die Endzustandsdichte ρ_E beschrieben wird.

Was ist $\rho(E)$ eigentlich ?

Wir bezeichnen den Phasenraum unseres Systems als den Raum, der durch die Ortskoordinaten \mathbf{x} und die dazugehörigen Impulse \mathbf{p} aufgespannt wird. In diesem Raum können wir einem Punkt ein Volumen von $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ zuordnen (Unschärferelation).

1 Dimension:

Zunächst betrachten wir einen jeweils eindimensionalen Orts- und Impulsraum mit Zuständen $(x, p) \in [x, x + L] \times [p_x, p_x + p]$. In diesem Fall kann die Gesamtfläche Lp mit $N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$ Zuständen gefüllt werden. Für die Zustandsdichte gilt dann:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2 \frac{dN}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \frac{2m}{p} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (3.6)$$

Wobei wir im letzten Schritt auf Kugelkoordinaten transformieren. Der Faktor 2 kommt daher, dass die Zustände (x, p) und $(x, -p)$ bezüglich der Energie entartet sind, denn $E = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$.

3 Dimensionen:

Die Anzahl der Gesamtzustände N ist nun

$$N = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{x}^3 d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int p^2 dp d\Omega \quad (3.7)$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$ folgern wir $\frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp}$ und erhalten damit für die Zustandsdichte für **1 Teilchen**

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2} \int d\Omega = \frac{VpE}{2\pi^2 c^2 \hbar^3} \quad (3.8)$$

Für **2 Teilchen** addieren sich die Impulse im Mittel zu 0, weshalb die Zustandsdichte konstant ist. Jedoch addieren sich die Energien zu $E = E_1 + E_2$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (3.9)$$

Da $p_1^2 = p_2^2$ folgt $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$\begin{aligned} \rightarrow dE &= \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2 p_1 dp_1 \\ \rightarrow \rho_2 &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 \int d\Omega_1 \end{aligned}$$

Wir können dies auf n Teilchen erweitern

$$\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3 p_i \quad (3.10)$$

3.3 Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Überlegungen dienten allesamt dazu die Reaktionsrate einer Zustandsänderung zu quantifizieren. Wir nennen nun eine letzte Größe kennen, die ebenfalls diesen Zweck erfüllt. Der Wirkungsquerschnitt σ gibt die Stärke einer Reaktion an. Um dies zu begreifen betrachten wir einen konstanten Fluss Φ von Teilchen, die allesamt der Sorte a zugehören und auf ein Target der Dicke x aus Teilchen der Sorte b geschossen werden.

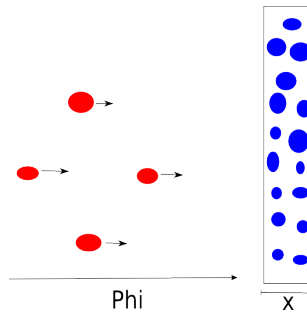


Abbildung 3.1. Teilchenfluss auf Target

Die Reaktionsrate pro Targetteilchen ist $W = \Phi \cdot \sigma$. Die Reaktionsrate im gesamten Target ist $W \cdot N = \Phi \cdot n_B \cdot x$ mit N Targetteilchen und der Volumenteilchendichte n_B .

Im Allgemeinen hängt der Wirkungsquerschnitt σ von der Art der Reaktion ab:

- Absorption σ_A
- elastische Streuung σ_E
- inelastische Streuung σ_I

Der Gesamtwirkungsquerschnitt ergibt sich dann via Addition $\sigma_{Ges} = \sigma_A + \sigma_E + \sigma_I$. Für Teilchen die sich innerhalb eines Mediums ausbreiten definiert man die mittlere freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{n_B \sigma}$. Diese gibt die durchschnittliche Strecke an, die ein Teilchen im Target ohne Wechselwirkung zurücklegen kann.

Das Volumen in dem 1 Targetteilchen ist ist also $V = \lambda \cdot \sigma = 1/n$
Anhand der mittleren freien Weglänge lassen sich folgende Größen berechnen:

- Anzahl der Strahlteilchen im Targetmaterial : $N(x) = N_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Kollisionsrate: $c(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = \frac{N_0}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} = c_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Wahrscheinlichkeit für Reaktion eines einfallenden Teilchens: $p(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

Aus Dimensionsbetrachtungen lässt sich darauf schliessen, dass der Wirkungsquerschnitt die Dimension einer Fläche hat. Wir werden dies nun veranschaulichen:

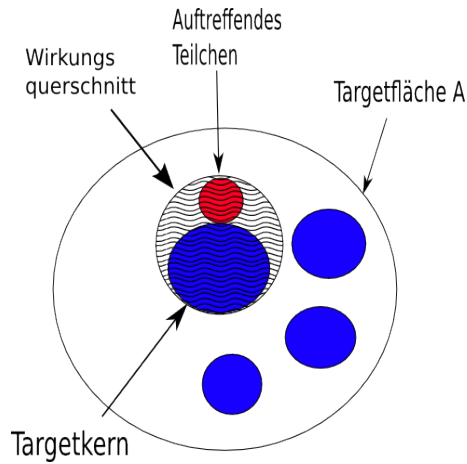


Abbildung 3.2. Wirkungsquerschnitt eines Teilchens (rot) das auf ein Targetteilchen (blau) trifft, mit Wirkungsquerschnitt (gewellte Fläche)

Im Allgemeinen ist bei Teilchenkollisionen der Wirkungsquerschnitt, die kleinste Fläche, die beide Teilchen komplett einschließt:

$$\sigma = \pi(r_K + r_P)^2 \quad (3.11)$$

Kernradius: r_K Projektilradius: r_P

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das n Projektil mit dem Target wechselwirken, als das Verhältnis der effektiven Flächen:

$$P = \frac{n\sigma}{A} \quad (3.12)$$

3.4 Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen

Regeln

- Meist ist die Zeitachse eingezeichnet, übrige Richtungen beziehen sich auf den Raum
- Teilchen werden durch Linien symbolisiert, dabei gibt die Pfeilrichtung an, ob es sich um das Teilchen selbst (Pfeil in Richtung der Zeitachse) oder sein Antiteilchen (Pfeil entgegengesetzt zur Zeitachse gerichtet).
Die reellen Teilchen erfüllen alle $E^2 - p^2 = m^2$ ($c = 1$).
- virtuelle Teilchen hingegen sind durch im Feynman-Diagramm abgeschlossene Linie dargestellt und erfüllen $E^2 - p^2 = m^2$ **nicht!**
- Linienformen können angeben, um welche Teilchen es sich handelt. So haben die Eichbosonen γ , W^+ , W^- , Z^0 eine Wellenlinie (3.3), Gluonen eine schraubenförmige Linie (3.4).
- Vertices, die Knotenpunkte zwischen den Linien, geben durch ihre Anzahl die Ordnung der Feynman-Diagramme an.
- Propagatoren, die Linien zwischen Vertices, sind virtuelle Eichbosonen, welche keine Vorzugsrichtung haben.



Abbildung 3.3. Eichboson

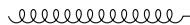


Abbildung 3.4. Gluon

Eichbosonen	Anzahl	WW	auf Materieteilchen
Gluon	8	<i>starke WW</i>	<i>Quarks</i>
W^+ , W^- , Z^0	3	<i>schwache WW</i>	<i>Quarks, Leptonen</i>
Photonen	1	<i>el.mag. WW</i>	<i>Quarks, Leptonen</i>

Abbildung 3.5. Tabelle über die WW von Eichbosonen

Beispiele

1. Positron (Antifermion) + Elektron (Fermion) in Feynman-Diagramm 2. Ordnung:

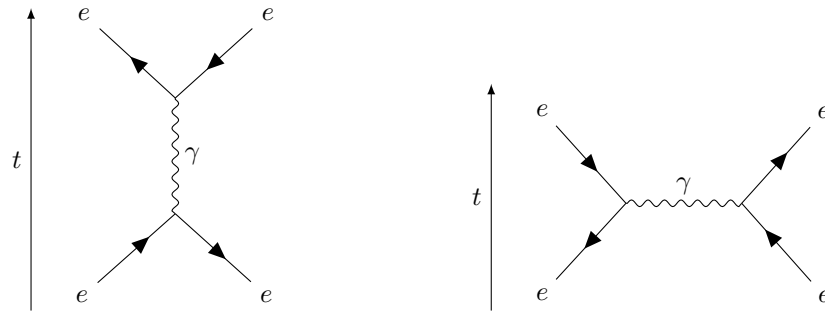


Abbildung 3.6. zeitartig $q^2 > 0$ (links) / raumartig $q^2 < 0$ (rechts)

Wichtig: Das Zeitintervall der Wechselwirkung ist durch die Heisenberg'sche Unschärferelation beschränkt: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
 für el.mag. WW: $E = h \cdot \nu \Rightarrow \Delta t \geq (2\pi\nu)^{-1}$
 Diese Unschärfe erlaubt die Superposition aller möglichen Prozesse, die wir durch die Feynman-Diagramme darstellen können.

2. Compton-Effekt:

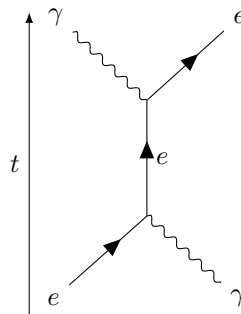


Abbildung 3.7. Feynman-Diagramm des Compton-Effekts

3. Proton-Zerfall:

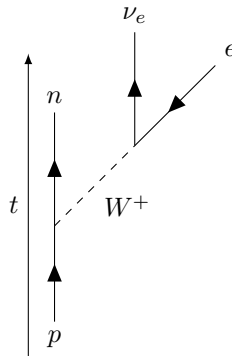


Abbildung 3.8. Feynman-Diagramm des Proton-Zerfalls

Feynman-Kalkül

Prozesse sind auf beliebig vielen Arten darstellbar (mehr Vertices möglich). Jeder Vertex liefert die Wurzel aus einer Kopplungskonstante: $\sqrt{\alpha}$.

Z.B. $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ für el.mag. WW ist es die Feinstrukturkonstante.

Je mehr Vertices ein Diagramm enthält, desto geringer ist sein Beitrag zur Gesamtamplitude der superponierten Zustände (alle bis heute erzielten Forschungsergebnisse mit Termen nur bis 4. Ordnung errechnet).

Austauschteilchen in Berechnung von Matrixelement durch Propagator beschrieben:

$$\text{Es gilt: } \frac{1}{m^2 + q^2}, \text{ Matrixelement } M \propto \frac{1}{\alpha q^2} \Rightarrow \sigma \propto \frac{\alpha^2}{q^4}$$

4 Teilchendetektoren

Teilchendetektoren messen Produkte von Kollisionen und Zerfällen.

Aufgaben

- Nachweis entstandener Teilchen
- Messung von Energie/Impuls
- Messung von Lebensdauer, Zerfallslänge, β , γ , τ
- Teilchenidentifikation (Bestimmung $M^2 = E^2 - \vec{p}^2$)

Kapitel

4.1 Impulsmessung

4.2 Energiemessung

4.3 Messung von Photonen

4.4 Teilchen

4.1 Impulsmessung

Ablenkung von geladenen Teilchen im Magnetfeld.

→ Homogenes B-Feld

→ Kreisbahn mit Radius $r = \frac{p}{q \cdot B}$

Gasdetektor

- Kondensator → E-Feld
- Ionisationsgas, nicht elektronegat
 $\Delta U = -\frac{N \cdot e}{C}$, wobei N die Teilchenanzahl, e die Elementarladung und C die Kapazität des Kondensators ist. (siehe Abb. 4.1)

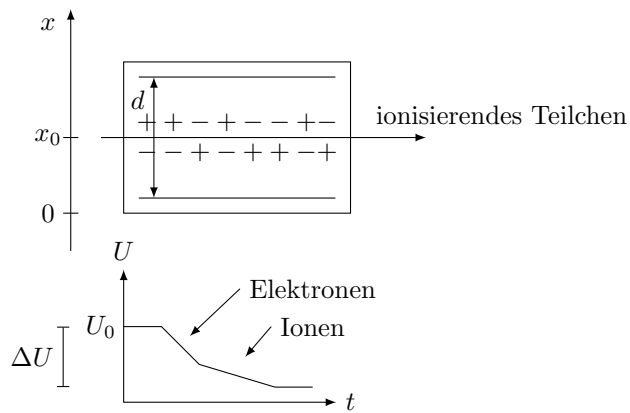


Abbildung 4.1. Schematischer Aufbau eines Gasdetektors (oben)
Spannungsänderung am Kondensator über Zeit (unten)

Proportionalzählrohr

- sehr dünner Anodendraht $\rightarrow \mu\text{m}$
- $E(r) = \frac{U_0}{r \cdot \ln\left|\frac{R}{r_A}\right|} \Rightarrow$ starkes Feld im Zentrum (siehe Abb. 4.2)
- **Sau** starke Beschleunigung in Nähe des Anodendrahtes
- Reicht aus, im Gas zu ionisieren \rightarrow Sekundärelektronen
 $\Delta U = -\frac{A N e}{C}$, $A = 10^4 - 10^5$ Verstärkungsfaktor

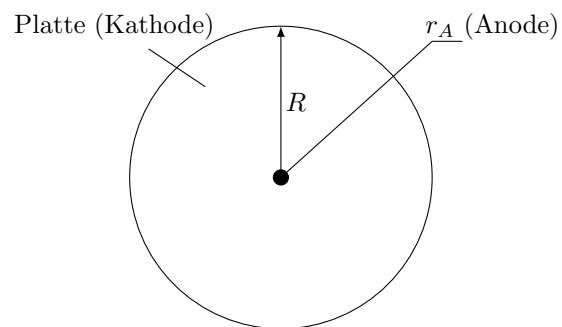


Abbildung 4.2. Schema eines Proportionalzählrohrs

Halbleiterzähler

Ein Halbleiterzähler ist ein pn-Übergang, an den in Sperrrichtung eine Spannung angelegt wird. Dadurch entsteht eine Verarmungszone, in der keine freien Ladungsträger vorhanden sind.

Durchgehende Teilchen erzeugen durch Ionisation in dieser Zone Elektronen-Loch-Paare, die im E-Feld zu den Anschlusspolen wandern und ein Signal erzeugen.

Szintillationszähler

- Teilchen oder γ -Teilchen gibt Energie ab, die in Form von sichtbarem Licht wieder frei wird.
- Auslesen durch Photodetektor

4.2 Energiemessung

- Absorption eines hadronischen Schauers in Kalorimeter
- Hadronen: z.B. Protonen, Neutronen.. (aus Quarks zusammengesetzte Teilchen)

hadronischer Schauer

Beim Einfall hochenergetischer Teilchen entstehen Sekundärteilchen, die selbst so lange Teilchen generieren, bis die Energie erschöpft ist.

Beispiel:

Mittlere Weglänge eines Teilchens in Blei: $5.6\text{mm} = \lambda$

Ideale Länge: $20\lambda \rightarrow 112\text{mm}$ Blei

Abwechselnd: 2mm Blei und 5mm Szintillationszähler

$\rightarrow 392\text{mm}$ Länge (elektromagnetisches Kalorimeter, ECAL)

Hadronen: Absorptionslänge $\lambda = 18.5\text{cm} \rightarrow 10\lambda = 1.85\text{m} + \text{ECAL}$

4.2.1 Messung von Photonen

- Röntgen- & Gammastrahlen in Halbleiterkristallen (Si, Ge, ...) \rightarrow gute Auflösung
- Messung durch szintillierende Kristalle (NaT , PbWO_4)
 - niedrige Energie \rightarrow schlechte Auflösung
 - hohe Energie ($> 100\text{MeV}$) + ausreichende Dichte \rightarrow gute Messung

$$- \text{ "Kristallkalorimeter": } \frac{\sigma_E}{E} = \frac{0.04}{\sqrt{E}} + 0.01 \begin{cases} \text{für 1 GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 4.1\% \\ \text{für 100 GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 1.1\% \end{cases}$$

4.3 Teilchenidentifikation

- Massenbestimmung durch Messung von Impuls & Flugzeit
 $pc = \beta E = \beta \gamma m_0 c^2$
 Impulsbereich limitiert durch Auflösung von Zeitmessung & Flugstrecken
 Grenze der Methode: Impuls etwa in $\frac{\text{GeV}}{c}$
- Massenbestimmung durch Zerfallsprodukte (Masse & Impulse erhalten!)
 $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$
- durch spezifische Energieverluste
 Bei bekanntem $p \cdot c$ wird $\frac{dE}{dx}$ gemessen $\rightarrow \beta \gamma$ bestimmt
- durch "Tricks":
 - Myonen: nur Energieverluste durch Ionisation, keine Schauer
 - Photonen: keine Energieverluste durch Ionisation, nur el.mag. Schauer
 - Elektronen: Energieverluste durch Ionisation, el.mag. Schauer, Übergangsstrahlung
 - Neutronen, Antineutronen: keine Ionisation, nur hadronischer Schauer
 - geladene, hochenergetische Teilchen: Cherenkov-Strahlung (Teilchen in Medium schneller als Licht \rightarrow strahlen Licht ab (Energie ändert sich nicht wirklich) über welches Information über Teilchen zu erhalten sind.)

5 Elementarteilchen-Zoo

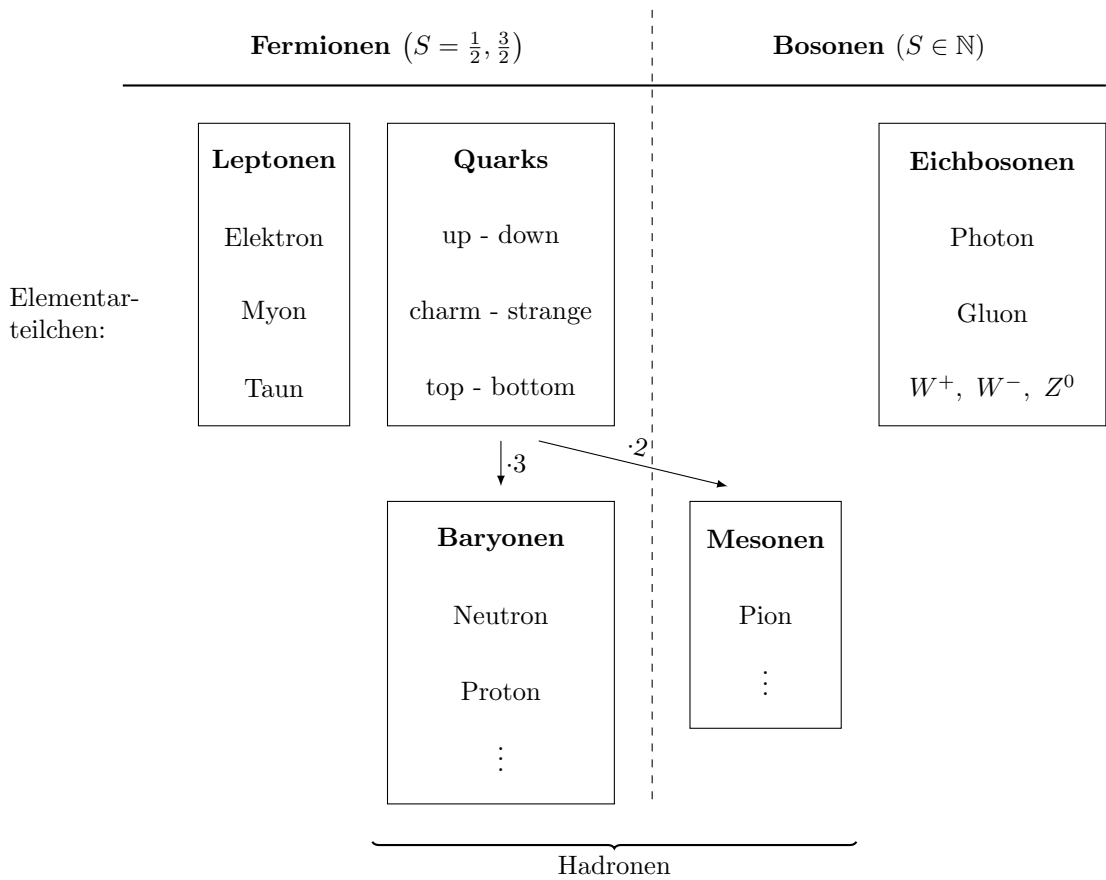


Tabelle 5.1. Übersicht des Elementarteilchen-Zoos

Anmerkungen

- Es gibt insgesamt 8 Gluonen, die sich in ihrer Farbladung unterscheiden

- Das Higgs-Boson ist ein weiteres Elementarteilchen, das sich keiner der 3 Gruppen zuordnen lässt und Teil des Higgs-Feldes ist. (Annahme: durch Wechselwirkung mit dem Higgsfeld erhalten Teilchen ihre Masse.)

5.1 Leptonen

- 3 Generationen
- In jeder Generation ein Teilchen mit $q = -e$ und eines mit $q = 0$ sowie deren Antiteilchen
- Antiteilchen haben entgegengesetztes Vorzeichen bei Ladung und Leptonenzahl

Generation	$q = -1$	$q = 0$	Leptonenzahl ($= n_l - n_{\bar{l}}$)
1	e^-	ν_e	$L_e = 1, L_\mu = 0, L_\tau = 0$
2	μ^-	ν_μ	$L_e = 0, L_\mu = 1, L_\tau = 0$
3	τ^-	ν_τ	$L_e = 0, L_\mu = 0, L_\tau = 1$

Tabelle 5.2. Übersicht der 3 Leptonen-Generationen und ihrer Eigenschaften

Die Antileptonen werden wie folgt notiert: e^+ , μ^+ , τ^+ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$.

Beispiel eines Zerfalls

Myon zerfällt zu einem Elektron und zwei Neutrinos:

	μ^-	\rightarrow	e^-	$+$	$\bar{\nu}_e$	$+$	ν_μ
q	-1		-1		0		0
L_e	0		1		-1		0
L_μ	1		0		0		1

Tabelle 5.3. Myonenzerfall

Ladung und Leptonenzahl bleiben **erhalten**. Masse der Produkte darf die des Edukts nicht überschreiten.

5.2 Quarks

Generation	Flavour	q	I_3	S	C	B	T
1	d (<i>down</i>)	$-1/3$	$-1/2$				
	u (<i>up</i>)	$2/3$	$1/2$				
2	s (<i>strange</i>)	$-1/3$		-1		0	
	c (<i>charm</i>)	$2/3$			1		
3	b (<i>bottom</i>)	$-1/3$		0		-1	
	t (<i>top</i>)	$2/3$					1

Tabelle 5.4. Übersicht der 3 Quark-Generationen und deren Eigenschaften

Hierbei steht I_3 für den sog. Isospin, und S , C , B , T für die Quantenzahlen.

Antiquarks haben umgekehrtes Vorzeichen bei Ladung und Quantenzahlen/Isospin. I_3 , S , C , B , T sind Flavour-Quantenzahlen:

Flavour-Quantenzahlen I_3 , S , C , B , T

$$I_3 = \frac{1}{2} ((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})) \quad (5.1)$$

$$\rightarrow up - Quark : I_3 = \frac{1}{2}; \text{ down} - Quark : I_3 = -\frac{1}{2} \quad (5.2)$$

$$C = n_C - n_{\bar{C}} \rightarrow \text{charm} - Quark : C = 1 \quad (5.3)$$

$$S = n_S - n_{\bar{S}} \rightarrow \text{strange} - Quark : S = -1 \quad (5.4)$$

$$T = n_T - n_{\bar{T}} \rightarrow \text{top} - Quark : T = 1 \quad (5.5)$$

$$B = n_B - n_{\bar{B}} \rightarrow \text{bottom} - Quark : B = -1 \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

Farbladung

Quarks können 3 verschiedene Farbladungen annehmen: r , g , b

Antiquarks können 3 Antifarben annehmen: \bar{r} , \bar{g} , \bar{b}

Alle gebundenen Zustände sind farbneutral (**Confinement-Hypothese**).
Dies kann auf 2 Arten erreicht werden:

- Kombination von Quark und Antiquark (Mesonen)
 - Farbe + Antifarbe = Neutral
 - Zerfallen in Sekundenbruchteilen
- Kombination aller 3 Farben, also 3 Quarks (Baryonen)
 - $r + g + b = \text{weiß}$ (neutral)

Gluonen tragen jeweils eine Farb- und Antifarbladung.
→ $3^2 = 9$ Kombinationsmöglichkeiten
→ davon ist aber eine neutral → 8 Möglichkeiten

5.3 Charakterisierung durch WW

- Leptonen unterliegen der schwachen WW, der Gravitation und, falls sie geladen sind, der el.mag. WW.
- Quarks unterliegen allen Wechselwirkungen

5.4 Zerfallsbreite

Wir wollen die Lebensdauer von kurzlebigen Teilchenzuständen (=Resonanzen: aus Stoßprozessen entstandene instabile Teilchen) herausfinden.

Der Zerfall eines instabilen Teilchens / einer Resonanz erfolgt nach dem Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{1}{\tau} \quad (5.8)$$

Der Zustand einer festen Energie E_r ist durch die Wellenfunktion gegeben:

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_0}_{\text{ortsabhängig}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{iE_r t}{\hbar}\right)}_{\text{zeitabhängig}} \quad (5.9)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen zu finden, ist:

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \quad (5.10)$$

⇒ zeitlich konstant, kein Zerfall.

Dies führt uns zu dem Problem, dass sich auch für instabile Teilchen nur konstante Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben.

Lösungsansatz

Wähle komplexe Energie für zerfallende Teilchen:

$$E = E_r - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$

Einsetzen in obige Gleichungen für Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte führt uns auf:

$$\psi(t) = \psi_0 \exp\left(-i\frac{E_r t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}\right) \quad (5.12)$$

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) \quad (5.13)$$

\Rightarrow exponentieller Zerfall mit $\frac{\Gamma}{\hbar} = \lambda = \frac{1}{\tau}$; $\Gamma\tau = \hbar$

Betrachte nun die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion: $\psi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi(E)$:

$$\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(t) \exp\left(i\frac{Et}{\hbar}\right) dt \quad (5.14)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-t \left(\frac{i}{\hbar}(E_r - E) + \frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\right) dt \quad (5.15)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - E_r) + \frac{i\Gamma}{2}} \quad (5.16)$$

Daraus erhalten wir nun $P(E)$:

$$P(E) = A \cdot \psi^*(E) \psi(E) \quad (5.17)$$

mit Normierung:

$$A = \frac{\Gamma}{\hbar^2 \psi_0^2} \quad (5.18)$$

$P(E)$ heißt Lorentz- oder Breit-Wigner-Verteilung. Ihr Maximum liegt bei E_r , ihre FWHM (= Full Width Half Maximum) bzw. Halbwertsbreite beträgt Γ .

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (5.19)$$

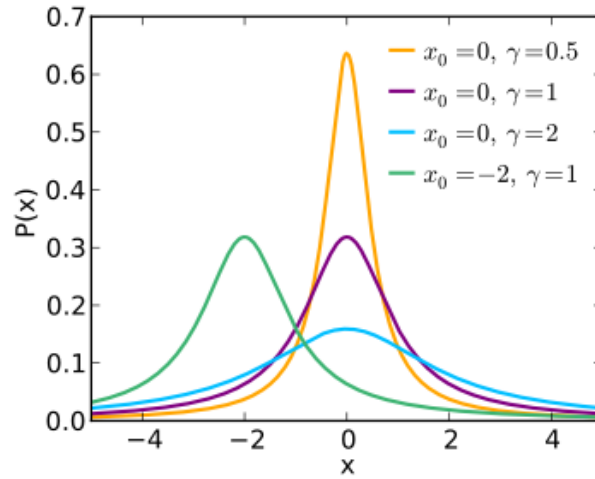


Abbildung 5.1. Funktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lorentz-Verteilung

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt jedes Teilchen eine Energiebreite Γ . Über die Heisenberg'sche Energie-Zeit Unschärfe-Relation $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$ ist die Lebensdauer eines instabilen Zustandes mit der Energieunschärfe verknüpft. Wird die Lebensdauer unmessbar klein \rightarrow Zerfallsbreite $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$, was eine messbare Größe ist.

Γ und τ werden durch freigesetzte Energie (Phasenraum) und Art der Wechselwirkung bestimmt:

WW	Teilchen	τ	Γ
stark	$\Delta(1232)$	10^{-23}s	100MeV
el.mag.	π^0	10^{-18}s	1keV
schwach	π^\pm	10^{-8}s	10^{-7}eV
	n	10^3s	10^{-18}eV

Tabelle 5.5. Übersicht einiger kurz- und langlebiger Teilchen(zustände). $\Delta(1232)$ ist ein Delta-Baryon (oder Delta-Resonanz) mit $m = 1232\text{MeV}/c^2$