

# **ExkRementalpfü\$ic! 4 - Boykott-Gruppenseminar**

no Fabs  
were given

$\overline{\text{Chris}}$

MiX

Pauli

Anton

Søni

HeinStein

Martina

HerMitsch

28. Juni 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung - Ex3 Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
1.1	Notation der Quantenzahlen . . . . .	5
1.2	Korrekturterme der Energieniveaus . . . . .	6
1.3	Näherungen für mehrere Elektronen . . . . .	6
1.4	Das Pauli-Prinzip . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Ex4 - Atomphysik</b>	<b>8</b>
2.1	Spektroskopische Notation . . . . .	8
2.2	Hund'sche Regeln und Auswahlregeln . . . . .	9
2.3	Vielelektronenprobleme . . . . .	10
2.4	Moseley'sches-Gesetz . . . . .	12
2.5	LS-Kopplung, jj-Kopplung . . . . .	12
2.5.1	LS-Kopplung . . . . .	12
2.5.1.1	SATZ: . . . . .	12
2.5.2	jj-Kopplung . . . . .	14
2.5.2.1	SATZ: . . . . .	14
2.6	Clebsch-Gordan Koeffizienten (ein kleiner Ausflug...) . . . . .	15
2.6.1	Physikalische Interpretation der CGK . . . . .	16
2.6.2	Anleitung zum Lesen der Tabellen . . . . .	17
2.6.3	Anmerkungen . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik</b>	<b>18</b>
3.1	Zerfallsgesetz . . . . .	18
3.2	Fermis Goldene Regel . . . . .	19
3.3	Wirkungsquerschnitt . . . . .	21
3.4	Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen . . . . .	23
3.4.1	Regeln . . . . .	23
3.4.2	Beispiele . . . . .	24
3.4.3	Feynman-Kalkül . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Teilchendetektoren</b>	<b>26</b>
4.0.0.1	Aufgaben . . . . .	26
4.0.0.2	Kapitel . . . . .	26
4.1	Impulsmessung . . . . .	26
4.1.1	Gasdetektor . . . . .	26

4.1.2	Proportionalzählrohr . . . . .	27
4.1.3	Halbleiterzähler . . . . .	28
4.1.4	Szintillationszähler . . . . .	28
4.2	Energiemessung . . . . .	28
4.2.1	hadronischer Schauer . . . . .	28
4.2.2	Messung von Photonen . . . . .	28
4.3	Teilchenidentifikation . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Wechselwirkung von Teilchen und Strahlung mit Materie</b>	<b>30</b>
5.1	Energieverlust von geladenen schweren Teilchen . . . . .	31
5.2	Energieverlust von Elektronen . . . . .	31
5.2.1	Anregung und Ionisation . . . . .	31
5.2.2	Bremsstrahlung . . . . .	32
5.3	Wechselwirkung von radioaktiver Strahlung mit Materie . . . . .	33
5.3.1	$\alpha$ -Strahlung . . . . .	33
5.3.2	$\beta$ -Strahlung . . . . .	34
5.3.3	$\gamma$ -Strahlung . . . . .	34
5.3.3.1	Rayleigh-Streuung, Thomson-Streuung . . . . .	35
5.3.3.2	Gemeinsamkeiten . . . . .	35
5.3.3.3	Unterschied . . . . .	35
5.3.3.4	Compton-Effekt . . . . .	36
5.3.3.5	Photoeffekt . . . . .	36
5.3.3.6	Paarbildung . . . . .	37
5.3.3.7	Photoeffekt vs. Comptoneffekt vs. Paarbildung . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Elementarteilchen-Zoo</b>	<b>40</b>
6.1	Charakterisierung von Elementarteilchen . . . . .	40
6.1.1	Masse . . . . .	41
6.1.2	Spin . . . . .	42
6.1.3	Klassifizierung anhand Wechselwirkung . . . . .	43
6.1.3.1	Elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .	43
6.1.3.2	Schwache Wechselwirkung . . . . .	44
6.1.3.3	Starke Wechselwirkung . . . . .	45
6.1.3.4	Wechselwirkung zwischen Quarks . . . . .	45
6.1.4	Anmerkungen . . . . .	47
6.2	Leptonen . . . . .	47
6.2.1	Beispiel eines Zerfalls . . . . .	48
6.3	Quarks . . . . .	49
6.3.1	Flavour-Quantenzahlen $I_3, S, C, B, T$ . . . . .	49
6.3.2	Farbladung . . . . .	49
6.4	Charakterisierung durch WW . . . . .	50

6.5	Zerfallsbreite . . . . .	50
6.5.1	Lösungsansatz . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Strukturinformation aus Streuexperimenten</b>	<b>53</b>
7.1	Elastische Streuung . . . . .	53
7.1.1	Rutherford-Streuung . . . . .	53
7.1.2	Streuung relativistischer Spin $1/2$ -Teilchen an Punktladung Ze . . . . .	55
7.1.3	Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung . . . . .	56
7.2	Grundlagen zu Wirkungsquerschnitt, Streuung und der Rutherford- Versuch . . . . .	56
7.2.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ . . . . .	57
7.2.2	Rutherford-Querschnitt . . . . .	58
7.2.3	Zusammenhang zw. Streu-/Raumwinkel und Impulsübertrag $ q $ . . . . .	58
7.2.4	Raumwinkel $\Omega$ . . . . .	59
7.2.5	Differentieller Wirkungsquerschnitt Part II . . . . .	59
7.2.6	Streuamplitude . . . . .	60
7.3	Zwischenresumée . . . . .	60
7.3.1	Differenzielle Wirkungsquerschnitte zur Teilchenformbe- stimmung . . . . .	60
7.4	Struktur der Nukleonen . . . . .	61
7.5	Elastische Stöße . . . . .	64
7.5.1	Charakterisierung des Stoßes . . . . .	65
7.6	Tiefinelastische Streuung . . . . .	66
7.6.1	Wirkungsquerschnitt . . . . .	67
7.6.2	Quasielastische Streuung an punktförmigen Teilchen . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Starke Wechselwirkung und Quarkstruktur von Hadronen</b>	<b>72</b>
8.0.1	zur Erinnerung . . . . .	72
8.1	Mesonen . . . . .	73
8.2	Baryonen . . . . .	74
8.2.1	Das Baryon-Oktett ( $J = 1/2$ ) . . . . .	74
8.2.2	Das Baryon-Dekuplett ( $J = 3/2$ ) . . . . .	74
8.3	Erschließung der Farbladung . . . . .	76
8.3.1	Anzahl der Farben . . . . .	77
8.4	Jets . . . . .	78
8.5	Trivia . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungsgrößen</b>	<b>80</b>
9.1	Symmetrietransformation . . . . .	81
9.1.1	Diskrete Transformation, U hermitesch . . . . .	81

9.1.2	Kontinuierliche Transformation, $U$ nicht hermitesch . . . .	82
9.2	Beispiele . . . . .	83
9.2.1	Ladungserhaltung . . . . .	83
9.2.2	Baryonenzahl . . . . .	84
9.2.3	Leptonenzahl . . . . .	84

# 1 Einleitung - Ex3

## Zusammenfassung

Von Michi und Pauli

Wir hatten die QUANTENMECHANIK eingeführt, siehe Theo 4:

<p><b>Axiom 4: Es gilt die Schrödingergleichung:</b> <math>\hat{H} \psi\rangle = i\hbar\partial_t \psi\rangle</math>  wobei <math>\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V</math></p>
--

Diese hatten wir für das Wasserstoffatom (H-At.) **analytisch** gelöst. (Coulombpotential, Kugelkoordinaten, Separation: Schwerpunkt/Relativbew., Winkel-/Radialanteil). Die Lösungen sind Polynome mit ganzzahligen Parametern, "Quantenzahlen":

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot \Theta_l^{m_l}(\vartheta) \cdot \phi_{m_l}(\varphi)$$

$$\psi_{n,l,m_l} \propto e^{-\frac{Zr}{na_0}} \underbrace{L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)}_{\text{zugeordnete Laguerre- bzw. Legendrepolynome}} \cdot P_l^{m_l}(\cos \vartheta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi}$$

Es gilt für physikalische Lösungen:  $|m_l| \leq l < n$

### 1.1 Notation der Quantenzahlen

Hauptquantenzahlen  $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \{K, L, M, \dots\}$  "Schale"

Bahndrehimpulsquantenzahlen  $l \in \{0, 1, 2, \dots\} = \{s, p, d, f, \dots\}$  "Unterschale"

Magnetbahnquantenzahlen  $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$  "Orbital" (zzgl. "Spin")

$$E(\psi_n) = E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

"Rydberg-Formel", mit  $E_0 := Ry = 13.6 \text{ eV}$  und  $Z$  als Kernladungszahl.  
Dem Übergang entspricht dann die Differenz  $E_n - E_m$ .

## 1.2 Korrekturterme der Energieniveaus

Die Energieniveaus (EN) werden korrigiert durch:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \underbrace{\Delta\hat{E}_{\text{rel}} + \Delta\hat{E}_{S-B} + \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}}}_{\Sigma = \text{Feinstruktur } \Delta E_{FS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} + \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} \\ \hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V} \\ \Delta\hat{E}_{\text{rel}} &= -\frac{\hat{p}^4}{8m_e^3c^2} \\ \Delta\hat{E}_{S-B} &= \frac{Zq_e^2\mu_0}{8\pi m_e^2\langle r \rangle^3} \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} = \frac{Zq_e^2\mu_0\hbar^2}{16\pi m_e^2\langle r \rangle^3} \cdot \begin{cases} l, & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1), & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \Delta\hat{E}_{FS} \stackrel{\text{H-A.}}{=} E_0 \frac{Z^2}{n^2} \left[ \frac{Z^2\alpha^2}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right] \\ \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}} &= \mu_0 \left( \frac{q_e\hbar}{m_e} \right)^2 Z \cdot \delta(\vec{r}) \text{ "Kernpotential"} \\ \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} &\hat{=} \text{quantenelektrodynamische Wechselwirkung (WW) mit dem Vakuum} \\ \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} &\propto \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{I}}_{\text{"Kernspin"}} \\ \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} &= \frac{\mu}{\hbar} \left( \hat{L}_z + g_e \hat{S}_z \right) B_z \text{ "anomal", normal f\"ur } \hat{S}_z = 0, \quad g_e \approx 2, \quad \mu = \frac{q_e\hbar}{2m_e}\end{aligned}$$

## 1.3 Näherungen für mehrere Elektronen

Für mehrere Elektronen ( $e^-$ ) müssen wir Näherungen machen, denn die  $e^- - e^- - WW$  verhindert das analytische Lösen.

**Helium (He):**

1.  $E_B = -Z^2 E_0 \left( \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$  "Bindungsenergie" (negativ!)
2.  $E_B = -E_0 \left( \frac{Z^2}{1^2} + \frac{(Z-1)^2}{n_2^2} \right)$  Abschirmung des  $n_2 - e^-$
3.  $E_B = -E_0 \left( -2Z_R^2 + (4Z - \frac{5}{4})Z_R \right)$  minimiere  $E_B(Z_R)$
4. wahrer Wert  $E_B \approx -79.0 \text{ eV}$

## 1.4 Das Pauli-Prinzip

Die relativistische Quantenmechanik fordert für Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  [ bzw.  $0, 1, 2, \dots$  ] eine unter Teilchenvertauschung  $\hat{P}_{ij}$  antisymmetrische [bzw,

symmetrische] **Gesamtwellenfunktion**  $|\psi\rangle = |\psi_{\text{Ort}}\rangle \otimes |\chi_{\text{Spin}}\rangle$ . Wir nennen diese Teilchen **Fermionen** [bzw. **Bosonen**]. Aus diesem Postulat folgt das:

**Pauli-Prinzip:** Man kann nie mehr als ein Fermion im gleichen (Orts- & Spin-) Zustand haben.

Für zwei  $e^-$  (z.B. Helium) gilt daher:

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{symm.}} \Rightarrow \underbrace{|\chi_{-}\rangle}_{\text{Dies ist ein antisymmetrisches Singulett [2S+1=1]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \hat{=} \underbrace{|S=0, M_S=0\rangle}_{\substack{\text{[Großbuchstaben } S, M_S, J, \dots \\ \text{sind Gesamtquantenzahlen, Summen}]}}$$

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{antisym.}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\chi_{+}, 1\rangle &= |\uparrow_1 \uparrow_2\rangle \\ |\chi_{+}, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \\ |\chi_{+}, -1\rangle &= |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle \end{aligned} \right\} \hat{=} \begin{aligned} &|S=1, M_S=0\rangle \\ &|1, 0\rangle \\ &|1, -1\rangle \end{aligned}$$

$|\chi_{+}, -\rangle$  ist ein **symmetrisches Triplet** [2S+1=3 heißt Multiplizität].



## 2 Ex4 - Atomphysik

In der Ex4-Vorlesung wird es um folgende Themen gehen:

- Atome
- Kerne und Elementarteilchen
- Symmetrien
- schwache und starke Wechselwirkung
- Spaltung und Fusion

Johanna Stachels Notation:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} J$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ u} = 913 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs} = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

### 2.1 Spektroskopische Notation

Um den Zustand einer Unterschale  $nl$  anzugeben, führen wir die spektroskopische Notation ein:

$$\boxed{n \text{ } ^{2S+1} L_J} \quad (2.1)$$

mit

$$\begin{aligned}
 L &:= \sqrt{\frac{|\vec{L}|^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \in \frac{1}{2}\mathbb{N} & \vec{L} &:= \sum_i \vec{l}_i \\
 S &:= \sqrt{\frac{|\vec{S}|^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \in \frac{1}{2}\mathbb{N} & \vec{S} &:= \sum_i \vec{s}_i \\
 J &:= \sqrt{\frac{|\vec{L} + \vec{S}|^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \in \frac{1}{2}\mathbb{N} & \vec{J} &:= \sum_i \vec{j}_i
 \end{aligned}$$

Die Notation für die Elemente des Periodensystems lautet:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Massenzahl } \frac{m}{u} \\ \text{Kernladungszahl } Z \end{array} \text{ El } \frac{q}{q_e} \text{ Ionisierung}} \quad (2.2)$$

## 2.2 Hund'sche Regeln und Auswahlregeln

Die Elektronen werden für die Grundzustände so aufgefüllt, dass die Bindungsenergie(negativ) minimiert wird, das heißt deren Betrag maximal wird. Zwischen den Unterschalen gilt folgende Reihenfolge:

$5s^2$	$5p^6$	$5d^{10}$	$5f^{14}$
$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$
$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
$2s^2$	$2p^6$		
$1s^2$			

Abbildung 2.1. Auffüllung der Grundzustände

Pro Unterzustand hat man  $N_e = 2(2l + 1)$  Elektronen. Die Gesamtzahl der Elektronen in der n-ten Schale entspricht somit  $N_e = 2 \sum_l^{n-1} 2l + 1 = 2n^2$

Innerhalb einer Unterschale gelten für die Grundzustände die hierarchischen **Hund'schen Regeln**:

1. Der Gesamtspin wird maximal. Das heißt hier ist  $S = |\sum_i m_{s,i}| \stackrel{!}{=} \max$ .
2. Der Gesamtdrehimpuls wird maximal. Das heißt hier ist  $L = |\sum_i m_{l,i}| \stackrel{!}{=} \max$ .
3. Ist die Unterschale bis zu (einschließlich) halb voll, so wird J minimal. Das heißt hier ist  $J := |M_L + M_S| \stackrel{!}{=} |L - S|$ , bei mehr als halb vollen Unterschalen muss  $J \stackrel{!}{=} L + S$  sein.

Diese Regeln bestimmen die Feinstruktur des Elements. Regt man das Element an, so gelten diese Regeln nicht mehr. Möchte man verschiedene Zustände ihrer Energie nach ordnen, so ermittelt man den Grundzustand und verletzt dann die Regeln von unten nach oben. Die Schalen-/Orbitalübergänge werden von den sog. **Auswahlregeln** beherrscht, die wohlgeordnet nicht hierarchisch sind.

1.  $\Delta L \in \{-1, 1\}$  bei L-S-Kopplung
2.  $\Delta M_L \in \{-1, 0, 1\}$
3.  $\Delta S = 0$  für leichte Atome
4.  $\Delta J \in \{-1, 0, 1\}$  wobei  $J = 0 \rightarrow J = 0$  **verboten**

## 2.3 Vielelektronenprobleme

Für Elemente mit mehr als einem Elektron gibt es keine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung, auch numerische Verfahren sind mit zunehmender Elektronenzahl extrem aufwändig. Wir machen deshalb folgende Näherungen: **Alkaliatome (1.Hauptgruppe)**

- Alkaliatome haben nur ein Elektron außerhalb geschlossener Schalen. Die Grundzustände sind immer  $^2S_{\frac{1}{2}}$  ( $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$  nicht notiert).
- Wir betrachten zu Näherung ein **effektives Potential**  $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2 Z_{eff}(r)}{r} \text{ mit } 1 < Z_{eff}(r) < Z \text{ und } Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1, Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow 0} Z$$

- Dies hebt die  $E_n$ -Entartung bezüglich Z bereits auf (Feinstruktur):  
 $E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$  (für kleine n am stärksten)

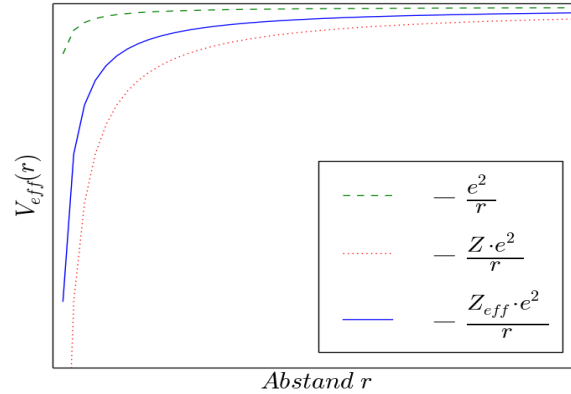


Abbildung 2.2. Effektives Potential

- Für große  $n$  und  $r$  (wasserstoffähnlich) lässt sich dies so schreiben:

$$E_{n,l} = -E_0 \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = -\frac{E_0}{n_{eff}^2} = -\frac{E_0}{(n - \delta_{n,l})^2} \quad E_0 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.3)$$

wobei  $\delta_{n,l}$  der sog. **Quantendefekt** ist:  $\delta_{n,l} = n - \sqrt{\frac{E_0}{-E_{n,l}}}$   
 $E_{n,l} < 0$  ist die real gemessene Energie.

Um allgemeine Vielelektronenprobleme zu lösen, können wir (zumindest bis jetzt) nur nähern indem wir zur Lösung eines Elektron die anderen Elektronen unabhängig voneinander gelöst haben und das entstehende  $V_{eff}(r)$  **kugelsymmetrisch** ist.

Wir suchen deshalb eine **Gesamtwellenfunktion für N Teilchen**.

Diese muss antisymmetrisch unter Vertauschung sein, wir nehmen zusätzlich an, dass sie sich als Produkt der Einteilchenwellenfunktionen schreiben lässt.

Analog zu  $\psi_{ges}(1, 2) = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)$  definieren wir die

**Slaterdeterminante**:

$$\psi_{ges}(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Diese ist total antisymmetrisch unter Spaltenvertauschung als Summe und  $N!$  Produkten.

## 2.4 Moseley'sches-Gesetz

Für Elektronen-übergänge zwischen Zuständen wurde empirisch festgestellt, dass  $\sqrt{f} \propto Z$  ist, wobei  $f$  die Frequenz des emittierten Lichts ist.

$$\text{Moseley'sches Gesetz: } f = \frac{E_0(Z-b)^2}{h(1+m_e/M_{core})} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{h(1+m_e/M_{core})}{E_0(Z-b)^2} \frac{1}{1/n_2^2 - 1/n_1^2}$$

für Übergänge  $n_1 \rightarrow n_2$ ,  $b$  - Abschirmkonstante

Für das Wasserstoffatom entspricht das Moseley-Gesetz der Rydberg-Formel.

Für wasserstoffähnliche Atome gilt  $b=(Z-1)$  :

K-Linien:  $n_2 = 1$ ,  $K_\alpha : n_1 = 2$ ,  $K_\beta : n_1 = 3$

Für schwere Atome ( $Z > 40$ ) gilt :

L-Linien:  $n_2 = 2$ ,  $b \approx 7.4$ ,  $L_\alpha : n_1 = 3$ ,  $L_\beta : n_1 = 4$

Die Auswahlregeln müssen gelten.

## 2.5 LS-Kopplung, jj-Kopplung

Von Heinstein und Anton

### 2.5.1 LS-Kopplung

- Wasserstoff: Potential  $\rightarrow$  Störungen  $\rightarrow$  Spin-Bahn-Kopplung
- Spin-Bahn-Kopplung: nicht  $\ell$  und  $s$  sondern  $j$  relevant
- Viele Elektronen:  $J$  relevant

#### 2.5.1.1 SATZ:

Sei die Spin-Bahnkopplung eines Elektrons  $^1 \ll$  Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung zwischen den Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i \vec{\ell}_i + \sum_i \vec{s}_i$$



<sup>1</sup> kek!

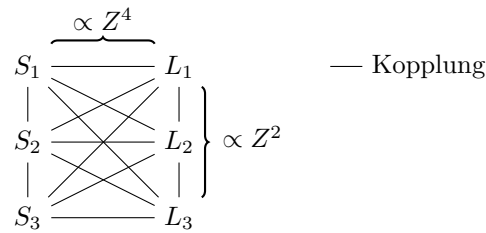


Abbildung 2.3. L-S-Kopplung

$$\begin{array}{cc}
 s_1 & \ell_1 \\
 + & + \\
 s_2 & \ell_2 \\
 + & + \\
 s_3 & \ell_3 \\
 \underbrace{\quad}_{L+S=J}
 \end{array}
 \quad \text{Anzahl der Feinstrukturaufspaltungen: } \min(2s+1; 2\ell+1).$$

Entscheidend für die Feinstrukturaufspaltung ist die Zusammensetzung von  $L$  und  $S$ .

### Beispiel:

Elektronenkonfiguration:  $L = 2, S = 1 \rightarrow J = 1, 2, 3$ .

Anzahl der  $J_S$ :  $\min(2S+1; 2L+1)$

Hier: 3

Die Feinstruktur ist sehr klein verglichen mit den Energiedifferenzen zwischen verschiedenen  $L_S$  oder  $S$ .

Im allgemeinen Fall gilt für die Energien:

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + c \cdot L \cdot S = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - S(S+1) - L(L+1)) \quad (2.5)$$

In diesem Beispiel folgt also mit  $L=1, S=1$

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - 8) \hbar^2 \quad (2.6)$$

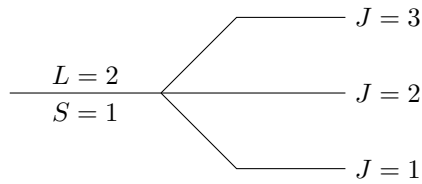


Abbildung 2.4. Termschema

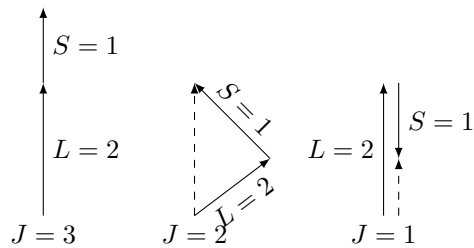


Abbildung 2.5. Vektordiagramme der möglichen Additionen

$$\rightarrow J = 3 : E(n, L, S) + 2c\hbar^2$$

$$J = 2 : E(n, L, S) - 1c\hbar^2$$

$$J = 1 : E(n, L, S) - 3c\hbar^2$$

$c$  ist am größten für kleine  $n$ .  $\rightarrow$  Bei großen  $n$  nur noch sehr kleine Feinstruktur.

## 2.5.2 jj-Kopplung

### 2.5.2.1 SATZ:

Sei die Spin-Bahn-Kopplung eines Elektrons  $\gg$  Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung verschiedener Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i (\vec{s}_i + \vec{\ell}_i)$$

- Bei jj-Kopplung sind  $L$  und  $S$  nicht definiert, daher nur Gesamtdrehimpuls  $J$
- Multiplett-Zustände nicht mehr erkennbar.

$$\begin{array}{c}
 s_1 \text{ --- } \ell_1 \\
 + \\
 s_2 \text{ --- } \ell_2 \\
 + \\
 s_3 \text{ --- } \ell_3
 \end{array}$$

Abbildung 2.6. jj-Kopplung

## 2.6 Clebsch-Gordan Koeffizienten (ein kleiner Ausflug...)

von MiX

Allgemeiner Basiswechsel in der Quantenmechanik:

Sei Vektor  $|\psi\rangle$  in einer Basis  $\mathcal{B} := \{|b_1\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$  gegeben durch:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle \quad (2.7)$$

$\Rightarrow$  Basisdarstellung in einer zweiten Basis  $\mathcal{C} := \{|c_1\rangle, \dots, |c_m\rangle\}$  erhält man durch Multiplikation mit dem Eins-Operator in  $\mathcal{C}$ -Darstellung:

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} = \sum_{j=1}^m |c_j\rangle \langle c_j| \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} |\psi\rangle = \mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle \quad (2.9)$$

$$= \left( \sum_{j=1}^m |c_j\rangle \langle c_j| \right) \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle = \sum_{i,j} a_i \underbrace{\langle c_j | b_i \rangle}_{\text{Neue Koeffizienten von } |\psi\rangle \text{ in } \mathcal{C}\text{-Basis}} |c_j\rangle \quad (2.10)$$

Die  $\langle c_j | b_i \rangle$  nennt man auch "Transformationsfunktionen".

Wende dies nun auf die Addition von Drehimpulsen an:

Seien  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  zwei verallgemeinerte Drehimpulse ( $\vec{X}_i$  könnten z.B. Spins  $\vec{S}$ , Bahndrehimpulse  $\vec{L}$  oder totale Drehimpulse  $\vec{J}$  sein). Dann existieren die zugehörigen Operatoren:

$$X_{1,z} \quad \vec{X}_1^2 \quad X_{2,z} \quad \vec{X}_2^2$$

mit den zugehörigen Quantenzahlen:

$$m_1 \quad x_1 \quad m_2 \quad x_2$$



wobei die  $m_i$  die jeweiligen Projektionsquantenzahlen und die  $x_i$  die Drehimpulsquantenzahlen sind.

Ein System, das durch diese beiden Drehimpulse beschrieben wird (z.B. ein  $e^-$  mit Bahndrehimpuls und Spin) kann durch Vektoren der Form

$$|\psi\rangle = |x_1, m_1; x_2, m_2\rangle \quad (2.11)$$

vollständig beschrieben werden. Diese Vektoren sind Eigenzustände der Operatoren  $X_{1,z}$ ,  $\vec{X}_1^2$ ;  $X_{2,z}$ ,  $\vec{X}_2^2$ .

Nun interessieren wir uns für den addierten Drehimpuls, der gegeben ist durch:

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2, \quad M_X = m_1 + m_2 \quad (2.12)$$

$\vec{X}$  besitzt analog zu  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  entsprechende Operatoren:  $\vec{X}^2$  und  $X_z$ ; jedoch sind die Vektoren  $|\psi\rangle = |x_1, m_1; x_2, m_2\rangle$  keine Eigenzustände zu diesen beiden Operatoren. Um also eine einfache und übersichtliche Beschreibung des addierten Drehimpulses zu gewährleisten, suchen wir nun eine neue Basis, die aus Eigenvektoren von  $\vec{X}^2$ ,  $X_z$  besteht, also Vektoren der Form:

$$|\varphi\rangle = |X, M_X, x_1, x_2\rangle \quad (2.13)$$

Analog zu 2.10 ist die Basistransformation nun gegeben durch

$$|X, M_X, x_1, x_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} |x_1, m_1, x_2, m_2\rangle \cdot \langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2\rangle \quad (2.14)$$

*Hint: Vertauschen der beiden Produkte für besseres Verständnis und zur Analogie zu Formel 2.10*

Die Transformationsfunktion  $\langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2\rangle$  gibt uns also die Koeffizienten ("CGK") der Vektoren, welche die einzelnen Drehimpulse beschreiben, sodass deren Summe  $|X, M_X, x_1, x_2\rangle$  ein Eigenzustand von  $\vec{X}^2$ ,  $X_z$  ist.

### 2.6.1 Physikalische Interpretation der CGK

$$|\langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2\rangle|^2 \quad (2.15)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein System der beiden Drehimpulse  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  in der Konfiguration  $m_1$ ,  $m_2$  gefunden werden kann, wenn es den Gesamtdrehimpulsbetrag  $X$  und Gesamt- $z$ -Projektion  $M_X$  hat. (Bedingte Wahrscheinlichkeit).

Die Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ist recht kompliziert<sup>2 3</sup>, weshalb man sie auch in Tabellen nachschlagen kann (und sollte!).

<sup>2</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Clebsch-Gordan-Koeffizient>

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Table\\_of\\_Clebsch-Gordan\\_coefficients](https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch-Gordan_coefficients)

### 2.6.2 Anleitung zum Lesen der Tabellen

Meist ist eine Vielzahl kleinerer Tabellen angegeben. In der linken, oberen Ecke jeder dieser Tabellen steht " $(x_1) \ x \ (x_2)$ ", also die zwei Beträge der zu addierenden Drehimpulse.

Jede dieser Tabellen ist in mehrere Untertabellen gegliedert, diese haben die Form:

		$X^1$	$X^2$	$\dots$	$\leftarrow$ Werte $X^j$ , die den Gesamtdrehimpulsbetrag $X$ annehmen können $\leftarrow$ Eine Untertabelle für jeden Wert $M_X^i$ von $M_X$
		$M_X^i$	$M_X^i$	$\dots$	
$m_1^1$	$m_2^1$	Koeffizienten- Notation: $+ \frac{8}{15} \hat{=} + \sqrt{\frac{8}{15}}$ $- \frac{6}{8} \hat{=} - \sqrt{\frac{6}{8}}$			
$m_1^2$	$m_2^2$				
$\vdots$	$\vdots$				
$m_1^n$	$m_2^n$				

alle  $n$  möglichen Konfigurationen von  $m_1, m_2$  werden durchgegangen, so dass  $m_1 + m_2 = M_X^i$

Abbildung 2.7. Schema einer CGK-Tabelle

### 2.6.3 Anmerkungen

- Ein CG-Koeffizient, der physikalisch keinen Sinn ergibt (z.B. wenn  $X \geq X_1 + X_2$  oder  $M_X \neq m_1 + m_2$ ), ist null.  
 Beispiel:  $\langle 1, 0, 4, 4 | 3, 6, 1, 4 \rangle = 0$   
 weil:  $0(m_1) + 4(m_2) \neq 6(M_X)$
- Am einfachsten kann man das Beschriebene anhand der Addition zweier Spins mit  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$  betrachten.  
 So sieht man z.B. wie im Helium die Spin-Singulett und -Triplet Zustände zustande kommen. Man sieht auch, dass die CGK bestimmen, ob die Spinwellenfunktion symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

# 3 Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

Von Heinstein und herMitsch

## 3.1 Zerfallsgesetz

Es gibt 3 verschiedene Zerfallsarten des Radioaktiven Zerfalls. (A: Nukleonenzahl, Z: Kernladungszahl)

- $\alpha$  - Zerfall:  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$   
 $\alpha$  -Strahlung wird mittels Heliumkernen vermittelt (positiv geladen).
- $\beta$  - Zerfall:
  1.  $\beta^-$  - Zerfall:  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$   
Beim  $\beta^-$  -Zerfall wird im Kern ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Dabei werden ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert.
  2.  $\beta^+$  - Zerfall:  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$   
Beim  $\beta^+$  -Zerfall wird im Kern ein Proton in ein Neutron umgewandelt. Dabei werden ein Positron und ein Elektron-Neutrino emittiert.
- $\gamma$  -Zerfall :  ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$   
Falls nach einem  $\alpha$  - Zerfall oder  $\beta$  - Zerfall ein Atomkern in einem angeregten Zustand vorliegt, ist  $\gamma$  - Zerfall möglich. Beim Übergang in einen energetisch günstigeren Zustand wird hochfrequente elektromagnetische Strahlung emittiert. Meist folgt der  $\gamma$  -Zerfall unmittelbar auf einen  $\alpha$  - oder  $\beta$  - Zerfall.

Für die Zerfallsrate(Aktivität)  $A = \frac{d}{dt} N(t)$  gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) \quad (3.1)$$

$\lambda$  : Zerfallskonstante beschreibt Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte radioaktive Zerfallsart. Sie ist unabhängig von Ort und Zeit, aber charakteristisch für den Kern.

Die Lösung dieser Gleichung gibt die Anzahl  $N$  der Atome zum Zeitpunkt  $t$  an:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.2)$$

Wobei man in diesem Zusammenhang noch folgende nützliche Größen definiert:

- Mittlere Lebensdauer:  $\tau = 1/\lambda$   
Nach dieser Zeit sind nur noch  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) der ursprünglichen Atome vorhanden.
- Halbwertszeit :  $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$  Nach dieser Zeit sind nur noch 50 % der ursprünglichen Atome vorhanden.

Der radioaktive Zerfall ist ein stat. Prozess. Die Wahrscheinlichkeit einen zerfallenden Kern anzutreffen ist bei  $t=0$  am größten, danach fällt sie exponentiell ab. Diese Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell eine Binomial-Verteilung. Für eine hohe Anzahl an Versuchen und eine kleine Wahrscheinlichkeit konvergiert die Binomialverteilung gegen eine Poisson-Verteilung. Diese Näherung lässt sich auf den radioaktiven Zerfall anwenden, da man in der Regel viele Atome ( $N \approx 10^{23}$ ) betrachtet, also eine hohe Anzahl Versuche durchführt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit in der Regel klein ist:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.3)$$

Somit lässt sich der Zerfall also durch eine Poisson-Verteilung beschreiben mit dem Mittelwert  $\mu = n \cdot p$  und der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{\mu}$  wobei der Zerfall  $k$ -mal eintreten soll.

$$P(k) = \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!} \quad (3.4)$$

## 3.2 Fermis Goldene Regel

Wir wollen eine Voraussage für die Übergangsrate  $\lambda$  (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit), mit der ein Anfangszustand unter dem Einfluss einer Störung in einen anderen Zustand übergeht, treffen. Wir nehmen dabei an, dass es sich um ein an sich zeitlich konstantes System handelt, welches durch den Hamilton-Operator  $H_0$  beschrieben wird, und durch einen Störoperator  $V$ , welcher vergleichsweise klein gegenüber  $H_0$  ist, gestört wird. Der gesamte Hamiltonoperator lautet also  $H = H_0 + V$

Wir formulieren Fermis Goldene Regel:

$$\lambda_{A \rightarrow E} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_E | V | \psi_A \rangle|^2 \cdot \rho_E = \frac{dP}{dt} \quad (3.5)$$

Die Übergangsrate hängt also davon ab wie stark die Störung  $V$  den Anfangszustand  $\psi_A$  und den Endzustand  $\psi_E$  koppelt. Außerdem skaliert die Übergangsrate mit der Anzahl der möglichen Übergänge welche durch die Endzustandsdichte  $\rho_E$  beschrieben wird.

### Was ist $\rho(E)$ eigentlich ?

Wir bezeichnen den Phasenraum unseres Systems als den Raum, der durch die Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$  und die dazugehörigen Impulse  $\mathbf{p}$  aufgespannt wird. In diesem Raum können wir einem Punkt ein Volumen von  $h^3 = (2\pi\hbar)^3$  zuordnen (Unschärferelation).

#### 1 Dimension:

Zunächst betrachten wir einen jeweils eindimensionalen Orts- und Impulsraum mit Zuständen  $(x, p) \in [x, x + L] \times [p_x, p_x + p]$ . In diesem Fall kann die Gesamtfläche  $Lp$  mit  $N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$  Zuständen gefüllt werden. Für die Zustandsdichte gilt dann:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2 \frac{dN}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \frac{2m}{p} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (3.6)$$

Wobei wir im letzten Schritt auf Kugelkoordinaten transformieren. Der Faktor 2 kommt daher, dass die Zustände  $(x, p)$  und  $(x, -p)$  bezüglich der Energie entartet sind, denn  $E = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ .

#### 3 Dimensionen:

Die Anzahl der Gesamtzustände  $N$  ist nun

$$N = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{x}^3 d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int p^2 dp d\Omega \quad (3.7)$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$  folgern wir  $\frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp}$  und erhalten damit für die Zustandsdichte für **1 Teilchen**

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2} \int d\Omega = \frac{VpE}{2\pi^2 c^2 \hbar^3} \quad (3.8)$$

Für **2 Teilchen** addieren sich die Impulse im Mittel zu 0, weshalb die Zustandsdichte konstant ist. Jedoch addieren sich die Energien zu  $E = E_1 + E_2$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (3.9)$$

Da  $p_1^2 = p_2^2$  folgt  $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$\begin{aligned} \rightarrow dE &= \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2 p_1 dp_1 \\ \rightarrow \rho_2 &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 \int d\Omega_1 \end{aligned}$$

Wir können dies auf n Teilchen erweitern

$$\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3 p_i \quad (3.10)$$

### 3.3 Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Überlegungen dienten allesamt dazu die Reaktionsrate einer Zustandsänderung zu quantifizieren. Wir nennen nun eine letzte Größe kennen, die ebenfalls diesen Zweck erfüllt. Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  gibt die Stärke einer Reaktion an. Um dies zu begreifen betrachten wir einen konstanten Fluss  $\Phi$  von Teilchen, die allesamt der Sorte a zugehören und auf ein Target der Dicke x aus Teilchen der Sorte b geschossen werden.

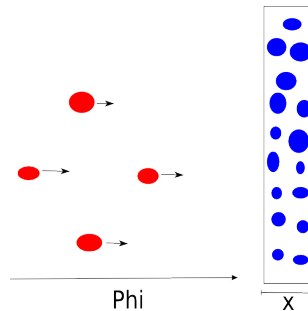


Abbildung 3.1. Teilchenfluss auf Target

Die Reaktionsrate pro Targetteilchen ist  $W = \Phi \cdot \sigma$ . Die Reaktionsrate im gesamten Target ist  $W \cdot N = \Phi \cdot n_B \cdot x \cdot \sigma$  mit N Targetteilchen und der Volumenteilchendichte  $n_B$ .

Im Allgemeinen hängt der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  von der Art der Reaktion ab:

- Absorption  $\sigma_A$
- elastische Streuung  $\sigma_E$

- inelastische Streuung  $\sigma_I$

Der Gesamtwirkungsquerschnitt ergibt sich via Addition  $\sigma_{Ges} = \sigma_A + \sigma_E + \sigma_I$   
 Für Teilchen die sich innerhalb eines Mediums ausbreiten definiert man die mittlere freie Weglänge  $\lambda = \frac{1}{n_B \sigma}$   
 Diese gibt die durchschnittliche Strecke an, die ein Teilchen im Target ohne Wechselwirkung zurücklegen kann.

Das Volumen in dem 1 Targetteilchen ist also  $V = \lambda \cdot \sigma = 1/n$

Anhand der mittleren freien Weglänge lassen sich folgende Größen berechnen:

- Anzahl der Strahlteilchen im Targetmaterial :  $N(x) = N_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Kollisionsrate:  $c(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = \frac{N_0}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} = c_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Wahrscheinlichkeit für Reaktion eines einfallenden Teilchens:  $p(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

Aus Dimensionsbetrachtungen lässt sich darauf schliessen, dass der Wirkungsquerschnitt die Dimension einer Fläche hat. Wir werden dies nun veranschaulichen:

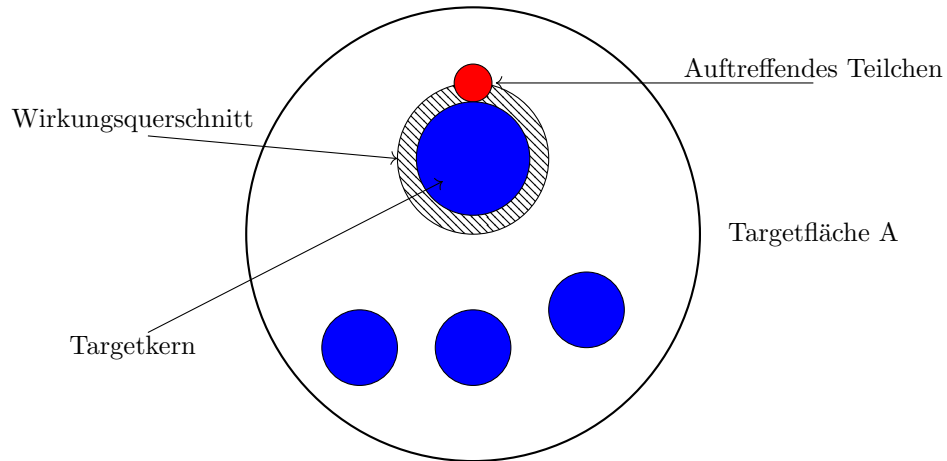


Abbildung 3.2. Wirkungsquerschnitt eines Teilchens (rot) das auf ein Targetteilchen (blau) trifft, mit Wirkungsquerschnitt (gewellte Fläche)

Im Allgemeinen ist bei Teilchenkollisionen der Wirkungsquerschnitt, die kleinste Fläche, die beide Teilchen komplett einschließt:

$$\sigma = \pi(r_K + r_P)^2 \quad (3.11)$$

Kernradius:  $r_K$       Projektilradius:  $r_P$

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass  $n$  Projektile mit dem Target wechselwirken, als das Verhältnis der effektiven Flächen:

$$P = \frac{n\sigma}{A} \quad (3.12)$$

## 3.4 Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen

Søni, Martina

### 3.4.1 Regeln

- Meist ist die Zeitachse eingezeichnet, übrige Richtungen beziehen sich auf den Raum
- Teilchen werden durch Linien symbolisiert, dabei gibt die Pfeilrichtung an, ob es sich um das Teilchen selbst (Pfeil in Richtung der Zeitachse) oder sein Antiteilchen (Pfeil entgegengesetzt zur Zeitachse gerichtet).  
Die reellen Teilchen erfüllen alle  $E^2 - p^2 = m^2$  ( $c = 1$ ).
- virtuelle Teilchen hingegen sind durch im Feynman-Diagramm abgeschlossene Linie dargestellt und erfüllen  $E^2 - p^2 = m^2$  **nicht!**
- Linienformen können angeben, um welche Teilchen es sich handelt. So haben die Eichbosonen  $\gamma$ ,  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  allgemein eine Wellenlinie ( 3.5 ) bzw. Gluonen eine schraubenförmige Linie ( 3.6 ). Oftmals werden aber auch geschtrichelte Linien für Propagatoren der schwachen Wechselwirkung ( 3.4 ) und die Wellenlinien für Photonen ( 3.3 ) verwendet.
- Vertices, die Knotenpunkte zwischen den Linien, geben durch ihre Anzahl die Ordnung der Feynman-Diagramme an.
- Propagatoren, die Linien zwischen Vertices, sind virtuell und haben keine Vorzugsrichtung.

Eichbosonen	Anzahl	WW	auf Materieteilchen
<b>Gluon</b>	8	<i>starke WW</i>	<i>Quarks</i>
$W^+$ , $W^-$ , $Z^0$	3	<i>schwache WW</i>	<i>Quarks, Leptonen</i>
<b>Photonen</b>	1	<i>el.mag. WW</i>	<i>Quarks, Leptonen</i>



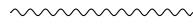


Abbildung 3.3. Photon  
und

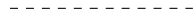


Abbildung 3.4.  $W^-$ ,  $W^+$ ,  $Z^0$   
oder



Abbildung 3.5. Eichbosonen

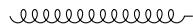


Abbildung 3.6. Gluon

Abbildung 3.7. Tabelle über die WW von Eichbosonen

### 3.4.2 Beispiele

1. Positron (Antifermion) + Elektron (Fermion) in Feynman-Diagramm 2. Ordnung:

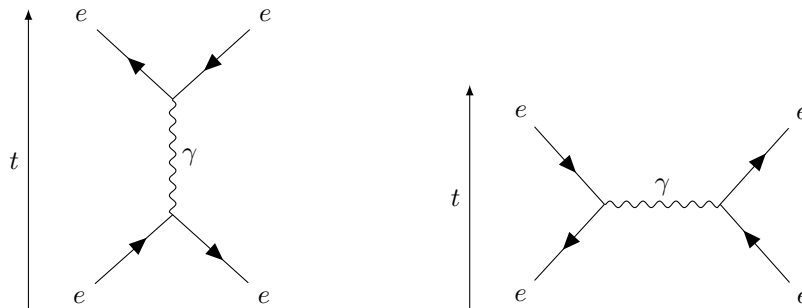


Abbildung 3.8. zeitartig  $q^2 > 0$  (links) / raumartig  $q^2 < 0$  (rechts)

Wichtig: Das Zeitintervall der Wechselwirkung ist durch die Heisenberg'sche Unschärferelation beschränkt:  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$   
für el.mag. WW:  $E = h \cdot \nu \Rightarrow \Delta t \geq (2\pi\nu)^{-1}$   
Diese Unschärfe erlaubt die Superposition aller möglichen Prozesse, die wir durch die Feynman-Diagramme darstellen können.

2. Compton-Effekt:

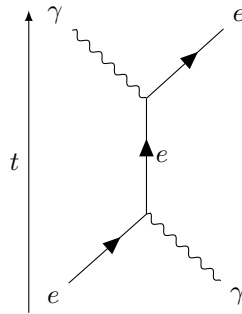


Abbildung 3.9. Feynman-Diagramm des Compton-Effekts

3. Proton-Zerfall:

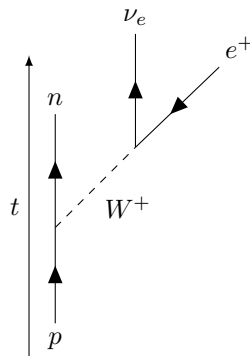


Abbildung 3.10. Feynman-Diagramm des Proton-Zerfalls

### 3.4.3 Feynman-Kalkül

Prozesse sind auf beliebig vielen Arten darstellbar (mehr Vertices möglich). Jeder Vertex liefert die Wurzel aus einer Kopplungskonstante:  $\sqrt{\alpha}$ .

Z.B.  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  für el.mag. WW ist es die Feinstrukturkonstante.

Je mehr Vertices ein Diagramm enthält, desto geringer ist sein Beitrag zur Gesamtamplitude der superponierten Zustände (alle bis heute erzielten Forschungsergebnisse mit Termen nur bis 4. Ordnung errechnet).

Austauschteilchen in Berechnung von Matrixelement durch Propagator beschrieben:

$$\text{Es gilt: } \frac{1}{m^2 + q^2}, \text{ Matrixelement } M \propto \frac{1}{\alpha q^2} \Rightarrow \sigma \propto \frac{\alpha^2}{q^4}$$

# 4 Teilchendetektoren

**Heinstein, Martina**

Teilchendetektoren messen Produkte von Kollisionen und Zerfällen.

## 4.0.0.1 Aufgaben

- Nachweis entstandener Teilchen
- Messung von Energie/Impuls
- Messung von Lebensdauer, Zerfallslänge,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$
- Teilchenidentifikation (Bestimmung  $M^2 = E^2 - \vec{p}^2$ )

## 4.0.0.2 Kapitel

- 4.1 Impulsmessung
- 4.2 Energiemessung
- 4.3 Messung von Photonen
- 4.4 Teilchen

## 4.1 Impulsmessung

Ablenkung von geladenen Teilchen im Magnetfeld.

→ Homogenes B-Feld

→ Kreisbahn mit Radius  $r = \frac{p}{q \cdot B}$

### 4.1.1 Gasdetektor

- Kondensator → E-Feld
- Ionisationsgas, nicht elektronegativ  
 $\Delta U = -\frac{N \cdot e}{C}$ , wobei  $N$  die Teilchenanzahl,  $e$  die Elementarladung und  $C$  die Kapazität des Kondensators ist. ( siehe Abb. [4.1](#) )

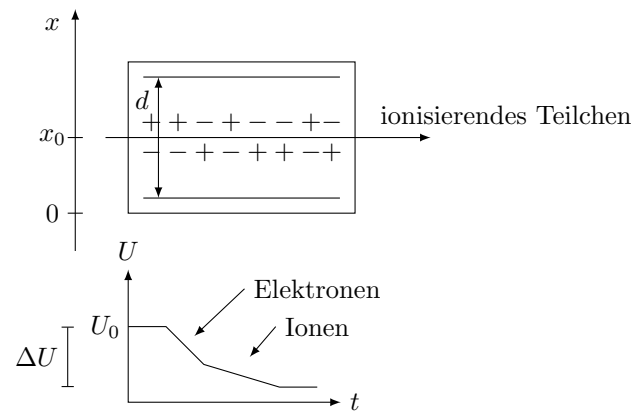


Abbildung 4.1. Schematischer Aufbau eines Gasdetektors (oben)  
Spannungsänderung am Kondensator über Zeit (unten)

#### 4.1.2 Proportionalzählrohr

- sehr dünner Anodendraht  $\rightarrow \mu m$
- $E(r) = \frac{U_0}{r \cdot \ln\left|\frac{R}{r_A}\right|} \Rightarrow$  starkes Feld im Zentrum (siehe Abb. 4.2)
- **Sau** starke Beschleunigung in Nähe des Anodendrahtes
- Reicht aus, im Gas zu ionisieren  $\rightarrow$  Sekundärelektronen  
 $\Delta U = -\frac{A N e}{C}$ ,  $A = 10^4 - 10^5$  Verstärkungsfaktor

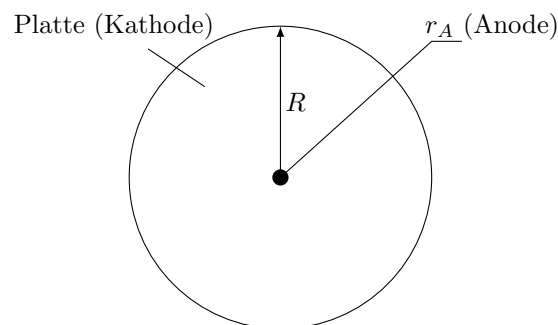


Abbildung 4.2. Schema eines Proportionalzählrohrs

### 4.1.3 Halbleiterzähler

Ein Halbleiterzähler ist ein pn-Übergang, an den in Sperrrichtung eine Spannung angelegt wird. Dadurch entsteht eine Verarmungszone, in der keine freien Ladungsträger vorhanden sind.

Durchgehende Teilchen erzeugen durch Ionisation in dieser Zone Elektronen-Loch-Paare, die im E-Feld zu den Anschlusspolen wandern und ein Signal erzeugen.

### 4.1.4 Szintillationszähler

- Teilchen oder  $\gamma$ -Teilchen gibt Energie ab, die in Form von sichtbarem Licht wieder frei wird.
- Auslesen durch Photodetektor

## 4.2 Energiemessung

- Absorption eines hadronischen Schauers in Kalorimeter
- Hadronen: z.B. Protonen, Neutronen.. (aus Quarks zusammengesetzte Teilchen)

### 4.2.1 hadronischer Schauer

Beim Einfall hochenergetischer Teilchen entstehen Sekundärteilchen, die selbst so lange Teilchen generieren, bis die Energie erschöpft ist.

**Beispiel:**

Mittlere Weglänge eines Teilchens in Blei:  $5.6\text{mm} = \lambda$

Ideale Länge:  $20\lambda \rightarrow 112\text{mm}$  Blei

Abwechselnd: 2mm Blei und 5mm Szintillationszähler

$\rightarrow 392\text{mm}$  Länge (elektromagnetisches Kalorimeter, ECAL)

Hadronen: Absorptionslänge  $\lambda = 18.5\text{cm} \rightarrow 10\lambda = 1.85\text{m} + \text{ECAL}$

### 4.2.2 Messung von Photonen

- Röntgen- & Gammastrahlen in Halbleiterkristallen (Si, Ge, ...)  $\rightarrow$  gute Auflösung
- Messung durch szintillierende Kristalle ( $\text{NaI}$ ,  $\text{PbWO}_4$ )
  - niedrige Energie  $\rightarrow$  schlechte Auflösung
  - hohe Energie ( $> 100\text{MeV}$ ) + ausreichende Dichte  $\rightarrow$  gute Messung

$$- \text{ "Kristallkalorimeter": } \frac{\sigma_E}{E} = \frac{0.04}{\sqrt{E}} + 0.01 \begin{cases} \text{für 1GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 4.1\% \\ \text{für 100GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 1.1\% \end{cases}$$

### 4.3 Teilchenidentifikation

- Massenbestimmung durch Messung von Impuls & Flugzeit  
 $pc = \beta E = \beta \gamma m_0 c^2$   
 Impulsbereich limitiert durch Auflösung von Zeitmessung & Flugstrecken  
 Grenze der Methode: Impuls etwa in  $\frac{\text{GeV}}{c}$
- Massenbestimmung durch Zerfallsprodukte (Masse & Impulse erhalten!)  
 $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$
- durch spezifische Energieverluste  
 Bei bekanntem  $p \cdot c$  wird  $\frac{dE}{dx}$  gemessen  $\rightarrow \beta \gamma$  bestimmt
- durch "Tricks":
  - Myonen: nur Energieverluste durch Ionisation, keine Schauer
  - Photonen: keine Energieverluste durch Ionisation, nur el.mag. Schauer
  - Elektronen: Energieverluste durch Ionisation, el.mag. Schauer, Übergangsstrahlung
  - Neutronen, Antineutronen: keine Ionisation, nur hadronischer Schauer
  - geladene, hochenergetische Teilchen: Cherenkov-Strahlung (Teilchen in Medium schneller als Licht  $\rightarrow$  strahlen Licht ab (Energie ändert sich nicht wirklich) über welches Information über Teilchen zu erhalten sind.)

## 5 Wechselwirkung von Teilchen und Strahlung mit Materie

Anton, Søni, Chris

Bei der Wechselwirkung von Teilchen mit Atomen oder Molekülen können folgende elementare Prozesse ablaufen:

- Rayleigh-Streuung, Thomson-Streuung
- Anregung oder Ionisation von Hüllenelektronen
- Ablenkung geladener Teilchen im Coulomb-Feld des Kerns, die zur Emission von Bremsstrahlung führt
- Compton-Streuung
- Emission von Cerenkov-Strahlung, wenn geladene Teilchen ein Medium mit Brechungsindex  $n$  schneller als die Lichtgeschwindigkeit  $\frac{c}{n}$  durchlaufen

All diese Effekte können einzeln oder in Kombination zur Nachweise der Teilchen ausgenutzt werden, wobei der vorletzte Prozess einen wesentlich kleineren Wirkungsquerschnitt hat und erst bei großen Energien eine merkliche Rolle spielt. Ein Teilchen mit einer kinetischen Energie im keV - MeV - Bereich verliert bei der Ionisation eines Atoms oder Moleküls nur einen Bruchteil seiner Energie. Es kann daher bei seinem Weg durch den Detektor viele Atome anregen. Der spezifische Energieverlust  $\frac{dE}{dx}$  pro Längeneinheit, und hängt außer von der Art und Dichte der Detektormaterie stark ab von der Art des ionisierenden Teilchen und von seiner Energie.

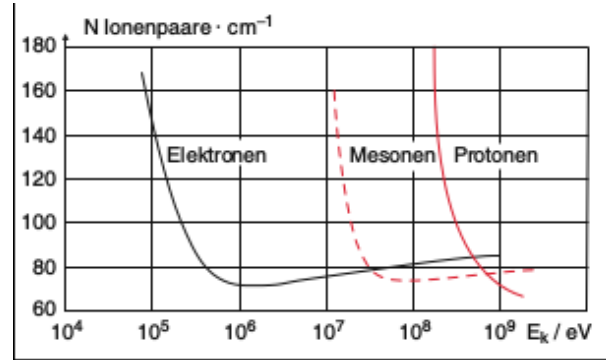


Abbildung 5.1. Spezifische Ionisierung (Zahl der pro cm Weg gebildeten Ionenpaare) für Elektronen, Protonen und  $\pi$ -Mesonen in Luft als Funktion der kinetischen Energie.

## 5.1 Energieverlust von geladenen schweren Teilchen

Wir betrachten ein Teilchen der Ladung  $Z_1 \cdot e$ , das durch die Elektronenhülle eines Atoms fliegt. Ist die Energie des Teilchens groß gegen die Bindungsenergie der Elektronen in der Atomhülle, so ist der beim Stoß des schweren Teilchens auf ein Elektron übertragene relative Impuls  $\frac{\Delta p}{p}$  klein. Die Teilchenbahn kann durch eine Gerade angenähert werden, und die Elektronen können als frei angesehen werden. Dieses Modell wird mathematisch durch die Bethe-Formel beschrieben:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi Z_1^2 e^2 n_e}{v^2 m_E} \cdot \left( \ln \frac{2m_e v^2}{\langle E_b \rangle} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right) \quad (5.1)$$

Man sieht hieraus, dass der spezifische Energieverlust  $\frac{dE}{dx}$  proportional zur Elektronendichte  $n_E$  im Detektor ist und mit dem Quadrat der Teilchenladung  $Z_1$  ansteigt, aber umgekehrt proportional zum Quadrat der Ionengeschwindigkeit  $v$  abnimmt. Der spezifische Energieverlust geladener schwerer Teilchen  $\frac{dE}{dx}$  hängt von ihrer Energie  $E$  ab wie  $\frac{1}{E} \cdot \ln\left(\frac{E}{E_b}\right)$ . Er sinkt also schwach mit steigender Energie.

## 5.2 Energieverlust von Elektronen

### 5.2.1 Anregung und Ionisation

Für leichte Teilchen (Elektronen, Positronen) mit  $v \ll c$  kann man die Richtungsablenkung bei Stößen mit der Elektronenhülle nicht mehr vernachlässigen. Ein



parallel einfallender Strahl wird daher wesentlich stärker durch Streuung diffus. In diesem Fall wurde der spezifische Energieverlust durch Ionisation von Bethe berechnet zu:

$$\frac{dE}{dx} \approx \frac{4\pi Z_1 e^4 n_E}{m_e v^2} \cdot \ln \frac{m_E v^2}{2 \langle E_b \rangle} \quad (5.2)$$

Der Vergleich mit (5.1) zeigt, dass bei gleicher Geschwindigkeit  $v$  der spezifische Energieverlust pro Weglänge für schwere Teilchen (Masse  $m_S$ ) und Elektronen (Masse  $m_E$ ) gleich ist, bei gleicher Energie jedoch für Elektronen um den Faktor  $\frac{m_E}{m_S}$  kleiner ist. Die Reichweite von Elektronen ist deshalb trotz er größeren Streuung wesentlich größer als die von schweren Teilchen der gleichen Energie. Für Teilchen mit relativistischen Energien sind dagegen die Unterschiede für  $\frac{dE}{dx}$  zwischen Elektronen und schweren Teilchen nur noch klein.

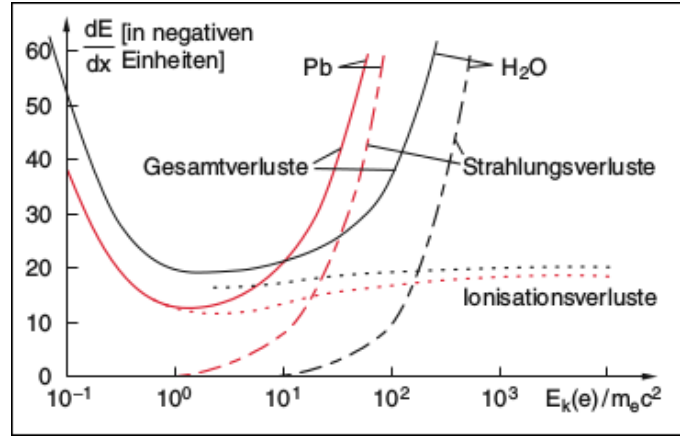


Abbildung 5.2. Ionisationsverluste, Strahlungsverluste und Gesamtverluste  $\frac{dE}{dx}$  (in relativen Einheiten) von Elektronen in Blei (rote Kurven) und Wasser (schwarze Kurven) als Funktion der Elektronenenergie

### 5.2.2 Bremsstrahlung

Durch die Ablenkung im Coulomb-Feld der Atomkerne erfahren die Elektronen eine negative Beschleunigung und strahlen deshalb elektromagnetische Wellen ab, deren Leistung proportional zum Quadrat der Beschleunigung ist. Die Rechnung ergibt für den Strahlungsenergieverlust pro Weglänge eines Elektrons mit der kinetischen Energie  $E_e$  in einem Medium mit der Atomdichte  $n_a$  und der Kernladung  $Ze$

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{Str} = \frac{4n_a Z^2 \alpha^3 (\hbar c)^2 E_e}{m_e^2 c^4} \cdot \ln \frac{a(E)}{Z^{1/3}} \quad (5.3)$$

wobei  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  die Feinstrukturkonstante ist und  $a(E)$  ein numerischer Faktor, der angibt, bei welchem Stoßparameter des Elektron noch nahe genug am Kern vorbeiläuft, um genügend abgelenkt zu werden. Die Strahlungsverluste pro Weglänge nehmen also etwas stärker als linear mit der Energie der Elektronen zu und überwiegen bei großen Energien die Ionisationsverluste.

Die Länge nach der die Energie des Elektrons durch Strahlungsverluste auf  $\frac{1}{e}$  abgeklungen ist heißt die Strahlungslänge

$$X_0 = \left( \frac{dE}{dx} \cdot \frac{1}{E_e} \right)^{-1} \quad (5.4)$$

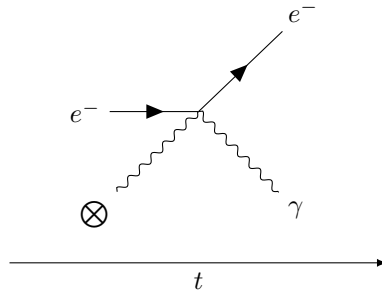


Abbildung 5.3. Feynman-Diagramm für Bremsstrahlung von Elektronen, es wird ein Atomkern für die gleichzeitige Impuls- und Energieerhaltung benötigt

## 5.3 Wechselwirkung von radioaktiver Strahlung mit Materie

### 5.3.1 $\alpha$ -Strahlung

$\alpha$ -Strahlung besteht aus schweren Heliumkernen und verhält sich wie schwere Teilchen mit Materie. Wir betrachten hier die Zunahme des Energieverlusts bei kleineren Energien.

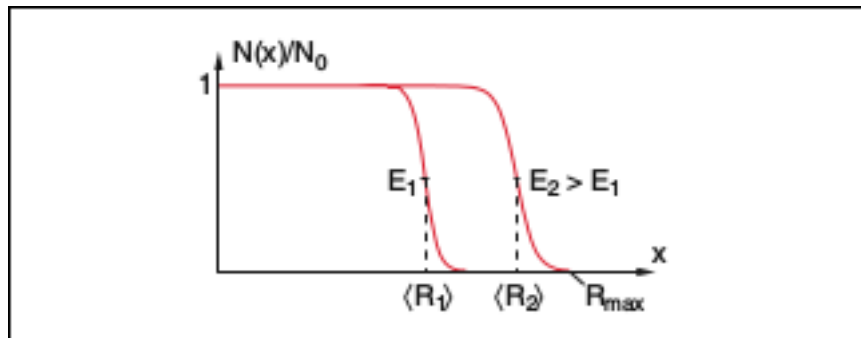


Abbildung 5.4. Reichweite von  $\alpha$ -Teilchen in Luft, dargestellt als relative Abnahme der Anzahl

Die Weglänge von  $\alpha$ -Teilchen ist scharf begrenzt.

### 5.3.2 $\beta$ -Strahlung

$\beta^-$ -Strahlung besteht aus Elektronen, wofür das Wechselwirkungsverhalten schon kennen.

$\beta^+$ -Strahlung besteht aus Positronen, die beim Durchdringen von Materie sehr bald auf ihr Antiteilchen, das Elektron, treffen und durch Annihilation meist 2 Photonen entstehen und es zu  $\gamma$ -Strahlung kommt.

### 5.3.3 $\gamma$ -Strahlung

Für den Nachweis von  $\gamma$ -Strahlung sind die folgenden Wechselwirkungsprozess von besonderer Bedeutung

- elastische Streuung (Rayleigh- und Thomson-Streuung)
- Inelastische Streuung (Compton-Effekt)
- Absorbition in der Elektronenhülle (Photoeffekt)
- Absorbition durch Atomkerne (Kern-Photoeffekt)
- Erzeugung von Teilchen durch  $\gamma$ -Quanten (Paarbildung)

Die Dominanz dieser einzelnen Effekte hängt von der Energie des Photons ab.

### 5.3.3.1 Rayleigh-Streuung, Thomson-Streuung

Relevant bei **kleinen Energien** ( $h\nu < E_b$ ).

Es wird ein Photon elastisch an einem geladenen freien oder schwach gebundenem Teilchen gestreut. Das geladene Teilchen wird durch das Feld einer elektromagnetischen Welle zu harmonischen Schwingungen angeregt indem durch das elektrische Feld ein Dipolmoment induziert wird. Da diese Oszillation eine beschleunigte Bewegung ist, strahlen die Teilchen gleichzeitig Energie in Form einer elektromagnetischen Welle gleicher Frequenz ab (Dipolstrahlung). Man sagt die Welle wird gestreut.

#### Rayleigh-Streuung

Die Energie des Photons ist zu klein, um das Atom anzuregen. Die Streuung findet also nur an gebundenen Elektronen statt. Für den Wirkungsquerschnitt gilt bei diesem Prozess

$$\sigma \propto \nu^4 \quad (5.5)$$

#### Thomson-Streuung

Thomson-Streuung tritt auf, solange die Energie des einfallenden Photons klein genug ist (Wellenlänge des Photons ist viel größer als Atomradius). Bei kürzeren Wellenlängen, also höheren Energien, muss der Rückstoß des Elektrons berücksichtigt werden (Compton-Streuung). Die Thomson-Streuung ist also der Grenzfall der Compton-Streuung für kleine Photonenenergien. Die Größenordnung des Wirkungsquerschnitts dieser Wechselwirkung lässt sich durch den Thomson-Querschnitt beschreiben:

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-29} m \quad (5.6)$$

### 5.3.3.2 Gemeinsamkeiten

- Beide Arten der Streuung beruhen auf einem elastischen Stoß.
- Beide Streuprozesse werden als kohärent bezeichnet, da sie die Kohärenz der elektromagnetischen Strahlung erhalten.  
(Kohärenz: Auslenkung zweier Wellen ändert sich zeitlich auf dieselbe Weise bis auf eine Phasenverschiebung)

### 5.3.3.3 Unterschied

Rayleigh-Streuung geschieht an einem gebundenen Elektron, Thomson-Streuung an einem freien bzw. sehr schwach gebundenen Elektron.

### 5.3.3.4 Compton-Effekt

**Bei höheren Photonenenergien** ( $h\nu \gg E_b$ ) wird der Compton-Effekt wichtig. Ein Photon streut an einem Teilchen und gibt einen Teil seiner Energie an das Teilchen ab. Durch diesen Energieverlust wird die Wellenlänge des Photons größer. Es handelt sich hierbei um einen elastischen Stoß. Betrachtet man nur das gestreute Objekt, so sieht man, dass es Energie verliert, weshalb man hierbei von inelastischer Streuung spricht. Für sehr hohe Energien ( $E_\gamma \gg m_E c^2$ ) gilt für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_C \propto \frac{Z}{E_\gamma} \quad (5.7)$$

Für mittlere Energien gilt für den Compton-Streuquerschnitt

$$\sigma_C \propto \sigma_T Z \quad (5.8)$$

mit dem Thomson-Wirkungsquerschnitt:  $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}$

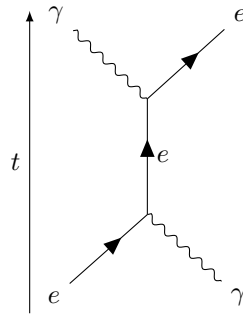


Abbildung 5.5. Feynman-Diagramm für Compton-Streuung

### 5.3.3.5 Photoeffekt

Als Photoeffekt bezeichnet man die Absorption des Photons mit der Energie  $h\nu > E_b$  durch ein Hüllenelektron, welches durch diese Energiezufuhr das Atom verlässt. Da anders als beim Compton-Effekt das Photon absorbiert wird und deshalb verschwindet, können Energie- und Impulserhaltung nur gleichzeitig erfüllt werden, wenn das Atom einen Teil des Impulses aufnimmt (Rückstoß). Deshalb gibt es keinen Photoeffekt an freien Elektronen.

Summiert man den Wirkungsquerschnitt über alle  $Z$  Hüllenelektronen so erhält man als gesamten Wechselwirkungsquerschnitt für  $E_\gamma > E_b$

$$\sigma_{ph} \propto \left( \frac{Z^5}{E_\gamma} \right)^{7/2} \quad (5.9)$$

Sodass  $\sigma_{ph}$  sehr stark mit steigender Photonenenergie  $E_\gamma$  abfällt. Dieser Abfall flacht für sehr hohe Photonenenergien ab und man erhält für  $E_\gamma \gg E_b$

$$\sigma_{ph} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma} \quad (5.10)$$

Wir sehen hieran, dass für schwere Elemente der Photoeffekt wegen seiner starken Abhängigkeit von der Kernladungszahl  $Z$  der dominierende Absorptionsmechanismus für Photonen der Energie  $E_\gamma < m_E c^2$  ist.

### 5.3.3.6 Paarbildung

Wenn die Energie der Photonen  $E_\gamma > 2m_E c^2$  ist, öffnet sich ein neuer Absorptionskanal, die Paarbildung.

Hierbei erzeugt ein Photon im Coulomb-Feld des Atomkerns ein Elektron-Positron-Paar. Auch hier können Energie und Impuls nur dann gleichzeitig erhalten werden, wenn der Atomkern einen Rückstoß aufnimmt.

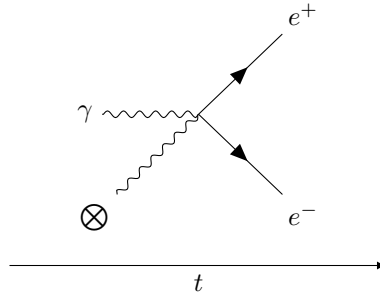


Abbildung 5.6. Feynman-Diagramm für Paarbildung, es wird ein Atomkern für die gleichzeitige Impuls- und Energieerhaltung benötigt

Der Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung ist

$$\sigma_p \propto Z^2 \ln(E_\gamma) \quad (5.11)$$

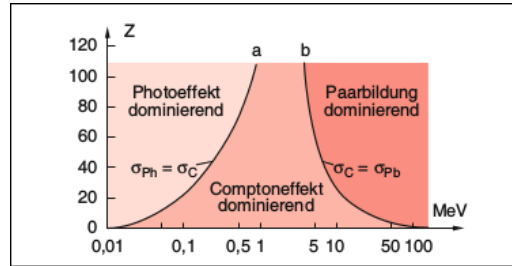
Dieser steigt anfangs logarithmisch mit der Photonenenergie an, um dann bei sehr hohen Energien  $E_\gamma \gg 2m_E c^2$  fast konstant zu werden.

Die Bedeutung der einzelnen Prozesse für die Absorption von Photonen in den verschiedenen Energiebereichen hängt von der Kernladungszahl  $Z$  des Absorptionsmaterials ab.

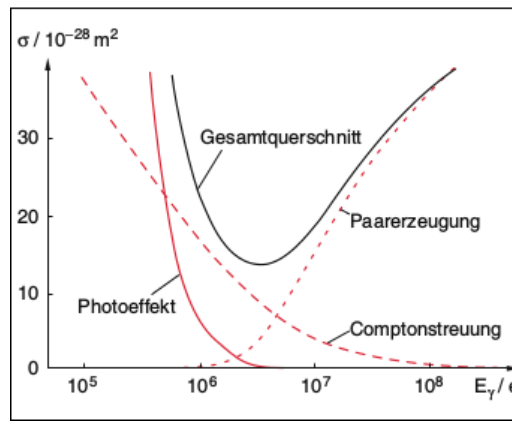
### 5.3.3.7 Photoeffekt vs. Comptoneffekt vs. Paarbildung

Strahlung	Name	Bedingung	$\frac{dE}{dx}$	Sonstiges	Wirkungsquerschnitt
Elektron	Bremsstrahlung	$E \geq 580 \frac{MeV}{Z}$	$\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$ mit $X_0$ : Empirische Länge, abhängig von Absorbermaterial Länge nach der E auf $1/e$ abgefallen ist (Strahlungslänge)	Kern für Impulsübertrag nötig	$\sigma_{br} \propto \frac{Z\alpha^3}{(m_E c^2)^2}$ Bei schweren Ionen Teilchen sehr klein, daher irrelevant.
Schwere Teilchen Elektronen	Ionisation		Bethe-Formel (5.1) mit Z: Kernladungszahl I: Anregungspotential(empirisch) $n = \frac{Z\rho}{A^{*u}}$ Elektronendichte des Absorbers (bei kleinem Impuls $\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{\beta^2}$ )	Ionisationsenergie des Mediums: $I \approx (10Z + 1) \text{ eV}$ Reichweite: $R = \int_{E_{kin}}^0 \frac{1}{dE/dx} dE$	
Schwere Teilchen	Pion-Erzeugung	$E = \sqrt{s} \geq 2m_p c^2 + m_\pi c^2 = 2m_p c^2 + 140 \text{ MeV}$		Starke Wechselwirkung Wenn Pionen andere Wechselwirkungen induzieren Hadronenschauer mit Länge $\lambda_{int} = \frac{1}{\rho_a \sigma_{aa}}$	30 mb für $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$ 80 mb für $\sqrt{s} = 10 \text{ TeV}$
Photon	Photoeffekt	$E_\gamma \in [10keV, 1MeV]$		Nukleare Wechselwirkungslänge	$\sigma_{ph} \propto \frac{Z^5}{\sqrt{E_\gamma}}$
Photon	Comptoneffekt	$h\nu \gg E_b$		$-\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1 - \cos\theta}{m_E c^2} \leq \frac{2}{m_E c^2}$	$\sigma_c \propto \frac{\alpha Z^2}{E_{CM}}$
					mit $E_{CM} = \sqrt{(m_E c^2)^2 + 2E_\gamma m_E c^2}$
					$\sigma_c = \pi r_E^2 Z \frac{m_E c^2}{E_\gamma} \left( \ln \left( \frac{2E_\gamma}{m_E c^2} + \frac{1}{2} \right) \right)$
Photon	Paarbildung	$E_\gamma \geq 2m_E c^2$			$\sigma_p \propto Z^2 \ln(E_\gamma)$

Tabelle 5.1. Zusammenfassung und Ergänzungen



(a) Die dominanten Bereiche für Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung als Funktion der Ordnungszahl  $Z$  des Absorbers und der Energie  $E_\gamma$  der  $\gamma$ -Quanten



(b) Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{ph}$  für Photoeffekt,  $\sigma_c$  für Compton-Effekt, und  $\sigma_{PB}$  für Paarbildung für Blei ( $Z=82$ ) als Funktion der  $\gamma$ -Energie

Abbildung 5.7. Vergleich von Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung im Hinblick auf (a) Kernladungszahl (b) Wirkungsquerschnitt



# 6 Elementarteilchen-Zoo

## 6.1 Charakterisierung von Elementarteilchen

**Heinsein,Søni**

Elementarteilchen lassen sich anhand folgender Größen klassifizieren:

- Masse
- Spin
- Quantenstatistik
- Ladung
- Lebensdauer (falls instabil)

Teilchen lassen sich in verschiedene Typen unterteilen:

- Elementarteilchen:
  - unteilbar,keine Struktur oder Anregung
  - punktförmig ( $r < 10^{-18}$  m )
  - z.B: Elektron,Neutrino,Quark
- Austausch-/Feldteilchen: vermitteln Wechselwirkung z.B: Photon
- Zusammengesetzte Teilchen:
  - gebundene Zustände von Elementarteilchen
  - z.B: Atom,Proton,Neutron

### 6.1.1 Masse

Anhand des Aston'schen Massenspektrometers lässt sich die Masse von Elementarteilchen experimentell bestimmen. Man verwendet dazu eine Kombination von Elektrischen und Magnetischen Feldern, wobei sich durch die Ablenkung des Teilchens in diesen, die Masse bestimmen lässt.

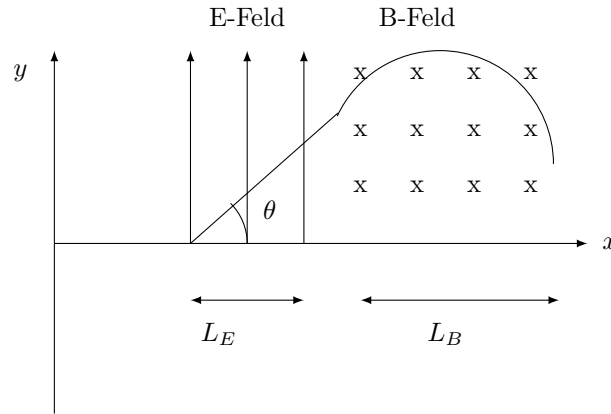


Abbildung 6.1. Aufbau eines Massenspektrometers

Nachdem das Teilchen das E-Feld durchlaufen hat ist seine Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = a_y \cdot t = \frac{F}{m} \cdot \frac{L_E}{v_x} \quad (6.1)$$

Für den Einfallswinkel des Teilchens folgt:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qEL_E}{mv_x} \quad (6.2)$$

Nachdem das Teilchen das B-Feld durchlaufen hat ist seine Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = v_{0y} + \frac{qBL_B}{mv_x} \quad (6.3)$$

Durch geeignete Dimensionierung der Apparatur werden Teilchen gleicher Masse unabhängig von Geschwindigkeit gleich stark abgelenkt. Auf diese Weise lassen sich die Massen stabiler Teilchen bestimmen.

Bei instabilen Teilchen misst man den Impuls sowie die Flugzeit(mittlere Lebensdauer) und bestimmt die Masse via:

$$pc = \beta\gamma mc^2 \quad (6.4)$$

$$t = \frac{L}{\beta c} \quad (6.5)$$

Bei zu kurzen Lebensdauern misst man den Viererimpuls der Zerfallsprodukte,

$$P^2 = (P_1^2 + P_2^2) = (E_1^2 + E_2^2) - (\vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c)^2 = m_x^2 c^4 \quad (6.6)$$

wobei man die invariante Masse  $m_x$  im Ruhesystem des Ursprungs des Teilchens erhält über:

$$m_x = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)} \quad (6.7)$$

Wenn X ein Zerfallsprodukt von Y ist, kann durch die beim Zerfall freiwerdende Energie (Q-Wert) die Masse von X berechnet werden, sofern man die Masse von Y kennt.

### 6.1.2 Spin

Man kann Teilchen ebenfalls durch ihren Spin klassifizieren. Diesen kann man über eine Messung des magnetischen Moments  $\mu$  eines Teilchens bestimmen. Es gilt:

$$\vec{\mu}_s = \frac{g_s \mu_0}{\hbar} \vec{S} \quad (6.8)$$

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc} \quad \text{Magneton} \quad (6.9)$$

Der Faktor g ist in diesem Fall das gyromagnetische Verhältnis, welches individuell vom Teilchen abhängt(für Elektronen:  $g = -2$ ). Für andere Wechselwirkungen gibt es andere g-Faktoren, doch dazu später.

Man unterscheidet prinzipiell anhand des Spins 2 Teilchenarten:

- Teilchen mit halbzahligem Spin "Fermionen"
  - Elektronen, Quarks, Neutrinos
  - Fermi-Dirac-Statistik
- Teilchen mit ganzzahligem Spin "Bosonen"
  - Photon, Higgs-Boson
  - Bose-Einstein-Statistik

Man unterscheidet für die jeweiligen Werte noch verschiedene Arten Bosonen

– S=0	Skalarboson	Pion,Higgs-Boson
– S=1	Vektorboson	Photon,Eichboson
– S=2	Tensorboson	Graviton

### 6.1.3 Klassifizierung anhand Wechselwirkung

Es gibt 4 fundamentale Wechselwirkungen:

- Gravitation
- Elektromagnetische Wechselwirkung
- Schwache Wechselwirkung (z.B.  $\beta$ -Zerfall)
- Starke Wechselwirkung (Bindung von Nukleonen im Kern / Quarks im Nukleon)

Die Stärke dieser Wechselwirkungen wird charakterisiert durch eine dimensionslose Kopplungskonstante, die Ladung und die Reichweite. Wechselwirkungen werden durch Austauschteilchen vermittelt, die allerdings nur aufgrund der Unschärferelation überhaupt existieren können.

Austauschteilchen bleiben in sogenannten virtuellen Zuständen und für die Außenwelt unsichtbar. Jedoch konnten die messbaren physikalischen Prozesse mit diesem Modell mit sonst nicht erreichter Präzision erklärt werden.

#### 6.1.3.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Das Austauschteilchen dieser Wechselwirkung ist das Photon. Das Potential eines Elektrons, dass diese Wechselwirkung auslöst ist gegeben durch:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (6.10)$$

Durch Fouriertransformation vom Orts- in den Impulsraum kann man dieses Potential auch durch das Betragsquadrat des Impulsübertragsvektors darstellen. Das Potential nimmt folgende Form an:

$$V(q^2) = \frac{e^2 \hbar^2}{q^2} \quad (6.11)$$

Die Kopplungskonstante für diese Wechselwirkung ist:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (6.12)$$

### 6.1.3.2 Schwache Wechselwirkung

Diese Wechselwirkung wirkt nur auf sehr kleine Abstände, die kleiner als ein Atomradius sind. Sie tritt vorallem bei Zerfällen und Umwandlungen von Teilchen auf (z.B  $\beta$ -Zerfall). Die Austauschteilchen dieser Wechselwirkung sind Eichbosonen ( $Z^0$ ,  $W^+$ ,  $W^-$ -Boson).

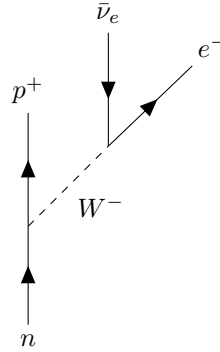


Abbildung 6.2. Neutron-Zerfall mit  $W^-$ -Boson als Austauschteilchen. Dieser Zerfall ist Ursache für  $\beta^-$ -Strahlung.

Das Potential dieser Wechselwirkung ist:

$$V_{weak} = \frac{g_{weak}^2}{r} \cdot e^{-\frac{m_{weak}r}{\hbar c}} = \frac{g_{weak}}{q^2 + m_{weak}^2} \quad (6.13)$$

Wobei man sich den g-Faktor als Analogon zur Ladung vorstellen kann und mit der Masse  $m_{weak}$  die Masse der Austauschteilchen gemeint ist, welche groß ist ( $m_{weak} = 80.4 \text{ GeV}$  für  $W^\mp$ -Bosonen).

Aufgrund der Massenbehaftung hat diese Wechselwirkung eine kurze Reichweite

$$\Delta x = 2 \cdot 10^{-18} m \quad \text{für} \quad \beta = 0.02 \quad (6.14)$$

$$\Delta x = 90 \cdot 10^{-18} m \quad \text{für} \quad \beta = 0.7 \quad (6.15)$$

Unabhängig von der Geschwindigkeit  $\beta$  der Austauschteilchen kann man also sagen, dass die Größenordnung der Reichweite sehr klein ist. Die Kopplungskonstante ist für diese Wechselwirkung auch klein, was sich darauf zurückführen lässt dass die g-Faktoren klein vergleichsweise zur Elementarladung sind.

$$\frac{g_{weak}^2}{\hbar c} = 4 \cdot 10^{-3} \quad (6.16)$$

### 6.1.3.3 Starke Wechselwirkung

Diese Wechselwirkung erklärt die Bindung von Quarks in Hadronen. Auch hier wird der Austausch durch Eichbosonen beschrieben, den sog. Gluonen.

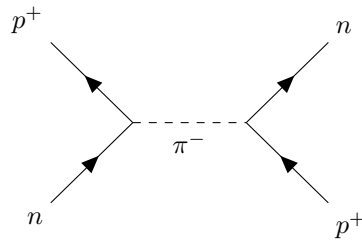


Abbildung 6.3. Proton-Neutron-Wechselwirkung aufgrund starker Wechselwirkung mit negativ geladenem Pion als Austauschteilchen

Das Potential ist ähnlich wie das der schwachen Wechselwirkung:

$$V_{strong} = \frac{g_{strong}^2}{r} \cdot e^{-\frac{m_{strong}r}{\hbar c}} = \frac{g_{strong}}{q^2 - m_{strong}^2} \quad (6.17)$$

Die Masse der Austauschteilchen sind  $m_{strong} = m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$  für Pionen. Die Kopplungskonstante ist hier sehr groß:

$$\frac{g_{strong}^2}{\hbar c} = 15 \quad (6.18)$$

Die Reichweite ist hier immernoch klein, jedoch 1000-mal größer als bei der schwachen Wechselwirkung. Ab einer Reichweite von  $\sim 2.5 \text{ fm}$  gleichen sich starke Wechselwirkung und die Coulomb-Kraft aus. Dies erklärt die Größenordnung von Atomkernen.

$$\Delta x = 1.4 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (6.19)$$

### 6.1.3.4 Wechselwirkung zwischen Quarks

Allgemeiner lässt sich die starke Wechselwirkung als Wechselwirkung zwischen Quarks auffassen, die Bestandteile der Hadronen sind und Gluonen austauschen. Das Potential hat hier folgende Form:

$$V_{strong} = -\frac{4}{3} \frac{g_{strong}^2}{4\pi r} + k \cdot r \quad (6.20)$$

Mit der Konstanten  $k = 1 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$  welche besagt, wieviel Energie man pro Abstand aufwenden muss um dem Potential entgegenzuwirken.

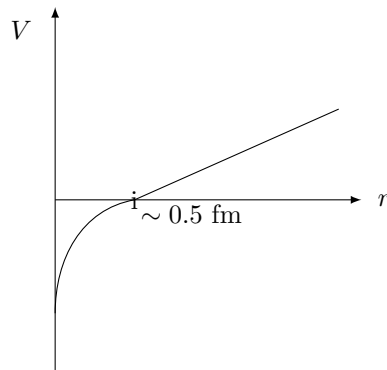


Abbildung 6.4. Potential der Quarkwechselwirkung

Quarks können nicht alleine existieren. Versucht man 2 Quarks zu trennen, so ist das Potential irgendwann so groß, dass aus dieser Energie wieder ein neues Quark-Antiquark-Paar entsteht.

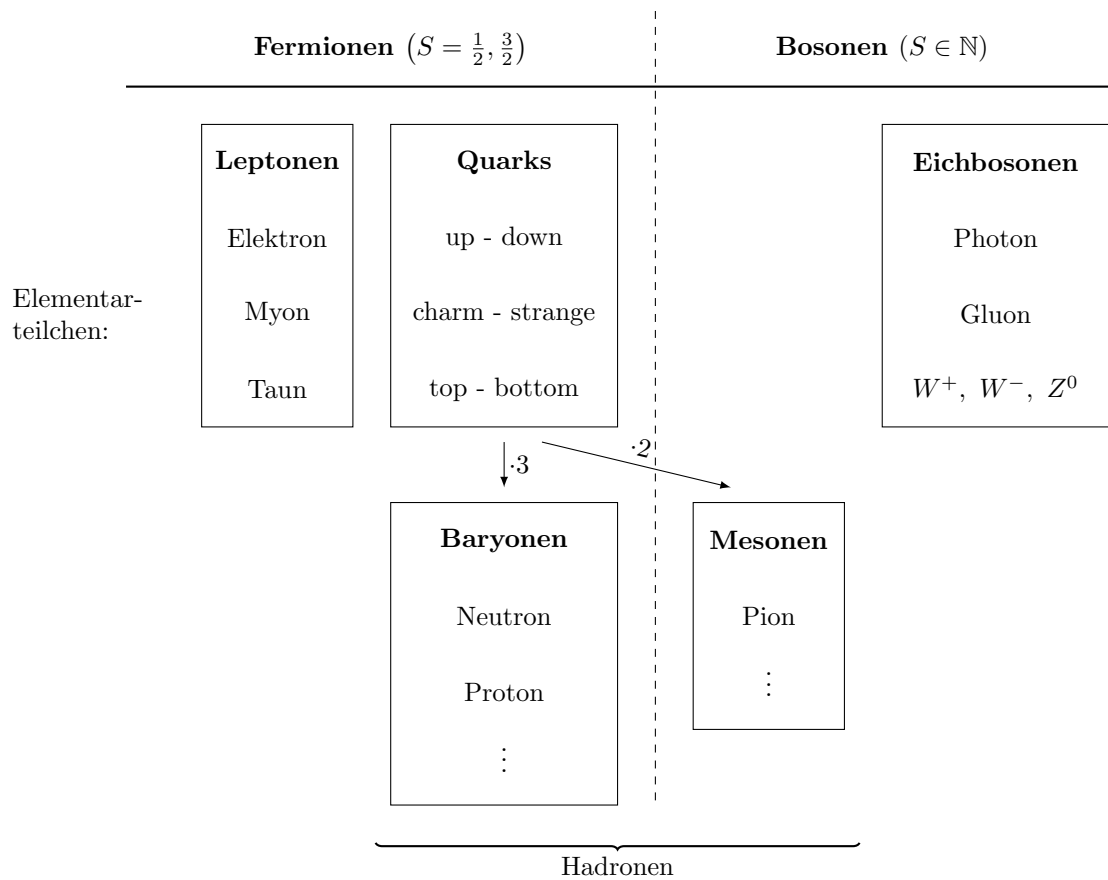


Tabelle 6.1. Übersicht des Elementarteilchen-Zoos

### 6.1.4 Anmerkungen

- Es gibt insgesamt 8 Gluonen, die sich in ihrer Farbladung unterscheiden
- Das Higgs-Boson ist ein weiteres Elementarteilchen, das sich keiner der 3 Gruppen zuordnen lässt und Teil des Higgs-Feldes ist. (Annahme: durch Wechselwirkung mit dem Higgsfeld erhalten Teilchen ihre Masse.)

## 6.2 Leptonen

- 3 Generationen



- In jeder Generation ein Teilchen mit  $q = -e$  und eines mit  $q = 0$  sowie deren Antiteilchen
- Antiteilchen haben entgegengesetztes Vorzeichen bei Ladung und Leptonenzahl

Generation	$q = -1$	$q = 0$	Leptonenzahl ( $= n_l - n_{\bar{l}}$ )
1	$e^-$	$\nu_e$	$L_e = 1, L_\mu = 0, L_\tau = 0$
2	$\mu^-$	$\nu_\mu$	$L_e = 0, L_\mu = 1, L_\tau = 0$
3	$\tau^-$	$\nu_\tau$	$L_e = 0, L_\mu = 0, L_\tau = 1$

Tabelle 6.2. Übersicht der 3 Leptonen-Generationen und ihrer Eigenschaften

Die Antileptonen werden wie folgt notiert:  $e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ .

### 6.2.1 Beispiel eines Zerfalls

Myon zerfällt zu einem Elektron und zwei Neutrinos:

	$\mu^-$	$\rightarrow$	$e^-$	$+$	$\bar{\nu}_e$	$+$	$\nu_\mu$
$q$	-1		-1		0		0
$L_e$	0		1		-1		0
$L_\mu$	1		0		0		1

Tabelle 6.3. Myonenzerfall

Ladung und Leptonenzahl bleiben **erhalten**. Masse der Produkte darf die des Edukts nicht überschreiten.

## 6.3 Quarks

Generation	Flavour	q	$I_3$	$S$	$C$	$B$	$T$
1	$d$ (down)	$-1/3$	$-1/2$				
	$u$ (up)	$2/3$	$1/2$				
2	$s$ (strange)	$-1/3$		$-1$		$0$	
	$c$ (charm)	$2/3$			$1$		
3	$b$ (bottom)	$-1/3$		$0$		$-1$	
	$t$ (top)	$2/3$					$1$

Tabelle 6.4. Übersicht der 3 Quark-Generationen und deren Eigenschaften

Hierbei steht  $I_3$  für den sog. Isospin, und  $S$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $T$  für die Quantenzahlen.

Antiquarks haben umgekehrtes Vorzeichen bei Ladung und Quantenzahlen/Isospin.  $I_3$ ,  $S$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $T$  sind Flavour-Quantenzahlen:

### 6.3.1 Flavour-Quantenzahlen $I_3$ , $S$ , $C$ , $B$ , $T$

$$I_3 = \frac{1}{2} ((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})) \quad (6.21)$$

$$\rightarrow up - Quark : I_3 = \frac{1}{2}; \text{ down} - Quark : I_3 = -\frac{1}{2} \quad (6.22)$$

$$C = n_C - n_{\bar{C}} \rightarrow \text{charm} - Quark : C = 1 \quad (6.23)$$

$$S = n_S - n_{\bar{S}} \rightarrow \text{strange} - Quark : S = -1 \quad (6.24)$$

$$T = n_T - n_{\bar{T}} \rightarrow \text{top} - Quark : T = 1 \quad (6.25)$$

$$B = n_B - n_{\bar{B}} \rightarrow \text{bottom} - Quark : B = -1 \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

### 6.3.2 Farbladung

Quarks können 3 verschiedene Farbladungen annehmen:  $r$ ,  $g$ ,  $b$

Antiquarks können 3 Antifarben annehmen:  $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{b}$

Alle gebundenen Zustände sind farbneutral (**Confinement-Hypothese**).  
Dies kann auf 2 Arten erreicht werden:

- Kombination von Quark und Antiquark (Mesonen)
  - Farbe + Antifarbe = Neutral
  - Zerfallen in Sekundenbruchteilen
- Kombination aller 3 Farben, also 3 Quarks (Baryonen)
  - $r + g + b = \text{weiß}$  (neutral)

Gluonen tragen jeweils eine Farb- und Antifarbladung.  
→  $3^2 = 9$  Kombinationsmöglichkeiten  
→ davon ist aber eine neutral → 8 Möglichkeiten

## 6.4 Charakterisierung durch WW

- Leptonen unterliegen der schwachen WW, der Gravitation und, falls sie geladen sind, der el.mag. WW.
- Quarks unterliegen allen Wechselwirkungen

## 6.5 Zerfallsbreite

von **no Fabs**  
were given

Wir wollen die Lebensdauer von kurzlebigen Teilchenzuständen (=Resonanzen: aus Stoßprozessen entstandene instabile Teilchen) herausfinden.

Der Zerfall eines instabilen Teilchens / einer Resonanz erfolgt nach dem Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{1}{\tau} \quad (6.28)$$

Der Zustand einer festen Energie  $E_r$  ist durch die Wellenfunktion gegeben:

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_0}_{\text{ortsabhängig}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{i E_r t}{\hbar}\right)}_{\text{zeitabhängig}} \quad (6.29)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen zu finden, ist:

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \quad (6.30)$$

⇒ zeitlich konstant, kein Zerfall.

Dies führt uns zu dem Problem, dass sich auch für instabile Teilchen nur konstante Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben.

### 6.5.1 Lösungsansatz

Wähle komplexe Energie für zerfallende Teilchen:

$$E = E_r - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma \in \mathbb{R} \quad (6.31)$$

Einsetzen in obige Gleichungen für Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte führt uns auf:

$$\psi(t) = \psi_0 \exp\left(-i\frac{E_r t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}\right) \quad (6.32)$$

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) \quad (6.33)$$

$\Rightarrow$  exponentieller Zerfall mit  $\frac{\Gamma}{\hbar} = \lambda = \frac{1}{\tau}$ ;  $\Gamma\tau = \hbar$

Betrachte nun die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion:  $\psi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi(E)$ :

$$\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(t) \exp\left(i\frac{Et}{\hbar}\right) dt \quad (6.34)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-t\left(\frac{i}{\hbar}(E_r - E) + \frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\right) dt \quad (6.35)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - E_r) + \frac{i\Gamma}{2}} \quad (6.36)$$

Daraus erhalten wir nun  $P(E)$ :

$$P(E) = A \cdot \psi^*(E) \psi(E) \quad (6.37)$$

mit Normierung:

$$A = \frac{\Gamma}{\hbar^2 \psi_0^2} \quad (6.38)$$

$P(E)$  heißt Lorentz- oder Breit-Wigner-Verteilung. Ihr Maximum liegt bei  $E_r$ , ihre FWHM (= Full Width Half Maximum) bzw. Halbwertsbreite beträgt  $\Gamma$ .

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.39)$$

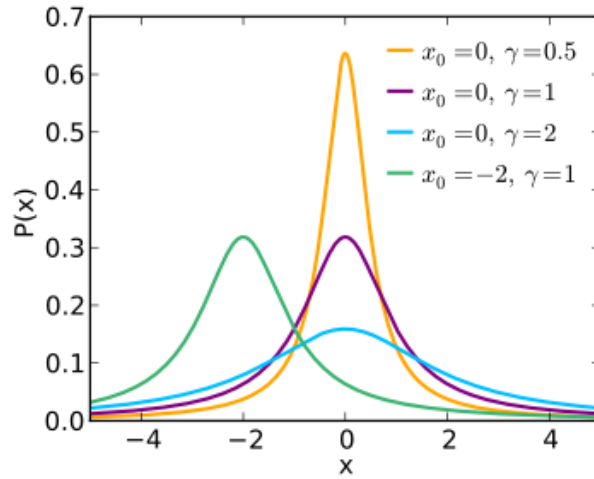


Abbildung 6.5. Funktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lorentz-Verteilung

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt jedes Teilchen eine Energiebreite  $\Gamma$ . Über die Heisenberg'sche Energie-Zeit Unschärfe-Relation  $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$  ist die Lebensdauer eines instabilen Zustandes mit der Energieunschärfe verknüpft. Wird die Lebensdauer unmessbar klein  $\rightarrow$  Zerfallsbreite  $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$ , was eine messbare Größe ist.

$\Gamma$  und  $\tau$  werden durch freigesetzte Energie (Phasenraum) und Art der Wechselwirkung bestimmt:

WW	Teilchen	$\tau$	$\Gamma$
stark	$\Delta(1232)$	$10^{-23}\text{s}$	100MeV
el.mag.	$\pi^0$	$10^{-18}\text{s}$	1keV
schwach	$\pi^\pm$	$10^{-8}\text{s}$	$10^{-7}\text{eV}$
	$n$	$10^3\text{s}$	$10^{-18}\text{eV}$

Tabelle 6.5. Übersicht einiger kurz- und langlebiger Teilchen(zustände).  $\Delta(1232)$  ist ein Delta-Baryon (oder Delta-Resonanz) mit  $m = 1232\text{MeV}/c^2$

# 7 Strukturinformation aus Streuexperimenten

von Martina

**Definition Struktur:** Räumliche Verteilung von Masse, Ladung und Magnetisierung

Um etwas über die räumliche Struktur zu erfahren, misst man den Wirkungsquerschnitt (Streuwahrscheinlichkeit in Form einer Fläche) in Abhängigkeit vom Streuwinkel (der mit dem Impulsübertrag zusammenhängt).

## 7.1 Elastische Streuung

### 7.1.1 Rutherford-Streuung

$\alpha$ -Teilchen streuen an einer Goldfolie. Dieses Experiment führte zur Entdeckung der Atomkerne.

**Annahme über Streupartner:** punktförmig, geladen,  $E_{kin} \ll$  Masse

Rutherford fand für den differentiellen Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkel von Teilchen mit Ladungszahl  $z$  der kinetischen Energie  $T$  welche unter dem Winkel  $\theta$  an Teilchen der Kernladungszahl  $Z$  streuen folgende Beziehung:

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{16T^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (7.1)$$

Die Messungen zeigten, dass der Atomkern kleiner ist als die Annäherung der  $\alpha$ -Teilchen. Es gilt Energieerhaltung:

$$T = \frac{mv'^2}{2} + \frac{zZe^2}{\delta_{min}} \quad (7.2)$$

Wobei  $v'$  die Geschwindigkeit des abgelenkten Teilchens nach der Streuung ist (siehe Abb.7.1).

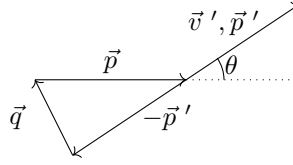


Abbildung 7.1. Impulse bei Streuung

Die größtmögliche Annäherung bei Rückwärtsstreuung ( $\theta = 180^\circ$ ) erhält man mit  $v' = 0$  zu:

$$\delta_{min} = \frac{zZe^2}{T} \quad (7.3)$$

Mit Abb. 7.1 lässt sich auch gut der Impulsübertrag  $\vec{q}$  berechnen zu:

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (7.4)$$

$$|\vec{q}| = 2 |\vec{p}| \sin(\theta/2) \quad (7.5)$$

Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem Viererimpulsübertrag:

$$q^2 = (E - E')^2 - |\vec{q}|^2 \quad (7.6)$$

Es ist zweckmäßig den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch eine Streuamplitude zu beschreiben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q}^2)|^2 \quad (7.7)$$

Im Falle einer Streuung eines Teilchens an einem kugelsymmetrischen Coulomb-Potential eines Kerns wird das Teilchen durch eine ebene Welle beschrieben. Die Ebene wird durch das Skalarprodukt  $\vec{p} \cdot \vec{r}$  beschrieben.

$$\psi_j = \exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \quad (7.8)$$

Die Streuamplitude erhält man nun durch Fouriertransformation des Potentials des Kerns  $V(r)$  in den Impulsraum welcher durch den Impulsübertrag  $\vec{q}^2$  beschrieben wird. Wir definieren  $q = |\vec{q}|$  und  $r = |\vec{r}|$

$$f(\vec{q}^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) \exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) d\vec{r} \quad (7.9)$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int r V(r) \sin\left(\frac{qr}{r}\right) d\vec{r} \quad (7.10)$$

Man kann sich eine Zerlegung der Streuamplitude in Elementarwellen  $\exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right)$  vorstellen, mit dem Gewichtungsfaktor des Potentials am Ort  $\vec{r}$ . Man stellt sich

also die Streuamplitude als Amplitude der Superposition aller Wellenfronten  $\exp\left(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)$  vor, wobei eine einzelne Wellenfront stärker/schwächer ins Gewicht fällt, wenn das Potential  $V(r)$  an dem Ort  $\vec{r}$  größer/kleiner ist. Dies ist plausibel, da falls das Potential  $V(r)$  groß/klein ist, die Streuwahrscheinlichkeit auch größer/kleiner ist. Somit sollte die Streuamplitude, welche die Streuwahrscheinlichkeit beschreibt, mit dem Potential  $V(r)$  skalieren. Berücksichtigt man die Abschirmung des Potentials von Elektronen so erhält man als Potential

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} e^{-r/a} \quad (7.11)$$

mit dem Skalierungsfaktor  $a \approx 1\text{\AA}$

Somit erhalten wir als differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2 z^2 Z^2 e^4}{q^4} \quad (7.12)$$

Für relativistische Teilchen kann  $E \approx p$  angenommen werden. Wir erhalten hier als Wirkungsquerschnitt pro Impulsübertrag

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d(q^2)} = \frac{4\pi(zZ)^2 e^4}{q^4} \quad (7.13)$$

Im Laborsystem muss bei relativistischen Teilchen der Rückstoß berücksichtigt werden

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d(q_{cms}^2)} \frac{E'}{E} \quad (7.14)$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{m} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (7.15)$$

### 7.1.2 Streuung relativistischer Spin 1/2-Teilchen an Punktladung Ze

Berücksichtigt man den Spins eines Teilchens, so muss man das durch den Spin hervorgerufene Magnetische Moment bei Streubetrachtungen hinzuziehen. Dadurch erhält man den **Mott-Querschnitt**

$$\frac{d\sigma^m}{d(q^2)} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{q^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (7.16)$$



### 7.1.3 Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Für das Potential gilt die Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2 V = 4\pi\rho(r)Ze^2 \quad (7.17)$$

Unter Verwendung einer Green'schen Identität lässt sich das Integral für die Streuamplitude umschreiben

$$\int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) V(r) = -\frac{\hbar^2}{q^2} \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \nabla^2 V(r) \quad (7.18)$$

Und man erhält als differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{q^4} \left| \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r) \right|^2 \quad (7.19)$$

Das letzte Integral hat eine wichtige Bedeutung, weshalb man es als den Formfaktor definiert. Dieser ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung und enthält die ganze Streuinformation des Wirkungsquerschnitts.

$$F(q^2) = \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r) \quad (7.20)$$

Man kann damit den Wirkungsquerschnitt recht einfach aus dem Rutherford-Querschnitt erhalten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} |F(q^2)|^2 \quad (7.21)$$

## 7.2 Grundlagen zu Wirkungsquerschnitt, Streuung und der Rutherford-Versuch

von Michi & Pauli

Die Wahrscheinlichkeit  $w$ , dass ein einfallendes Teilchen mit einem Targetteilchen wechselwirkt, errechnet sich aus:

$$w = \sigma \frac{N_T}{F_T} \quad (7.22)$$

wobei  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt,  $F_T$  die bestrahlte Targetfläche und  $N_T$  die Anzahl der darin enthaltenen Targetteilchen ist. Also:

$$w \propto \text{Target-Teilchenflächendichte}$$

Vorraussetzung hierfür ist:

$$\sigma N_T \ll F_T$$

Experimentell im Beschleuniger zu bestimmen ist die Reaktionsrate  $W$ :

$$W = \frac{dN_{\text{III}}}{dt} = \sigma L \quad (7.23)$$

wobei  $L$  die Luminosität des Beschleunigers ist.

### 7.2.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\underbrace{j_{\text{Strom}}}_{1/(\text{Zeit} \cdot \text{RWE})} \equiv j_{\text{III}} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) \cdot \underbrace{j_{\text{I}}}_{1/(\text{Zeit} \cdot \text{Fläche})} \quad (7.24)$$

wobei RWE für Raumwinkelement steht.

$$\Rightarrow \sigma = \int_{\Omega \setminus \text{Beam}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (7.25)$$

Ebenso gilt allgemein:

$$I = \iint_F \vec{j} \, d\vec{F} \quad (7.26)$$

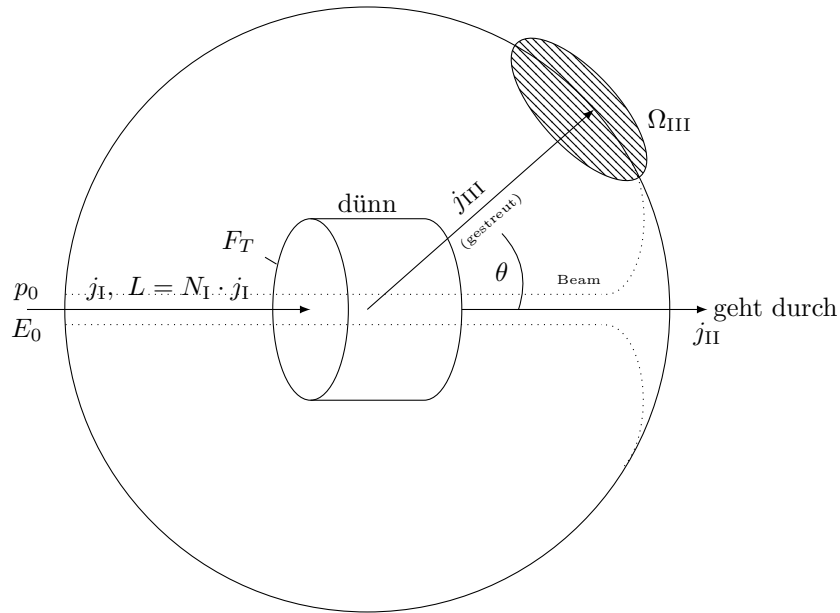


Abbildung 7.2. Streuung eines Teilchenstrahles (Beam) an einem Target bzw. an einer Targetfläche ( $F_T$ ).

### 7.2.2 Rutherford-Querschnitt

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \left( \frac{zZe^2}{4E_0 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \right)^2 \quad (7.27)$$

### 7.2.3 Zusammenhang zw. Streu-/Raumwinkel und Impulsübertrag $|q|$

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (7.28)$$

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (7.29)$$

**Herleitung:** Impulserhaltung wegen

1. Target sehr schwer
2. Reibung vernachlässigbar (elastischer Stoß)

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = \begin{pmatrix} |\vec{p}| \sin \vartheta \cos \varphi \\ |\vec{p}| \sin \vartheta \sin \varphi \\ |\vec{p}| \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\|\vec{q}\|^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = |\vec{p}|^2 \left( \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \underbrace{1 - 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}_{\text{Binom.}} \right) \quad (7.31)$$

Vernachlässigung der quadratischen Terme führt auf:

$$= 2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \vartheta) = 4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (7.32)$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \left( \frac{\vartheta}{2} \right)$$

#### 7.2.4 Raumwinkel $\Omega$

$$\Omega := \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \quad (7.33)$$

für Rutherford folgt hieraus:

$$\Rightarrow d\Omega = \underbrace{\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi}_{=0} + \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (7.34)$$

$$= 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (7.35)$$

$$\int_{S^2} d\Omega = 4\pi \approx 12.57 \text{sr} \quad (7.36)$$

wobei sr für Steradianen steht.

#### 7.2.5 Differentieller Wirkungsquerschnitt Part II

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{d(4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\pi}{|\vec{p}|^2} \quad (7.37)$$

Herleitung:  $\left( \frac{d\vartheta}{d''} = \left( \frac{d(4p^2 \sin^2 (\frac{\vartheta}{2}))}{d\vartheta} \right)^{-1} = 4p^2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = 2p^2 \sin \vartheta \right)$

(7.38)

von MiX und Pauli

### 7.2.6 Streuamplitude

Löst man die Schrödingergleichung für die Streuung eines Wellenpakets an einem fixen Target so erhält man als Lösung

$$\Psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f_k(\theta, \phi) \quad (7.39)$$

Dies entspricht einer Superposition von einer ebenen Welle mit einer gestreuten Kugelwelle ( $r = |\vec{x}|$ ), gewichtet mit der Streuamplitude  $f_k(\theta, \phi)$ . Diese Amplitude korrespondiert zu der Wahrscheinlichkeit das gestreute Wellenpaket im Raumwinkel  $\Omega(\theta, \phi)$  aufzufinden. Hieraus folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (7.40)$$

## 7.3 Zwischenresumée

Wir hatten bisher Stoßprozesse von Elementarteilchen/Hadronen bei hohen Geschwindigkeiten ( $v \approx c$ ) betrachtet. Wichtig ist es dabei, den Wirkungsquerschnitt einfach als "Targetflächendichtebereinigte Reaktionswahrscheinlichkeit"

$$\sigma = P_{WW} \frac{1}{(N/A)_T} \quad (7.41)$$

aufzufassen, die vom Reaktionstyp abhängt. Dieser Wirkungsquerschnitt lässt sich im z.B. kugelförmigen Detektor nach dem Raumwinkel  $\Omega := \int_0^\phi \int_0^\theta \sin(\theta') d\theta' d\phi'$  auflösen, wobei erstmal  $d\Omega = 2\pi d\phi d\theta$  aufgrund der Azimutalsymmetrie nur von  $\theta$  (konventionell zur z-Achse ausgerichtet) abhängt. Wir erhalten den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  und ferner

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d(q^2)} \stackrel{\text{elastisch}}{=} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\pi}{|\vec{p}|^2} \quad (7.42)$$

wobei der Betrag des Impulses  $|\vec{p}|$  des eingehenden Wellenpakets gleich dem Betrag des ausgehenden Wellenpakets ist und  $q^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$  der quadrierte Dreierimpulsübertrag ist.

Dies benutzt, dass der Projektilimpuls erhalten ist (niedrige Energie). Außerdem ist  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$  das Betragsquadrat der Streuamplitude  $f \in \mathbb{C}$  [Dimension: Länge]

### 7.3.1 Differenzielle Wirkungsquerschnitte zur Teilchenformbestimmung

Um jetzt die radiale Form von Targetteilchen zu bestimmen werden wir im differentiellen Wirkungsquerschnitt immer mehr elektromagnetische Effekte

berücksichtigen.

Name	Beschreibung		Formel
Rutherford	Projektil	punktförmig spinlos	$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \left( \frac{1}{16 E_{kin}^2 \sin^4(\theta/2)} \text{ oder } \frac{4m_{Proj}^2}{q^4} \text{ oder } \underbrace{\frac{4E_{end}^2}{(qc)^4}}_{\text{relativist.}} \right)$
	Target	punktförmig spinlos	
Mott	Projektil	punktförmig mit Spin	$\frac{d\sigma^M}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \underbrace{(1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))}_{\text{für } v \approx c \text{ ungefähr } \cos^2(\frac{\theta}{2})}$
	Target	punktförmig spinlos	
Dirac	Projektil	punktförmig mit Spin	$\frac{d\sigma^D}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \left( 1 - \beta^2 \underbrace{\frac{(qc)^2}{2E_T}}_{=2M_T^2 c^4} \tan^2(\theta/2) \right)$
	Target	punktförmig mit Spin	
Final	Projektil	punktförmig mit Spin	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \left( \frac{G_E^2 - (qc/2E_T)^2 G_M^2}{1 - (qc/2E_T)^2} - \beta^2 \left( \frac{qc}{2E_T} \right)^2 G_M^2 \tan^2(\theta/2) \right)$
	Target	ausgedehnt mit Spin	
Rosenbluth Plot-Formel			$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a (G_E^2 - b G_M^2) - d G_M^2 \tan^2(\theta/2)$

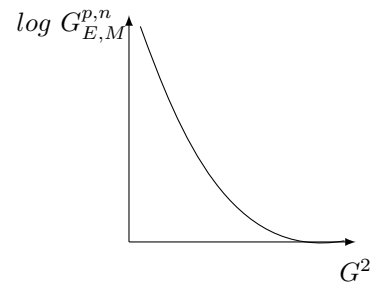
#### Legende:

- $G_E(q^2)$  - Ladungsverteilung (dimensionslos)
- $G_M(q^2)$  - Magnetisierung/Stromverteilung (dimensionslos)
- $E_{kin}$  - Energie des eingehenden Projektils
- $E_{end}$  - Energie des gestreuten Projektils
- $E_T = M_T c^2$  - Energie des ruhenden Targets
- $\beta = \frac{v}{c}$      $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$      $z, Z$  - Ladungszahlen     $a, b, c \in \mathbb{R}$

## 7.4 Struktur der Nukleonen

Trägt man  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  gegen  $\tan^2(\theta/2)$  auf (Rosenbluth-Plot), so erhält man, dass die Formfaktoren  $G_{E,M}^{p,n}$  (elektromagnetisch von Proton/Neutron) voneinander abhängen. Empirisch erhält man die sog. Dipolformel

$$G_E^p(q^2) = \frac{1}{1 + q^2 c^4 / 0.71(\text{GeV})^2} \propto G_M^p \propto G_M^n \quad (7.43)$$



Als Fouriertransformierte des elektrischen Formfaktors erhält man die Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{4.3}{f_m} r} \quad (7.44)$$

Um den Kernradius abzuschätzen kann man den rms-Radius ("Root Mean Square") dieser Ladungsverteilung berechnen. Man erhält z.B

- Proton:  $\langle r \rangle = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left( \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \right)^{\frac{1}{2}} = 0.86 \text{ fm}$
- Pion:  $\langle r \rangle = 0.66 \text{ fm}$
- Kaon:  $\langle r \rangle = 0.53 \text{ fm}$

Die Ergebnisse der Experimente liefern folgendes Bild:

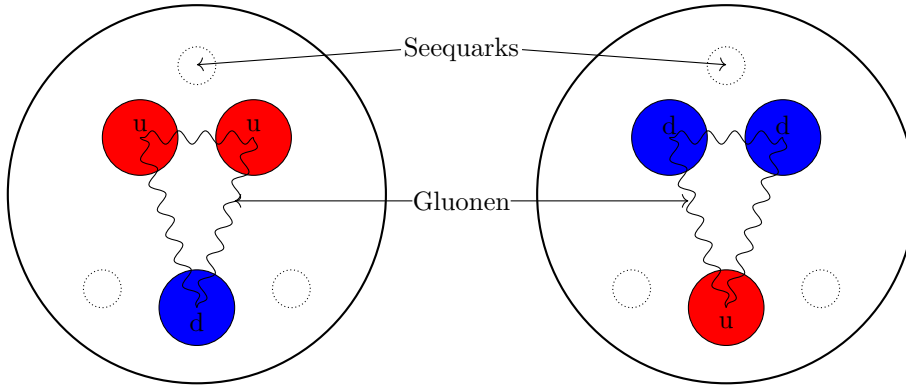


Abbildung 7.3. Substruktur eines Protons(links) und Neutrons(rechts)

- Proton: Valenzquarks uud
- Neutron: Valenzquarks ddu

Die Valenzquarks haben einen Spin und sind geladen, jedoch macht ihre Masse nur 1 % der Gesamtmasse aus. Der Großteil der Masse steckt in den sog. SSeequarks" welche 99 % zur Gesamtmasse beisteuern und deren Gesamtspin und Gesamtladung sich aufheben.

**Nun zurück zu den Formfaktoren:**

Betrachten wir einen durchgehenden Strahl ( $q^2 = 0$ ) so erhalten wir als Formfaktoren:  $G_E^p(0) = 1$      $G_E^n(0) = 0$      $G_M^p(0) = 2.79$      $G_M^n(0) = -1.91$

Diese sind gerade die sogenannten Spin-g-Faktoren der Nukleonen:

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Proton: } \vec{\mu}_p &= \underbrace{+2.002 \cdot 2.79}_{\text{Landé-Faktor } g_p=5.59} \cdot \underbrace{\frac{q_p \hbar}{2m_p}}_{\text{Kernmagneton } \mu_N} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \\
 \bullet \text{ Neutron: } \vec{\mu}_n &= \underbrace{+2.002 \cdot (-1.91)}_{\text{Landé-Faktor } g_n=-3.83} \cdot \underbrace{\frac{q_p \hbar}{2m_n}}_{\text{Kernmagneton } \mu_N} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}
 \end{aligned}$$



**Zur Erinnerung:**

Fließt ein Kreisstrom  $I$  durch eine orientierte Fläche  $\vec{A}$  so entsteht ein magnetisches Moment [Einheit:  $Am^2$ ]

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = \frac{Q}{T}\pi r^2 \vec{n}_A = \frac{Q}{2m}\vec{L} \quad (7.45)$$

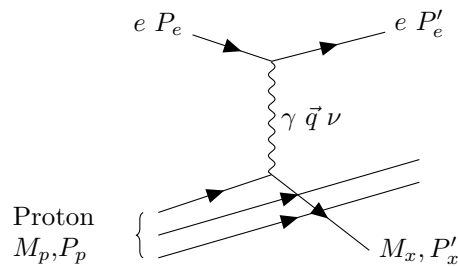
Man schreibt diese Beziehung auch folgendermaßen:

$$\vec{\mu}_{x,L} = g_{x,L} \cdot \mu_x \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (7.46)$$

Diese Größe bezeichnet man als magnetisches Moment des Teilchens  $x$  mit Drehimpuls  $\vec{L}$  wobei  $\mu_x = \frac{q_x \hbar}{2m_x}$  das sog. Magneton des Teilchens  $x$  ist.

## 7.5 Elastische Stöße

Für sehr große Impulsüberträge  $q$  kommt es zu inelastischen Stößen. In folgendem Diagramm wechselwirkt ein Elektron welches auf ein Proton zufliegt mit diesem wodurch die 3 Bestandteile des Kerns nach dem Stoß verschiedene Wege gehen.



Im Ruhesystem des Protons sind die Viererimpulse:

$$P_e = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad P_p = \begin{pmatrix} M_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad P'_e = \begin{pmatrix} E' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} \quad P'_x = \begin{pmatrix} E'_x \\ \vec{p}'_x \end{pmatrix}$$

Anhand des Energieerhaltungssatzes lässt sich der Energieübertrag  $\nu = E' - E = M_p - E'_x$  definieren.

Wir betrachten nun den Impulsübertrag des Elektrons in Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$

$$\begin{aligned} q_e^2 &= (P_e - P'_e)^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = E^2 - \vec{p}^2 + E'^2 - \vec{p}'^2 - 2EE' + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos(\theta) \\ &= 2m_e^2 - 2\sqrt{m_e^2 + \vec{p}^2}\sqrt{m_e^2 + \vec{p}'^2} + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos(\theta) \stackrel{m_e \text{ klein}}{\approx} -2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos(\theta)) \\ &= -4|\vec{p}||\vec{p}'|\sin^2(\theta/2) < 0 \end{aligned}$$

Somit ist der Impulsübertrag des Elektrons  $\vec{q}_e$  ortsartig. Wir verfahren nun analog mit dem Impulsübertrag des Protons.

$$q_p^2 = (E'_x - M_p)^2 - |\vec{p}'_x|^2 = M_x^2 + M_p^2 - 2M_p E_x$$

Mit dem Energieerhaltungssatz folgt

$$\begin{aligned} E + M_p &= E' + E'_x \\ E - E' &= E'_x - M_p = \nu \end{aligned}$$

Wir halten damit fest:

$$q^2 = M_x^2 + M_p^2 - 2M_p(M_p + \nu) = M_x^2 - M_p^2 - 2M_p\nu \quad (7.47)$$

Wir können also anhand des Energieübertrages die Konstituentenmasse  $M_x$  berechnen.

### 7.5.1 Charakterisierung des Stoßes

Mit  $q^2$  und  $\nu = \frac{M_x^2 - M_p^2 - q^2}{2M_p}$  lässt sich die Elastizität des Stoßes über die Björken'sche Skalenvariable  $x$  charakterisieren:

$$x := \frac{-q^2}{2M_p\nu} \in \left[ \begin{matrix} inelastisch \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} elastisch \\ 1 \end{matrix} \right] \quad (7.48)$$

## 7.6 Tiefinelastische Streuung

von Söni & Martina

Nun wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie die Struktur innerhalb eines Kernes aussieht. Für Energien groß genug dringen die Streuteilchen in den Kern ein. Somit lässt sich die tiefinelastische Streuung als elastische Streuung an **Partonen** = "Konstituenten des Nukleus" beschreiben.

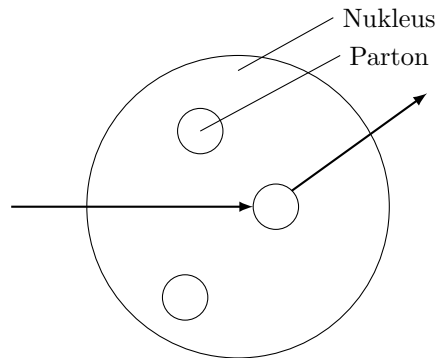


Abbildung 7.4. Schema der elastischen Streuung an Partonen

Bei festen  $q^2$  und  $\nu$  kann  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$  auf der X-Achse und  $2W_1(q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} + W_2(q^2, \nu)$  auf der Y-Achse aufgetragen werden. Daraus lässt sich folgender Zusammenhang schreiben:

$$y(x) = 2W_1x + W_2 \quad (7.49)$$

Wir wollen aus Messungen die dimensionslosen Strukturfunktionen  $F$  bestimmen:

$$F_1(x, q^2) = Mc^2 W_1(q^2, \nu) \quad (7.50)$$

$$F_2(x, q^2) = \nu W_2(q^2, \nu) \quad (7.51)$$

wobei  $\nu$  den Energieübertrag (da inelastische Streuung; bei elastischer Streuung nur Impulsübertrag) und  $x$  die Bjorken'sche SkalenvARIABLE (Inelastizität der Streuung) beschreiben.  $x$  ist definiert durch:

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad (7.52)$$

### 7.6.1 Wirkungsquerschnitt

Für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2)d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E\nu} \left( F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2\nu}{M} F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7.53)$$

Mit den Beziehungen  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \frac{q^2}{\Delta EE'}$ ,  $\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dx}{x}$  und  $y = \frac{\nu}{E}$  (relativer Energieübertrag) folgt:

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2)dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left( (1-y) \frac{F_2}{x} + y^2 F_2 \right) \quad (7.54)$$

### 7.6.2 Quasielastische Streuung an punktförmigen Teilchen

Bei der quasielastischen Streuung an punktförmigen Teilchen hängen  $F_1$  und  $F_2$  nicht von  $q^2$  ab, da die Formfaktoren bei punktförmiger Ladungsverteilung konstant sind.

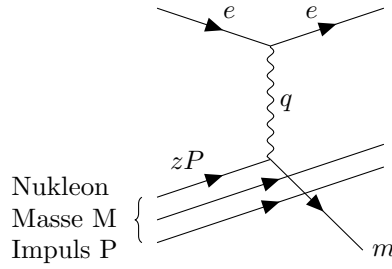


Abbildung 7.5. Schema der quasielastischen Streuung an Partonen.  $m$  ist die invariante Masse des Partons,  $q$  der 4er-Impulsübertrag

Im Bezugssystem, in dem der Impuls des Protons (Nukleons)  $P \rightarrow \infty$ , gilt:

Proton	Parton
$P$	$zP$
$E$	$zE$

wobei  $z \in [0, 1)$  ein Lorentzskalar ist. Dann folgt für die invariante Masse des Partons

$$m^2 = (zP + q)^2 = \underbrace{z^2 P^2}_{m^2} + q^2 + 2zPq \quad (7.55)$$

woraus sich für  $z$  Folgendes ergibt

$$z = -\frac{q^2}{2Pq} \quad (7.56)$$

wobei hier  $P$  den 4er-Impuls und  $q$  den 4er-Impulsübertrag darstellt. Um 7.55 besser zu verstehen, betrachten wir nun die 4er-Impulserhaltung und  $P \rightarrow \infty$ :

$$I : P_e + zP = P_I \quad (7.57)$$

$$II : P'_e + zP + q = P_{II} \quad (7.58)$$

Hier beschreiben  $P_e$  und  $P'_e$  die (4er-)Impulse des Elektrons vor und nach der Streuung und  $zP$  den Anteil des Gesamtimpulses  $P$  den das Parton besitzt. Aus der 4er-Impulsquadraterhaltung und  $P^2 = \langle P, P \rangle = m^2$  folgt

$$P_I^2 = P_{II}^2 \stackrel{!}{=} m^2 \quad (7.59)$$

Setzen wir nun die Gleichungen 7.57 und 7.58 ein:

$$(P_e + zP)^2 = (P'_e + zP + q)^2 \stackrel{!}{=} m^2$$

Mit der Bedingung  $P \rightarrow \infty$  sind

$$P_e, P'_e, q \ll P$$

und somit

$$(zP)^2 = (zP)^2 \stackrel{!}{=} m^2$$

Das 4er-Impulsquadrat ist außerdem

$$P^2 = \begin{pmatrix} E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}^2 \quad (7.60)$$

$$= m^2 + |\vec{p}|^2 - \underbrace{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}_{\text{Minkowski}} \quad (7.61)$$

$$= m^2 + |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 \quad (7.62)$$

$$= m^2 \quad (7.63)$$

was zu zeigen war.

$$(7.64)$$

Hier sieht man sehr schön, dass Gesamtviererimpulsquadrate in abgeschlossenen Systemen **lorentzinvariant** und **erhalten** sind.

Da  $z$  ein Lorentzskalar ist, ist das Bezugssystem beliebig:

$$P = (M, \vec{0}) \text{ und } q = (\nu, \vec{q}) \text{ und somit } Pq = M\nu$$

Daraus folgt nun wiederum

$$z = x = -\frac{q^2}{2M\nu} \quad (7.65)$$

Ein Photon mit  $x$  wird von einem Parton mit Impulsanteil  $x = z$  absorbiert. Im Laborsystem gilt:

$$z = x = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{2m\nu}{2M\nu} = \frac{m}{M} \quad (7.66)$$

Durch den Vergleich der Wirkungsquerschnitte von elastischer und inelastischer Streuung von Spin  $1/2$ -Teilchen folgt

für die elastische Streuung:

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left( \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{q^2}{2m^2} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \quad (7.67)$$

und für die inelastische Streuung:

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2)dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left( F_2(x) \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{q^2}{2M^2x^2} 2xF_1(x) \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \frac{1}{x} \quad (7.68)$$

Aus Koeffizientenvergleich folgt:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (7.69)$$

mit der Wahrscheinlichkeit  $f_i(x)dx$ , das Parton  $i$  mit der Ladung  $e_i$  im Impulsintervall  $[x, x+dx]$  anzutreffen. Überdies folgt aus dem Koeffizientenvergleich auch:

$$\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)} = 1 \quad (7.70)$$

Bei großen  $q^2$ -Werten ist  $F_2$  doch von  $q^2$  abhängig, da das Modell die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen vernachlässigt (z.B. Streuung an Seequarks).

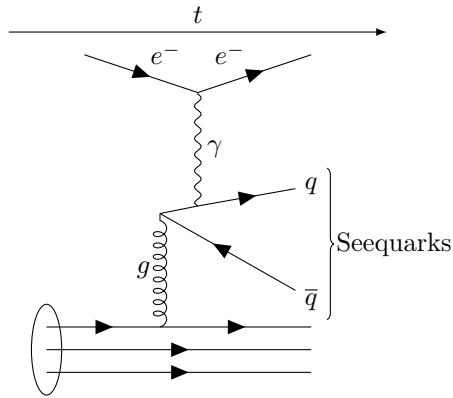


Abbildung 7.6. Feynman-Diagramm der Streuung eines Elektrons an einem Seequark

Die angepasste  $F_2$  ist dann

$$F_2 = \sum_{a=u,d,s} e_a^2 x f_a(x) + \underbrace{e_a^2 x f_{\bar{a}}(x)}_{\text{Antiquarks}} \quad (7.71)$$

Verteilung von Quark/Antiquark-Verteilung mit Elektron- oder Myonstreuung nicht möglich, daher wird Neutrino-Nukleon-Streuung verwendet.

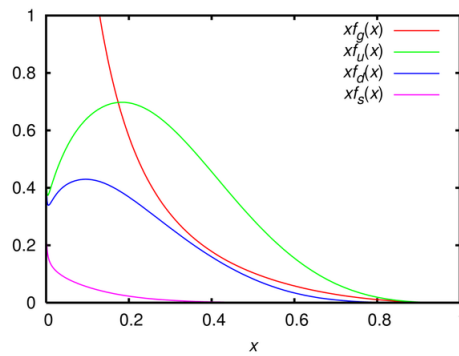


Abbildung 7.7. Quark-Antiquark Verteilung. Für hohe  $q^2$  verschiebt sich der Valenzquarkanteil (blau) nach links.

Aus der Neutrino-Nukleon-Streuung lernt man, dass im Bereich mit dominantem

Valenzquarkanteil ( $x > 0.3$ ) gilt:

$$\frac{F_2^{\text{ep}} + F_2^{\text{en}}}{F_2^{\nu\text{p}} + F_2^{\nu\text{n}}} = \frac{e_u^2 + e_d^2}{2} = \frac{5}{18} \quad (7.72)$$

Daran erkennt man natürlich sofort, dass Partonen  $1/3$ -wertige Ladungen besitzen, wodurch man Partonen als Quarks identifizieren kann.



# 8 Starke Wechselwirkung und Quarkstruktur von Hadronen

von Anton, HeinStein, Martina & HerMitsch

## 8.0.1 zur Erinnerung

Es existieren 6 Quarks, 6 Antiquarks. Diese

- können nicht alleine existieren (Confinement-Hypothese).
- 3 Quarks bilden ein Baryon
- 2 Quarks ein Meson
- Quarks/Antiquarks besitzen 3 mögliche Farbladungen/Antifarbladungen:  $r, g, b$  und  $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$

- Gluonen tragen 2 Farbladungen. Die möglichen Kombinationen sind:

$$r\bar{b}, b\bar{r} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (r\bar{r} - g\bar{g})$$

$$r\bar{g}, g\bar{r} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

$$b\bar{g}, g\bar{b} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \quad (\text{wobei diese Kombination neutral ist, also sozusagen nicht zählt.})$$

Gluonen **tauschen** die Farbladungen von Quarks:

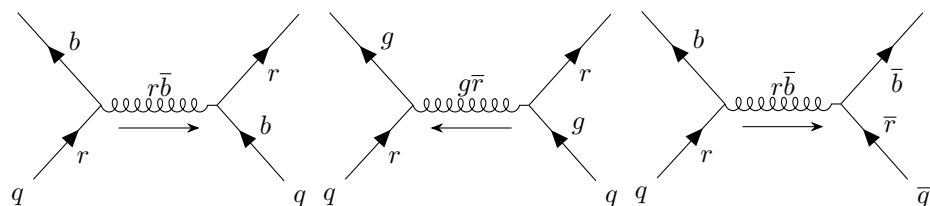


Abbildung 8.1. Feynman-Diagramme des Farbladungsaustausches 2er Quarks (bzw. eines Quarks und Antiquarks)

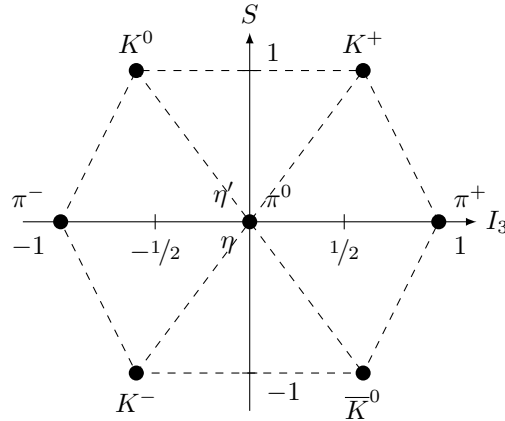
## 8.1 Mesonen

9 Kombinationen für Mesonen.  $u, s, d$ -Quarks als **pseudoskalare Mesonen**:

Meson	Quark-Kombination	$I$	$I_3$	$S$	Masse/MeV
$\pi^-$	$d\bar{u}$	1	-1	0	140
$\pi^+$	$u\bar{d}$	1	1	0	140
$\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	1	0	0	135
$K^+$	$u\bar{s}$	$1/2$	$1/2$	+1	494
$K^0$	$d\bar{s}$	$1/2$	$-1/2$	+1	498
$K^-$	$s\bar{u}$	$1/2$	$-1/2$	-1	494
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	$1/2$	$1/2$	-1	498
$\eta$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} + 2s\bar{s})$	0	0	0	549
$\eta'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$	0	0	0	958

Tabelle 8.1. Pseudoskalare Mesonen

Lässt man  $S$  und  $I_3$  eine Ebene aufspannen, bilden die Mesonen dort 9 Punkte, wobei  $\pi^0$ ,  $\eta$  und  $\eta'$  im Ursprung liegen:



$u, s, d$ -Quarks sind die leichtesten Quarks und erzeugen die leichtesten Mesonen. Pseudoskalare Mesonen haben  $J = 0$ , Vektormesonen haben  $J = 1$ . Vektormesonen bestehen aus den gleichen Quarks, haben aber gleichgerichteten Spin. Da

dies einem angeregten Zustand gleichkommt und eine höhere Energie bedeutet, haben Vektormesonen eine höhere Masse.

Anschaulich:

$$\rho\text{-Meson: } |u\bar{d}\rangle \rightarrow M = 775 \text{ MeV}$$

$$\omega\text{-Meson: } \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \rightarrow M = 793 \text{ MeV}$$

Diese beiden Mesonen sind sehr ähnlich.

### Beispiel

Meson	Zusammensetzung	Masse
Analog zu $\pi^+$ : $\rho$ -Meson	$u\bar{d}$	775 MeV
Analog zu $K^+$ : $K^{*+}$ -Meson	$u\bar{s}$	891 MeV

Vektormesonen haben eine sehr kurze Lebensdauer und zerfallen in mehrere Skalarmesonen.

## 8.2 Baryonen

Baryonen bestehen aus 3 Quarks, ihr Spin ist halbzahlig  $\rightarrow$  Fermionen

Da es das leichteste Teilchen ist, ist das Proton das einzige stabile Baryon.

Da die Quarks jeweils Spin  $1/2$  haben, können sie zu Gesamtspin  $J = 1/2$  oder  $J = 3/2$  koppeln.

### 8.2.1 Das Baryon-Oktett ( $J = 1/2$ )

Mit den "ursprünglichen" drei Quarks  $u, d, s$  kann man 8 Baryonen kombinieren. Mit  $u$  und  $d$  lassen sich das Proton  $uud$  und das Neutron  $udd$  bilden. Die Kombinationen  $uuu$  und  $ddd$  sind aufgrund des Pauli-Prinzipes verboten.

Die Iso-Spins der beiden koppeln jeweils zu  $\pm 1/2$ , da  $u$  den Iso-Spin  $I_3 = 1/2$  und  $d$  den Iso-Spin  $I_3 = -1/3$  besitzen.

### 8.2.2 Das Baryon-Dekuplett ( $J = 3/2$ )

Lässt sich analog zum Oktett erklären, allerdings sind nun auch symmetrische Quark-Kombinationen möglich, z.B.  $\Delta^{++}$  mit der Kombination  $uuu$ .

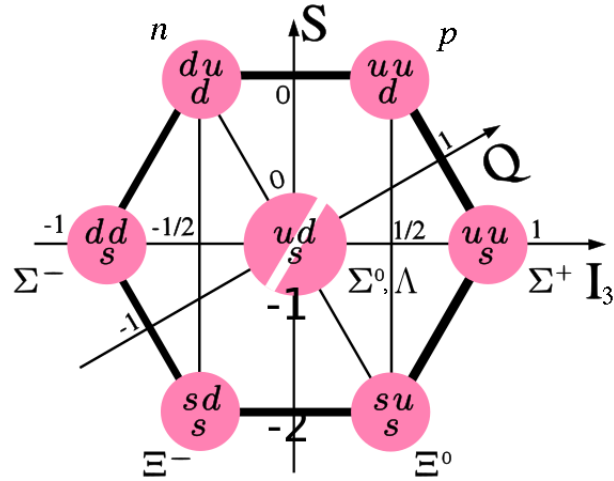


Abbildung 8.2. Baryon-Oktett

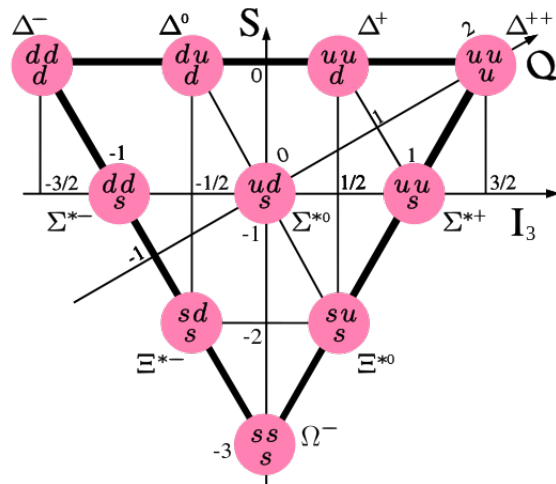


Abbildung 8.3. Baryon-Dekuplett

Die Wellenfunktion eines Baryons hat Anteile im Orts-, Spin-, und Iso-Spinraum:

- Ortswellenfunktion ist für  $\Delta^{++}$  symmetrisch, da die 3 up-Quarks ununterscheidbar sind

- Da alle 3 Spins zu  $3/2$  koppeln, sind auch diese symmetrisch
- Analog gilt dies für die Iso-Spin-Wellenfunktion

→ Die Gesamtwellenfunktion ist also symmetrisch

Fermionen müssen aber **antisymmetrische** Wellenfunktionen haben! Daher muss für Quarks noch eine weitere Quantenzahl postuliert werden; die **Farbe**.

Konstruktion von 3 Farben:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} u_i u_j u_k \quad (8.1)$$

Theoretische Vorhersagen unter Berücksichtigung der Farbladungen beschreiben die experimentellen Ergebnisse sehr genau. Die theoretischen Vorhersagen stimmen über 6 Zehnerpotenzen mit den experimentellen Befundnissen überein.

### 8.3 Erschließung der Farbladung

Nun wollen wir die Farbladung etwas genauer betrachten.

Baryonen besitzen 3 Valenzquarks und Gesamtdrehimpuls  $1/2$  oder  $3/2$ . Die Gesamtwellenfunktion setzt sich zusammen aus:

$$\psi_{\text{ges}}(1, 2, 3) = \underbrace{\psi_r(1, 2, 3)}_{\text{räumlich}} \cdot \underbrace{\chi_s(1, 2, 3)}_{\text{Spin}} \cdot \underbrace{\varphi_f(1, 2, 3)}_{\text{Flavour}} \quad (8.2)$$

Wie vorher schon genannt, können wir dennoch Baryonen beobachten, die aus der  $uuu$ -Kombination bestehen. Also  $\exists$  Baryon ( $uuu$ ) mit Spin  $S = 3/2$  und  $L = 0$  [ $\Delta^{++}(1232)$ ].

Dies ergibt aber eine symmetrische Wellenfunktion! Es muss also noch einen Wellenfunktionsanteil geben, sodass die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch ist. Dazu führen wir den Farbladungsanteil  $\varphi_c$  ein.

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{r,g,b} \varepsilon_{rgb} u_r u_g u_b \quad (8.3)$$

### 8.3.1 Anzahl der Farben

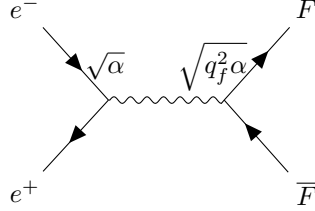


Abbildung 8.4. Die rechte Seite des Feynman-Diagramms stellt die Hadronisierung dar. Hierbei sind  $F$ ,  $\bar{F}$  beliebige Quarks.  $q_f$  ist die elektrische Ladung des Flavours  $f$

Für Myonenerzeugung ist  $q_\mu = \pm 1$ . Somit erhalten wir

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{3S} \quad (8.4)$$

wobei hier  $\sqrt{S} = q^2$  und  $q$  der Vierer-Impulsübertrag ist.  
Also gilt für  $u$ -Quarks

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow uu) = \sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u}) \cdot q_u^2 \cdot N_{\text{Farbe}} \quad (8.5)$$

womit wir die Größe  $R$  definieren können:

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u})} = N_{\text{Farbe}} \sum_f q_f^2 \quad (8.6)$$

$N_{\text{Farbe}}$  wird auch die **Multiplizität** der Farbe genannt.

$\sqrt{S}$	Schwelle	$R$
$\leq 2 \cdot 494 \text{ MeV}$	$K^+ K^-$	$3(4/9 + 1/3) = 5/2$
bis 3729 MeV	$D\bar{D}$ (aus c-Quark)	2
bis 10.6 GeV	$B\bar{B}$ (b-Quark)	$10/3$
oberhalb	(alle außer t-Quark (erst ab $\approx 30 \text{ GeV}$ ))	$11/3$

## 8.4 Jets

Woher wissen wir nun, dass es Gluonen gibt? Quarks können aufgrund der Confinement-Hypothese nicht allein existieren. Da Quarks und Gluonen in gebundenen Zuständen existieren, ist es sehr schwer, Gluonen nachzuweisen. Versucht man, zwei Quarks zu trennen, wird ihnen dabei so viel Energie zugeführt, dass sich daraus sofort ein neues Quark-Antiquark-Paar bildet, bevor sich die ursprünglichen Quarks trennen lassen. Bei einer  $e^-e^+$ -Kollision entsteht genug Energie, sodass dieser Prozess gleich mehrfach abläuft:

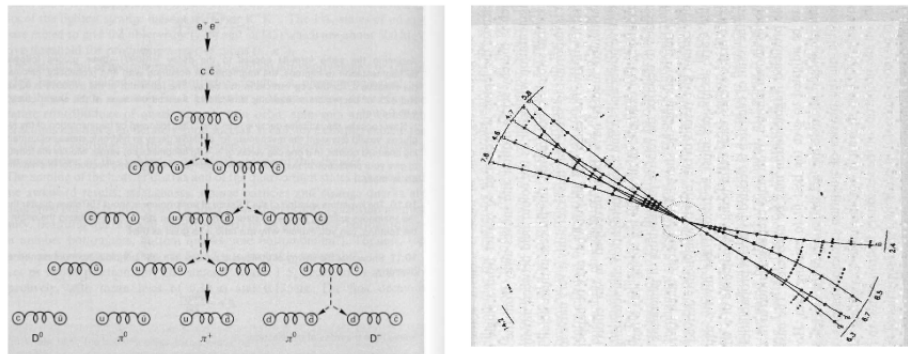


Abbildung 8.5. Links: Prinzip des Prozesses. Rechts: Hadronen-Jets im Experiment

Da auf diese Art viele Hadronen in zwei Vorzugsrichtungen "sprengen", nennt man dies **Hadronen-Jets**. Ein typisches 2-Jet-Ereignis ist  $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$ . Man ging davon aus, dass ähnlich wie bei der Elektronenbremsstrahlung bei genügend hoher Energie Gluonen von den Quarks abgestrahlt werden können, welches ebenfalls einen Jet erzeugt. Somit müsste man manchmal auch einen dritten Jet beobachten, was 1979 am DESY festgestellt wurde. Diese 3-Jet-Ereignisse treten etwa 10 mal seltener auf, als die 2-Jet-Ereignisse.

## 8.5 Trivia

Neben Mesonen und Baryonen gibt es mehr Hadronen:

- Tetraquarks: Hypothetische Teilchen aus 2 Quarks und 2 Antiquarks
- Pentaquarks: Teilchen aus 3 Quarks und einem Quark-Antiquark-Paar. (2015 erstmals am LHC gemessen!)

- Gluebälle: Hypothetische Teilchen aus null Valenzquarks, sondern nur Gluonen und Seequarks.
- Quark–Gluonen–Plasma: besteht aus vielen Quarks, die Dynamik ähnelt einer Flüssigkeit. Durch hohe Dichte ist die Confinement–Hypothese quasi aufgehoben. Allerdings fehlt eine genaue theoretische Beschreibung bisher leider.



## 9 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

von HerMitsch und Søni

Als Symmetrie bezeichnet man eine Invarianz von Zuständen oder physikalischen Gesetzen (Bewegungsgleichungen) unter Symmetrietransformationen. Beispiele hierfür sind:

- Bewegungsgl. im Zentralfeld invariant unter Rotation
- Relativistische Bewegungsgl. invariant unter Lorentztransformation
- Schrödingergl. invariant unter Phasentransformation

In diesem Zusammenhang wurde von Emmy Noether das folgende Theorem entwickelt:

Noether-Theorem

Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße.  
Zu jeder Erhaltungsgröße existiert eine Symmetrietransformation

Wir betrachten die zeitliche Veränderung des Erwartungswerts einer Observablen (repräsentiert durch den Operator  $O$ ) in einem System mit dem Hamiltonian  $H$ . Falls der Operator  $O$  zeitunabhängig ist gilt:

$$\partial_t \langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [O, H] \rangle \quad (9.1)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \hat{O} \rangle &= \partial_t \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \partial_t \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{O} | \partial_t \psi(t) \rangle \\ &\stackrel{SGL}{=} \langle \partial_t \psi | = (|\psi\rangle)^\dagger - \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H \hat{O} | \psi(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{O} H | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | [O, H] | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass eine Observable  $O$  eine Erhaltungsgröße ist, falls  $[H, O] = 0$ . In diesem Fall gibt es erhaltene Quantenzahlen.

## 9.1 Symmetrietransformation

Eine Symmetrietransformation  $U$  ist eine umkehrbare, simultane (wirkt auf alle Vektoren des Raums), eindeutige Abbildung der Zustände und Operatoren, die alle physikalischen Aussagen des Systems unverändert lässt.

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad (9.2)$$

$$\hat{O} \mapsto \hat{O}' = U \hat{O} U^\dagger \quad (9.3)$$

- Falls  $U$  unitär ist d.h.  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ , ist die Norm des Zustands  $|\psi\rangle$  erhalten.
- Eigenvektoren des Operators  $O$  mit reellem Eigenwert  $o$  sind auch Eigenvektoren des Operators  $O'$  mit Eigenwert  $o$ .

$$\hat{O}' |\psi'\rangle = U \hat{O}' U^\dagger U |\psi\rangle = U \hat{O} |\psi\rangle = U o |\psi\rangle = o |\psi'\rangle \quad (9.4)$$

- $[U, H] = 0 \iff U |\psi\rangle$  erfüllt SGL.

Wir suchen also im folgenden unitäre Transformationen  $U$  die mit dem Hamiltonian  $H$  kommutieren. Hierfür betrachten wir im folgenden zwei Fälle:

### 9.1.1 Diskrete Transformation, $U$ hermitesch

Wählen wir die Observable selbst als Transformation  $U = O$  so ist Hermitizität gewährleistet, d.h.  $\langle O \rangle = \langle O \rangle^*$

Da die Definitionsbereiche von  $O$  und  $O^\dagger$  übereinstimmen folgt hieraus dass  $O = O^\dagger$

Kombinieren wir dies mit der Unitaritätsbedingung so erhalten wir

$$O^2 = O O^\dagger = \mathbb{1} \quad (9.5)$$

Da wir  $[U, H] = [O, H] = 0$  fordern, existiert eine gemeinsame Eigenvektorbasis von  $O$  und  $H$  deren Elemente  $|\psi\rangle$  wir im folgenden betrachten. Wir können an dieser Stelle 2 wichtige Folgerungen ziehen:

1.  $O^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle = o^2 |\psi\rangle \longrightarrow o = \pm 1$
2.  $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{O}^\dagger | \hat{O} | \hat{O}^\dagger | \psi' \rangle = \langle \psi' | \hat{O} \hat{O} \hat{O}^\dagger | \psi' \rangle = \langle \psi' | \hat{O} | \psi' \rangle$

Bei  $U = O$  handelt es sich um eine **diskrete Transformation**, das heißt, dass nur eine diskrete Verschiebung der Variable generiert werden kann. Beispiele für diskrete Transformationen sind

- Translation um eine Gitterkonstante bei einem kubischen Gitterkristall

- Paritätstransformation (mehr dazu später)
- Raumspiegelung, Zeitspiegelung
- Ladungskonjugation

### Erinnerung Produktzustände

Betrachtet man Zustände aus verschiedenen Hilberträumen  $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$  so kann man diese über das Tensorprodukt koppeln zu einem Produktzustand:

$$(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \mapsto \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i \in \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (9.6)$$

Wir fragen uns nun wie Operatoren die auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}_j$  definiert sind auf Zustände aus diesem Tensorprodukt wirken. Man definiert die Operation auf dem Produktraum wie folgt

$$O \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i = O |\psi\rangle_j \prod_{j \neq i} |\psi\rangle_i \quad (9.7)$$

Betrachten wir einen Produktzustand  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2$  (z.B. 2 Teilchen), wobei  $|\psi\rangle_{1,2}$  Eigenzustände zur Observablen  $O$  sind, und transformieren diesen Zustand mit unserer simultanen Symmetrietransformation  $U=O$ , so wirkt diese Transformation sowohl auf  $|\psi\rangle_1$  als auch  $|\psi\rangle_2$  da sie simultan ist.

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle = O |\psi\rangle_1 O |\psi\rangle_2 = o_1 |\psi\rangle_1 o_2 |\psi\rangle_2 = o_{ges} |\psi\rangle \quad (9.8)$$

Dies lässt sich für einen Produktzustand aus  $N$  Hilberträumen  $|\psi\rangle = \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i$  induktiv fortführen. Identifiziert man jeden Eigenwert  $o_i$  eines Eigenzustands  $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$  mit einer Quantenzahl  $n_i$  so erhält man eine **multiplikative Erhaltungsgröße  $n$**  als Produkt der Quantenzahlen  $n = \prod_{i=1}^N n_i$ .

### 9.1.2 Kontinuierliche Transformation, $U$ nicht hermitesch

Falls  $U$  nicht hermitesch ist, kann es einen hermiteschen Operator (Generator)  $\hat{O}$  geben, sodass

$$U = \mathbb{1} + i\epsilon\hat{O} \quad (9.9)$$

$O$  kann hier auch wieder eine Observable sein, die per Definition die Hermitizitätsbedingung erfüllt. Diese Transformation  $U$  erfüllt außerdem unsere Unitaritätsbedingung wie man wie folgt sieht:

$$U^\dagger U = (\mathbb{1} - i\epsilon\hat{O}^\dagger)(\mathbb{1} + i\epsilon\hat{O}) = 1 + i\epsilon \underbrace{(\hat{O} - \hat{O}^\dagger)}_{=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbb{1} \quad (9.10)$$

Da auch hier  $[U, H] = 0$  gefordert wird folgt  $[O, H] = 0$ . Es existiert also auch hier eine gemeinsame Basis von Eigenvektoren von  $H$  und  $O$  und da auch  $[U, O] = 0$  gilt folgt:

$$\hat{O}' = U\hat{O}U^\dagger = UU^\dagger\hat{O} = \hat{O} \quad (9.11)$$

Wir schließen daraus, dass die Erwartungswerte von  $O$  unter dieser Symmetrietransformation erhalten bleiben.

Man kann eine finite Transformation um  $\Delta$  als n-fache Serie von infinitesimal kleinen Transformation um  $\epsilon$  darstellen mit

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n \cdot \epsilon \quad (9.12)$$

Wir erhalten als finite Symmetrietransformation  $U$  um  $\Delta$

$$U(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + i \underbrace{\frac{\Delta}{n}}_{\epsilon} \right)^n = e^{i\Delta\hat{O}} \quad (9.13)$$

Analog zur diskreten Transformation betrachten wir wieder einen Produktzustand aus 2 Eigenzuständen von  $O$  (z.B. 2 Teilchen)  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  und lassen unsere Symmetrietransformation auf diesen Zustand wirken.

$$U|\psi\rangle = U|\psi\rangle_1 U|\psi\rangle_2 = e^{i\Delta(\hat{O}_1 + \hat{O}_2)} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \quad (9.14)$$

Wobei  $\hat{O}_i = \hat{O}|_{\mathcal{H}_i}$

Identifizieren wir wieder zu jedem Eigenzustand  $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$  mit Eigenwert  $o_i$  bezüglich der Observablen  $\hat{O}_i$  eine Quantenzahl  $n_i$  so bekommen wir eine **additive Erhaltungsgröße  $n$**  als Summe der Quantenzahlen  $n = \sum_i n_i$

Beispiele für kontinuierliche Symmetrietransformationen sind:

- Infinitesimale Raumtranslationen, Infinitesimale Rotationen
- Zeitentwicklungen, die die Schrödinger-Gleichung unverändert lassen

## 9.2 Beispiele

### 9.2.1 Ladungserhaltung

In der Elektrodynamik ist die Ladungserhaltung verbunden mit einer Eichinvarianz der elektromagnetischen Potentiale  $\phi$  und  $A$  unter einer Eichtransformation

über das Differential eines Skalarfelds  $\chi(\vec{x}, t)$

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (9.15)$$

$$A \mapsto A' = A + \nabla \chi \quad (9.16)$$

In der Quantenmechanik entspricht diese Eichinvarianz einer Phasenverschiebung des Zustands  $|\psi\rangle$  um einen Phasenfaktor  $e^{i\chi}$

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\chi} \psi \quad (9.17)$$

Diese Symmetrietransformation ist möglich, dass es sich bei der Elektrodynamik um eine renormierbare Feldtheorie handelt. Die Potentiale sind langreichweitig, sodass die zur Theorie gekoppelte Größe - die Ladung - erhalten ist.

### 9.2.2 Baryonenzahl

- (Anti)-Quarks: Baryonenzahl  $A = \pm \frac{1}{3}$
- (Anti)-Baryonen:  $A = \pm 1$
- Mesonen:  $A = 0$

Nach der Großen vereinheitlichten Theorie (GUT) ist die Baryonenzahl keine exakte Erhaltungsgröße, so dass Protonen mit der Zeit zerfallen, allerdings mit einer sehr großen Halbwertszeit ( $\tau(p \rightarrow e^+ + \pi^0) > 10^{33} a$ ). Falls die Baryonenzahl als Folge einer lokalen Eichinvarianz erhalten sein sollte, erwarte wir damit verbunden ein koppelndes langreichweitiges Feld. Es gibt keine experimentelle Evidenz für ein solches Feld. Ein Baryonenkoppelfeld würde das Verhältnis von gravitativer Masse zu träger Masse verändern, dafür gibt es jedoch keinen Hinweis  $\frac{\Delta R}{R} < 10^{-12}$ .

### 9.2.3 Leptonenzahl

Für Leptonen ( $e^-, \mu^-, \tau^-$ ) ist die Leptonenzahl  $L = \pm 1$ . Diese Zahl ist für jede Generation konstant, wenn man Neutrinooszillationen herausnimmt. Hierbei taucht die Frage auf ob Neutrino und Antineutrino verschieden sind, welcher wir bald auf den Grund gehen werden.