

Ex IV
Boykott–Gruppenseminar
Kern– & Teilchenphysik

no Fabs
were given

$\overline{\text{Chris}}$

Mi χ

Pauli

Anton

Søni

HeinStein

mARTina

HerMitsch

10. Juli 2016

*Im Anfang war das Wort... oder der Sinn? Nein, es hieß: Im
Anfang war die Kraft! Oder war es doch die Tat? Äh Moment...
wie ging das nochmal? Ach verdammt, ich kann mir diese
Sprüche immer so schlecht merken.*

— Paul A.M. Dirac

Am Anfang war das Experiment.

— Yvonne L.

Dieses Skript ist entstanden in einem gemeinsamen Experiment, die Inhalte der Vorlesung von Frau Prof. Stachel im Sommersemester 2016 an der Uni Heidelberg selbstständig zu erarbeiten. An zusätzlichen Ressourcen wurden vor allem die Demtröder-Bände und Wikipedia (genauer: das Internet) herangezogen, ohne diese explizit anzugeben.

Über unsere Seminargruppe hinaus ist dieses Skript für alle Menschen gedacht, die an den Inhalten Interesse haben und/oder eine ähnliche Vorlesung besuchen.

Für Fehler, Anregungen, gute Witze, liebe Grüße, Danksagungen, Spenden und Kolloquiumseinladungen bitte ein formloses Schreiben an:

spamfilter@akreuzkamp.de

Inhaltsverzeichnis

1	Wichtige Erkenntnisse der Atom- & Quantenphysik (Ex III)	6
1.1	Notation der Quantenzahlen	6
1.2	Korrekturterme der Energieniveaus	7
1.3	Näherungen für mehrere Elektronen	7
1.4	Das Pauli-Prinzip	8
2	Ex IV – Atomphysik	9
2.1	Spektroskopische Notation	10
2.2	Hund'sche Regeln und Auswahlregeln	11
2.3	Vielelektronenprobleme	12
2.4	Moseley'sches-Gesetz	13
2.5	LS-Kopplung, jj-Kopplung	14
2.5.1	LS-Kopplung	14
2.5.2	jj-Kopplung	16
2.6	Clebsch-Gordan Koeffizienten (ein kleiner Ausflug...)	17
2.6.1	Physikalische Interpretation der CGK	19
2.6.2	Anleitung zum Lesen der Tabellen	19
2.6.3	Anmerkungen	20
3	Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik	21
3.1	Zerfallsgesetz	21
3.2	Fermis Goldene Regel	22
3.3	Wirkungsquerschnitt	24
3.4	Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen	26
3.4.1	Regeln	26
3.4.2	Erhaltungsgrößen (in nachfolgenden Kapiteln präzisiert)	27
3.4.3	Beispiele	28
3.4.4	Feynman-Kalkül	29
4	Teilchendetektoren	30
4.1	Impulsmessung	30
4.1.1	Gasdetektor	30
4.1.2	Proportionalzählrohr	31
4.1.3	Halbleiterzähler	32
4.1.4	Szintillationszähler	32

4.2	Energiemessung	32
4.2.1	Hadronischer Schauer	32
4.2.2	Messung von Photonen	32
4.3	Teilchenidentifikation	33
5	Wechselwirkung von Teilchen und Strahlung mit Materie	34
5.1	Energieverlust von geladenen schweren Teilchen	35
5.2	Energieverlust von Elektronen	35
5.2.1	Anregung und Ionisation	35
5.2.2	Bremsstrahlung	36
5.3	Wechselwirkung von radioaktiver Strahlung mit Materie	37
5.3.1	α -Strahlung	37
5.3.2	β -Strahlung	38
5.3.3	γ -Strahlung	38
5.3.3.1	Rayleigh-Streuung & Thomson-Streuung	39
5.3.3.2	Gemeinsamkeiten	39
5.3.3.3	Unterschied	39
5.3.3.4	Compton-Effekt	40
5.3.3.5	Photoeffekt	40
5.3.3.6	Paarbildung	41
5.3.3.7	Photoeffekt vs. Comptoneffekt vs. Paarbildung	41
6	Elementarteilchen-Zoo	44
6.1	Charakterisierung durch Wechselwirkung	44
6.1.1	Masse	44
6.1.2	Spin	46
6.1.3	Klassifizierung anhand Wechselwirkung	46
6.1.3.1	Elektromagnetische Wechselwirkung	47
6.1.3.2	Schwache Wechselwirkung	47
6.1.3.3	Starke Wechselwirkung	48
6.1.3.4	Wechselwirkung zwischen Quarks	49
6.2	Übersicht des Elementarteilchen-Zoos	51
6.2.1	Anmerkungen	51
6.3	Leptonen	52
6.4	Quarks	52
6.4.1	Flavour-Quantenzahlen I_3 , S , C , B , T	53
6.4.2	Farbladung	54
6.5	Zerfallsbreite	54
6.5.1	Lösungsansatz	55

7	Strukturinformation aus Streuexperimenten	57
7.1	Elastische Streuung	57
7.1.1	Rutherford-Streuung	57
7.1.2	Streuung relativistischer Spin $1/2$ -Teilchen an Punktladung Ze	59
7.1.3	Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung	60
7.2	Grundlagen zu Wirkungsquerschnitt, Streuung und der Rutherford- Versuch	60
7.2.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$	61
7.2.2	Rutherford-Querschnitt	61
7.2.3	Zusammenhang zw. Streu-/Raumwinkel und Impulsübertrag $ q $	61
7.2.4	Raumwinkel Ω	63
7.2.5	Differentieller Wirkungsquerschnitt Part II	63
7.2.6	Streuamplitude	63
7.3	Zwischenresumée	64
7.3.1	Differenzielle Wirkungsquerschnitte zur Teilchenformbe- stimmung	64
7.4	Struktur der Nukleonen	65
7.5	Elastische Stöße	67
7.5.1	Charakterisierung des Stoßes	69
7.6	Tiefinelastische Streuung	69
7.6.1	Wirkungsquerschnitt	70
7.6.2	Quasielastische Streuung an punktförmigen Teilchen	70
8	Starke Wechselwirkung und Quarkstruktur von Hadronen	75
8.0.1	zur Erinnerung	75
8.1	Mesonen	76
8.2	Baryonen	77
8.2.1	Das Baryon-Oktett ($J = 1/2$)	77
8.2.2	Das Baryon-Dekuplett ($J = 3/2$)	77
8.3	Erschließung der Farbladung	79
8.3.1	Anzahl der Farben	80
8.4	Jets	81
8.5	Trivia	81
9	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	83
9.1	Symmetrietransformation	84
9.1.1	Diskrete Transformation, U hermitesch	84
9.1.2	Kontinuierliche Transformation, U nicht hermitesch	85
9.2	Beispiele	86
9.2.1	Ladungserhaltung	86

9.2.2	Baryonenzahl	87
9.2.3	Leptonenzahl	87
9.3	Leptonenzahlerhaltung	87
9.4	Strangeness-Erhaltung	88
9.4.1	Isospin	89
9.4.2	Für Atomkerne	90
9.5	Isospin	90
9.5.1	Grundidee	90
9.5.2	Grafische Veranschaulichung der Analogie	91
9.5.3	Flavourquantenzahl	92
10	Multiplikative Erhaltungssätze	94
10.1	Parität	94
10.2	Anwendung auf die Teilchenphysik	97
10.3	Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung	99
10.3.1	Einleitung: das Wu-Experiment	99
10.3.2	Helizität	100
10.3.2.1	Eigenschaften	100
10.3.3	Chiralität	100
10.3.3.1	Eigenschaften	101
10.3.4	Ladungskonjugation (genannt C-Parität)	101
10.3.4.1	Eigenschaften	102
10.3.5	Zeitumkehrinvarianz, Zeitumkehroperator T	102
10.3.6	Elektrisches Dipolmoment von Elementarteilchen	103
10.3.7	CPT-Theorem	104
11	Bindungen & Anregungen von Atomkernen	105
11.1	Tröpfchenmodell	106
11.2	Fermigasmodell	108

1 Wichtige Erkenntnisse der Atom- & Quantenphysik (Ex III)

Von MiX & Pauli

Wir hatten die **Quantenmechanik** eingeführt:

Axiom 4 (aus Theo IV)

Es gilt die Schrödingergleichung:

$$\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \partial_t |\psi\rangle \quad (1.1)$$

wobei

$$\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

Diese hatten wir für das Wasserstoffatom (H-At.) **analytisch** gelöst. (Coulombpotential, Kugelkoordinaten, Separation: Schwerpunkt/Relativbew., Winkel-/Radialanteil). Die Lösungen sind Polynome mit ganzzahligen Parametern, "Quantenzahlen":

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot \Theta_l^{m_l}(\vartheta) \cdot \phi_{m_l}(\varphi)$$
$$\psi_{n,l,m_l} \propto e^{-\frac{Zr}{na_0}} \underbrace{L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \cdot P_l^{m_l}(\cos \vartheta)}_{\text{zugeordnete Laguerre- bzw. Legendrepolynome}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l \varphi}$$

wobei hier $Z = 1$ die Ladungszahl, und a_0 der Bohr'sche Atomradius ist.

Es gilt für physikalische Lösungen: $|m_l| \leq l < n$

1.1 Notation der Quantenzahlen

Hauptquantenzahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \{K, L, M, \dots\}$ "Schale"

Bahndrehimpulsquantenzahlen $l \in \{0, 1, 2, \dots\} = \{s, p, d, f, \dots\}$ "Unterschale"

Magnetbahnquantenzahlen $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ "Orbital" (zzgl. "Spin")

$$E(\psi_n) = E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

"Rydberg-Formel", mit $E_0 := Ry = 13.6 \text{ eV}$ und Z als Kernladungszahl.
Dem Übergang entspricht dann die Differenz $E_n - E_m$.

1.2 Korrekturterme der Energieniveaus

Die Energieniveaus (EN) werden korrigiert durch:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \underbrace{\Delta\hat{E}_{\text{rel}} + \Delta\hat{E}_{S-B}}_{\Sigma = \text{Feinstruktur } \Delta E_{FS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}} + \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} + \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} \\ \hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V} \\ \Delta\hat{E}_{\text{rel}} &= -\frac{\hat{p}^4}{8m_e^3 c^2} \\ \Delta\hat{E}_{S-B} &= \frac{Zq_e^2 \mu_0}{8\pi m_e^2 \langle r \rangle^3} \hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{Zq_e^2 \mu_0 \hbar^2}{16\pi m_e^2 \langle r \rangle^3} \cdot \begin{cases} l, & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1), & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \Delta\hat{E}_{FS} \stackrel{\text{H-At.}}{=} E_0 \frac{Z^2}{n^2} \left[\frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right] \\ \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}} &= \mu_0 \left(\frac{q_e \hbar}{m_e} \right)^2 Z \cdot \delta(\vec{r}) \text{ "Kernpotential"} \\ \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} &\hat{=} \text{quantenelektrodynamische Wechselwirkung (WW) mit dem Vakuum} \\ \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} &\propto \vec{J} \cdot \underbrace{\vec{I}}_{\text{"Kernspin"}} \\ \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} &= \frac{\mu}{\hbar} \left(\hat{L}_z + g_e \hat{S}_z \right) B_z \text{ "anomal", normal f\"ur } \hat{S}_z = 0, \quad g_e \approx 2, \quad \mu = \frac{q_e \hbar}{2m_e}\end{aligned}$$

1.3 Näherungen für mehrere Elektronen

Für mehrere Elektronen (e^-) müssen wir Näherungen machen, denn die $e^- - e^- - WW$ verhindert das analytische Lösen.

Helium (He):

1. $E_B = -Z^2 E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$ "Bindungsenergie" (negativ!)
2. $E_B = -E_0 \left(\frac{Z^2}{1^2} + \frac{(Z-1)^2}{n_2^2} \right)$ Abschirmung des $n_2 - e^-$
3. $E_B = -E_0 \left(-2Z_R^2 + (4Z - \frac{5}{4})Z_R \right)$ minimiere $E_B(Z_R)$
4. wahrer Wert $E_B \approx -79.0 \text{ eV}$

1.4 Das Pauli-Prinzip

Die relativistische Quantenmechanik fordert für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ [bzw. $0, 1, 2, \dots$] eine unter Teilchenvertauschung \hat{P}_{ij} antisymmetrische [bzw. symmetrische] **Gesamtwellenfunktion** $|\psi\rangle = |\psi_{\text{Ort}}\rangle \otimes |\chi_{\text{Spin}}\rangle$. Wir nennen diese Teilchen **Fermionen** [bzw. **Bosonen**]. Aus diesem Postulat folgt das

Pauli-Prinzip

Man kann nie mehr als ein Fermion im gleichen (Orts- & Spin-) Zustand haben.

Für zwei e^- (z.B. Helium) gilt daher:

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{symm.}} \Rightarrow \underbrace{|\chi_{-}\rangle}_{\text{antisymmetrisches Singulett } [2S+1=1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \hat{=} \underbrace{|S=0, M_S=0\rangle}_{\text{[Großbuchstaben } S, M_S, J, \dots \text{ sind Gesamtquantenzahlen, Summen]}}$$

Dies ist ein **antisymmetrisches Singulett** $[2S+1=1]$

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{antisym.}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\chi_{+}, 1\rangle &= |\uparrow_1 \uparrow_2\rangle \\ |\chi_{+}, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \\ |\chi_{+}, -1\rangle &= |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle \end{aligned} \right\} \hat{=} \begin{aligned} &|S=1, M_S=1\rangle \\ &|1, 0\rangle \\ &|1, -1\rangle \end{aligned}$$

$|\chi_{+}, \cdot\rangle$ ist ein **symmetrisches Triplett** $[2S+1=3]$.
 $2S+1$ heißt auch Multiplizität.

2 Ex IV – Atomphysik

Wer den Ursprung des einleitend falsch zugeordneten Zitats kennt, der wird sofort assoziieren, dass wir in dieser Vorlesung versuchen zu erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält. Wir wollen in der Kern- und Teilchenphysik die Struktur der Materie auf kleinster Skala beschreiben. Unsere Form von Magie nennt sich dabei Mathematik, wir werden jedoch versuchen nur an seltenen Stellen ihre Sätze ungeprüft zu gebrauchen um so einen Pakt mit Mephisto zu vermeiden. Wie schon in der Ex III werden wir feststellen, dass manche Modelle auf kleinster Ebene nicht mehr zutreffen und neue Formalismen und Betrachtungsweisen unumgänglich sind. In dieser Vorlesung fällt buchstäblich vieles vom Himmel, aber solange man es schafft, den Überblick zu behalten, verliert man trotzdem nicht die Freude an der Thematik.

Jetzt aber zum Inhalt: wir setzen die Grundlagen der Quantenmechanik (z.B. aus Ex III) voraus und betrachten zunächst noch einmal die Elektronenhüllen von Atomen. Richtig los geht es mit Stoßprozessen von Teilchen, wie wir sie nur mithilfe großer Beschleuniger erzeugen und auswerten können. Wir werden dann in Detektoren eine Winkelverteilung der Stoßprodukte beobachten und Größen wie Energie und Ladung ermitteln, um Rückschlüsse auf die Wechselwirkungen während des Stoßprozesses zu ziehen. Wegen der Unschärfe sind die Prozesse eine Art "Black Box" Problem, welches wir mit Feynman-Diagrammen darzustellen versuchen.

Notation und Werte für Konstanten (laut Vorlesung)

$$\begin{aligned}
 e^2 &= \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ MeV fm} \\
 1 \text{ eV} &= 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \\
 1 \text{ fm} &= 1 \times 10^{-15} \text{ m} \\
 1 \text{ u} &= 932 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \\
 \hbar &= 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js} \\
 \alpha &= \frac{e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137} \\
 c &= 3 \times 10^8 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

2.1 Spektroskopische Notation

Um den (stationären) Zustand einer Unterschale nl anzugeben, führen wir die spektroskopische Notation ein:

$$\boxed{n^{2S+1}L_J} \quad (2.1)$$

wobei die Drehimpulse und der Spin

$$\vec{L} := \sum_i \vec{\ell}_i \quad (2.2)$$

$$\vec{S} := \sum_i \vec{s}_i \quad (2.3)$$

$$\vec{J} := \sum_i \vec{s}_i + \vec{\ell}_i \stackrel{\text{jj}}{=} \sum_i \vec{j}_i \stackrel{\text{L-S}}{=} \vec{L} + \vec{S} \quad (2.4)$$

vektoriell addiert werden, sodass die zu den Eigenwerten gehörenden Quantenzahlen L , S , J für L ganzzahlig und für S , J auch halbzahlig sein können. Die verschiedenen S , J müssen auch bei halbzahligen Werten Abstände von 1 haben. In 2.4 bedeuten die Anmerkungen jj und L-S, dass es sich um die jeweiligen Drehimpulskopplungen handelt. Darauf wird später eingegangen.

Die Notation für die Elemente des Periodensystems lautet

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Massenzahl } \frac{m}{u} \\ \text{Kernladungszahl } Z \end{array} El \frac{q}{q_e} \text{ Ionisierung}} \quad (2.5)$$

2.2 Hund'sche Regeln und Auswahlregeln

Die Elektronen werden für die Grundzustände so aufgefüllt, dass die Bindungsenergie (negativ) minimiert wird, das heißt deren Betrag maximal wird. Zwischen den Unterschalen gilt folgende Reihenfolge:

$5s^2$	$5p^6$	$5d^{10}$	$5f^{14}$
$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$
$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
$2s^2$	$2p^6$		
$1s^2$			

Abbildung 2.1. Auffüllung der Grundzustände

Pro Unterzustand hat man $N_e = 2(2l + 1)$ Elektronen. Die Gesamtzahl der Elektronen in der n -ten Schale entspricht somit $N_e = 2 \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 = 2n^2$. Innerhalb einer Unterschale gelten für die Grundzustände die hierarchischen Hund'schen Regeln:

Hund'sche Regeln

1. Der Gesamtspin wird maximal. Das heißt hier ist $S = |\sum_i m_{s,i}| \stackrel{!}{=} \max$.
2. Der Gesamtdrehimpuls wird maximal. Das heißt hier ist $L = |\sum_i m_{l,i}| \stackrel{!}{=} \max$.
3. Ist die Unterschale bis zu (einschließlich) halb voll, so wird J minimal. Das heißt hier ist $J := |M_L + M_S| \stackrel{!}{=} |L - S|$, bei mehr als halb vollen Unterschalen muss $J \stackrel{!}{=} L + S$ sein.

Diese Regeln bestimmen die Feinstruktur des Elements. Regt man das Element an, so gelten diese Regeln nicht mehr. Möchte man im sogenannten Termschema verschiedene Zustände ihrer Energie nach ordnen (Energieniveaus), so ermittelt man den Grundzustand und verletzt dann die Regeln von unten nach oben. Die

Schalen-/Orbitalübergänge werden von den sog. **Auswahlregeln** beherrscht, die wohlgeordnet nicht hierarchisch sind.

Auswahlregeln

1. $\Delta L \in \{-1, 1\}$ bei L-S-Kopplung
2. $\Delta M_L \in \{-1, 0, 1\}$
3. $\Delta S = 0$ für leichte Atome ($Z < 40$)
4. $\Delta J \in \{-1, 0, 1\}$ wobei $J = 0 \rightarrow J = 0$ **verboten**

2.3 Vielelektronenprobleme

Für Elemente mit mehr als einem Elektron gibt es keine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung, auch numerische Verfahren sind mit zunehmender Elektronenzahl extrem aufwändig. Wir machen deshalb folgende Näherungen: **Alkaliatome** (1.Hauptgruppe)

- Alkaliatome haben nur ein Elektron außerhalb geschlossener Schalen. Die Grundzustände sind immer $^2S_{\frac{1}{2}}$ ($n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ nicht notiert).
- Wir betrachten zu Näherung ein **effektives Potential** $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2 Z_{eff}(r)}{r} \text{ mit } 1 < Z_{eff}(r) < Z \text{ und } Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1, Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow 0} Z$$

- Dies hebt die E_n -Entartung bezüglich Z bereits auf (Feinstruktur):
 $E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$ (für kleine n am stärksten)
- Für große n und r (wasserstoffähnlich) lässt sich dies so schreiben:

$$E_{n,l} = -E_0 \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = -\frac{E_0}{n_{eff}^2} = -\frac{E_0}{(n - \delta_{n,l})^2} \quad E_0 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.6)$$

wobei $\delta_{n,l}$ der sog. **Quantendefekt** ist: $\delta_{n,l} = n - \sqrt{\frac{E_0}{-E_{n,l}}}$
 $E_{n,l} < 0$ ist die real gemessene Energie.

Um allgemeine Vielelektronenprobleme zu lösen, können wir (zumindest bis jetzt) nur nähern indem wir zur Lösung eines Elektrons die anderen Elektronen unabhängig voneinander gelöst haben und das entstehende $V_{eff}(r)$ als **kugelsymmetrisch** angenommen wird.

Wir suchen deshalb eine **Gesamtwellenfunktion** für N Teilchen.

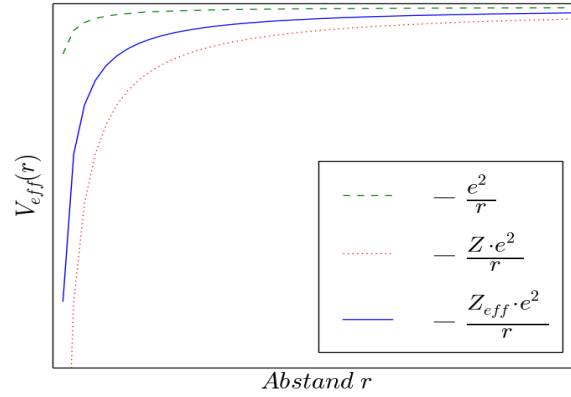


Abbildung 2.2. Effektives Potential

Diese muss antisymmetrisch unter Vertauschung sein, wir nehmen zusätzlich an, dass sie sich als Produkt der Einteilchenwellenfunktionen schreiben lässt.

Analog zu $\psi_{ges}(1, 2) = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)$ definieren wir die **Slaterdeterminante**:

$$\psi_{ges}(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Diese ist total antisymmetrisch unter Spaltenvertauschung und eine Summe aus $N!$ Produkten.

2.4 Moseley'sches-Gesetz

Für Elektronen-Übergänge zwischen Zuständen wurde empirisch festgestellt, dass $\sqrt{f} \propto Z$ ist, wobei f die Frequenz des emittierten Lichts und Z die Ladungszahl ist.

$$f = \frac{E_0(Z - b)^2}{h(1 + m_e/M_{core})} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\lambda = \frac{ch(1 + m_e/M_{core})}{E_0(Z - b)^2} \frac{1}{1/n_2^2 - 1/n_1^2} \quad (2.9)$$

für Übergänge $n_1 \rightarrow n_2$, wobei b die Abschirmkonstante ist.

Für das Wasserstoffatom entspricht das Moseley-Gesetz der Rydberg-Formel.

Für wasserstoffähnliche Atome gilt $b=(Z-1)$:

K-Linien: $n_2 = 1$, $K_\alpha : n_1 = 2$, $K_\beta : n_1 = 3$

Für schwere Atome ($Z > 40$) gibt es zusätzlich:

L-Linien: $n_2 = 2$, $b \approx 7.4$, $L_\alpha : n_1 = 3$, $L_\beta : n_1 = 4$

Die Auswahlregeln müssen gelten.

2.5 LS–Kopplung, jj–Kopplung

von HeinStein & Anton

2.5.1 LS–Kopplung

- Wasserstoff: Potential \rightarrow Störungen \rightarrow Spin–Bahn–Kopplung
- Spin–Bahn–Kopplung: nicht ℓ und s sondern j relevant
- Viele Elektronen: J relevant

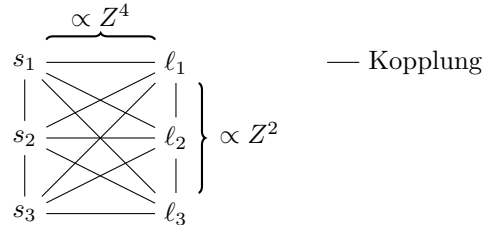


Abbildung 2.3. L–S–Kopplung

Satz

Sei die Spin–Bahnkopplung eines Elektrons \ll Bahn–Bahn–Kopplung und Spin–Spin–Kopplung zwischen den Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i \vec{\ell}_i + \sum_i \vec{s}_i$$

$$\begin{array}{rcl}
 s_1 & \ell_1 & \\
 + & + & \\
 s_2 & \ell_2 & \text{Anzahl der Feinstrukturaufspaltungen: } \min(2s+1; 2\ell+1). \\
 + & + & \\
 \underbrace{s_3 \quad \ell_3}_{L+S=J} & &
 \end{array}$$

Entscheidend für die Feinstrukturaufspaltung ist die Zusammensetzung von L und S . Die Feinstruktur ist sehr klein verglichen mit den Energiedifferenzen zwischen verschiedenen L oder S .

Für ein gesamtes L-S-Kopplungs-Termschema geht man die Hund'schen Regeln von 1–3 durch und findet durch die "Grundzustände" die niedrigeren Energieniveaus. Bei der L-Aufspaltung ist dabei die Parität der Gesamtwellenfunktion von $(-1)^{L+S+1} \stackrel{!}{=} -1$ zu beachten, das heißt, es existieren nur Energieniveaus für $L+S \in 2\mathbb{Z}$ gerade. Für die letzte Aufspaltung (J) gibt es immer $\min(2S+1, 2L+1)$ Terme. Auch wird hierbei nicht berücksichtigt, dass sich die Terme in der Realität auch überkreuzen können.

Im allgemeinen Fall gilt für die Energien:

$$E_J(n, L, S) = E(n, L, S) + C \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (2.10)$$

$$= E(n, L, S) + \frac{C\hbar^2}{2} (J(J+1) - S(S+1) - L(L+1)) \quad (2.11)$$

daraus folgt für die Abstände der Energieniveaus:

$$\Delta(E_J, E_{J-1}) = JC\hbar^2 \quad (2.12)$$

wobei C eine Konstante der Dimension $\left[\frac{\text{Energie}}{\hbar^2}\right]$ und C am größten für kleine n ist. Daraus folgt, dass bei großen n die Feinstruktur nur noch sehr klein ist.

Beispiel

Elektronenkonfiguration: $L=2, S=1 \rightarrow J=1, 2, 3$.
 Anzahl der J : $\min(2S+1; 2L+1) = 3$



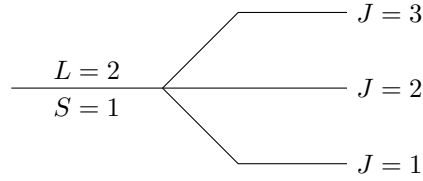


Abbildung 2.4. Termschema

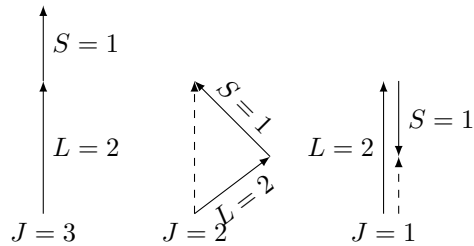


Abbildung 2.5. Vektordiagramme der möglichen Additionen

$$E_J(n, L, S) = E(n, L, S) + \frac{C\hbar^2}{2} (J(J+1) - 8) \quad (2.13)$$

Hier wurde einfach in obige Formel eingesetzt.

$$E_3(n, 2, 1) = E(n, 2, 1) + 2C\hbar^2 \quad (2.14)$$

$$E_2(n, 2, 1) = E(n, 2, 1) - C\hbar^2 \quad (2.15)$$

$$E_1(n, 2, 1) = E(n, 2, 1) - 3C\hbar^2 \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

2.5.2 jj-Kopplung

Satz

Sei die Spin-Bahn-Kopplung eines Elektrons \gg Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung verschiedener Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i (\vec{s}_i + \vec{\ell}_i)$$

- Bei jj-Kopplung sind L und S nicht definiert, daher nur Gesamtdrehimpuls J
- Multiplett-Zustände nicht mehr erkennbar.

$$\begin{array}{c} s_1 \text{ --- } \ell_1 \\ + \\ s_2 \text{ --- } \ell_2 \\ + \\ s_3 \text{ --- } \ell_3 \end{array}$$

Abbildung 2.6. jj-Kopplung

2.6 Clebsch-Gordan Koeffizienten (ein kleiner Ausflug...)

von MiX

Allgemeiner Basiswechsel in der Quantenmechanik:

Sei der Vektor $|\psi\rangle$ in einer Basis $\mathcal{B} := \{|b_1\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ gegeben durch:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle \quad (2.18)$$

Daraus folgt: die Basisdarstellung in einer zweiten Basis $\mathcal{C} := \{|c_1\rangle, \dots, |c_m\rangle\}$ erhält man durch Multiplikation mit dem Eins-Operator in \mathcal{C} -Darstellung:

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} = \sum_{j=1}^m |c_j\rangle \langle c_j| \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} |\psi\rangle = \mathbb{1}_{\{\mathcal{C}\}} \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle \quad (2.20)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m |c_j\rangle \langle c_j| \right) \sum_{i=1}^n a_i |b_i\rangle = \sum_{i,j} a_i \underbrace{\langle c_j | b_i \rangle}_{\text{Neue Koeffizienten von } |\psi\rangle \text{ in } \mathcal{C}\text{-Basis}} |c_j\rangle \quad (2.21)$$

Die $\langle c_j | b_i \rangle$ nennt man auch **Transformationsfunktionen**.

Wende dies nun auf die Addition von Drehimpulsen an:

Seien \vec{X}_1, \vec{X}_2 zwei verallgemeinerte Drehimpulse (\vec{X}_i könnten z.B. Spins \vec{S} , Bahndrehimpulse \vec{L} oder totale Drehimpulse \vec{J} sein). Dann existieren die zugehörigen Operatoren:

$$X_{1,z} \quad \vec{X}_1^2 \quad X_{2,z} \quad \vec{X}_2^2$$

mit den zugehörigen Quantenzahlen:

$$m_1 \quad x_1 \quad m_2 \quad x_2$$

wobei die m_i die jeweiligen Projektionsquantenzahlen und die x_i die Drehimpulsquantenzahlen sind.

Ein System, das durch diese beiden Drehimpulse beschrieben wird (z.B. ein e^- mit Bahndrehimpuls und Spin) kann durch Vektoren der Form

$$|\psi\rangle = |x_1, m_1; x_2, m_2\rangle \quad (2.22)$$

vollständig beschrieben werden. Diese Vektoren sind Eigenzustände der Operatoren $X_{1,z}, \vec{X}_1^2; X_{2,z}, \vec{X}_2^2$.

Nun interessieren wir uns für den addierten Drehimpuls, der gegeben ist durch:

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2, \quad M_X = m_1 + m_2 \quad (2.23)$$

\vec{X} besitzt analog zu \vec{X}_1, \vec{X}_2 entsprechende Operatoren: \vec{X}^2 und X_z ; jedoch sind die Vektoren $|\psi\rangle = |x_1, m_1; x_2, m_2\rangle$ keine Eigenzustände zu diesen beiden Operatoren. Um also eine einfache und übersichtliche Beschreibung des addierten Drehimpulses zu gewährleisten, suchen wir nun eine neue Basis, die aus Eigenvektoren von \vec{X}^2, X_z besteht, also Vektoren der Form:

$$|\varphi\rangle = |X, M_X, x_1, x_2\rangle \quad (2.24)$$

Analog zu 2.21 ist die Basistransformation nun gegeben durch

$$|X, M_X, x_1, x_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} |x_1, m_1, x_2, m_2\rangle \cdot \langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2\rangle \quad (2.25)$$

Hint: Vertauschen der beiden Produkte für besseres Verständnis und zur Analogie zu Formel 2.21

Die Transformationsfunktion $\langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2\rangle$ gibt uns also die Koeffizienten ("CGK") der Vektoren, welche die einzelnen Drehimpulse beschreiben, sodass deren Summe $|X, M_X, x_1, x_2\rangle$ ein Eigenzustand von \vec{X}^2, X_z ist.

2.6.1 Physikalische Interpretation der CGK

$$|\langle x_1, m_1, x_2, m_2 | X, M_X, x_1, x_2 \rangle|^2 \quad (2.26)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein System der beiden Drehimpulse \vec{X}_1, \vec{X}_2 in der Konfiguration m_1, m_2 gefunden werden kann, wenn es den Gesamtdrehimpulsbetrag X und Gesamt-z-Projektion M_X hat. (Bedingte Wahrscheinlichkeit).

Die Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ist recht kompliziert^{2 3}, weshalb man sie auch in Tabellen nachschlagen kann (und sollte!).

2.6.2 Anleitung zum Lesen der Tabellen

Meist ist eine Vielzahl kleinerer Tabellen angegeben. In der linken, oberen Ecke jeder dieser Tabellen steht " $(x_1) \times (x_2)$ ", also die zwei Beträge der zu addierenden Drehimpulse.

Jede dieser Tabellen ist in mehrere Untertabellen gegliedert, diese haben die Form:

		$X^1 \quad X^2 \quad \dots$	\leftarrow Werte X^j , die den Gesamtdrehimpulsbetrag X annehmen können \leftarrow Eine Untertabelle für jeden Wert M_X^i von M_X
		$M_X^i \quad M_X^i \quad \dots$	
m_1^1	m_2^1	Koeffizienten- Notation: $+\frac{8}{15} \hat{=} +\sqrt{\frac{8}{15}}$ $-\frac{6}{8} \hat{=} -\sqrt{\frac{6}{8}}$	
m_1^2	m_2^2		
\vdots	\vdots		
m_1^n	m_2^n		

alle n möglichen Konfigurationen von m_1, m_2 werden durchgegangen, so dass $m_1 + m_2 = M_X^i$

Abbildung 2.7. Schema einer CGK-Tabelle

²<https://de.wikipedia.org/wiki/Clebsch-Gordan-Koeffizient>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch-Gordan_coefficients

2.6.3 Anmerkungen

1. Ein CG-Koeffizient, der physikalisch keinen Sinn ergibt (z.B. wenn $X \geq X_1 + X_2$ oder $M_X \neq m_1 + m_2$), ist null.
Beispiel: $\langle 1, 0, 4, 4 | 3, 6, 1, 4 \rangle = 0$
weil: $0(m_1) + 4(m_2) \neq 6(M_X)$
2. Am einfachsten kann man das Beschriebene anhand der Addition zweier Spins mit $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ betrachten.
So sieht man z.B. wie im Helium die Spin-Singulett und -Triplett Zustände zustande kommen. Man sieht auch, dass die CGK bestimmen, ob die Spinwellenfunktion symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

3 Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

von HeinStein & HerMitsch

3.1 Zerfallsgesetz

Es gibt 3 verschiedene Arten des radioaktiven Zerfalls. (A: Nukleonenzahl, Z: Kernladungszahl)

- α - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2\text{He}^{++}$
 α - Strahlung wird mittels Heliumkernen vermittelt (positiv geladen).
- β - Zerfall:
 1. β^- - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$
Beim β^- - Zerfall wird im Kern ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Dabei werden ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert.
 2. β^+ - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$
Beim β^+ - Zerfall wird im Kern ein Proton in ein Neutron umgewandelt. Dabei werden ein Positron und ein Elektron-Neutrino emittiert.
- γ - Zerfall: ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$
Falls nach einem α - Zerfall oder β - Zerfall ein Atomkern in einem angeregten Zustand vorliegt, ist γ - Zerfall möglich. Beim Übergang in einen energetisch günstigeren Zustand wird hochfrequente elektromagnetische Strahlung emittiert. Meist folgt der γ - Zerfall unmittelbar auf einen α - oder β - Zerfall.

Für die Zerfallsrate (Aktivität) $A = \frac{d}{dt}N(t)$ gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\lambda N(t) \quad (3.1)$$

λ : Zerfallskonstante beschreibt Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte radioaktive Zerfallsart. Sie ist unabhängig von Ort und Zeit, aber charakteristisch für den Kern.

Die Lösung dieser Gleichung gibt die Anzahl N der Atome zum Zeitpunkt t an:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.2)$$

Wobei man in diesem Zusammenhang noch folgende nützliche Größen definiert:

- Mittlere Lebensdauer: $\tau = 1/\lambda$
Nach dieser Zeit sind nur noch $1/e$ ($\approx 37\%$) der ursprünglichen Atome vorhanden.
- Halbwertszeit: $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ Nach dieser Zeit sind nur noch 50 % der ursprünglichen Atome vorhanden.

Der radioaktive Zerfall ist ein stat. Prozess. Die Wahrscheinlichkeit einen zerfallenden Kern anzutreffen ist bei $t=0$ am größten, danach fällt sie exponentiell ab. Diese Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell eine Binomial-Verteilung. Für eine hohe Anzahl an Versuchen und eine kleine Wahrscheinlichkeit konvergiert die Binomialverteilung gegen eine Poisson-Verteilung. Diese Näherung lässt sich auf den radioaktiven Zerfall anwenden, da man in der Regel viele Atome ($N \approx 10^{23}$) betrachtet, also eine hohe Anzahl Versuche durchführt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit in der Regel klein ist:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.3)$$

Somit lässt sich der Zerfall also durch eine Poisson-Verteilung beschreiben mit dem Mittelwert $\mu = N \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu}$ wobei der Zerfall k -mal eintreten soll.

$$P(k) = \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!} \quad (3.4)$$

3.2 Fermis Goldene Regel

Wir wollen eine Voraussage für die Übergangsrate λ (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit), mit der ein Anfangszustand unter dem Einfluss einer Störung in einen anderen Zustand übergeht, treffen. Wir nehmen dabei an, dass es sich um ein an sich zeitlich konstantes System handelt, welches durch den Hamilton-Operator H_0 beschrieben wird, und durch einen Störoperator V , welcher vergleichsweise klein gegenüber H_0 ist, gestört wird. Der gesamte Hamiltonoperator lautet also $H = H_0 + V$

Wir formulieren Fermis Goldene Regel:

$$\lambda_{A \rightarrow E} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_E | V | \psi_A \rangle|^2 \cdot \rho_E = \frac{dP}{dt} \quad (3.5)$$

Die Übergangsrate hängt also davon ab wie stark die Störung V den Anfangszustand $|\psi_A\rangle$ ($\equiv |i\rangle$ für initial) und den Endzustand $|\psi_E\rangle$ ($\equiv |f\rangle$ für final) koppelt. Außerdem skaliert die Übergangsrate mit der Anzahl der möglichen Übergänge welche durch die Endzustandsdichte ρ_E beschrieben wird.

Was ist $\rho(E)$ eigentlich?

Wir bezeichnen den Phasenraum unseres Systems als den Raum, der durch die Ortskoordinaten \mathbf{x} und die dazugehörigen Impulse \mathbf{p} aufgespannt wird. In diesem Raum können wir einem Punkt ein Volumen von $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ zuordnen (Unschärferelation).

1 Dimension:

Zunächst betrachten wir einen jeweils eindimensionalen Orts- und Impulsraum mit Zuständen $(x, p) \in [x, x + L] \times [p_x, p_x + p]$. In diesem Fall kann die Gesamtfläche Lp mit $N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$ Zuständen gefüllt werden. Für die Zustandsdichte gilt dann:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2 \frac{dN}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{L}{2\pi\hbar} \frac{2m}{p} = \frac{L}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (3.6)$$

Wobei wir im letzten Schritt auf Kugelkoordinaten transformieren. Der Faktor 2 kommt daher, dass die Zustände (x, p) und $(x, -p)$ bezüglich der Energie entartet sind, denn $E = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$.

3 Dimensionen:

Die Anzahl der Gesamtzustände N ist nun

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x}^3 d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 dp d\Omega \quad (3.7)$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$ folgern wir $\frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp}$ und erhalten damit für die Zustandsdichte für **1 Teilchen**

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2} \int d\Omega = \frac{VpE}{2\pi^2 c^2 \hbar^3} \quad (3.8)$$

Für **2 Teilchen** addieren sich die Impulse im Mittel zu 0, weshalb die Zustandsdichte konstant ist. Jedoch addieren sich die Energien zu $E = E_1 + E_2$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (3.9)$$

Da $p_1^2 = p_2^2$ folgt $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$\begin{aligned} \rightarrow dE &= \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2 p_1 dp_1 \\ \rightarrow \rho_2 &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 \int d\Omega_1 \end{aligned}$$

Wir können dies auf n Teilchen erweitern

$$\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3\mathbf{p}_i \quad (3.10)$$

3.3 Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Überlegungen dienten allesamt dazu die Reaktionsrate einer Zustandsänderung zu quantifizieren. Wir lernen nun eine letzte Größe kennen, die ebenfalls diesen Zweck erfüllt. Der Wirkungsquerschnitt σ gibt die Stärke einer Reaktion an. Um dies zu begreifen betrachten wir einen konstanten Fluss Φ von Teilchen, die allesamt der Sorte P (projectile) zugehören und auf ein Target der Dicke x aus Teilchen der Sorte T (target) geschossen werden.

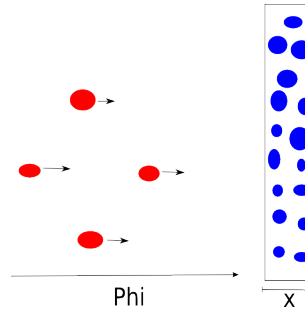


Abbildung 3.1. Teilchenfluss auf Target

Die Reaktionsrate pro Targetteilchen ist

$$W = \Phi \cdot \sigma \quad (3.11)$$

Die Reaktionsrate im gesamten Target ist

$$W \cdot N = \Phi \cdot n_T \cdot x \cdot \sigma \quad (3.12)$$

mit N Targetteilchen und der Volumenteilchendichte n_T . Der Wirkungsquerschnitt σ ist also die flussbereinigte Reaktionsrate. Er hat die Dimension [Fläche]

und eine hierfür häufig verwendete Einheit heißt Barn $1 \text{ b} = 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-28} \text{ m}^2$.

Im Allgemeinen hängt der Wirkungsquerschnitt σ von der Art der Reaktion ab:

- Absorption σ_A
- elastische Streuung σ_E
- inelastische Streuung σ_I

Der Gesamtwirkungsquerschnitt ergibt sich via Addition $\sigma_{Ges} = \sigma_A + \sigma_E + \sigma_I$
 Für Teilchen die sich innerhalb eines Mediums ausbreiten definiert man die **mittlere freie Weglänge** λ

$$\lambda = \frac{1}{n_T \sigma} \quad (3.13)$$

Diese gibt die durchschnittliche Strecke an, die ein Teilchen im Target ohne Wechselwirkung zurücklegen kann.

Das Volumen in dem 1 Targetteilchen ist also $V = \lambda \cdot \sigma = 1/n_T$

Anhand der mittleren freien Weglänge lassen sich folgende Größen berechnen:

- Anzahl der Strahlteilchen im Targetmaterial : $N(x) = N_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Kollisionsrate: $c(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = \frac{N_0}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} = c_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Wahrscheinlichkeit für Reaktion eines einfallenden Teilchens: $p(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

Aus Dimensionsbetrachtungen lässt sich darauf schliessen, dass der Wirkungsquerschnitt die Dimension einer Fläche hat. Wir werden dies nun veranschaulichen:
 Im Allgemeinen ist bei Teilchenkollisionen der Wirkungsquerschnitt, die kleinste Fläche, die beide Teilchen komplett einschließt:

$$\sigma = \pi(r_K + r_P)^2 \quad (3.14)$$

wobei r_K der Kernradius und r_P der Projektilradius sind.

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass n Projektile mit dem Target wechselwirken, als das Verhältnis der effektiven Flächen:

$$P = \frac{n_T \sigma}{A} = \left(\frac{n}{A} \right)_T \sigma \quad (3.15)$$

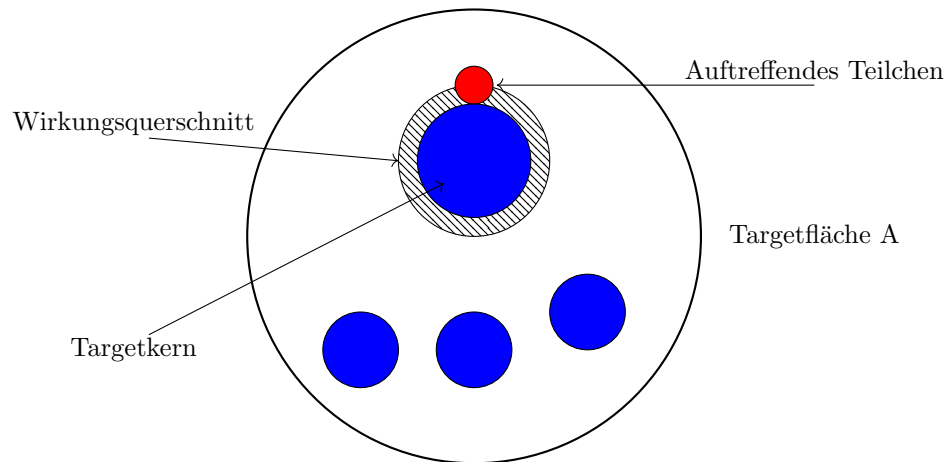


Abbildung 3.2. Wirkungsquerschnitt eines Teilchens (rot) das auf ein Targetteilchen (blau) trifft, mit Wirkungsquerschnitt (gewellte Fläche)

3.4 Darstellung der Teilchen-WW mit Feynman-Diagrammen

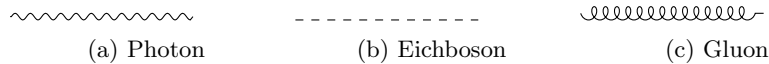
von Søni & mARTina

Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten gibt es in der Quantenelektrodynamik (QED) Potenzreihen, die sich durch sogenannte Feynman-Diagramme verbildlichen lassen. Wir werden uns damit beschäftigen, welche Wechselwirkungen überhaupt möglich sind und die niedrigsten Ordnungen davon auch aufzeichnen. Wir kennen stets nur die Reaktionsedukte und -produkte und bauen uns daraus folgendes Modell auf:

3.4.1 Regeln

- Meist ist die Zeitachse eingezeichnet, übrige Richtungen beziehen sich auf den Raum
- Teilchen werden durch Linien symbolisiert, dabei gibt die Pfeilrichtung an, ob es sich um das Teilchen selbst (Pfeil in Richtung der Zeitachse) oder sein Antiteilchen (Pfeil entgegengesetzt zur Zeitachse gerichtet). Die reellen Teilchen erfüllen alle $E^2 - p^2 = m^2$ ($c = 1$).
- virtuelle Teilchen hingegen sind durch im Feynman-Diagramm abgeschlossene Linie dargestellt und erfüllen $E^2 - p^2 = m^2$ **nicht!**

- Linienformen können angeben, um welche Teilchen es sich handelt. So haben Fermionen (Quarks, Leptonen) eine durchgezogene Linie, die Eichbosonen γ , W^+ , W^- , Z^0 allgemein eine Wellenlinie und Gluonen eine schraubenförmige Linie. Oftmals werden aber auch geschtrichelte Linien für Propagatoren der schwachen Wechselwirkung und die Wellenlinien nur für Photonen verwendet (so wird es auch in diesem Skript gehandhabt).



- Vertices, die Knotenpunkte zwischen den Linien, geben durch ihre Anzahl die Ordnung der Feynman-Diagramme an. Sie verbinden (in echten Feynman-Diagrammen) genau drei Linien.
- Propagatoren, die Linien zwischen Vertices, sind virtuell und haben keine Vorzugsrichtung.

Eichboson	Anzahl	WW	auf Materieteilchen
Gluon	8	starke WW	Quarks
W^+ , W^- , Z^0	3	schwache WW	Quarks, Leptonen
Photon	1	el.mag. WW	Quarks, Leptonen

Tabelle 3.1. Wechselwirkung von Eichbosonen auf Materieteilchen

3.4.2 Erhaltungsgrößen (in nachfolgenden Kapiteln präzisiert)

Die folgenden Sätze gelten nicht für alle verschiedenen Wechselwirkungen. Welche Wechselwirkungen es gibt, wird später genauer erklärt. Hier soll lediglich eine Sammlung der Erhaltungsgrößen stehen.

1. kinematisch erlaubt, d.h. Energie und Impuls erhalten
2. Leptonenzahl und Baryonenzahl erhalten. Dazu muss man anmerken, dass nur die Neutrino-Oszillation die Baryonenzahlerhaltung verletzt.
3. Gesamtdrehimpuls (\vec{J}) erhalten
4. Parität P und Ladungskonjugation C erhalten (gilt nicht bei schwacher Wechselwirkung)
5. Ladung erhalten
6. Quarkflavour erhalten (gilt nicht bei schwacher Wechselwirkung)

3.4.3 Beispiele

1. Positron (Antifermion) + Elektron(Fermion) in Feynman-Diagramm 2. Ordnung:

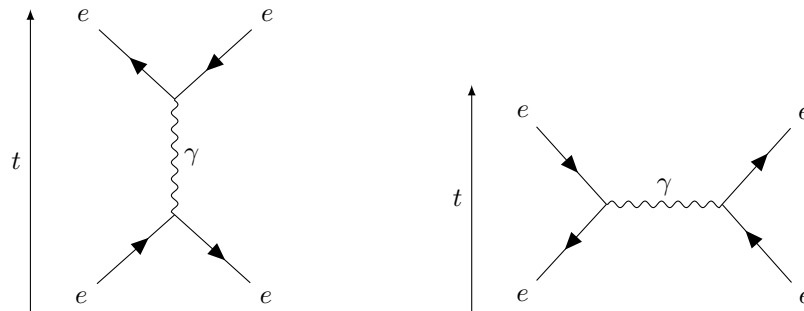


Abbildung 3.4. zeitartig $q^2 > 0$ (links) / raumartig $q^2 < 0$ (rechts)

Wichtig: Das Zeitintervall der Wechselwirkung ist durch die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.16)$$

beschränkt.

Für elektromagnetische WW: $E = h \cdot \nu \Rightarrow \Delta t \geq \frac{1}{4\pi\Delta\nu}$

Diese Unschärfe erlaubt die Superposition aller möglichen Prozesse, die wir durch die Feynman-Diagramme darstellen können.

2. Compton-Effekt:

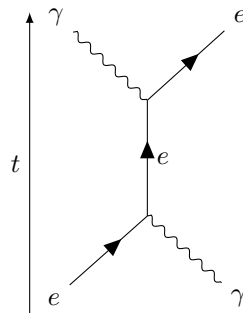


Abbildung 3.5. Feynman-Diagramm des Compton-Effekts

3. Proton-Zerfall:

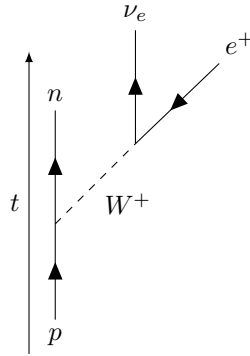


Abbildung 3.6. Feynman-Diagramm des Proton-Zerfalls

3.4.4 Feynman-Kalkül

Prozesse sind auf beliebig vielen Arten darstellbar (mehrere Vertices möglich). Jeder Vertex liefert die Wurzel aus einer Kopplungskonstanten $\sqrt{\alpha_{\text{WW}}(q)}$, wobei hier q für die Ladung des Teilchens und WW für die Art der Wechselwirkung steht.

Beispielsweise ist es für die elektromagnetische WW die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$.

Je mehr Vertices ein Diagramm enthält, desto geringer ist sein Beitrag zur Gesamtamplitude der superponierten Zustände (alle bis heute erzielten Forschungsergebnisse mit Termen nur bis 4. Ordnung errechnet).

Austauschteilchen in Berechnung von Matrixelement durch Propagator beschrieben. Es gilt:

$$\frac{1}{m^2 + q^2}, \text{ Matrixelement } M \propto \frac{1}{\alpha q^2} \Rightarrow \sigma \propto \frac{\alpha^2}{q^4} \quad (3.17)$$

[PLACEHOLDER FÜR (AUSFÜHRLICHERE) ERKLÄRUNG HIERZU.]

4 Teilchendetektoren

von HeinStein & mARTina

Teilchendetektoren messen Produkte von Kollisionen und Zerfällen.

In diesem Kapitel wird die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt und somit auch oft weggelassen.

Aufgaben

- Nachweis entstandener Teilchen
- Messung von Energie/Impuls
- Messung von Lebensdauer, Zerfallslänge, β , γ , τ
- Teilchenidentifikation (Bestimmung $M^2 = E^2 - p^2$)

4.1 Impulsmessung

Ablenkung von geladenen Teilchen im homogenen B-Feld (Magnetfeld). Das Teilchen bewegt sich dadurch auf einer Kreisbahn mit Radius $r = \frac{p}{q \cdot B}$. Stellt man diese Gleichung nach p um, erhält man den Impuls.

4.1.1 Gasdetektor

In einem Kondensator (erzeugt E-Feld) befindet sich ein nicht elektronegatives Ionisationsgas. Die Spannungsänderung nach der Zeit ist gegeben durch $\Delta U = -\frac{N \cdot e}{C}$, wobei N die Teilchenanzahl, e die Elementarladung und C die Kapazität des Kondensators ist (siehe Abb. [4.1](#)).

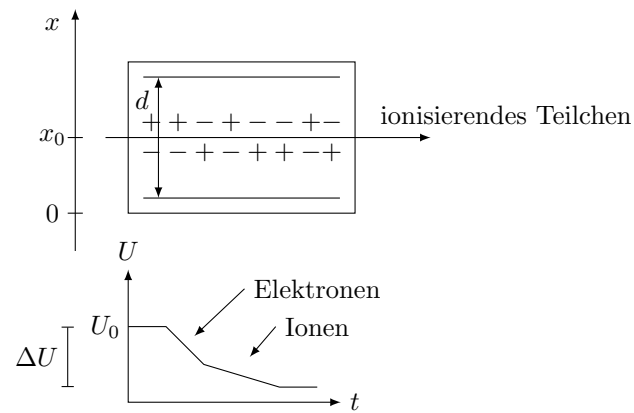


Abbildung 4.1. Schematischer Aufbau eines Gasdetektors (oben)
Spannungsänderung am Kondensator über Zeit (unten)

4.1.2 Proportionalzählrohr

- sehr dünner Anodendraht ($\approx \mu m$)
- $E(r) = \frac{U_0}{r \cdot \ln\left|\frac{R}{r_A}\right|} \Rightarrow$ starkes Feld im Zentrum (siehe Abb. 4.2)
- **Sau** starke Beschleunigung in Nähe des Anodendrahtes
- Reicht aus um Gas zu ionisieren \rightarrow Sekundärelektronen
 $\Delta U = -\frac{A N e}{C}$, $A = 10^4 - 10^5$ Verstärkungsfaktor

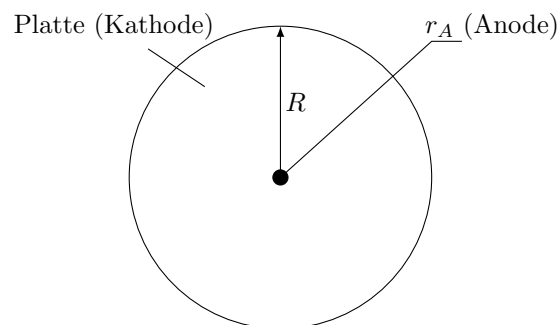


Abbildung 4.2. Schema eines Proportionalzählrohrs

4.1.3 Halbleiterzähler

Ein Halbleiterzähler ist ein pn-Übergang, an den in Sperrrichtung eine Spannung angelegt wird. Dadurch entsteht eine Verarmungszone, in der keine freien Ladungsträger vorhanden sind.

Durchgehende Teilchen erzeugen durch Ionisation in dieser Zone Elektronen-Loch-Paare, die im E-Feld zu den Anschlusspolen wandern und ein Signal erzeugen.

4.1.4 Szintillationszähler

Ein Szintillationsdetektor dient der Energie- und Intensitätsbestimmung von ionisierender Strahlung. Diese Strahlung erzeugt im Szintillator einen kurzen Lichtblitz, welcher über einen Photomultiplier durch einen Photodetektor gemessen wird.

4.2 Energiemessung

- Absorption eines hadronischen Schauers in einem sog. Kalorimeter
- Hadronen: z.B. Protonen, Neutronen.. (aus Quarks zusammengesetzte Teilchen)

4.2.1 Hadronischer Schauer

Beim Einfall hochenergetischer Teilchen entstehen Sekundärteilchen, die selbst so lange Teilchen generieren, bis die Energie erschöpft ist.

Beispiel

Mittlere Weglänge eines Teilchens in Blei: $5.6\text{mm} = \lambda$
 Ideale Detektorlänge: $20\lambda \rightarrow 112\text{mm}$ Blei
 Abwechselnd: 2mm Blei und 5mm Szintillationszähler
 $\rightarrow 392\text{mm}$ Länge (elektromagnetisches Kalorimeter, ECAL)

Hadronen: Absorptionslänge $\lambda = 18.5\text{cm} \rightarrow 10\lambda = 1.85\text{m} + \text{ECAL}$

4.2.2 Messung von Photonen

- Röntgen- & Gammastrahlen in Halbleiterkristallen (Si, Ge, ...) \rightarrow gute Auflösung

- Messung durch szintillierende Kristalle ($NaT, PbWO_4$)
 - niedrige Energie \rightarrow schlechte Auflösung
 - hohe Energie ($> 100\text{MeV}$) + ausreichende Dichte \rightarrow gute Messung
 - "Kristallkalorimeter": $\frac{\sigma_E}{E} = \frac{0.04}{\sqrt{E}} + 0.01 \begin{cases} \text{für } 1\text{GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 4.1\% \\ \text{für } 100\text{GeV} & : \frac{\sigma_E}{E} = 1.1\% \end{cases}$

4.3 Teilchenidentifikation

- Massenbestimmung durch Messung von Impuls & Flugzeit
 $pc = \beta E = \beta \gamma mc^2$
 Impulsbereich limitiert durch Auflösung von Zeitmessung & Flugstrecken
 Grenze der Methode: Impuls etwa in $\frac{\text{GeV}}{c}$
- Massenbestimmung durch Zerfallsprodukte (Masse & Impulse erhalten!)
 $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$
- durch spezifische Energieverluste
 Bei bekanntem $p \cdot c$ wird $\frac{dE}{dx}$ gemessen $\rightarrow \beta \gamma$ bestimmt
- durch "Tricks":
 - Myonen: nur Energieverluste durch Ionisation, keine Schauer
 - Photonen: keine Energieverluste durch Ionisation, nur el.mag. Schauer
 - Elektronen: Energieverluste durch Ionisation, el.mag. Schauer, Übergangsstrahlung
 - Neutronen, Antineutronen: keine Ionisation, nur hadronischer Schauer
 - geladene, hochenergetische Teilchen: Cherenkov-Strahlung (Teilchen in Medium schneller als Licht \rightarrow strahlen Licht ab (Energie ändert sich nicht wirklich) über welches Information über Teilchen zu erhalten sind.)

5 Wechselwirkung von Teilchen und Strahlung mit Materie

von Anton , SØni & Chris

Bei der Wechselwirkung von Teilchen mit Atomen oder Molekülen können folgende elementare Prozesse ablaufen:

- Rayleigh–Streuung, Thomson–Streuung
- Anregung oder Ionisation von Hüllenelektronen
- Ablenkung geladener Teilchen im Coulomb–Feld des Kerns, die zur Emission von Bremsstrahlung führt
- Compton–Streuung
- Emission von Cerenkov–Strahlung, wenn geladene Teilchen ein Medium mit Brechungsindex n schneller als die Lichtgeschwindigkeit $\frac{c}{n}$ durchlaufen

All diese Effekte können einzeln oder in Kombination zur Nachweise der Teilchen ausgenutzt werden, wobei der vorletzte Prozess einen wesentlich kleineren Wirkungsquerschnitt hat und erst bei großen Energien eine merkliche Rolle spielt. Ein Teilchen mit einer kinetischen Energie im keV – MeV–Bereich verliert bei der Ionisation eines Atoms oder Moleküls nur einen Bruchteil seiner Energie. Es kann daher bei seinem Weg durch den Detektor viele Atome anregen. Der spezifische Energieverlust pro Längeneinheit $\frac{dE}{dx}$ hängt außer von der Art und Dichte der Detektormaterie stark von der Art des ionisierenden Teilchens und von seiner Energie ab.

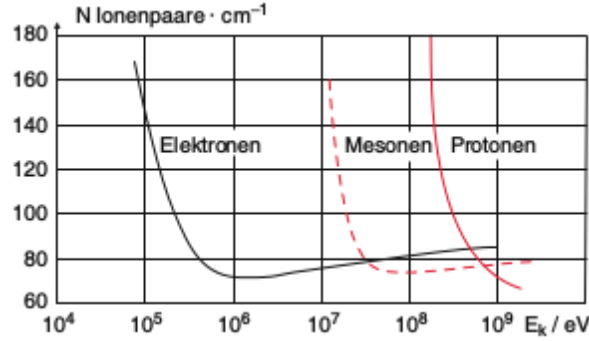


Abbildung 5.1. Spezifische Ionisierung (Zahl der pro cm Weg gebildeten Ionenpaare) für Elektronen, Protonen und π -Mesonen in Luft als Funktion der kinetischen Energie.

5.1 Energieverlust von geladenen schweren Teilchen

Wir betrachten ein Teilchen der Ladung $Z_1 \cdot e$, das durch die Elektronenhülle eines Atoms fliegt. Ist die Energie des Teilchens groß gegen die Bindungsenergie der Elektronen in der Atomhülle, so ist der beim Stoß des schweren Teilchens auf ein Elektron übertragene relative Impuls $\frac{\Delta p}{p}$ klein. Die Teilchenbahn kann durch eine Gerade angenähert werden, und die Elektronen können als frei angesehen werden. Dieses Modell wird mathematisch durch die Bethe-Formel beschrieben:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi Z_1^2 e^2 n_e}{v^2 m_e} \cdot \left(\ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right) \quad (5.1)$$

wobei $I \approx Z_1 \cdot 10 \text{ eV}$ das mittlere Anregungspotential ist.

Man sieht hieraus, dass der spezifische Energieverlust $\frac{dE}{dx}$ proportional zur Elektronendichte n_e im Detektor ist und mit dem Quadrat der Teilchenladung $Z_1 \cdot e$ ansteigt, aber umgekehrt proportional zum Quadrat der Ionengeschwindigkeit v abnimmt. Der spezifische Energieverlust geladener schwerer Teilchen $\frac{dE}{dx}$ hängt von ihrer Energie E ab wie $\frac{1}{E} \cdot \ln\left(\frac{E}{I}\right)$. Er sinkt also schwach mit steigender Energie.

5.2 Energieverlust von Elektronen

5.2.1 Anregung und Ionisation

Für leichte Teilchen (Elektronen, Positronen) mit $v \ll c$ kann man die Richtungsablenkung bei Stößen mit der Elektronenhülle nicht mehr vernachlässigen. Ein

parallel einfallender Strahl wird daher wesentlich stärker durch Streuung diffus. In diesem Fall wurde der spezifische Energieverlust durch Ionisation von Bethe berechnet zu:

$$\frac{dE}{dx} \approx \frac{4\pi Z_1 e^4 n_e}{m_e v^2} \cdot \ln \frac{m_e v^2}{2I} \quad (5.2)$$

Der Vergleich mit (5.1) zeigt, dass bei gleicher Geschwindigkeit v der spezifische Energieverlust pro Weglänge für schwere Teilchen (Masse m_S) und Elektronen (Masse m_e) gleich ist, bei gleicher Energie jedoch für Elektronen um den Faktor $\frac{m_e}{m_S}$ kleiner ist. Die Reichweite von Elektronen ist deshalb trotz der größeren Streuung wesentlich größer als die von schweren Teilchen der gleichen Energie. Für Teilchen mit relativistischen Energien sind dagegen die Unterschiede für $\frac{dE}{dx}$ zwischen Elektronen und schweren Teilchen nur noch klein.

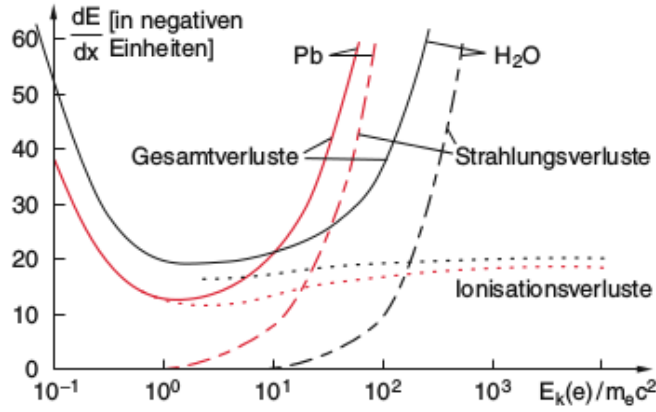


Abbildung 5.2. Ionisationsverluste, Strahlungsverluste und Gesamtverluste $\frac{dE}{dx}$ (in relativen Einheiten) von Elektronen in Blei (rote Kurven) und Wasser (schwarze Kurven) als Funktion der Elektronenenergie

5.2.2 Bremsstrahlung

Durch die Ablenkung im Coulomb-Feld der Atomkerne erfahren die Elektronen eine negative Beschleunigung und strahlen deshalb elektromagnetische Wellen ab, deren Leistung proportional zum Quadrat der Beschleunigung ist. Die Rechnung ergibt für den Strahlungsenergieverlust pro Weglänge eines Elektrons mit der kinetischen Energie E_e in einem Medium mit der Atomdichte n_a und der Kernladung Ze

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Str} = \frac{4n_a Z^2 \alpha^3 (\hbar c)^2 E_e}{m_e^2 c^4} \cdot \ln \frac{a(E)}{Z^{1/3}} \quad (5.3)$$

wobei $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ die Feinstrukturkonstante ist und $a(E)$ ein numerischer Faktor, der angibt, bei welchem Stoßparameter das Elektron noch nahe genug am Kern vorbei läuft, um genügend abgelenkt zu werden. Die Strahlungsverluste pro Weglänge nehmen also etwas stärker als linear mit der Energie der Elektronen zu und überwiegen bei großen Energien die Ionisationsverluste.

Die Länge nach der die Energie des Elektrons durch Strahlungsverluste auf $\frac{1}{e}$ abgeklungen ist heißt die Strahlungslänge

$$X_0 = \left(\frac{dE}{dx} \cdot \frac{1}{E_e} \right)^{-1} \quad (5.4)$$

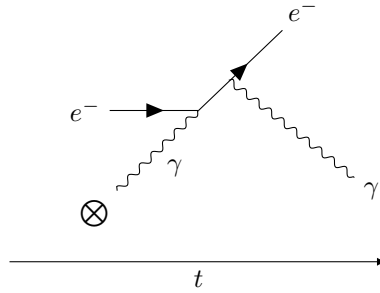


Abbildung 5.3. Feynman-Diagramm für Bremsstrahlung von Elektronen. Es wird ein Atomkern \otimes für die gleichzeitige Impuls- und Energieerhaltung benötigt.

5.3 Wechselwirkung von radioaktiver Strahlung mit Materie

5.3.1 α -Strahlung

α -Strahlung besteht aus schweren Heliumkernen und verhält sich somit wie schwere Teilchen mit Materie. Wir betrachten hier die Zunahme des Energieverlusts bei kleineren Energien.

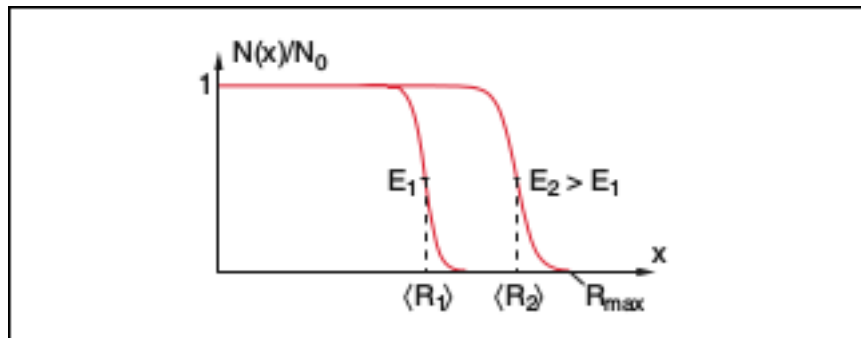


Abbildung 5.4. Reichweite von α -Teilchen in Luft, dargestellt als relative Abnahme der Anzahl

Die Weglänge von α -Teilchen ist scharf begrenzt.

5.3.2 β -Strahlung

β^- -Strahlung besteht aus Elektronen, für die wir das Wechselwirkungsverhalten schon kennen.

β^+ -Strahlung besteht aus Positronen, die beim Durchdringen von Materie sehr bald auf ihr Antiteilchen, das Elektron, treffen und durch Annihilation meist 2 Photonen entstehen und es zu γ -Strahlung kommt.

5.3.3 γ -Strahlung

Für den Nachweis von γ -Strahlung sind die folgenden Wechselwirkungsprozesse von besonderer Bedeutung:

- elastische Streuung (Rayleigh- und Thomson-Streuung)
- Inelastische Streuung (Compton-Effekt)
- Absorption in der Elektronenhülle (Photoeffekt)
- Absorption durch Atomkerne (Kern-Photoeffekt)
- Erzeugung von Teilchen durch γ -Quanten (Paarbildung)

Die Dominanz dieser einzelnen Effekte hängt von der Energie des Photons ab.

5.3.3.1 Rayleigh–Streuung & Thomson–Streuung

Relevant bei **kleinen Energien** ($h\nu < I$).

Es wird ein Photon elastisch an einem geladenen freien oder schwach gebundenem Teilchen gestreut. Das geladene Teilchen wird durch das Feld einer elektromagnetischen Welle zu harmonischen Schwingungen angeregt indem durch das elektrische Feld ein Dipolmoment induziert wird. Da diese Oszillation eine beschleunigte Bewegung ist, strahlen die Teilchen gleichzeitig Energie in Form einer elektromagnetischen Welle gleicher Frequenz ab (Dipolstrahlung). Man sagt die Welle wird gestreut.

Rayleigh–Streuung

Die Energie des Photons ist zu klein, um das Atom anzuregen. Die Streuung findet also nur an gebundenen Elektronen statt. Für den Wirkungsquerschnitt gilt bei diesem Prozess

$$\sigma \propto \nu^4 \quad (5.5)$$

Thomson–Streuung

Thomson–Streuung tritt auf, solange die Energie des einfallenden Photons klein genug ist (Wellenlänge des Photons ist viel größer als Atomradius). Bei kürzeren Wellenlängen, also höheren Energien, muss der Rückstoß des Elektrons berücksichtigt werden (Compton–Streuung). Die Thomson–Streuung ist also der Grenzfall der Compton–Streuung für kleine Photonenenergien. Die Größenordnung des Wirkungsquerschnitts dieser Wechselwirkung lässt sich durch den Thomson–Querschnitt beschreiben:

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-29} m \quad (5.6)$$

5.3.3.2 Gemeinsamkeiten

- Beide Arten der Streuung beruhen auf einem elastischen Stoß.
- Beide Streuprozesse werden als kohärent bezeichnet, da sie die Kohärenz der elektromagnetischen Strahlung erhalten.

(Kohärenz: Auslenkung zweier Wellen ändert sich zeitlich auf dieselbe Weise bis auf eine Phasenverschiebung)

5.3.3.3 Unterschied

Rayleigh-Streuung geschieht an einem gebundenen Elektron, Thomson-Streuung an einem freien bzw. sehr schwach gebundenen Elektron.

5.3.3.4 Compton–Effekt

Bei **höheren** Photoenergien ($h\nu \gg I$) wird der Compton–Effekt wichtig. Ein Photon streut an einem Teilchen und gibt einen Teil seiner Energie an das Teilchen ab. Durch diesen Energieverlust wird die Wellenlänge des Photons größer.

Es handelt sich hierbei um einen elastischen Stoß. Betrachtet man nur das gestreute Objekt, so sieht man, dass es Energie verliert, weshalb man hierbei von inelastischer Streuung spricht. Für sehr hohe Energien ($E_\gamma \gg m_e c^2$) gilt für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_C \propto \frac{Z}{E_\gamma} \quad (5.7)$$

Für mittlere Energien gilt für den Compton–Streuquerschnitt

$$\sigma_C \propto \sigma_T Z \quad (5.8)$$

mit dem Thomson-Wirkungsquerschnitt: $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}$

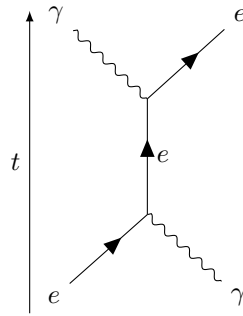


Abbildung 5.5. Feynman-Diagramm für Compton-Streuung

5.3.3.5 Photoeffekt

Als Photoeffekt bezeichnet man die Absorption des Photons mit der Energie $h\nu > I$ durch ein Hüllenelektron, welches durch diese Energiezufuhr das Atom verlässt. Da anders als beim Compton–Effekt das Photon absorbiert wird und deshalb verschwindet, können Energie- und Impulserhaltung nur gleichzeitig erfüllt werden, wenn das Atom einen Teil des Impulses aufnimmt (Rückstoß). Deshalb gibt es keinen Photoeffekt an freien Elektronen.

Summiert man den Wirkungsquerschnitt über alle Z Hüllenelektronen so erhält man als gesamten Wechselwirkungsquerschnitt für $E_\gamma > I$

$$\sigma_{\text{Ph}} \propto \left(\frac{Z^5}{E_\gamma} \right)^{7/2} \quad (5.9)$$

Sodass σ_{Ph} sehr stark mit steigender Photonenenergie E_γ abfällt. Dieser Abfall flacht für sehr hohe Photonenenergien ab und man erhält für $E_\gamma \gg I$

$$\sigma_{\text{Ph}} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma} \quad (5.10)$$

Wir sehen hieran, dass für schwere Elemente der Photoeffekt wegen seiner starken Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z der dominierende Absorptionsmechanismus für Photonen der Energie $E_\gamma < m_e c^2$ ist.

5.3.3.6 Paarbildung

Wenn die Energie der Photonen $E_\gamma > 2m_e c^2$ ist, öffnet sich ein neuer Absorptionskanal, die Paarbildung.

Hierbei erzeugt ein Photon im Coulomb-Feld des Atomkerns ein Elektron–Positron–Paar. Auch hier können Energie und Impuls nur dann gleichzeitig erhalten werden, wenn der Atomkern einen Rückstoß aufnimmt.

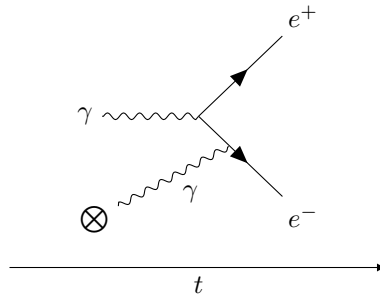


Abbildung 5.6. Feynman-Diagramm für Paarbildung, es wird ein Atomkern für die gleichzeitige Impuls- und Energieerhaltung benötigt

Der Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung ist

$$\sigma_P \propto Z^2 \ln(E_\gamma) \quad (5.11)$$

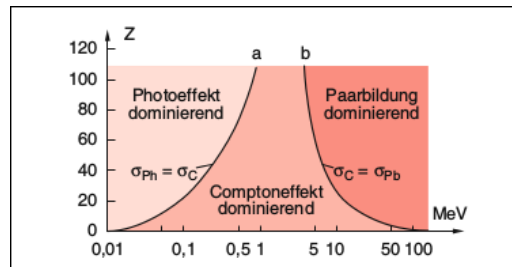
Dieser steigt anfangs logarithmisch mit der Photonenenergie an, um dann bei sehr hohen Energien $E_\gamma \gg 2m_e c^2$ fast konstant zu werden.

Die Bedeutung der einzelnen Prozesse für die Absorption von Photonen in den verschiedenen Energiebereichen hängt von der Kernladungszahl Z des Absorptionsmaterials ab.

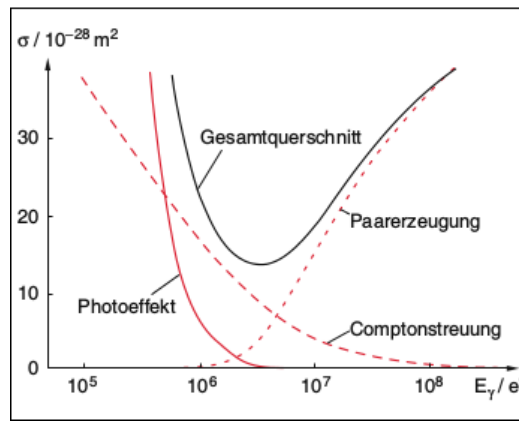
5.3.3.7 Photoeffekt vs. Comptoneffekt vs. Paarbildung

Strahlung	Name	Bedingung	$\frac{dE}{dx}$	Sonstiges	Wirkungsquerschnitt
Elektron	Bremsstrahlung	$E \geq 580 \frac{MeV}{Z}$	$\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$ mit X_0 : Empirische Länge, abhängig von Absorbermaterial Länge nach der E auf $1/e$ abgefallen ist (Strahlungslänge)	Kern für Impulsübertrag nötig	$\sigma_{Br} \propto \frac{Z\alpha^3}{(m_e c^2)^2}$ Bei schwereren Teilchen sehr klein, daher irrelevant.
Schwere Teilchen Elektronen	Ionisation		Bethe-Formel (5.1) mit Z: Kernladungszahl I: Anregungspotential $n = \frac{Z\rho}{A_u}$ Elektronendichte des Absorbers $\left(\text{bei kleinem Impuls } \frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{\beta^2} \right)$	Ionisationsenergie des Mediums: $I \approx (10Z + 1) \text{ eV}$ Reichweite: $R = \int_{E_{kin}}^0 \frac{1}{dE/dx} dE$	
Schwere Teilchen	Pion-Erzeugung	$E = \sqrt{s} \geq 2m_p c^2 + m_\pi c^2 = 2m_p c^2 + 140 \text{ MeV}$		Starke Wechselwirkung Wenn Pionen andere Wechselwirkungen induzieren Hadronenschauer mit Länge $\lambda_{int} = \frac{1}{\rho_a \sigma_{\pi aa}}$	30 mb für $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$ 80 mb für $\sqrt{s} = 10 \text{ TeV}$
Photon	Photoeffekt	$E_\gamma \in [10keV, 1MeV]$		Nukleare Wechselwirkungslänge	$\sigma_{ph} \propto \frac{Z^5}{\sqrt{E_\gamma}}$
Photon	Comptoneffekt	$h\nu \gg I$		$-\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} \leq \frac{2}{m_e c^2}$	$\sigma_C \propto \frac{\alpha Z^2}{E_{CM}}$
Photon	Paarbildung	$E_\gamma \geq 2m_e c^2$			mit $E_{CM} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + 2E_\gamma m_e c^2}$ $\sigma_C = \pi r_E^2 Z \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \left(\ln \left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2} + \frac{1}{2} \right) \right)$ $\sigma_P \propto Z^2 \ln(E_\gamma)$

Tabelle 5.1. Zusammenfassung und Ergänzungen



(a) Die dominanten Bereiche für Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung als Funktion der Ordnungszahl Z des Absorbers und der Energie E_γ der γ -Quanten



(b) Wirkungsquerschnitt σ_{Ph} für Photoeffekt, σ_C für Compton-Effekt, und σ_{Pb} für Paarbildung für Blei ($Z=82$) als Funktion der γ -Energie

Abbildung 5.7. Vergleich von Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung im Hinblick auf (a) Kernladungszahl (b) Wirkungsquerschnitt

6 Elementarteilchen-Zoo

6.1 Charakterisierung durch Wechselwirkung

von HeinStein & HerMitsch

Elementarteilchen lassen sich anhand folgender Größen klassifizieren:

- Masse
- Spin
- Quantenstatistik
- Ladung
- Lebensdauer (falls instabil)

Teilchen lassen sich in verschiedene Typen unterteilen:

- Elementarteilchen:
 - unteilbar, keine Struktur oder Anregung
 - punktförmig ($r < 1 \times 10^{-18} \text{ m}$)
 - z.B: Elektron, Neutrino, Quark
- Austausch-/Feldteilchen: vermitteln Wechselwirkung z.B: Photon
- Zusammengesetzte Teilchen:
 - gebundene Zustände von Elementarteilchen
 - z.B: Atom, Proton, Neutron

6.1.1 Masse

Anhand des Aston'schen Massenspektrometers lässt sich die Masse von Elementarteilchen experimentell bestimmen. Man verwendet dazu eine Kombination von elektrischen und magnetischen Feldern, wobei sich durch die Ablenkung des Teilchens in diesen die Masse bestimmen lässt.

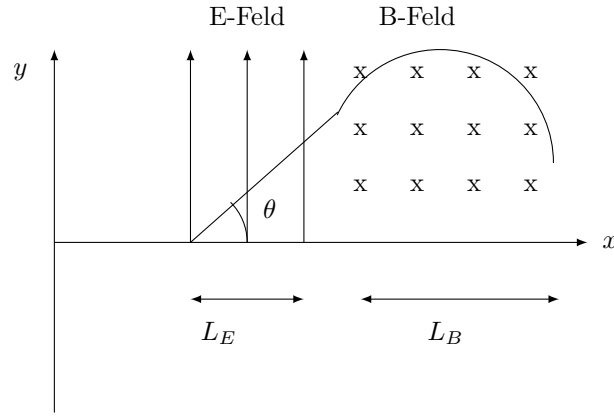


Abbildung 6.1. Aufbau eines Massenspektrometers

Nachdem das Teilchen das E-Feld durchlaufen hat ist seine Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = a_y \cdot t = \frac{F}{m} \cdot \frac{L_E}{v_x} \quad (6.1)$$

Für den Einfallswinkel des Teilchens folgt:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qEL_E}{mv_x} \quad (6.2)$$

Nachdem das Teilchen das B-Feld durchlaufen hat ist seine Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = v_{0y} + \frac{qBL_B}{mv_x} \quad (6.3)$$

Durch geeignete Dimensionierung der Apparatur werden Teilchen gleicher Masse unabhängig von Geschwindigkeit gleich stark abgelenkt. Auf diese Weise lassen sich die Massen stabiler Teilchen bestimmen. Bei instabilen Teilchen misst man den Impuls sowie die Flugzeit (mittlere Lebensdauer) und bestimmt die Masse via:

$$pc = \beta\gamma mc^2 \quad (6.4)$$

$$t = \frac{L}{\beta c} \quad (6.5)$$

Bei zu kurzen Lebensdauern misst man den Viererimpuls der Zerfallsprodukte,

$$P^2 = (P_1 + P_2)^2 = \frac{1}{c^2}(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = m_x^2 c^2 \quad (6.6)$$

wobei man die invariante Masse m_x im Ruhesystem des Ursprung des Teilchens erhält über:

$$m_x = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)} \quad (6.7)$$

Wenn X ein Zerfallsprodukt von Y ist, kann durch die beim Zerfall freiwerdende Energie (Q-Wert) die Masse von X berechnet werden, sofern man die Masse von Y kennt.

6.1.2 Spin

Man kann Teilchen ebenfalls durch ihren Spin klassifizieren. Diesen kann man über eine Messung des magnetischen Moments μ eines Teilchens bestimmen. Es gilt:

$$\vec{\mu}_s = \frac{g_s \mu_0}{\hbar} \vec{S} \quad (6.8)$$

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad \text{Magneton} \quad (6.9)$$

Der Faktor g ist in diesem Fall das gyromagnetische Verhältnis, welches individuell vom Teilchen abhängt (für Elektronen: $g_s \approx -2$). Für andere Wechselwirkungen gibt es andere g -Faktoren, doch dazu später.

Man unterscheidet prinzipiell anhand des Spins 2 Teilchenarten:

- Teilchen mit halbzahligem Spin: Fermionen
 - Elektronen, Quarks, Neutrinos
 - Fermi-Dirac-Statistik
- Teilchen mit ganzzahligem Spin: Bosonen
 - Photon, Higgs-Boson
 - Bose-Einstein-Statistik

Man unterscheidet für die jeweiligen Werte noch verschiedene Arten Bosonen

– $S = 0$	Skalarboson	Pion, Higgs-Boson
– $S = 1$	Vektorboson	Photon, Eichboson
– $S = 2$	Tensorboson	Graviton (hypothetisch)

6.1.3 Klassifizierung anhand Wechselwirkung

Es gibt 4 fundamentale Wechselwirkungen:

- Gravitation

- Elektromagnetische Wechselwirkung
- Schwache Wechselwirkung (z.B. β -Zerfall)
- Starke Wechselwirkung (Bindung von Nukleonen im Kern / Quarks im Nukleon)

Die Stärke dieser Wechselwirkungen wird charakterisiert durch eine dimensionslose Kopplungskonstante, die Ladung und die Reichweite. Wechselwirkungen werden durch Austauschteilchen vermittelt, die allerdings nur aufgrund der Unschärferelation überhaupt existieren können.

Austauschteilchen bleiben in sogenannten virtuellen Zuständen und für die Außenwelt unsichtbar. Jedoch konnten die messbaren physikalischen Prozesse mit diesem Modell mit sonst nicht erreichter Präzision erklärt werden.

6.1.3.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Das Austauschteilchen dieser Wechselwirkung ist das Photon. Das Potential eines Elektrons, das diese Wechselwirkung auslöst ist gegeben durch:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (6.10)$$

Durch Fouriertransformation vom Orts- in den Impulsraum kann man dieses Potential auch durch das Minkowski-Quadrat des Impulsübertragsvektors q darstellen. Das Potential nimmt folgende Form an:

$$V(q^2) = \frac{e^2 \hbar^2}{q^2} \quad (6.11)$$

Die Kopplungskonstante für diese Wechselwirkung ist:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (6.12)$$

6.1.3.2 Schwache Wechselwirkung

Diese Wechselwirkung wirkt nur auf sehr kleine Abstände, die kleiner als ein Atomradius sind. Sie tritt vorallem bei Zerfällen und Umwandlungen von Teilchen auf (z.B. β -Zerfall). Die Austauschteilchen dieser Wechselwirkung sind Eichbosonen (Z^0 , W^+ , W^- -Boson).

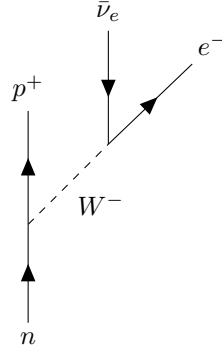


Abbildung 6.2. Neutron-Zerfall mit W^- -Boson als Austauschteilchen. Dieser Zerfall ist die Ursache für die β^- -Strahlung.

Das Potential dieser Wechselwirkung ist:

$$V_{\text{weak}} = \frac{g_{\text{weak}}^2}{r} \cdot \exp\left(-\frac{m_{\text{weak}} r}{\hbar c}\right) = \frac{g_{\text{weak}}}{q^2 + m_{\text{weak}}^2} \quad (6.13)$$

Wobei man sich den g-Faktor als Analogon zur Ladung vorstellen kann und mit der Masse m_{weak} die Masse der Austauschteilchen gemeint ist, welche groß ist ($m_{\text{weak}} = 80.4 \text{ GeV}$ für W^\pm -Bosonen).

Aufgrund der Massenbehaftung hat diese Wechselwirkung eine kurze Reichweite

$$\Delta x = 2 \times 10^{-18} \text{ m} \quad \text{für} \quad \beta = 0.02 \quad (6.14)$$

$$\Delta x = 90 \times 10^{-18} \text{ m} \quad \text{für} \quad \beta = 0.7 \quad (6.15)$$

Unabhängig von der Geschwindigkeit β der Austauschteilchen kann man also sagen, dass die Größenordnung der Reichweite sehr klein ist. Die Kopplungskonstante ist für diese Wechselwirkung auch klein, was sich darauf zurückführen lässt, dass die g-Faktoren klein vergleichsweise zur Elementarladung sind.

$$\frac{g_{\text{weak}}^2}{\hbar c} = 4 \cdot 10^{-3} \quad (6.16)$$

6.1.3.3 Starke Wechselwirkung

Diese Wechselwirkung erklärt die Bindung von Quarks in Hadronen. Auch hier wird der Austausch durch Eichbosonen beschrieben, den sog. Gluonen.

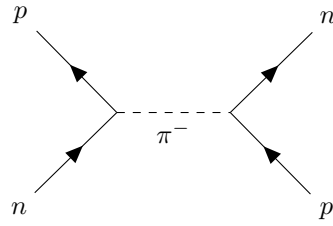


Abbildung 6.3. Proton–Neutron–Wechselwirkung aufgrund starker Wechselwirkung mit negativ geladenem Pion als Austauschteilchen

Das Potential ist ähnlich wie das der schwachen Wechselwirkung:

$$V_{\text{strong}} = \frac{g_{\text{strong}}^2}{r} \cdot \exp\left(-\frac{m_{\text{strong}} r}{\hbar c}\right) = \frac{g_{\text{strong}}}{q^2 - m_{\text{strong}}^2} \quad (6.17)$$

Die Masse der Austauschteilchen sind $m_{\text{strong}} = m_{\pi} = 140 \text{ MeV}$ für Pionen.

Die Kopplungskonstante ist hier sehr groß:

$$\frac{g_{\text{strong}}^2}{\hbar c} = 15 \quad (6.18)$$

Die Reichweite ist hier immernoch klein, jedoch 1000-mal größer als bei der schwachen Wechselwirkung. Ab einer Reichweite von $\sim 2.5 \text{ fm}$ gleichen sich starke Wechselwirkung und Coulomb-Kraft aus. Dies erklärt die Größenordnung von Atomkernen. Die Reichweite beträgt

$$\Delta x = 1.4 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (6.19)$$

6.1.3.4 Wechselwirkung zwischen Quarks

Allgemeiner lässt sich die starke Wechselwirkung als Wechselwirkung zwischen Quarks auffassen, die Bestandteile der Hadronen sind und Gluonen austauschen. Das Potential hat hier folgende Form:

$$V_{\text{strong}} = -\frac{4}{3} \frac{g_{\text{strong}}^2}{4\pi r} + k \cdot r \quad (6.20)$$

Mit der Konstanten $k = 1 \text{ GeV/fm}$ welche besagt, wieviel Energie man pro Abstand aufwenden muss um dem Potential entgegenzuwirken.

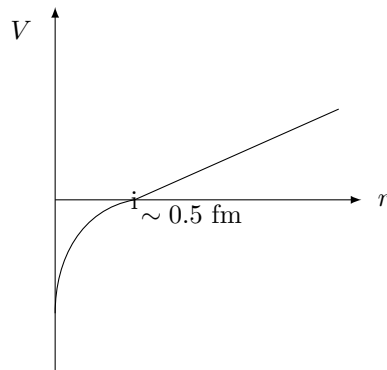


Abbildung 6.4. Potential der Quarkwechselwirkung

Quarks können nicht alleine existieren. Versucht man 2 Quarks zu trennen, so ist das Potential irgendwann so groß, dass aus dieser Energie wieder ein neues Quark-Antiquark-Paar entsteht (Confinement-Hypothese¹).

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Color_confinement#/media/File:Gluon_tube-color_confinement_animation.gif

6.2 Übersicht des Elementarteilchen-Zoos

von HeinStein & SØni

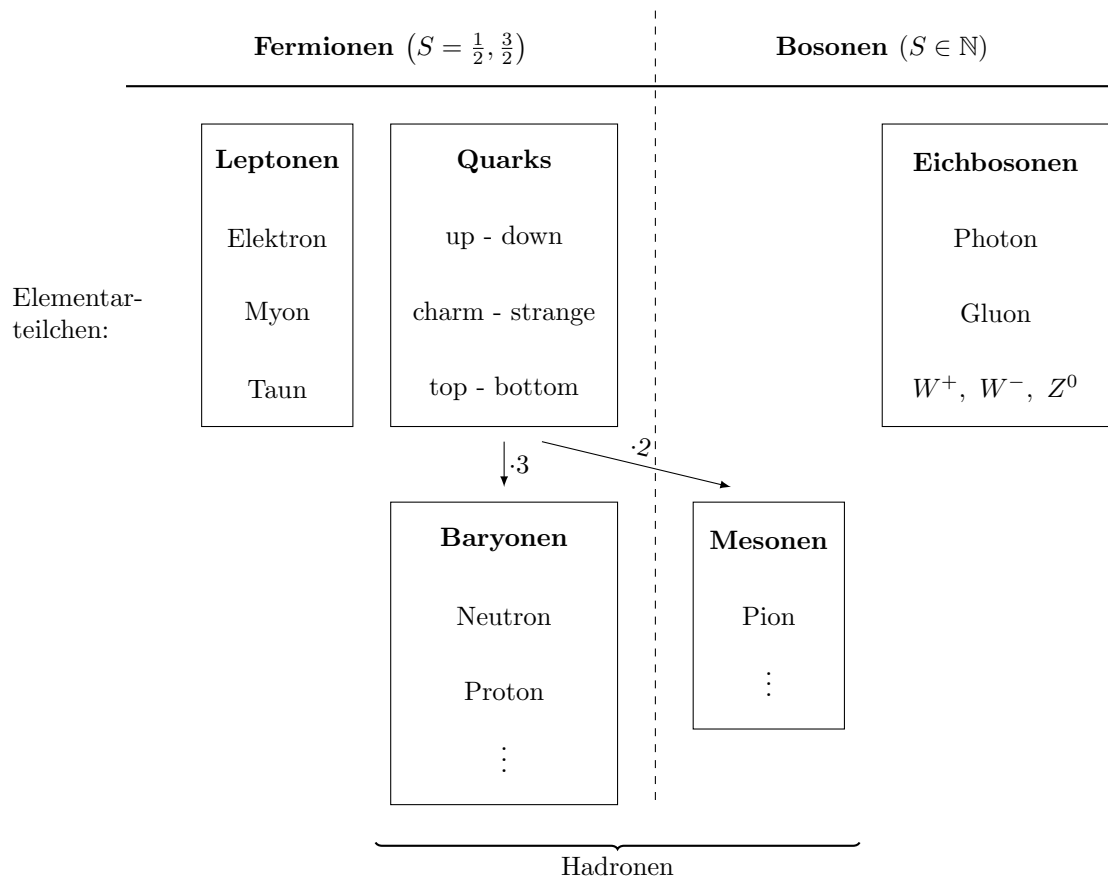


Tabelle 6.1. Übersicht des Elementarteilchen-Zoos

6.2.1 Anmerkungen

- Es gibt 8 unabhängige Gluonen, die sich in ihrer Farbladung unterscheiden
- Das Higgs-Boson ist ein weiteres Elementarteilchen, das sich keiner der 3 Gruppen zuordnen lässt und Teil des Higgs-Feldes ist. (Annahme: durch Wechselwirkung mit dem Higgsfeld erhalten Teilchen ihre Masse.)

6.3 Leptonen

- Es gibt 3 Generationen: e , μ , τ
- In jeder Generation ein Teilchen mit $q = -e$ und eines mit $q = 0$ sowie deren Antiteilchen
- Antiteilchen haben entgegengesetztes Vorzeichen bei Ladung und Leptonenzahl

Generation	$q = -1$	$q = 0$	Leptonenzahl ($= n_L - n_{\bar{L}}$)
1	e^-	ν_e	$L_e = 1, L_\mu = 0, L_\tau = 0$
2	μ^-	ν_μ	$L_e = 0, L_\mu = 1, L_\tau = 0$
3	τ^-	ν_τ	$L_e = 0, L_\mu = 0, L_\tau = 1$

Tabelle 6.2. Übersicht der 3 Leptonen-Generationen und ihrer Eigenschaften

Die Antileptonen werden wie folgt notiert: e^+ , μ^+ , τ^+ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$. Sie haben **negative** Leptonenzahl.

Beispiel

Myon zerfällt zu einem Elektron und zwei Neutrinos:

	μ^-	\rightarrow	e^-	$+$	$\bar{\nu}_e$	$+$	ν_μ
q	-1		-1		0		0
L_e	0		1		-1		0
L_μ	1		0		0		1

Tabelle 6.3. Myonenzerfall

Ladung und Leptonenzahl bleiben **erhalten**. Die Masse der Produkte darf die des Edukts nicht überschreiten ("kinematisch erlaubt").

6.4 Quarks

Für Quarks und Hadronen (Quark-Komposita) führen wir weitere Quantenzahlen ein. Da up- und down-Quark sehr ähnliche Eigenschaften (Masse) besitzen,

können sie durch eine gemeinsame Quantenzahl beschrieben werden (wird in folgenden Kapiteln präzisiert).

Generation	Flavour	q	I_3	S	C	B	T
1	d (<i>down</i>)	$-1/3$	$-1/2$				
	u (<i>up</i>)	$2/3$	$1/2$				
2	s (<i>strange</i>)	$-1/3$		-1		0	
	c (<i>charm</i>)	$2/3$			1		
3	b (<i>bottom</i>)	$-1/3$		0		-1	
	t (<i>top</i>)	$2/3$					1

Tabelle 6.4. Übersicht der 3 Quark-Generationen und deren Eigenschaften

Hierbei steht I_3 (auch I_z) für die z-Projektion des sog. Isospins I und S , C , B , T für weitere Quantenzahlen: Strangeness, Charmness, Bottomness und Topness.

Antiquarks haben umgekehrtes Vorzeichen bei Ladung und Quantenzahlen/Isospin. I_3 , S , C , B , T sind Flavour-Quantenzahlen:

6.4.1 Flavour-Quantenzahlen I_3 , S , C , B , T

Die z-Projektion des Isospins ist definiert durch

$$I_3 = \frac{1}{2} ((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})) \quad (6.21)$$

Hieraus folgt für up- und down-Quarks:

$$up - Quark : I_3 = \frac{1}{2}; \quad down - Quark : I_3 = -\frac{1}{2} \quad (6.22)$$

$$C = n_c - n_{\bar{c}} \rightarrow charm - Quark : C = 1 \quad (6.23)$$

$$S = n_s - n_{\bar{s}} \rightarrow strange - Quark : S = -1 \quad (6.24)$$

$$T = n_t - n_{\bar{t}} \rightarrow top - Quark : T = 1 \quad (6.25)$$

$$B = n_b - n_{\bar{b}} \rightarrow bottom - Quark : B = -1 \quad (6.26)$$

wobei n jeweils die Anzahl der (Anti-)Quarks beschreibt.

6.4.2 Farbladung

Die Farbladung ist eine weitere Quantenzahl. Quarks können 3 verschiedene Farbladungen annehmen: r , g , b (rot, grün, blau)

Antiquarks können 3 Antifarben annehmen: \bar{r} , \bar{g} , \bar{b} (cyan, magenta, gelb)

Alle gebundenen Zustände sind farbneutral (**Confinement-Hypothese**). Dies kann auf 2 Arten erreicht werden:

- Kombination von Quark und Antiquark (Mesonen)
 - Farbe + Antifarbe = Neutral
 - Zerfallen in Sekundenbruchteilen
- Kombination aller 3 Farben, also 3 Quarks (Baryonen)
 - $r + g + b = \text{weiß}$ (neutral)

Gluonen tragen jeweils eine Farb- und Antifarbladung.

→ $3^2 = 9$ Kombinationsmöglichkeiten

→ davon ist aber eine neutral → 8 Möglichkeiten

- Leptonen unterliegen der schwachen WW, der Gravitation und – falls sie geladen sind – der elektromagnetischen Wechselwirkung.
- Quarks unterliegen allen Wechselwirkungen

6.5 Zerfallsbreite

von ~~no~~ **Fabs**
were given

Wir wollen die Lebensdauer von kurzlebigen Teilchenzuständen (=Resonanzen: aus Stoßprozessen entstandene instabile Teilchen) herausfinden.

Der Zerfall eines instabilen Teilchens / einer Resonanz erfolgt nach dem Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{1}{\tau} \quad (6.27)$$

Der Zustand einer festen Energie E_r ist durch die Wellenfunktion gegeben:

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_0}_{\text{ortsabhängig}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{iE_r t}{\hbar}\right)}_{\text{zeitabhängig}} \quad (6.28)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, ein Teilchen zu finden, ist:

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \quad (6.29)$$

\Rightarrow zeitlich konstant, kein Zerfall.

Dies führt uns zu dem Problem, dass sich auch für instabile Teilchen nur konstante Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben.

6.5.1 Lösungsansatz

Wähle komplexe Energie für zerfallende Teilchen:

$$E = E_r - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma \in \mathbb{R} \quad (6.30)$$

Einsetzen in obige Gleichungen für Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte führt uns auf:

$$\psi(t) = \psi_0 \exp\left(-i\frac{E_r t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}\right) \quad (6.31)$$

$$\psi^* \psi = \psi_0^2 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right) \quad (6.32)$$

Hieraus folgt ein exponentieller Zerfall mit $\frac{\Gamma}{\hbar} = \lambda = \frac{1}{\tau}$; $\Gamma\tau = \hbar$

Nun betrachten wir die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion: $\psi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi(E)$:

$$\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(t) \exp\left(i\frac{Et}{\hbar}\right) dt \quad (6.33)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-t\left(\frac{i}{\hbar}(E_r - E) + \frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\right) dt \quad (6.34)$$

$$= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - E_r) + \frac{i\Gamma}{2}} \quad (6.35)$$

Daraus erhalten wir nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(E)$ des Zerfalls:

$$P(E) = A \cdot \psi^*(E)\psi(E) \quad (6.36)$$

mit Normierung:

$$A = \frac{\Gamma}{\hbar^2 \psi_0^2} \quad (6.37)$$

$P(E)$ heißt Lorentz- oder Breit-Wigner-Verteilung. Sie besitzt ein Maximum bei E_r , ihre FWHM (= Full Width Half Maximum) bzw. Halbwertsbreite beträgt Γ .

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.38)$$

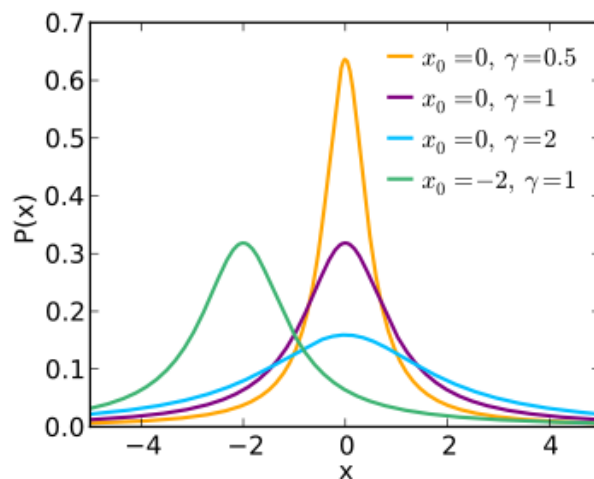


Abbildung 6.5. Beispiele der Funktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lorentz-Verteilung

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt jedes Teilchen eine Energiebreite Γ . Über die Heisenberg'sche Energie-Zeit Unschärfe-Relation $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$ ist die Lebensdauer eines instabilen Zustandes mit der Energieunschärfe verknüpft. Wird die Lebensdauer unmessbar klein, wechselt man zur Zerfallsbreite $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$, was eine messbare Größe ist.

Γ und τ werden durch freigesetzte Energie (Phasenraum) und Art der Wechselwirkung bestimmt:

WW	Teilchen	τ	Γ
stark	$\Delta(1232)$	10^{-23} s	100 MeV
el.mag.	π^0	10^{-18} s	1 keV
schwach	π^\pm	10^{-8} s	10^{-7} eV
	n	10^3 s	10^{-18} eV

Tabelle 6.5. Übersicht einiger kurz- und langlebiger Teilchen(zustände). $\Delta(1232)$ ist ein Delta-Baryon (oder Delta-Resonanz) mit $m = 1232 \text{ MeV}/c^2$

7 Strukturinformation aus Streuexperimenten

von mARTina

Definition Struktur: Räumliche Verteilung von Masse, Ladung und Magnetisierung

Um etwas über die räumliche Struktur zu erfahren, misst man den Wirkungsquerschnitt (Streuwahrscheinlichkeit in Form einer Fläche) in Abhängigkeit vom Streuwinkel (der mit dem Impulsübertrag zusammenhängt).

7.1 Elastische Streuung

7.1.1 Rutherford-Streuung

α -Teilchen streuen an einer Goldfolie. Dieses Experiment führte zur Entdeckung der Atomkerne.

Annahme über Streupartner: punktförmig, geladen, $E_{kin} \ll$ Masse

Rutherford fand für den differentiellen Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkel von Teilchen mit Ladungszahl z der kinetischen Energie T welche unter dem Winkel θ an Teilchen der Kernladungszahl Z streuen folgende Beziehung:

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{16T^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (7.1)$$

Die Messungen zeigten, dass der Atomkern kleiner ist als die Annäherung der α -Teilchen. Es gilt Energieerhaltung:

$$T = \frac{mv'^2}{2} + \frac{zZe^2}{\delta_{min}} \quad (7.2)$$

Wobei v' die Geschwindigkeit des abgelenkten Teilchens nach der Streuung ist (siehe Abb.7.1).

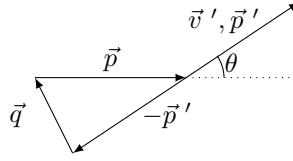


Abbildung 7.1. Impulse bei Streuung

Die größtmögliche Annäherung bei Rückwärtsstreuung ($\theta = 180^\circ$) erhält man mit $v' = 0$ zu:

$$\delta_{min} = \frac{zZe^2}{T} \quad (7.3)$$

Mit Abb. 7.1 lässt sich auch gut der Impulsübertrag \vec{q} berechnen zu:

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (7.4)$$

$$|\vec{q}| = 2 |\vec{p}| \sin(\theta/2) \quad (7.5)$$

Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem Viererimpulsübertrag:

$$q^2 = (E - E')^2 - |\vec{q}|^2 \quad (7.6)$$

Es ist zweckmäßig den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch eine Streuamplitude zu beschreiben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q}^2)|^2 \quad (7.7)$$

Im Falle einer Streuung eines Teilchens an einem kugelsymmetrischen Coulomb-Potential eines Kerns wird das Teilchen durch eine ebene Welle beschrieben. Die Ebene wird durch das Skalarprodukt $\vec{p} \cdot \vec{r}$ beschrieben.

$$\psi_j = \exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \quad (7.8)$$

Die Streuamplitude erhält man nun durch Fouriertransformation des Potentials des Kerns $V(r)$ in den Impulsraum welcher durch den Impulsübertrag \vec{q}^2 beschrieben wird. Wir definieren $q = |\vec{q}|$ und $r = |\vec{r}|$

$$f(\vec{q}^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) \exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) d\vec{r} \quad (7.9)$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int r V(r) \sin\left(\frac{qr}{r}\right) d\vec{r} \quad (7.10)$$

Man kann sich eine Zerlegung der Streuamplitude in Elementarwellen $\exp\left(\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right)$ vorstellen, mit dem Gewichtungsfaktor des Potentials am Ort \vec{r} . Man stellt sich

also die Streuamplitude als Amplitude der Superposition aller Wellenfronten $\exp\left(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)$ vor, wobei eine einzelne Wellenfront stärker/schwächer ins Gewicht fällt, wenn das Potential $V(r)$ an dem Ort \vec{r} größer/kleiner ist. Dies ist plausibel, da falls das Potential $V(r)$ groß/klein ist, die Streuwahrscheinlichkeit auch größer/kleiner ist. Somit sollte die Streuamplitude, welche die Streuwahrscheinlichkeit beschreibt, mit dem Potential $V(r)$ skalieren. Berücksichtigt man die Abschirmung des Potentials von Elektronen so erhält man als Potential

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} e^{-r/a} \quad (7.11)$$

mit dem Skalierungsfaktor $a \approx 1\text{\AA}$

Somit erhalten wir als differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2 z^2 Z^2 e^4}{q^4} \quad (7.12)$$

Für relativistische Teilchen kann $E \approx p$ angenommen werden. Wir erhalten hier als Wirkungsquerschnitt pro Impulsübertrag

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d(q^2)} = \frac{4\pi(zZ)^2 e^4}{q^4} \quad (7.13)$$

Im Laborsystem muss bei relativistischen Teilchen der Rückstoß berücksichtigt werden

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d(q_{cms}^2)} \frac{E'}{E} \quad (7.14)$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{m} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (7.15)$$

7.1.2 Streuung relativistischer Spin 1/2-Teilchen an Punktladung Ze

Berücksichtigt man den Spins eines Teilchens, so muss man das durch den Spin hervorgerufene Magnetische Moment bei Streubetrachtungen hinzuziehen. Dadurch erhält man den **Mott-Querschnitt**

$$\frac{d\sigma^m}{d(q^2)} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{q^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (7.16)$$

7.1.3 Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Für das Potential gilt die Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2 V = 4\pi\rho(r)Ze^2 \quad (7.17)$$

Unter Verwendung einer Green'schen Identität lässt sich das Integral für die Streuamplitude umschreiben

$$\int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) V(r) = -\frac{\hbar^2}{q^2} \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \nabla^2 V(r) \quad (7.18)$$

Und man erhält als differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{q^4} \left| \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r) \right|^2 \quad (7.19)$$

Das letzte Integral hat eine wichtige Bedeutung, weshalb man es als den Formfaktor definiert. Dieser ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung und enthält die ganze Streuinformation des Wirkungsquerschnitts.

$$F(q^2) = \int d\vec{r} \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r) \quad (7.20)$$

Man kann damit den Wirkungsquerschnitt recht einfach aus dem Rutherford-Querschnitt erhalten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} |F(q^2)|^2 \quad (7.21)$$

7.2 Grundlagen zu Wirkungsquerschnitt, Streuung und der Rutherford-Versuch

von MiX & Pauli

Die Wahrscheinlichkeit w , dass ein einfallendes Teilchen mit einem Targetteilchen wechselwirkt, errechnet sich aus:

$$w = \sigma \frac{N_T}{F_T} \quad (7.22)$$

wobei σ der Wirkungsquerschnitt, F_T die bestrahlte Targetfläche und N_T die Anzahl der darin enthaltenen Targetteilchen ist. Also:

$$w \propto \text{Target-Teilchenflächendichte}$$

Vorraussetzung hierfür ist:

$$\sigma N_T \ll F_T$$

Experimentell im Beschleuniger zu bestimmen ist die Reaktionsrate W :

$$W = \frac{dN_{\text{III}}}{dt} = \sigma L \quad (7.23)$$

wobei L die Luminosität des Beschleunigers ist. Dies ist schematisch in Abb. 7.2 dargestellt.

7.2.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\underbrace{j_{\text{Strom}}}_{1/(\text{Zeit} \cdot \text{RWE})} \equiv j_{\text{III}} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) \cdot \underbrace{j_{\text{I}}}_{1/(\text{Zeit} \cdot \text{Fläche})} \quad (7.24)$$

wobei RWE für Raumwinkelement steht.

$$\Rightarrow \sigma = \int_{\Omega \setminus \text{Beam}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (7.25)$$

Ebenso gilt allgemein:

$$I = \iint_F \vec{j} \, d\vec{F} \quad (7.26)$$

7.2.2 Rutherford-Querschnitt

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4E_0 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \right)^2 \quad (7.27)$$

7.2.3 Zusammenhang zw. Streu-/Raumwinkel und Impulsübertrag $|q|$

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (7.28)$$

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (7.29)$$

Herleitung: Impulserhaltung wegen

1. Target sehr schwer
2. Reibung vernachlässigbar (elastischer Stoß)

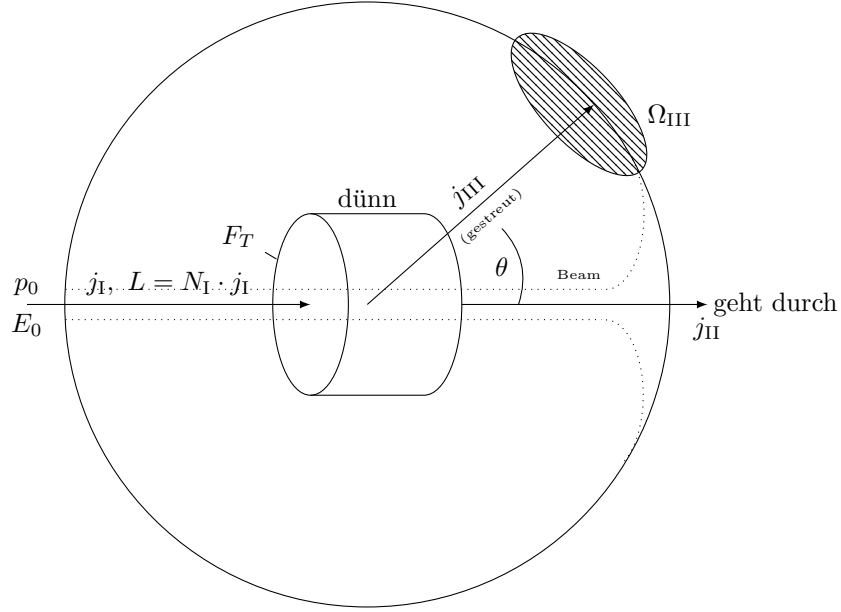


Abbildung 7.2. Streuung eines Teilchenstrahles (Beam) an einem Target bzw. an einer Targetfläche (F_T).

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = \begin{pmatrix} |\vec{p}| \sin \vartheta \cos \varphi \\ |\vec{p}| \sin \vartheta \sin \varphi \\ |\vec{p}| \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\|\vec{q}\|^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = |\vec{p}|^2 \left(\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \underbrace{1 - 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}_{\text{Binom.}} \right) \quad (7.31)$$

Vernachlässigung der quadratischen Terme führt auf:

$$= 2 |\vec{p}|^2 (1 - \cos \vartheta) = 4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \quad (7.32)$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

7.2.4 Raumwinkel Ω

$$\Omega := \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \quad (7.33)$$

für Rutherford folgt hieraus:

$$\Rightarrow d\Omega = \underbrace{\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi}_{=0} + \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (7.34)$$

$$= 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (7.35)$$

$$\int_{S^2} d\Omega = 4\pi \approx 12.57 \text{ sr} \quad (7.36)$$

wobei sr für Steradianen steht.

7.2.5 Differentieller Wirkungsquerschnitt Part II

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{d(4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\pi}{|\vec{p}|^2} \quad (7.37)$$

Herleitung:

$$\left(\frac{d\vartheta}{d(\vartheta')} = \left(\frac{d(4p^2 \sin^2 (\frac{\vartheta}{2}))}{d\vartheta} \right)^{-1} = 4p^2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = 2p^2 \sin \vartheta \right) \quad (7.38)$$

7.2.6 Streuamplitude

Löst man die Schrödingergleichung für die Streuung eines Wellenpakets an einem fixen Target so erhält man als Lösung

$$\Psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f_k(\theta, \phi) \quad (7.39)$$

Dies entspricht einer Superposition von einer ebenen Welle mit einer gestreuten Kugelwelle ($r = |\vec{x}|$), gewichtet mit der Streuamplitude $f_k(\theta, \phi)$. Diese Amplitude korrespondiert zu der Wahrscheinlichkeit das gestreute Wellenpaket im Raumwinkel $\Omega(\theta, \phi)$ aufzufinden. Hieraus folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (7.40)$$

7.3 Zwischenresumée

Wir hatten bisher Stoßprozesse von Elementarteilchen/Hadronen bei hohen Geschwindigkeiten ($v \approx c$) betrachtet. Wichtig ist es dabei, den Wirkungsquerschnitt einfach als "Targetflächendichtebereinigte Reaktionswahrscheinlichkeit"

$$\sigma = P_{WW} \frac{1}{(N/A)_T} \quad (7.41)$$

aufzufassen, die vom Reaktionstyp abhängt. Dieser Wirkungsquerschnitt lässt sich im z.B. kugelförmigen Detektor nach dem Raumwinkel $\Omega := \int_0^\phi \int_0^\theta \sin(\theta') d\theta' d\phi'$ auflösen, wobei erstmal $d\Omega = 2\pi d\phi d\theta$ aufgrund der Azimutalsymmetrie nur von θ (konventiell zur z-Achse ausgerichtet) abhängt. Wir erhalten den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und ferner

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d(q^2)} \stackrel{\text{elastisch}}{=} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\pi}{|\vec{p}|^2} \quad (7.42)$$

wobei der Betrag des Impulses $|\vec{p}|$ des eingehenden Wellenpakets gleich dem Betrag des ausgehenden Wellenpakets ist und $q^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$ der quadrierte Dreierimpulsübertrag ist.

Dies benutzt, dass der Projektilimpuls erhalten ist (niedrige Energie). Außerdem ist $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$ das Betragsquadrat der Streuamplitude $f \in \mathbb{C}$ [Dimension: Länge]

7.3.1 Differenzielle Wirkungsquerschnitte zur Teilchenformbestimmung

Um jetzt die radiale Form von Targetteilchen zu bestimmen werden wir im differentiellen Wirkungsquerschnitt immer mehr elektromagnetische Effekte berücksichtigen.

Name	Beschreibung		Formel
Rutherf.	Projektil Target	punktf. spinlos punktf. spinlos	$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{16 E_{kin}^2 \sin^4(\theta/2)} \text{ oder } \frac{4m_{Proj}^2}{q^4} \text{ oder } \underbrace{\frac{4E_{end}^2}{(qc)^4}}_{\text{relativist.}} \right)$
Mott	Projektil Target	punktf. mit Spin punktf. spinlos	$\frac{d\sigma^M}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \underbrace{(1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))}_{\text{fuer } v \approx c \text{ ungefaehr } \cos^2(\frac{\theta}{2})}$
Dirac	Projektil Target	punktf. mit Spin punktf. mit Spin	$\frac{d\sigma^D}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \left(1 - \beta^2 \underbrace{\frac{(qc)^2}{2E_T}}_{=2M_T^2 c^4} \tan^2(\theta/2) \right)$
Final	Projektil Target	punktf. mit Spin ausgedehnt mit Spin	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (zZe^2)^2 \cdot \frac{4E_{end}^2}{(qc)^4} \cdot \left(\frac{G_E^2 - (qc/2E_T)^2 G_M^2}{1 - (qc/2E_T)^2} - \beta^2 \left(\frac{qc}{2E_T} \right)^2 \cdot G_M^2 \tan^2(\theta/2) \right)$
Rosenbluth Plot-Formel			$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a (G_E^2 - b G_M^2) - d G_M^2 \tan^2(\theta/2)$

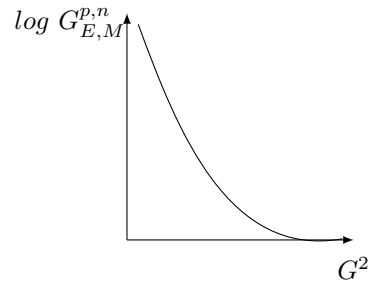
Legende:

- $G_E(q^2)$ - Ladungsverteilung (dimensionslos)
- $G_M(q^2)$ Magnetisierung/Stromverteilung (dimensionslos)
- E_{kin} - Energie des eingehenden Projektils
- E_{end} - Energie des gestreuten Projektils
- $E_T = M_T c^2$ - Energie des ruhenden Targets
- $\beta = \frac{v}{c}$ $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ z, Z - Ladungszahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$

7.4 Struktur der Nukleonen

Trägt man $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gegen $\tan^2(\theta/2)$ auf (Rosenbluth-Plot), so erhält man, dass die Formfaktoren $G_{E,M}^{p,n}$ (elektromagnetisch von Proton/Neutron) voneinander abhängen. Empirisch erhält man die sog. Dipolformel

$$G_E^p(q^2) = \frac{1}{1 + q^2 c^4 / 0.71(GeV)^2} \propto G_M^p \propto G_M^n \quad (7.43)$$



Als Fouriertransformierte des elektrischen Formfaktors erhält man die Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{4.3}{fm} r} \quad (7.44)$$

Um den Kernradius abzuschätzen kann man den rms-Radius ("Root Mean Square") dieser Ladungsverteilung berechnen. Man erhält z.B

- Proton: $\langle r \rangle = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left(\int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \right)^{\frac{1}{2}} = 0.86 \text{ fm}$
- Pion: $\langle r \rangle = 0.66 \text{ fm}$
- Kaon: $\langle r \rangle = 0.53 \text{ fm}$

Die Ergebnisse der Experimente liefern folgendes Bild:

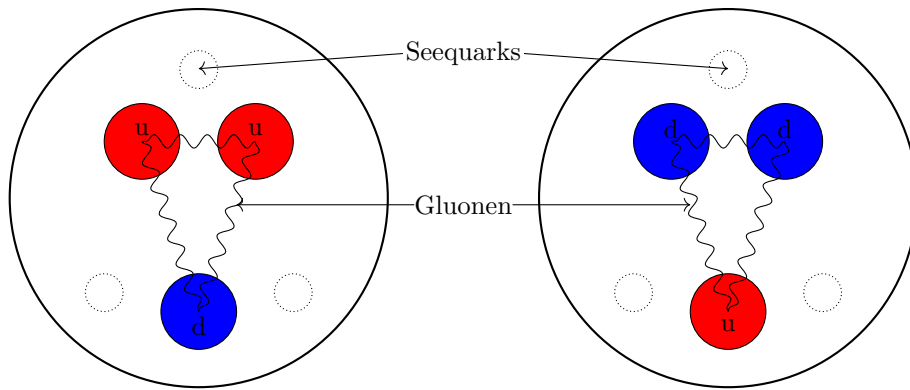


Abbildung 7.3. Substruktur eines Protons(links) und Neutrons(rechts)

- Proton: Valenzquarks uud
- Neutron: Valenzquarks ddu

Die Valenzquarks haben einen Spin und sind geladen, jedoch macht ihre Masse nur 1 % der Gesamtmasse aus. Der Großteil der Masse steckt in den sog. SSeequarks" welche 99 % zur Gesamtmasse beisteuern und deren Gesamtspin und Gesamtladung sich aufheben.

Nun zurück zu den Formfaktoren:

Betrachten wir einen durchgehenden Strahl ($q^2 = 0$) so erhalten wir als Formfaktoren: $G_E^p(0) = 1$ $G_E^n(0) = 0$ $G_M^p(0) = 2.79$ $G_M^n(0) = -1.91$

Diese sind gerade die sogenannten Spin-g-Faktoren der Nukleonen:

- Proton: $\vec{\mu}_p = \underbrace{+2.002 \cdot 2.79}_{\text{Landé-Faktor } g_p=5.59} \cdot \underbrace{\frac{q_p \hbar}{2m_p}}_{\text{Kernmagneton } \mu_N} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$
- Neutron: $\vec{\mu}_n = \underbrace{+2.002 \cdot (-1.91)}_{\text{Landé-Faktor } g_n=-3.83} \cdot \underbrace{\frac{q_p \hbar}{2m_n}}_{\text{Kernmagneton } \mu_N} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$

Zur Erinnerung:

Fließt ein Kreisstrom I durch eine orientierte Fläche \vec{A} so entsteht ein magnetisches Moment [Einheit: Am^2]

$$\vec{\mu} = I \vec{A} = \frac{Q}{T} \pi r^2 \vec{n}_A = \frac{Q}{2m} \vec{L} \quad (7.45)$$

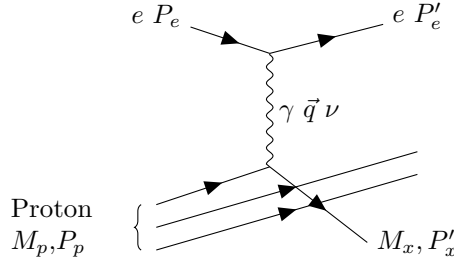
Man schreibt diese Beziehung auch folgendermaßen:

$$\vec{\mu}_{x,L} = g_{x,L} \cdot \mu_x \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (7.46)$$

Diese Größe bezeichnet man als magnetisches Moment des Teilchens x mit Drehimpuls \vec{L} wobei $\mu_x = \frac{q_x \hbar}{2m_x}$ das sog. Magneton des Teilchens x ist.

7.5 Elastische Stöße

Für sehr große Impulsüberträge q kommt es zu inelastischen Stößen. In folgendem Diagramm wechselwirkt ein Elektron welches auf ein Proton zufliegt mit diesem wodurch die 3 Bestandteile des Kerns nach dem Stoß verschiedene Wege gehen.



Im Ruhesystem des Protons sind die Viererimpulse:

$$P_e = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad P_p = \begin{pmatrix} M_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad P'_e = \begin{pmatrix} E' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} \quad P'_x = \begin{pmatrix} E'_x \\ \vec{p}'_x \end{pmatrix}$$

Anhand des Energieerhaltungssatzes lässt sich der Energieübertrag $\nu = E' - E = M_p - E'_x$ definieren.

Wir betrachten nun den Impulsübertrag des Elektrons in Abhängigkeit des Streuwinkels θ

$$\begin{aligned} q_e^2 &= (P_e - P'_e)^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = E^2 - \vec{p}^2 + E'^2 - \vec{p}'^2 - 2EE' + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos(\theta) \\ &= 2m_e^2 - 2\sqrt{m_e^2 + \vec{p}^2}\sqrt{m_e^2 + \vec{p}'^2} + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos(\theta) \stackrel{m_e \text{ klein}}{\approx} -2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos(\theta)) \\ &= -4|\vec{p}||\vec{p}'|\sin^2(\theta/2) < 0 \end{aligned}$$

Somit ist der Impulsübertrag des Elektrons \vec{q}_e ortsartig. Wir verfahren nun analog mit dem Impulsübertrag des Protons.

$$q_p^2 = (E'_x - M_p)^2 - |\vec{p}'_x|^2 = M_x^2 + M_p^2 - 2M_p E_x$$

Mit dem Energieerhaltungssatz folgt

$$\begin{aligned} E + M_p &= E' + E'_x \\ E - E' &= E'_x - M_p = \nu \end{aligned}$$

Wir halten damit fest:

$$q^2 = M_x^2 + M_p^2 - 2M_p(M_p + \nu) = M_x^2 - M_p^2 - 2M_p\nu \quad (7.47)$$

Wir können also anhand des Energieübertrages die Konstituentenmasse M_x berechnen.

7.5.1 Charakterisierung des Stoßes

Mit q^2 und $\nu = \frac{M_x^2 - M_p^2 - q^2}{2M_p}$ lässt sich die Elastizität des Stoßes über die Björken'sche Skalenvariable x charakterisieren:

$$x := \frac{-q^2}{2M_p\nu} \in \left[\begin{matrix} \text{inelastisch} & \text{elastisch} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right] \quad (7.48)$$

7.6 Tiefinelastische Streuung

von Söni & mARTina

Nun wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie die Struktur innerhalb eines Kernes aussieht. Für Energien groß genug dringen die Streuteilchen in den Kern ein. Somit lässt sich die tiefinelastische Streuung als elastische Streuung an **Partonen** = "Konstituenten des Nukleus" beschreiben.

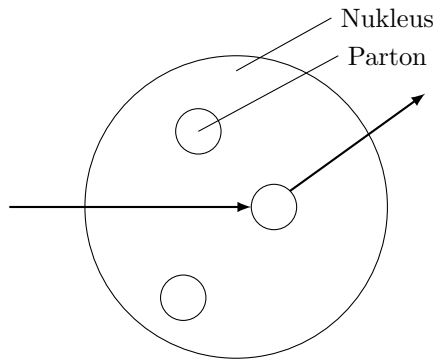


Abbildung 7.4. Schema der elastischen Streuung an Partonen

Bei festen q^2 und ν kann $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ auf der X-Achse und $2W_1(q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} + W_2(q^2, \nu)$ auf der Y-Achse aufgetragen werden. Daraus lässt sich folgender Zusammenhang schreiben:

$$y(x) = 2W_1x + W_2 \quad (7.49)$$

Wir wollen aus Messungen die dimensionslosen Strukturfunktionen F bestimmen:

$$F_1(x, q^2) = Mc^2 W_1(q^2, \nu) \quad (7.50)$$

$$F_2(x, q^2) = \nu W_2(q^2, \nu) \quad (7.51)$$

wobei ν den Energieübertrag (da inelastische Streuung; bei elastischer Streuung nur Impulsübertrag) und x die Bjorken'sche Skalenvariable (Inelastizität der Streuung) beschreiben. x ist definiert durch:

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad (7.52)$$

7.6.1 Wirkungsquerschnitt

Für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2)d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E\nu} \left(F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2\nu}{M} F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7.53)$$

Mit den Beziehungen $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \frac{q^2}{\Delta EE'}$, $\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dx}{x}$ und $y = \frac{\nu}{E}$ (relativer Energieübertrag) folgt:

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2)dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left((1-y) \frac{F_2}{x} + y^2 F_2 \right) \quad (7.54)$$

7.6.2 Quasielastische Streuung an punktförmigen Teilchen

Bei der quasielastischen Streuung an punktförmigen Teilchen hängen F_1 und F_2 nicht von q^2 ab, da die Formfaktoren bei punktförmiger Ladungsverteilung konstant sind.

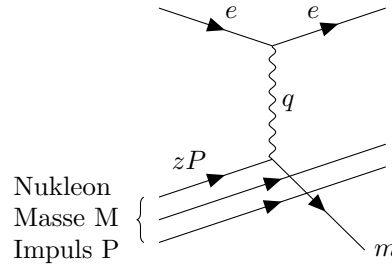


Abbildung 7.5. Schema der quasielastischen Streuung an Partonen. m ist die invariante Masse des Partons, q der 4er-Impulsübertrag

Im Bezugssystem, in dem der Impuls des Protons (Nukleons) $P \rightarrow \infty$, gilt:

Proton	Parton
P	zP
E	zE

wobei $z \in [0, 1)$ ein Lorentzskalar ist. Dann folgt für die invariante Masse des Partons

$$m^2 = (zP + q)^2 = \underbrace{z^2 P^2}_{m^2} + q^2 + 2zPq \quad (7.55)$$

woraus sich für z Folgendes ergibt

$$z = -\frac{q^2}{2Pq} \quad (7.56)$$

wobei hier P den 4er-Impuls und q den 4er-Impulsübertrag darstellt. Um 7.55 besser zu verstehen, betrachten wir nun die 4er-Impulserhaltung und $P \rightarrow \infty$:

$$I : P_e + zP = P_I \quad (7.57)$$

$$II : P'_e + zP + q = P_{II} \quad (7.58)$$

Hier beschreiben P_e und P'_e die (4er-)Impulse des Elektrons vor und nach der Streuung und zP den Anteil des Gesamtimpulses P den das Parton besitzt. Aus der 4er-Impulsquadraterhaltung und $P^2 = \langle P, P \rangle = m^2$ folgt

$$P_I^2 = P_{II}^2 \stackrel{!}{=} m^2 \quad (7.59)$$

Setzen wir nun die Gleichungen 7.57 und 7.58 ein:

$$(P_e + zP)^2 = (P'_e + zP + q)^2 \stackrel{!}{=} m^2$$

Mit der Bedingung $P \rightarrow \infty$ sind

$$P_e, P'_e, q \ll P$$

und somit

$$(zP)^2 = (zP)^2 \stackrel{!}{=} m^2$$

Das 4er-Impulsquadrat ist außerdem

$$P^2 = \begin{pmatrix} E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}^2 \quad (7.60)$$

$$= m^2 + |\vec{p}|^2 - \underbrace{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}_{\text{Minkowski}} \quad (7.61)$$

$$= m^2 + |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 \quad (7.62)$$

$$= m^2 \quad (7.63)$$

was zu zeigen war.

$$(7.64)$$

Hier sieht man sehr schön, dass Gesamtviererimpulsquadrate in abgeschlossenen Systemen **lorentzinvariant** und **erhalten** sind.

Da z ein Lorentzskalar ist, ist das Bezugssystem beliebig:

$$P = (M, \vec{0}) \text{ und } q = (\nu, \vec{q}) \text{ und somit } Pq = M\nu$$

Daraus folgt nun wiederum

$$z = x = -\frac{q^2}{2M\nu} \quad (7.65)$$

Ein Photon mit x wird von einem Parton mit Impulsanteil $x = z$ absorbiert. Im Laborsystem gilt:

$$z = x = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{2m\nu}{2M\nu} = \frac{m}{M} \quad (7.66)$$

Durch den Vergleich der Wirkungsquerschnitte von elastischer und inelastischer Streuung von Spin $1/2$ -Teilchen folgt

für die elastische Streuung:

$$\frac{d\sigma}{d(q^2)} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left(\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{q^2}{2m^2} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \quad (7.67)$$

und für die inelastische Streuung:

$$\frac{d^2\sigma}{d(q^2) dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left(F_2(x) \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{q^2}{2M^2 x^2} 2xF_1(x) \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \frac{1}{x} \quad (7.68)$$

Aus Koeffizientenvergleich folgt:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (7.69)$$

mit der Wahrscheinlichkeit $f_i(x)dx$, das Parton i mit der Ladung e_i im Impulsintervall $[x, x + dx]$ anzutreffen. Überdies folgt aus dem Koeffizientenvergleich auch:

$$\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)} = 1 \quad (7.70)$$

Bei großen q^2 -Werten ist F_2 doch von q^2 abhängig, da das Modell die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen vernachlässigt (z.B. Streuung an Seequarks).

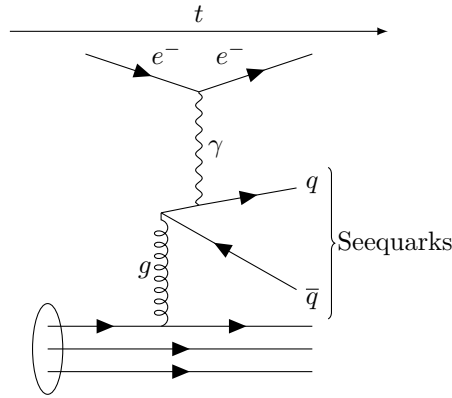


Abbildung 7.6. Feynman-Diagramm der Streuung eines Elektrons an einem Seequark

Die angepasste F_2 ist dann

$$F_2 = \sum_{a=u,d,s} e_a^2 x f_a(x) + \underbrace{e_a^2 x f_{\bar{a}}(x)}_{\text{Antiquarks}} \quad (7.71)$$

Verteilung von Quark/Antiquark-Verteilung mit Elektron- oder Myonstreuung nicht möglich, daher wird Neutrino-Nukleon-Streuung verwendet.

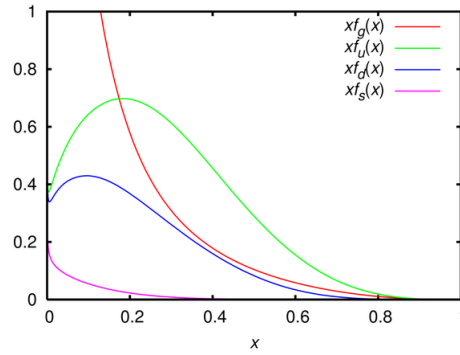


Abbildung 7.7. Quark–Antiquark Verteilung. Für hohe q^2 verschiebt sich der Valenzquarkanteil (blau) nach links.

Aus der Neutrino–Nukleon–Streuung lernt man, dass im Bereich mit dominantem Valenzquarkanteil ($x > 0.3$) gilt:

$$\frac{F_2^{\text{ep}} + F_2^{\text{en}}}{F_2^{\nu\text{p}} + F_2^{\nu\text{n}}} = \frac{e_u^2 + e_d^2}{2} = \frac{5}{18} \quad (7.72)$$

Daran erkennt man natürlich sofort, dass Partonen $1/3$ -wertige Ladungen besitzen, wodurch man Partonen als Quarks identifizieren kann.

8 Starke Wechselwirkung und Quarkstruktur von Hadronen

von Anton , HeinStein , mARTina & HerMitsch

8.0.1 zur Erinnerung

Es existieren 6 Quarks, 6 Antiquarks. Diese

- können nicht alleine existieren (Confinement-Hypothese).
- 3 Quarks bilden ein Baryon
- 2 Quarks ein Meson
- Quarks/Antiquarks besitzen 3 mögliche Farbladungen/Antifarbladungen: r, g, b und $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$

- Gluonen tragen 2 Farbladungen. Die möglichen Kombinationen sind:

$$r\bar{b}, b\bar{r} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (r\bar{r} - g\bar{g})$$

$$r\bar{g}, g\bar{r} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

$$b\bar{g}, g\bar{b} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \quad (\text{wobei diese Kombination neutral ist, also sozusagen nicht zählt.})$$

Gluonen **tauschen** die Farbladungen von Quarks:

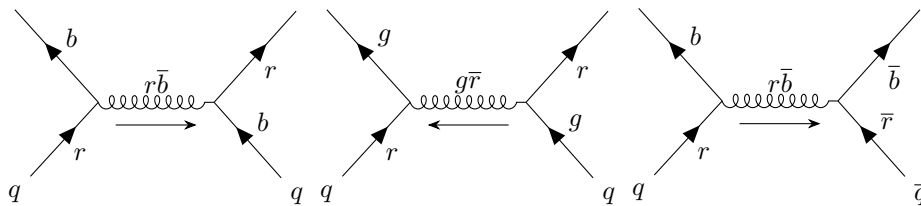


Abbildung 8.1. Feynman-Diagramme des Farbladungsaustausches 2er Quarks (bzw. eines Quarks und Antiquarks)

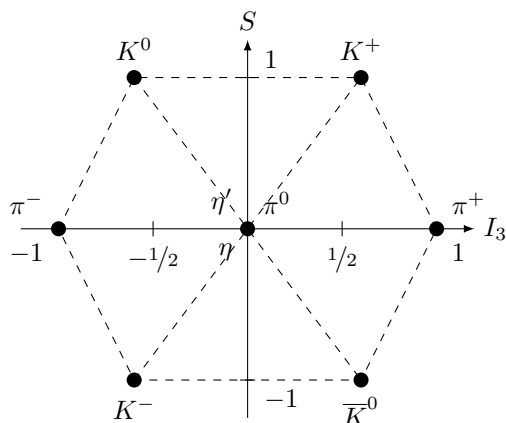
8.1 Mesonen

9 Kombinationen für Mesonen. u, s, d -Quarks als **pseudoskalare Mesonen**:

Meson	Quark-Kombination	I	I_3	S	Masse/MeV
π^-	$d\bar{u}$	1	-1	0	140
π^+	$u\bar{d}$	1	1	0	140
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	1	0	0	135
K^+	$u\bar{s}$	$1/2$	$1/2$	+1	494
K^0	$d\bar{s}$	$1/2$	$-1/2$	+1	498
K^-	$s\bar{u}$	$1/2$	$-1/2$	-1	494
\bar{K}^0	$s\bar{d}$	$1/2$	$1/2$	-1	498
η	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	0	0	0	549
η'	$\frac{1}{\sqrt{3}}(d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$	0	0	0	958

Tabelle 8.1. Pseudoskalare Mesonen

Lässt man S und I_3 eine Ebene aufspannen, bilden die Mesonen dort 9 Punkte, wobei π^0 , η und η' im Ursprung liegen:



u, s, d -Quarks sind die leichtesten Quarks und erzeugen die leichtesten Mesonen. Pseudoskalare Mesonen haben $J = 0$, Vektormesonen haben $J = 1$. Vektormesonen bestehen aus den gleichen Quarks, haben aber gleichgerichteten Spin. Da

dies einem angeregten Zustand gleichkommt und eine höhere Energie bedeutet, haben Vektormesonen eine höhere Masse.

Anschaulich:

$$\rho\text{-Meson: } |u\bar{d}\rangle \rightarrow M = 775 \text{ MeV}$$

$$\omega\text{-Meson: } \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \rightarrow M = 793 \text{ MeV}$$

Diese beiden Mesonen sind sehr ähnlich.

Beispiel

Meson	Zusammensetzung	Masse
Analog zu π^+ : ρ -Meson	$u\bar{d}$	775 MeV
Analog zu K^+ : K^{*+} -Meson	$u\bar{s}$	891 MeV

Vektormesonen haben eine sehr kurze Lebensdauer und zerfallen in mehrere Skalarmesonen.

8.2 Baryonen

Baryonen bestehen aus 3 Quarks, ihr Spin ist halbzahlig \rightarrow Fermionen

Da es das leichteste Teilchen ist, ist das Proton das einzige stabile Baryon.

Da die Quarks jeweils Spin $1/2$ haben, können sie zu Gesamtspin $J = 1/2$ oder $J = 3/2$ koppeln.

8.2.1 Das Baryon-Oktett ($J = 1/2$)

Mit den "ursprünglichen" drei Quarks u, d, s kann man 8 Baryonen kombinieren. Mit u und d lassen sich das Proton uud und das Neutron udd bilden. Die Kombinationen uuu und ddd sind aufgrund des Pauli-Prinzipes verboten.

Die Iso-Spins der beiden koppeln jeweils zu $\pm 1/2$, da u den Iso-Spin $I_3 = 1/2$ und d den Iso-Spin $I_3 = -1/2$ besitzen.

8.2.2 Das Baryon-Dekuplett ($J = 3/2$)

Lässt sich analog zum Oktett erklären, allerdings sind nun auch symmetrische Quark-Kombinationen möglich, z.B. Δ^{++} mit der Kombination uuu .

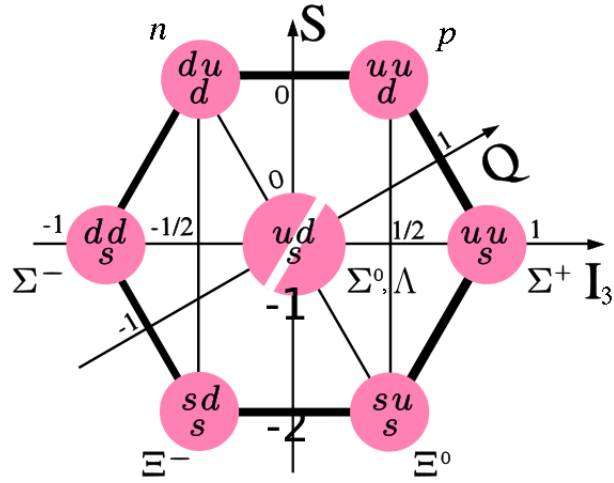


Abbildung 8.2. Baryon-Oktett

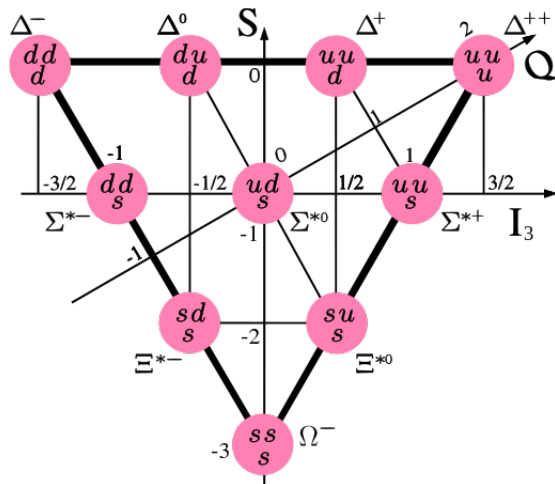


Abbildung 8.3. Baryon-Dekuplett

Die Wellenfunktion eines Baryons hat Anteile im Orts-, Spin-, und Iso-Spinraum:

- Ortswellenfunktion ist für Δ^{++} symmetrisch, da die 3 up-Quarks ununterscheidbar sind

- Da alle 3 Spins zu $3/2$ koppeln, sind auch diese symmetrisch
- Analog gilt dies für die Iso-Spin-Wellenfunktion

→ Die Gesamtwellenfunktion ist also symmetrisch

Fermionen müssen aber **antisymmetrische** Wellenfunktionen haben! Daher muss für Quarks noch eine weitere Quantenzahl postuliert werden; die **Farbe**.

Konstruktion von 3 Farben:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} u_i u_j u_k \quad (8.1)$$

Theoretische Vorhersagen unter Berücksichtigung der Farbladungen beschreiben die experimentellen Ergebnisse sehr genau. Die theoretischen Vorhersagen stimmen über 6 Zehnerpotenzen mit den experimentellen Befundnissen überein.

8.3 Erschließung der Farbladung

Nun wollen wir die Farbladung etwas genauer betrachten.

Baryonen besitzen 3 Valenzquarks und Gesamtdrehimpuls $1/2$ oder $3/2$. Die Gesamtwellenfunktion setzt sich zusammen aus:

$$\psi_{\text{ges}}(1, 2, 3) = \underbrace{\psi_r(1, 2, 3)}_{\text{räumlich}} \cdot \underbrace{\chi_s(1, 2, 3)}_{\text{Spin}} \cdot \underbrace{\varphi_f(1, 2, 3)}_{\text{Flavour}} \quad (8.2)$$

Wie vorher schon genannt, können wir dennoch Baryonen beobachten, die aus der uuu -Kombination bestehen. Also \exists Baryon (uuu) mit Spin $S = 3/2$ und $L = 0$ [$\Delta^{++}(1232)$].

Dies ergibt aber eine symmetrische Wellenfunktion! Es muss also noch einen Wellenfunktionsanteil geben, sodass die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch ist. Dazu führen wir den Farbladungsanteil φ_c ein.

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{r,g,b} \varepsilon_{rgb} u_r u_g u_b \quad (8.3)$$

8.3.1 Anzahl der Farben

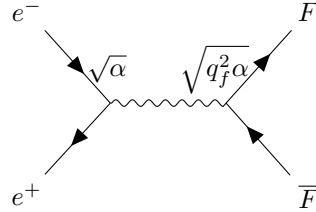


Abbildung 8.4. Die rechte Seite des Feynman-Diagramms stellt die Hadronisierung dar. Hierbei sind F , \bar{F} beliebige Quarks. q_f ist die elektrische Ladung des Flavours f

Für Myonenerzeugung ist $q_\mu = \pm 1$. Somit erhalten wir

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{3S} \quad (8.4)$$

wobei hier $\sqrt{S} = q^2$ und q der Vierer-Impulsübertrag ist. Also gilt für u -Quarks

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow uu) = \sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u}) \cdot q_u^2 \cdot N_{\text{Farbe}} \quad (8.5)$$

womit wir die Größe R definieren können:

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u})} = N_{\text{Farbe}} \sum_f q_f^2 \quad (8.6)$$

N_{Farbe} wird auch die **Multiplizität** der Farbe genannt.

\sqrt{S}	Schwelle	R
$\leq 2 \cdot 494\text{MeV}$	K^+K^-	$3(4/9 + 1/3) = 5/2$
bis 3729MeV	$D\bar{D}$ (aus c-Quark)	2
bis 10.6GeV	$B\bar{B}$ (b-Quark)	$10/3$
oberhalb	(alle außer t-Quark (erst ab $\approx 30\text{GeV}$))	$11/3$

8.4 Jets

Woher wissen wir nun, dass es Gluonen gibt? Quarks können aufgrund der Confinement-Hypothese nicht allein existieren. Da Quarks und Gluonen in gebundenen Zuständen existieren, ist es sehr schwer, Gluonen nachzuweisen. Versucht man, zwei Quarks zu trennen, wird ihnen dabei so viel Energie zugeführt, dass sich daraus sofort ein neues Quark-Antiquark-Paar bildet, bevor sich die ursprünglichen Quarks trennen lassen. Bei einer e^-e^+ -Kollision entsteht genug Energie, sodass dieser Prozess gleich mehrfach abläuft:

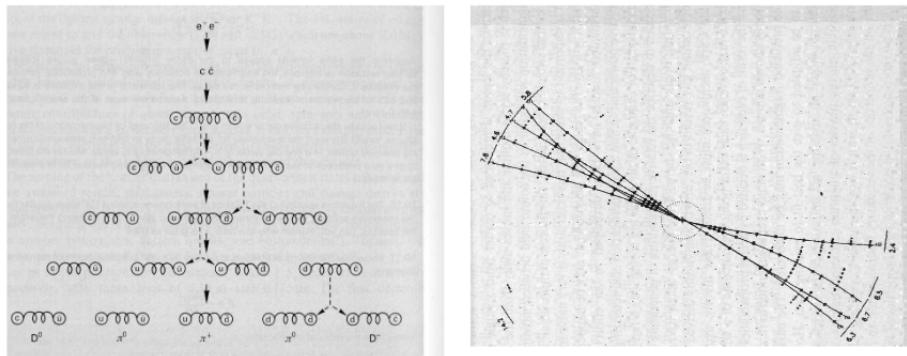


Abbildung 8.5. Links: Prinzip des Prozesses. Rechts: Hadronen-Jets im Experiment

Da auf diese Art viele Hadronen in zwei Vorzugsrichtungen "sprengen", nennt man dies **Hadronen-Jets**. Ein typisches 2-Jet-Ereignis ist $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$. Man ging davon aus, dass ähnlich wie bei der Elektronenbremsstrahlung bei genügend hoher Energie Gluonen von den Quarks abgestrahlt werden können, welches ebenfalls einen Jet erzeugt. Somit müsste man manchmal auch einen dritten Jet beobachten, was 1979 am DESY festgestellt wurde. Diese 3-Jet-Ereignisse treten etwa 10 mal seltener auf, als die 2-Jet-Ereignisse.

8.5 Trivia

Neben Mesonen und Baryonen gibt es mehr Hadronen:

- Tetraquarks: Hypothetische Teilchen aus 2 Quarks und 2 Antiquarks
- Pentaquarks: Teilchen aus 3 Quarks und einem Quark-Antiquark-Paar. (2015 erstmals am LHC gemessen!)

- Gluebälle: Hypothetische Teilchen aus null Valenzquarks, sondern nur Gluonen und Seequarks.
- Quark–Gluonen–Plasma: besteht aus vielen Quarks, die Dynamik ähnelt einer Flüssigkeit. Durch hohe Dichte ist die Confinement–Hypothese quasi aufgehoben. Allerdings fehlt eine genaue theoretische Beschreibung bisher leider.

9 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

von HerMitsch & Søni

Als Symmetrie bezeichnet man eine Invarianz von Zuständen oder physikalischen Gesetzen (Bewegungsgleichungen) unter Symmetrietransformationen. Beispiele hierfür sind:

- Bewegungsgl. im Zentralfeld invariant unter Rotation
- Relativistische Bewegungsgl. invariant unter Lorentztransformation
- Schrödingergl. invariant unter Phasentransformation

In diesem Zusammenhang wurde von Emmy Noether das folgende Theorem entwickelt:

Noether-Theorem

Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße. Zu jeder Erhaltungsgröße existiert eine Symmetrietransformation.

Wir betrachten die zeitliche Veränderung des Erwartungswerts einer Observablen (repräsentiert durch den Operator O) in einem System mit dem Hamiltonian H . Falls der Operator O zeitunabhängig ist gilt:

$$\partial_t \langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [O, H] \rangle \quad (9.1)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \hat{O} \rangle &= \partial_t \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \partial_t \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{O} | \partial_t \psi(t) \rangle \\ &\stackrel{SGL}{=} \langle \psi | = (| \psi \rangle)^\dagger - \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H \hat{O} | \psi(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{O} H | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | [O, H] | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass eine Observable O eine Erhaltungsgröße ist, falls $[H, O] = 0$. In diesem Fall gibt es erhaltene Quantenzahlen.

9.1 Symmetrietransformation

Eine Symmetrietransformation U ist eine umkehrbare, simultane (wirkt auf alle Vektoren des Raums), eindeutige Abbildung der Zustände und Operatoren, die alle physikalische Aussagen des Systems unverändert lässt.

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad (9.2)$$

$$\hat{O} \mapsto \hat{O}' = U \hat{O} U^\dagger \quad (9.3)$$

- Falls U unitär ist d.h. $UU^\dagger = \mathbb{1}$, ist die Norm des Zustands $|\psi\rangle$ erhalten.
- Eigenvektoren des Operators O mit reellem Eigenwert o sind auch Eigenvektoren des Operators O' mit Eigenwert o .

$$\hat{O}' |\psi'\rangle = U \hat{O}' U^\dagger U |\psi\rangle = U \hat{O} |\psi\rangle = U o |\psi\rangle = o |\psi'\rangle \quad (9.4)$$

- $[U, H] = 0 \iff U |\psi\rangle$ erfüllt SGL.

Wir suchen also im folgenden unitäre Transformationen U die mit dem Hamiltonian H kommutieren. Hierfür betrachten wir im folgenden zwei Fälle:

9.1.1 Diskrete Transformation, U hermitesch

Wählen wir die Observable selbst als Transformation $U = O$ so ist Hermitizität gewährleistet, d.h. $\langle O \rangle = \langle O \rangle^*$

Da die Definitionsbereiche von O und O^\dagger übereinstimmen folgt hieraus dass $O = O^\dagger$

Kombinieren wir dies mit der Unitaritätsbedingung so erhalten wir

$$O^2 = O O^\dagger = \mathbb{1} \quad (9.5)$$

Da wir $[U, H] = [O, H] = 0$ fordern, existiert eine gemeinsame Eigenvektorbasis von O und H deren Elemente $|\psi\rangle$ wir im folgenden betrachten. Wir können an dieser Stelle 2 wichtige Folgerungen ziehen:

1. $O^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle = o^2 |\psi\rangle \longrightarrow o = \pm 1$
2. $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{O}^\dagger | \hat{O} | \hat{O}^\dagger | \psi' \rangle = \langle \psi' | \hat{O} \hat{O} \hat{O}^\dagger | \psi' \rangle = \langle \psi' | \hat{O} | \psi' \rangle$

Bei $U = O$ handelt es sich um eine **diskrete Transformation**, das heißt, dass nur eine diskrete Verschiebung der Variable generiert werden kann. Beispiele für diskrete Transformationen sind

- Translation um eine Gitterkonstante bei einem kubischen Gitterkristall

- Paritätstransformation (mehr dazu später)
- Raumspiegelung, Zeitspiegelung
- Ladungskonjugation

Erinnerung Produktzustände

Betrachtet man Zustände aus verschiedenen Hilberträumen $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$ so kann man diese über das Tensorprodukt koppeln zu einem Produktzustand:

$$(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \mapsto \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i \in \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (9.6)$$

Wir fragen uns nun wie Operatoren die auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_j definiert sind auf Zustände aus diesem Tensorprodukt wirken. Man definiert die Operation auf dem Produktraum wie folgt

$$O \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i = O |\psi\rangle_j \prod_{j \neq i} |\psi\rangle_i \quad (9.7)$$

Betrachten wir einen Produktzustand $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2$ (z.B. 2 Teilchen), wobei $|\psi\rangle_{1,2}$ Eigenzustände zur Observablen O sind, und transformieren diesen Zustand mit unserer simultanen Symmetrietransformation $U=O$, so wirkt diese Transformation sowohl auf $|\psi\rangle_1$ als auch $|\psi\rangle_2$ da sie simultan ist.

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle = O |\psi\rangle_1 O |\psi\rangle_2 = o_1 |\psi\rangle_1 o_2 |\psi\rangle_2 = o_{ges} |\psi\rangle \quad (9.8)$$

Dies lässt sich für einen Produktzustand aus N Hilberträumen $|\psi\rangle = \prod_{i=1}^N |\psi\rangle_i$ induktiv fortführen. Identifiziert man jeden Eigenwert o_i eines Eigenzustands $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$ mit einer Quantenzahl n_i so erhält man eine **multiplikative Erhaltungsgröße n** als Produkt der Quantenzahlen $n = \prod_{i=1}^N n_i$.

9.1.2 Kontinuierliche Transformation, U nicht hermitesch

Falls U nicht hermitesch ist, kann es einen hermiteschen Operator (Generator) \hat{O} geben, sodass

$$U = \mathbb{1} + i\epsilon \hat{O} \quad (9.9)$$

O kann hier auch wieder eine Observable sein, die per Definition die Hermitizitätsbedingung erfüllt. Diese Transformation U erfüllt außerdem unsere Unitaritätsbedingung wie man wie folgt sieht:

$$U^\dagger U = (\mathbb{1} - i\epsilon \hat{O}^\dagger)(\mathbb{1} + i\epsilon \hat{O}) = 1 + i\epsilon \underbrace{(\hat{O} - \hat{O}^\dagger)}_{=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbb{1} \quad (9.10)$$

Da auch hier $[U, H] = 0$ gefordert wird folgt $[O, H] = 0$. Es existiert also auch hier eine gemeinsame Basis von Eigenvektoren von H und O und da auch $[U, O] = 0$ gilt folgt:

$$\hat{O}' = U\hat{O}U^\dagger = UU^\dagger\hat{O} = \hat{O} \quad (9.11)$$

Wir schließen daraus, dass die Erwartungswerte von O unter dieser Symmetrietransformation erhalten bleiben.

Man kann eine finite Transformation um Δ als n-fache Serie von infinitesimal kleinen Transformation um ϵ darstellen mit

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} n \cdot \epsilon \quad (9.12)$$

Wir erhalten als finite Symmetrietransformation U um Δ

$$U(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \underbrace{\frac{\Delta}{n}}_{\epsilon} \right)^n = e^{i\Delta\hat{O}} \quad (9.13)$$

Analog zur diskreten Transformation betrachten wir wieder einen Produktzustand aus 2 Eigenzuständen von O (z.B 2 Teilchen) $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ und lassen unsere Symmetrietransformation auf diesen Zustand wirken.

$$U|\psi\rangle = U|\psi\rangle_1 U|\psi\rangle_2 = e^{i\Delta(\hat{O}_1 + \hat{O}_2)} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \quad (9.14)$$

Wobei $\hat{O}_i = \hat{O}|_{\mathcal{H}_i}$

Identifizieren wir wieder zu jedem Eigenzustand $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$ mit Eigenwert o_i bezüglich der Observablen \hat{O}_i eine Quantenzahl n_i so bekommen wir eine **additive Erhaltungsgröße n** als Summe der Quantenzahlen $n = \sum_i n_i$

Beispiele für kontinuierliche Symmetrietransformationen sind:

- Infinitesimale Raumtranslationen, Infinitesimale Rotationen
- Zeitentwicklungen, die die Schrödinger-Gleichung unverändert lassen

9.2 Beispiele

9.2.1 Ladungserhaltung

In der Elektrodynamik ist die Ladungserhaltung verbunden mit einer Eichinvarianz der elektromagnetischen Potentiale ϕ und A unter einer Eichtransformation

über das Differential eines Skalarfelds $\chi(\vec{x}, t)$

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (9.15)$$

$$A \mapsto A' = A + \nabla \chi \quad (9.16)$$

In der Quantenmechanik entspricht diese Eichinvarianz einer Phasenverschiebung des Zustands $|\psi\rangle$ um einen Phasenfaktor $e^{i\chi}$

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\chi} \psi \quad (9.17)$$

Diese Symmetrietransformation ist möglich, dass es sich bei der Elektrodynamik um eine renormierbare Feldtheorie handelt. Die Potentiale sind langreichweitig, sodass die zur Theorie gekoppelte Größe - die Ladung - erhalten ist.

9.2.2 Baryonenzahl

- (Anti)-Quarks: Baryonenzahl $A = \pm \frac{1}{3}$
- (Anti)-Baryonen: $A = \pm 1$
- Mesonen: $A = 0$

Nach der Großen vereinheitlichten Theorie (GUT) ist die Baryonenzahl keine exakte Erhaltungsgröße, so dass Protonen mit der Zeit zerfallen, allerdings mit einer sehr großen Halbwertszeit ($\tau(p \rightarrow e^+ + \pi^0) > 10^{33} a$). Falls die Baryonenzahl als Folge einer lokalen Eichinvarianz erhalten sein sollte, erwarte wir damit verbunden ein koppelndes langreichweitiges Feld. Es gibt keine experimentelle Evidenz für ein solches Feld. Ein Baryonenkoppelfeld würde das Verhältnis von gravitativer Masse zu träger Masse verändern, dafür gibt es jedoch keinen Hinweis $\frac{\Delta R}{R} < 10^{-12}$.

9.2.3 Leptonenzahl

Für Leptonen (e^-, μ^-, τ^-) ist die Leptonenzahl $L = \pm 1$. Diese Zahl ist für jede Generation konstant, wenn man Neutrinooszillationen herausnimmt. Hierbei taucht die Frage auf ob Neutrino und Antineutrino verschieden sind, welcher wir bald auf den Grund gehen werden.

9.3 Leptonenzahlerhaltung

Die Leptonenzahl jeder Generation muss erhalten sein. Die einzige Ausnahme sind Neutrino-Oszillationen. Ein Neutrino, welches ursprünglich mit einem der

drei Flavours (e, μ, τ) erzeugt wurde, kann bei einer späteren Messung einen anderen Flavour ergeben. Dies ist eine Verletzung der Leptonenzahlerhaltung. Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Flavour sich periodisch mit der Ausbreitung des Neutrinos ändert, spricht man von **Neutrino-Oszillationen**.

Es stellt sich die Frage, ob Neutrino und Antineutrino identisch sind. Beim doppelten β^- -Zerfall zerfallen zwei Neutronen in zwei Protonen und erzeugen dabei jeweils ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino. Wären Neutrino und Antineutrino identisch, wären sie ihre eigenen Antiteilchen und könnten sich auslöschen. Dieser Fall wurde noch nie beobachtet.

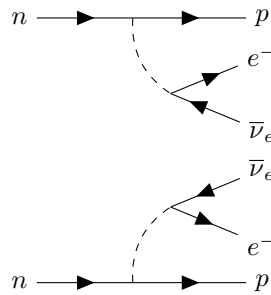


Abbildung 9.1. Doppelter β^- -Zerfall

Sind nun Neutrinos verschiedener Generationen wirklich verschieden? Schießt man hochenergetische Protonen auf ein Bor-Target, entstehen unter anderem Pionen, welche dann zerfallen:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (9.18)$$

Lenkt man den Neutrinostrahl nun auf ein Wasserstofftarget, wo er wechselwirkt, sind folgende Reaktionen möglich:

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+ \quad (\text{auf jeden Fall}) \quad (9.19)$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+ \quad (\text{nur, falls } \bar{\nu}_\mu = \bar{\nu}_e) \quad (9.20)$$

Der zweite Fall wurde noch nie beobachtet.

9.4 Strangeness-Erhaltung

Erzeugung von Λ und K^0 über starke Wechselwirkung:

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda + K^0 \quad (9.21)$$

$\begin{smallmatrix} uuu & \bar{u}d & uds & \bar{s}d \end{smallmatrix}$

Λ und K^0 zerfallen getrennt über die schwache Wechselwirkung:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{uds} & \rightarrow & p_{uud} + \pi^-_{\bar{u}d} \\ K^0_{\bar{s}d} & \rightarrow & \pi^+_{d\bar{u}} + \pi^-_{\bar{u}d} \end{array} \quad (9.22)$$

Um das Zerfallsverhalten zu erklären, wurde die Strangeness eingeführt. Dabei wurden die Werte willkürlich zugeordnet:

$$\begin{array}{lll} S(K^+) & 1 & K^+ = u\bar{s} \\ S(K^-) & -1 & K^- = s\bar{u} \\ S(K^0) & 1 & K^0 = d\bar{s} \end{array}$$

Daraus ist ersichtlich, dass $S(s) = -1$.

Offensichtlich ist die Strangeness bei der starken Wechselwirkung erhalten, bei der schwachen jedoch nicht. Dabei ändert sich S um höchstens ± 1 , kann aber, abhängig von der Reaktion, auch 0 sein.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^-_{sss} & \rightarrow & \Xi^0_{ssu} + \pi^-_{d\bar{u}} \\ & \Delta S=1 & \end{array} \quad (9.23)$$

$$\begin{array}{ccc} \Xi^0_{ssu} & \rightarrow & \Lambda_{uds} + \pi^0_{d\bar{d}} \\ & \Delta S=1 & \end{array} \quad (9.24)$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{uds} & \rightarrow & p_{uud} + \pi^-_{d\bar{u}} \\ & \Delta S=1 & \end{array} \quad (9.25)$$

Gleiches gilt für die Flavourquantenzahlen C, T und B , die man analog beschreiben kann.

9.4.1 Isospin

Wird analog zum Spin durch die beiden Quantenzahlen I und I_3 beschrieben, wobei es zu jedem Wert von I $2I + 1$ Orientierungen von I_3 gibt.

	I	I_3	Dirac-Notation
Proton	$1/2$	$1/2$	$p \equiv 1/2, 1/2\rangle$
Neutron	$1/2$	$-1/2$	$n \equiv 1/2, -1/2\rangle$

Tabelle 9.1. Die Dirac-Notation ist hierbei $|I, I_3\rangle$.

Die Ladung lässt sich durch den I_3 durch

$$Q = e \left(I_3 + \frac{1}{2} \right) \quad (9.26)$$

berechnen. Hierbei ist e die Elementarladung.

9.4.2 Für Atomkerne

gilt:

$$\text{Massenzahl } A = Z + N \quad (9.27)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} (Z - N) = Z - \frac{1}{2} A \quad (9.28)$$

$$Q = Ze = e \sum_{i=1}^A \left(I_3^{(i)} + \frac{1}{2} \right) = e \left(I_3 + \frac{1}{2} A \right) \quad (9.29)$$

wobei $I_3 = \sum_{i=1}^A I_3^{(i)}$ ist.

Die Länge des Gesamteisospins I ist

$$I_{\max} = \frac{1}{2} (Z + N) \quad I_{\min} = \frac{1}{2} |Z - N| \quad (9.30)$$

Zerfallsbeispiel

$$\Lambda_{uds} \rightarrow p_{uud} + \pi_{d\bar{u}}^- \quad (9.31)$$

I_3	0	$1/2$	-1	$\Delta I_3 = -1/2$
I	0	$1/2$	1	$\Delta I = 1/2$
S	-1	0	0	$\Delta S = 1$

Hieraus ist ersichtlich, dass die schwache Wechselwirkung I_3 , I und S verletzt.

9.5 Isospin

von Mi χ & Pauli

Isospin ist ein theoretisches Konzept, andere Art der Beschreibung.

9.5.1 Grundidee

- up-, down-Quarks sind sehr ähnlich; sie haben das gleiche Verhalten unter starker Wechselwirkung, \approx gleiche Masse (andere Quarks haben deutlich unterschiedlichere Massen).

- up-, down-Quarks unterscheiden sich nur in ihrer Ladung $(-1/3e)$, $(2/3e)$
- Man kann sie als ein Teilchen beschreiben, das sich lediglich in unterschiedlichen Zuständen befindet.
- Wir kennen dies bereits von e^- :
Elektronen sind Teilchensorte, können aber in zwei verschiedenen Zuständen auftreten: spin up (\uparrow) und spin down (\downarrow).
- Analog können wir diese Anschauung des "1. Generation-Quarks" mit Quantenzahlen versehen. Wir finden, dass diese die gleichen algebraischen Eigenschaften wie der Spin haben, deshalb nennt man sie "Isospinquantenzahlen" (Wortbedeutung "Iso": "quantitativ gleich zu"). Diese Analogie ist jedoch **nur** mathematischer Natur! Physikalisch hat der Spin nichts mit Drehimpulsen und magnetischen Momenten zu tun, wie es beim (echten) Spin der Fall ist.

9.5.2 Grafische Veranschaulichung der Analogie

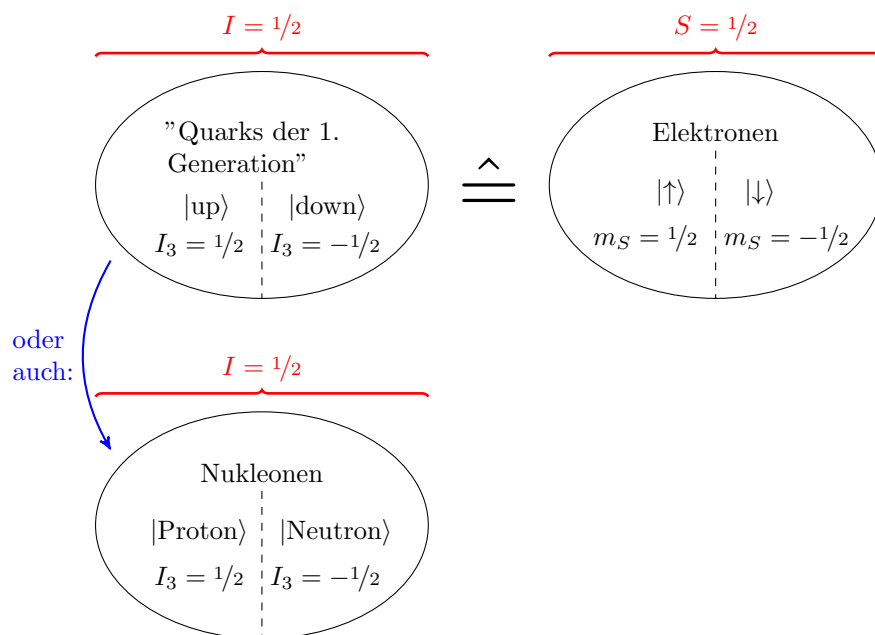


Abbildung 9.2. Veranschaulichung der Analogie von Isospin zu Spin

Historisch wurde das Isospin-Modell anhand von Nukleonen ausgearbeitet: Man fand, dass Protonen und Neutronen sehr ähnliche physikalische Eigenschaften haben: Sie unterscheiden sich zwar in ihren elektromagnetischen Eigenschaft (andere Ladung!), sind aber im Bezug auf die starke Wechselwirkung und ihre Masse nahezu identisch. Rechnete man nun auch die Coulomb-Wechselwirkung heraus, zeigten Proton-Neutron-, Neutron-Neutron- und Proton-Proton-Streuexperimente die gleichen Ergebnisse.

Das Isospin-Modell wuchs ursprünglich also dadurch, dass man $|\text{Proton}\rangle$ und $|\text{Neutron}\rangle$ als die beiden möglichen Zustände desselben Teilchens (das "Nukleon") zu beschreiben versuchte.

Erst mit der Entdeckung der Quarks wurde das Modell auf diese erweitert und die Ähnlichkeiten von Proton und Neutron wurden auf die Ähnlichkeit der up- und down-Quarks zurückgeführt.

9.5.3 Flavourquantenzahl

Der Isospin ist die Flavourquantenzahl der up- und down-Quarks. Diese haben also beide den Quarkflavour $I = 1/2$ (und **nicht** Upness = 1 oder Downness = -1, wie man meinen könnte).

$I = 1/2$ bedeutet also ein Quark, das zur ersten Quark-Generation gehört. Um zwischen up- und down-Quarks zu unterscheiden, wählt man zusätzlich die "Isospinprojektion" I_3 (Projektion nicht im vektoriellen Sinne; Projektion ist hier wieder nur "analog zum Spin" gemeint!):

$$\text{up-Quark: } I_3 = \frac{1}{2} \quad \text{down-Quark: } I_3 = -\frac{1}{2}$$

Ist ein Teilchen aus mehreren "1. Generation-Quarks" aufgebaut, so unterscheidet man es von einzelnen Quarks, indem es

$$I = \# (\text{Konstituentenquarks der 1. Generation}) \cdot \frac{1}{2} \quad (9.32)$$

erhält. Dann kann es gemäß

$$I_3 = \# (\text{up-Q.}) - \# (\text{down-Q.}) - \# (\text{anti-up-Q.}) + \# (\text{anti-down-Q.}) \quad (9.33)$$

auch dieselben Projektionen haben wie ein einzelnes Quark (beispielsweise hat ein Proton $I_3 = +1/2$).

Anmerkung

Die Isospin-Quantenzahlen enthalten nicht alle Informationen über ein Teilchen, selbst wenn es nur aus Quarks der 1. Generation zusammengesetzt ist.

Beispiel

Neutron und Δ^0 -Baryon bestehen beide aus ddu -Quarks. Das Neutron hat $S = 1/2$, das Δ^0 aber $S = 3/2$.

Generationen 2 und 3

Warum gibt es das Isospin-Konzept (oder Ähnliches) nicht für die anderen beiden Quanten-Generationen? Warum haben diese separate Quarkflavours (T,C,B,S)? Diese Teilchen sind in ihren Eigenschaften paarweise nicht so ähnlich zueinander, was beispielsweise schon an ihrer Masse ersichtlich ist:

Quark-Generation	Name	Ladung [e]	Masse [MeV/c^2]
1	<i>up</i>	$+2/3$	1.5 – 3.3
1	<i>down</i>	$-1/3$	3.5 – 6.0
2	<i>charm</i>	$+2/3$	1160 – 1340
2	<i>strange</i>	$-1/3$	70 – 130
3	<i>top</i>	$+2/3$	≈ 170000
3	<i>bottom</i>	$-1/3$	4130 – 4370

Tabelle 9.2. Massenübersicht der 3 Quark-Generationen

10 Multiplikative Erhaltungssätze

10.1 Parität

= Symmetrie unter Rauminversion.

Der Paritätsoperator \hat{P} ist definiert durch

$$\hat{P}(\psi(t, x, y, z) \rightarrow \psi(t, -x, -y, -z)) \quad (10.1)$$

Seine Anwendung hat also eine Inversion der Raumkoordinaten zur Folge, die Zeit bleibt hierbei invariant (und wird im Folgenden auch nicht mehr mitgeschrieben). Zweimaliges Anwenden des Operators führt wieder zu den ursprünglichen Koordinaten:

$$\hat{P}\hat{P}(\psi(x, y, z)) = \hat{P}(\psi(-x, -y, -z)) = \psi(x, y, z) \quad (10.2)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass

$$\hat{P}\hat{P} = \mathbf{1} \quad (10.3)$$

woraus für das Spektrum von \hat{P} sofort folgt:

$$\text{spec}(\hat{P}) = \{-1, 1\} \quad (10.4)$$

Definition

Eine Funktion f hat eine Parität, wenn sie Eigenfunktion von \hat{P} ist. Die Parität π_f ist dann der zugehörige Eigenwert, also gilt

$$\pi_f \in \{-1, 1\} \forall \text{ Eigenfunktionen } f \text{ von } \hat{P} \quad (10.5)$$

Um uns das etwas besser zu veranschaulichen, betrachten wir nun 3 Beispiele:

Beispiel

$$(1) \quad \hat{P} \cos(x) = \cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow \pi_{\cos(x)} = 1$$

$$(2) \quad \hat{P} \sin(x) = \sin(-x) = -\sin(x) \Rightarrow \pi_{\sin(x)} = -1$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \hat{P}(\sin(x) + \cos(x)) = \sin(-x) + \cos(-x) \\
 & = \cos(x) - \sin(x) \neq a(\sin(x) + \cos(x)) \quad \forall a \in \mathbb{C} \\
 & \text{hieraus sieht man, dass } \sin(x) + \cos(x) \text{ keine definierte Parität hat,} \\
 & \text{weil sie keine Eigenfunktion von } \hat{P} \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

Für eine Funktion, die in Abhängigkeit der Kugelkoordinaten r, θ, φ ausgedrückt ist, gilt:

$$\hat{P}(\psi(r, \theta, \varphi)) = \psi(r, \pi - \theta, \varphi + \pi) \quad (10.6)$$

Betrachtet man nun die Funktion $\cos(\theta)$, so ergibt sich im Gegensatz zu Beispiel (1):

$$\hat{P}\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$$

Also hat die Kosinus-Funktion in Abhängigkeit des Polarwinkels θ die Parität -1 (für den Azimutalwinkel φ gilt dasselbe).

wichtige Folgerung

Die Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\varphi, \theta)$ haben unter Anwendung des Paritätsoperators

$$\hat{P}Y_\ell^m(\varphi, \theta) = Y_\ell^m(\varphi + \pi, \pi - \theta) \quad (10.7)$$

die Parität $(-1)^\ell$. Das bedeutet

$$\hat{P}Y_\ell^m(\varphi, \theta) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\varphi, \theta) \quad (10.8)$$

Beweis. Für den Beweis wird folgende Äquivalenzrelation definiert:

$$f(\varphi, \theta) \sim g(\varphi, \theta) :\Leftrightarrow \pi_f = \pi_g \quad (10.9)$$

(für Eigenfunktionen des Paritätsoperators f, g mit Eigenwerten π_f, π_g)

Beziehungsweise

$$f \sim g \Leftrightarrow f, g \text{ haben gleiche Parität} \quad (10.10)$$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\varphi, \theta)$ sind definiert durch

$$Y_\ell^m(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (10.11)$$

wobei $N_{\ell m}$ Normierungsfaktoren und P_ℓ^m die assoziierten Legendre-Polynome sind. Betrachten wir nun

$$\sim P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \left[\frac{d^{\ell+m}}{d(\cos \theta)^{\ell+m}} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \right] \cdot e^{im\varphi}$$

Daraus definieren wir

$$\sim \left[\frac{d^{\ell+m}}{d(\cos \theta)^{\ell+m}} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \right] \cdot e^{im\varphi} =: \gamma_\ell^m(\varphi, \theta) \quad (10.12)$$

$(\cos^2 \theta - 1)^\ell$ ist Polynom vom Grad 2ℓ mit ausschließlich geraden Exponenten. Einmaliges Ableiten führt auf ein Polynom mit ausschließlich ungeraden Exponenten. Zweimaliges Ableiten führt wieder auf gerade Exponenten, etc.

Polynome mit geraden Exponenten haben Parität $+1$, mit ungeraden Exponenten Parität -1 . (Hierfür muss noch bewiesen werden, dass $\cos \theta$ die Parität -1 hat.)

Weil $2\ell \geq \ell + m$ gilt dann:

$$\pi \gamma_\ell^m = (-1)^{2\ell} (-1)^{-\ell-m} \cdot \pi_{e^{im\varphi}} = (-1)^{\ell-m} (-1)^m = (-1)^\ell \quad (10.13)$$

□

Nun fehlt noch der Beweis, dass $\pi_{\cos \theta} = -1$ ist:

$$\hat{P} \cos(\theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos(-\theta) = -\cos(\theta) \quad \square \quad (10.14)$$

(Hier ist der Kosinus in Kugelkoordinaten zu verstehen, im Unterschied zu dem Kosinus aus dem Beispiel vorhin.)

weitere Definitionen

$$\begin{aligned} \text{polare Vektoren/ echte Vektoren} &\triangleq \text{Parität } -1 \\ \text{axiale Vektoren/ Pseudo-Vektoren} &\triangleq \text{Parität } 1 \\ \text{echte Skalare} &\triangleq \text{Parität } 1 \\ \text{Pseudo-Skalare} &\triangleq \text{Parität } -1 \end{aligned}$$

Beispiele für Pseudo-Vektoren sind Vektoren, die aus Kreuzprodukten entstehen, zum Beispiel $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Analog dazu sind Pseudo-Skalare eben Skalare, die aus dem Skalarprodukt von Axial- und Polar-Vektoren entstehen. Dies wollen wir uns am folgendem Bild veranschaulichen.

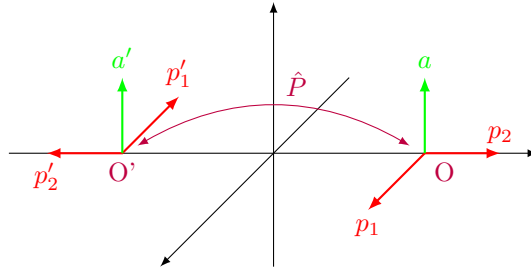


Abbildung 10.1. Die (gestrichenen und ungestrichenen) p_1, p_2 -Vektoren sind die oben genannten Polar-Vektoren, die a -Vektoren die Axial-Vektoren.

10.2 Anwendung auf die Teilchenphysik

Offensichtlich ist die Parität abhängig von der Wahl des Ursprungs: beispielsweise kann man durch Verschiebung des Ursprungs um $\pi/2$ eine Kosinusfunktion in eine Sinusfunktion umwandeln, was die Parität ändert.

In der Teilchenphysik kann man trotzdem einem Teilchen eine **intrinsische Parität** zuweisen. Diese intrinsische Parität ist jene, die das Teilchen in seinem Schwerpunktsystem hat (für punktförmige Elementarteilchen etwas schwer vorstellbar; es handelt sich hierbei allerdings um ein eher theoretisches Konzept). Empirisch findet man, dass die Parität eines Systems eine multiplikative Erhaltungsgröße unter starker, elektromagnetischer und gravitativer Wechselwirkung ist, jedoch nicht unter schwacher Wechselwirkung.

Um zu verstehen, was *multiplikativ* hier bedeutet, betrachten wir die Parität eines 2-Teilchen-Systems aus Teilchen α und β , deren intrinsische Paritäten π_α, π_β bereits bekannt sind. Wir müssen hier annehmen, dass die Teilchen nicht verschränkt sind, sodass man ihre Wellenfunktion als Produkt schreiben kann. Da wir die intrinsische Parität des 2-Teilchen-Systems betrachten wollen, interessiert uns nun lediglich die Relativbewegung ϕ der Teilchen zueinander. Wir schreiben

$$\psi_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) = \psi_\alpha(\vec{r}_\alpha) \psi_\beta(\vec{r}_\beta) \phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \quad (10.15)$$

wobei ψ_α und ψ_β die Einzelwellenfunktionen und ϕ die Relativbewegung beschreiben.

Vom H-Atom wissen wir, dass sich (sofern das Potential der einzelnen Teilchen radialsymmetrisch ist, was (zumindest näherungsweise) in der Teilchenphysik immer der Fall ist) $\phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$ in Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt. Wir können auch annehmen, dass $\phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$ eine konkrete Kugelflächenfunktion ist, da sonst (siehe H-Atom) bei geladenen Teilchen Dipolübergänge stattfinden, die

als Resultat wieder eine konkrete Kugelflächenfunktion haben (Superpositionen von Kugelflächenfunktionen sind also zeitlich instabil). Somit folgt:

$$\hat{P}\psi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha}\pi_{\beta} \cdot (-1)^{\ell}\psi_{\alpha\beta} \quad (10.16)$$

Hier wird die Multiplikativität der Parität deutlich. Für Mehrteilchen-Systeme kann man diesen Separationsansatz iterieren.

Es ist ersichtlich, dass nun dem Photon die Parität $\pi_{\gamma} = -1$ zuweisen muss, da beispielsweise bei einem Dipolübergang im H-Atom unter Abstrahlung eines Photons die Auswahlregel $\Delta\ell = \pm 1$ gilt, was die Parität des H-Atoms ändert, die elektromagnetische Wechselwirkung diese jedoch erhöht.

Man findet $\pi = -1$ für alle Eichbosonen. Für Nukleonen findet man $\pi_p = \pi_n = 1$. Darüber hinaus findet man für die Paritäten von Teilchen und Antiteilchen:

$$\text{Fermionen: } \pi_F = -\pi_{\bar{F}}$$

$$\text{Bosonen: } \pi_B = \pi_{\bar{B}}$$

Bei unserer bisherigen Betrachtung des Zwei-Teilchen-Systems haben wir nur die "Ortsparität" berücksichtigt, jedoch trägt der Spinraum auch zur Gesamtparität bei:

Annahme: beide Teilchen haben die gleiche Spinquantenzahl $s_{\alpha} = s_{\beta}$. Dann können sie entweder zu einem symmetrischen Triplet ($S = 1$) oder einem antisymmetrischen Singulett ($S = 0$) koppeln. Die Spinwellenfunktion liefert also den Eigenwert

$$\pi_{\chi} = (-1)^{s+1} \quad (10.17)$$

Somit erhalten wir unter Berücksichtigung einer Spinwellenfunktion also

$$\hat{P}(\psi_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta})\chi_{\alpha\beta}) = \pi_{\alpha}\pi_{\beta}(-1)^{\ell+s+1} \cdot \psi_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta} \quad (10.18)$$

Man benutzt J^{π} als neue Größe, die gleichzeitig Gesamtdrehimpuls und Parität eines Teilchens charakterisiert. (Häufig findet man auch S^{π} , also nur Spin und Parität). Mesonen lassen sich dadurch wie folgt bezeichnen:

$$\text{Skalarmesonen: } J^{\pi} = 0^{+}$$

$$\text{pseudoskalare Mesonen: } J^{\pi} = 0^{-}$$

$$\text{(polare) Vektormesonen: } J^{\pi} = 1^{-}$$

$$\text{axiale/pseudo-Vektormesonen: } J^{\pi} = 1^{+}$$

10.3 Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung

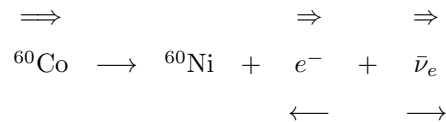
von HerMitsch & Anton

10.3.1 Einleitung: das Wu-Experiment

Das Wu-Experiment¹ zeigt anschaulich, dass unter der schwachen Wechselwirkung die Parität verletzt ist. Dazu wird der Beta-Zerfall von ^{60}Co -Atomen untersucht. Richtet man den Spin der Atome nämlich mit einem Magnetfeld aus, so zeigt sich eine Vorzugsrichtung für die emittierten Elektronen. Spiegelt man das Experiment, verändert sich die Vorzugsrichtung nicht entsprechend der Erwartungen.

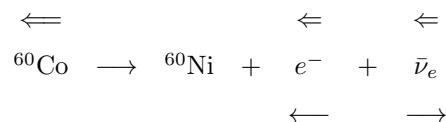
Szenario

Die Kernspins sind in positiver z-Richtung ausgerichtet. Die in negativer z-Richtung detektierten Elektronen wurden also entgegen der Richtung des ^{60}Co -Spins und damit auch ihres Spins emittiert (das heißt mit negativer Helizität. Dies lässt sich folgendermaßen veranschaulichen (hier steht der Doppelpfeil für einen Spin- $1/2$ -Anteil, die einfachen Pfeile für die Bewegungsrichtung):



Gespiegeltes Szenario

Da die Kernspins Axialvektoren sind, zeigen sie nach einer Spiegelung immer noch in die gleiche Richtung: $\vec{r} \times \vec{p} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}$. Anstatt den Versuchsaufbau zu spiegeln, reicht es daher aus, die Kernspins mit Hilfe des Magnetfeldes zu drehen. Es werden dann Elektronen detektiert, die in Richtung des ^{60}Co -Spins emittiert wurden, also mit positiver Helizität:



¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Wu-Experiment>

Wäre die Parität erhalten, wären beide Szenarien gleich wahrscheinlich: Es würden genauso viele Elektronen in Richtung des Kernspins wie in Gegenrichtung emittiert. Wu stellte jedoch experimentell fest, dass fast alle Elektronen entgegen der Spinrichtung der Kerne emittiert werden, was einer maximalen Paritätsverletzung entspricht.

10.3.2 Helizität

Die Helizität ist definiert als die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung (Impulsrichtung). Sie ist gegeben durch

$$h := \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{s}|} \quad (10.19)$$

10.3.2.1 Eigenschaften

- Die Helizität ist eine quantenmechanische Observable
- Sie ist eine Erhaltungsgröße (im selben Bezugssystem)
- Sie besitzt die Parität -1 und die C-Parität $+1$ (darauf wird später eingegangen)

10.3.3 Chiralität

Die Chiralität bezeichnet in der Physik ein abstraktes Konzept der relativistischen Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie. Für masselose Teilchen (Photon, Gluon und das hypothetische Graviton) ist die Chiralität das selbe, wie die Helizität. Nur für massebehaftete Teilchen ist die Unterscheidung von Helizität und Chiralität wichtig.

Ein masseloses Teilchen bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit. Deshalb kann sich ein realer Beobachter (dessen Geschwindigkeit immer kleiner als Lichtgeschwindigkeit sein muss) niemals in einem Bezugssystem befinden, in dem das masselose Teilchen seine Richtung umzukehren scheint. Dies bedeutet, dass alle Beobachter die gleiche Chiralität sehen. Aus diesem Grund ist die Ausrichtung des Spins des (masselosen) Teilchens nicht beeinflussbar durch einen Lorentz-Boost in Richtung der Teilchenbewegung. Somit ist das Vorzeichen der Projektion (Helizität) fest für alle Bezugssysteme und daher ist die Helizität (wie oben schon genannt) eine (relativistische) Erhaltungsgröße.

Für massebehaftete Teilchen ist es durchaus möglich, dass sich ein realer Beobachter in einem Bezugssystem befindet, in dem es scheint, als drehte das Teilchen

seine Bewegungsrichtung um. Hier ändert sich das Vorzeichen der Helizität, wodurch die Unterscheidung zur Chiralität wichtig wird. (Der Chiralitäts-Operator wird auch die γ^5 -Matrix genannt².)

10.3.3.1 Eigenschaften

- Für masselose Teilchen das Selbe wie Helizität
- Sie ist unabhängig vom Bezugssystem
- Sie ist eine quantenmechanische Observable mit dem Spektrum $\{-1, 1\}$
- Man unterscheidet zwischen links- und rechtshändiger Chiralität:
 - linkshändig: $\hat{=}-1$, was bedeutet, dass der Spin dem Impuls entgegengerichtet ist
 - rechtshändig: $\hat{=}1$, was bedeutet, dass der Spin dem Impuls gleichgerichtet ist
- Sie ist nur für masselose Teilchen erhalten
- Sie besitzt die Parität -1 und die C-Parität $+1$
- Sie ist für Energieeigenzustände bei massiven Teilchen stets eine Superposition aus links- und rechtshändigem Anteil

CP-Symmetrie

Die schwache Wechselwirkung wirkt nur auf linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen. Im gespiegelten System wirkt die schwache Wechselwirkung nun nur auf den zuvor rechtshändigen (und jetzt linkshändigen) Anteil. Werden zusätzlich alle Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzt, wirkt die schwache Wechselwirkung auf den rechtshändigen (zuvor linkshändigen) Anteil. Somit ist die ursprüngliche Physik wiederhergestellt. Dies nennt man CP-Symmetrie.

10.3.4 Ladungskonjugation (genannt C-Parität)

Die C-Parität ist definiert als die Vorzeichenspiegelung bei allen Ladungen (elektrische, Farb-, ...) bei allen betrachteten Teilchen.

²https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Matrizen#Die_..CE.B35-Matrix

10.3.4.1 Eigenschaften

- Die C-Parität ändert Energie, Impuls, Masse, Spin, Helizität und Chiralität nicht
- Sie ist eine Observable mit dem Spektrum $\text{spec} \{-1, 1\}$
- Sie entspricht dem Ersetzen jedes Teilchens mit seinem Antiteilchen
- Der \hat{C} -Operator ist unitär

Wir beobachten, dass die CP-Symmetrie auch nicht immer erhalten ist.

10.3.5 Zeitumkehrinvarianz, Zeitumkehroperator T

Der Zeitumkehroperator T dreht die Richtung der Zeit um. Dies interpretieren wir als eine Inversion der Bewegungsrichtung. Betrachten wir nun einige physikalische Größen und ihre Vorzeichenänderungen unter verschiedenen Transformationen:

Größe	Parität	C-Parität	T
q	+	−	+
t	+	+	−
\vec{r}	−	+	+
\vec{p}	−	+	−
\vec{a}	−	+	+
\vec{L}, \vec{S}	+	+	−
\vec{E}	−	−	+
\vec{B}	+	−	−

Tabelle 10.1. Übersicht verschiedener physikalischer Größen und ihre Vorzeichen(änderungen)

Newton & Maxwell sind somit zeitumkehrinvariant. Wir beobachten, dass dies ebenso für die starke Wechselwirkung zutrifft.

Nun stellt sich die Frage, ob T tatsächlich eine Symmetrie ist. Wenn ja, dann gilt

$$[T, H] = 0 \Leftrightarrow \psi \text{ und } T\psi \text{ lösen die selbe Schrödinger-Gleichung} \quad (10.20)$$

1ter Versuch:

$$T\psi(t) = \psi(-t) \quad (10.21)$$

Somit folgt für die Schrödinger-Gleichung: (im folgenden wird $-t$ als t' bezeichnet)

$$i\hbar\partial_{t'}\psi(t') = H\psi(t') \quad (10.22)$$

$$-i\hbar\partial_t\psi(t') = H\psi(t') \quad \text{!} \quad (10.23)$$

2ter Versuch:

Sei

$$T\psi(t) = \psi^*(t') \quad (10.24)$$

Dann folgt für die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_{t'}\psi^*(t') = H\psi^*(t') \quad (10.25)$$

$$-i\hbar\partial_t\psi^*(t') = H\psi^*(t') \quad (10.26)$$

was der Schrödingergleichung für $\langle\psi|$ entspricht (und somit richtig ist). Daraus ist ersichtlich, dass T antiunitär ist, was bedeutet:

$$\langle T\psi_1|T\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle^* \quad (10.27)$$

Ebenso wissen wir, dass

$$\psi = \sum_n c_n \varphi_n \quad (10.28)$$

wobei φ_n die Eigenbasisvektoren sind. Wenden wir nun T darauf an, erhalten wir

$$T\psi = \sum_n c_n^* \varphi_n \quad (10.29)$$

Da der Zustand verändert wird, \nexists Observable, die mit T verbunden ist.

10.3.6 Elektrisches Dipolmoment von Elementarteilchen

Wir behaupten: Elementarteilchen dürfen kein elektrisches Dipolmoment besitzen. Um das heraus zu finden, betrachten wir Folgendes: Das elektrische Dipolmoment zeigt in Richtung des Spins, als einzige ausgezeichnete Richtung bei Elementarteilchen. Das folgt daraus, dass der Satz von Quantenzahlen vollständig den Zustand eines Elementarteilchens beschreibt (sonst würden wir nur eine neue Quantenzahl benötigen). Also ist das el. Dipolmoment

$$\vec{d} = |\vec{d}| \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \quad (10.30)$$

mit den möglichen Ausrichtungen parallel ($\uparrow_d \uparrow_s$) und ($\downarrow_d \uparrow_s$ bzw. $\uparrow_d \downarrow_s$).
Nun wenden wir P oder T an ($\vec{d} = \Delta q (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$):

$$\uparrow_d \uparrow_s \xrightarrow{T} \uparrow_d \downarrow_s \quad (10.31)$$

$$\uparrow_d \uparrow_s \xrightarrow{P} \downarrow_d \uparrow_s \quad (10.32)$$

d.h. neuer Freiheitsgrad eines Zustandes kommt vor und nach dem Pauli-Prinzip
wären Zustände mit gleicher Spinrichtung 2 mal besetzbar. \nexists

Hieraus folgt, dass

$$\vec{d} = 0 \quad (10.33)$$

für Elementarteilchen.

10.3.7 CPT–Theorem

CPT–Theorem

Für "praktisch jeden" darstellbaren Hamilton-Operator gilt:

$$[C \cdot P \cdot T, H] = 0 \quad (10.34)$$

Jede Lorentz-invariante, relativistische, kausale Feldtheorie ist
CPT-invariant. Dies impliziert Gleichheit der Masse, Betrag der Ladung
und Lebensdauer von Materie und Antimaterie.

11 Bindungen & Anregungen von Atomkernen

Einleitend wollen wir direkt die Bethe–Weizsäcker–Formel für die Bindungsenergie von Atomen betrachten:

$$m(Z, N) = Zm_H + Nm_N - B(Z, N) \quad (11.1)$$

wobei hier $m(Z, N)$ die Gesamtmasse, Z die Protonen- und N die Neutronenzahl, m_H die Masse des H-Atoms, m_N die Masse eines Neutrons und $B(Z, N)$ die Bindungsenergie beschreiben.

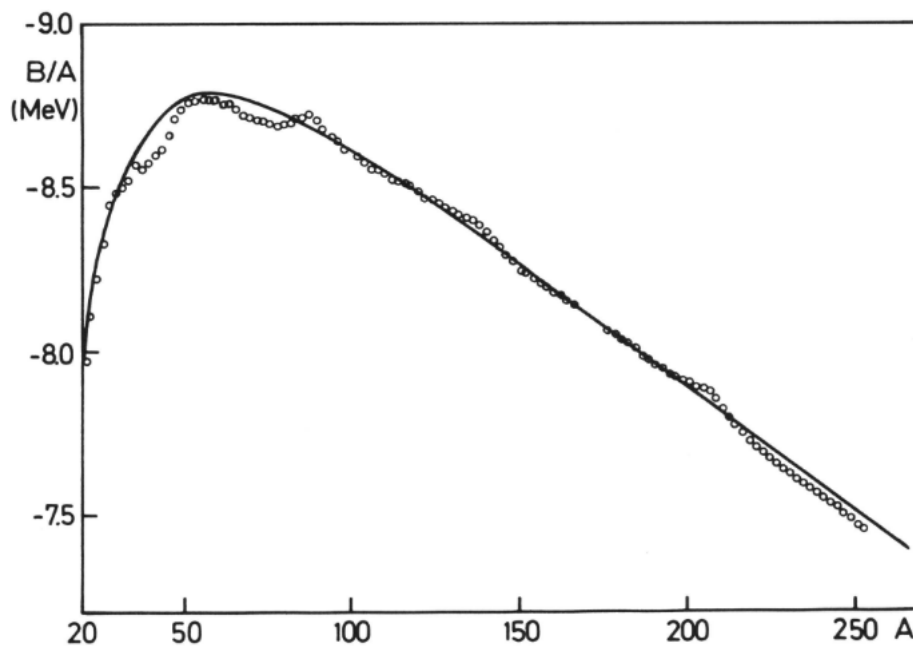


Abbildung 11.1. Kernbindungsenergie pro Nukleon im Vergleich zur Bethe–Weizsäcker–Formel. A ist hierbei die Anzahl der Nukleonen.

11.1 Tröpfchenmodell

Hierfür sei die Nukleonendichte eines Kerns konstant und sein Radius gegeben durch

$$r = r_0 A^{1/3} \quad (11.2)$$

Beim Tröpfchen-Modell wird der Kern wie ein Tropfen einer inkompressiblen Flüssigkeit behandelt. Die Bindungsenergie ist gegeben durch

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 \quad (11.3)$$

Die einzelnen Summanden wollen wir nun im Folgenden genauer betrachten:

1. Volumenenergie: Kräfte, die bei der Vereinigung von Nukleonen frei werden. Proportional zur Anzahl der Nukleonen

$$B_1 = a_V A \quad (11.4)$$

2. Oberflächenenergie: Nukleonen an der Oberfläche sind schwächer gebunden, da sie weniger Nachbarn besitzen

$$B_2 = a_S A^{2/3} \quad (11.5)$$

3. Coulomb-Energie: Abstoßung zwischen Protonen verringert die Bindungsenergie. Für eine homogen geladene Kugel $\propto q^2/r$

$$B_3 = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (11.6)$$

4. Asymmetrie-Energie: Überschuss an Neutronen sorgt für höhere Besetzungszustände (Pauli-Prinzip) und die Bindung wird dadurch geringer (für $N = Z$ ist die Bindung maximal!)

$$B_4 = -a_A \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (11.7)$$

5. Paarungsenergie: Kerne mit geraden Protonen-/Neutronenzahlen sind stabiler (Im Schalenmodell haben solche Paare geringeren Spin!)

$$B_5 = \begin{cases} a_P A^{-1/2} & \text{gerade Anzahl von } p \text{ und } n \\ 0 & \text{ungerade/gerade oder g./u. Anzahl von } p/n \\ -a_P A^{-1/2} & \text{ungerade Anzahl von } p \text{ und } n \end{cases} \quad (11.8)$$

Das Schalenmodell ist ein Modell zum Aufbau der Atomkerne. Hierbei werden die Zustände nach dem Pauli-Prinzip & der Drehimpulsquantisierung besetzt, ähnlich dem Modell für Elektronenschalen.

Allerdings:

- gibt es bei diesem Modell Protonen und Neutronen
- gibt es kein gemeinsames Kraftfeld (Protonen und Neutronen haben kurze Reichweite der starken Kernkraft und beeinflussen sich gegenseitig)
- ist die starke Kernkraft \gg Coulomb-Kraft

Durch dieses Modell lassen sich die sogenannten **magischen Zahlen** beschreiben. Voll besetzte Schalen führen aufgrund kleinerem Spin zur stärkeren Bindung. Magische Zahlen sind demnach: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ... (aufgrund stärkerer Spin-Bahn-Kopplung etwas anders als für Elektronen).

Für magische Protonenzahlen gibt es viele stabile Isotope, für magische Neutronenzahlen viele stabile Isotone.

Somit ergibt sich (wie oben schon erwähnt) die Gesamtbindungsenergie zu

$$E_{\text{Binding}} = E_{\text{Volume}} - E_{\text{Surface}} - E_{\text{Coulomb}} - E_{\text{Asymmetry}} \pm E_{\text{Pairing}} \quad (11.9)$$

Die einzelnen Komponenten sind in folgendem Bild sehr schön veranschaulicht. Der Großteil des Periodensystems ist mit dieser Formel sehr exakt beschrieben.

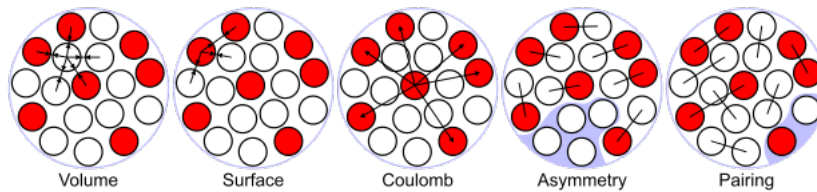


Abbildung 11.2. Visualisierung der verschiedenen Energie-Terme

Bindungen im Vergleich zu ^{12}C können durch "Massenüberschuss" ausgedrückt werden.

$$\Delta = M_{N,Z}c^2 - A \cdot 931.502 \text{ MeV} \quad (11.10)$$

Für jedes Element existiert ein am stärksten gebundenes Isotop. Für kleine Z ist die Form $N = Z$ "bevorzugt". Für große Z hat Coulomb-Energie zunehmend Einfluss. $_{50}\text{Sn}$ hat Isotope für $K = 99 - 138$, 10 davon sind stabil, 30 radioaktiv mit hauptsächlichem β^+ -Zerfall wenn N zu klein ist, aber β^- -Zerfall wenn N zu groß ist.

Die Isotope sind eingeschlossen von der Protonen- und Neutronendripline, außerhalb zerfallen die Kerne durch p oder n Emission in 10^{-18} s. So gibt es bei schweren Kernen teilweise α -Zerfall und jenseits von ^{208}Pb ($Z = 82$, $N = 126$) gibt es keine stabilen Kerne mehr.

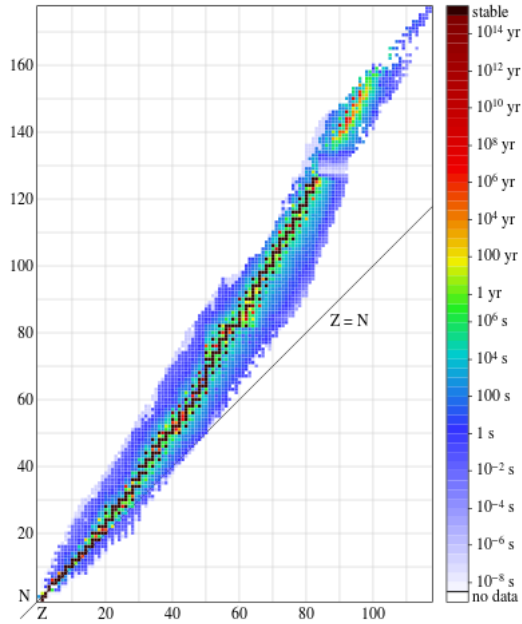


Abbildung 11.3. Halbwertszeiten der Isotope. Mit immer größer werdendem Z weicht die Linie der stabilen Isotope immer weiter von der $N = Z$ Linie ab.

Wichtiger Punkt

Bei festen A lässt sich die Masse als Funktion von Z auftragen (Abb. 11.4) Das Minimum lässt sich bestimmen durch:

$$Z_0(A) = \frac{A}{2} \left(\frac{m_N - m_H + a_A}{a_C A^{2/3} + a_A} \right) \quad (11.11)$$

Die Werte für Z_0 ergeben die Linie größter Stabilität in der $N - Z$ -Ebene.

11.2 Fermigasmodell

In diesem Modell sind die Nukleonen frei in einer Kugel mit Radius $r_0 A^{1/3}$ (ohne Wechselwirkung), es gilt nur das Pauli-Prinzip. Wir wollen hier einmal die Potentialtöpfe der Protonen und Neutronen betrachten.

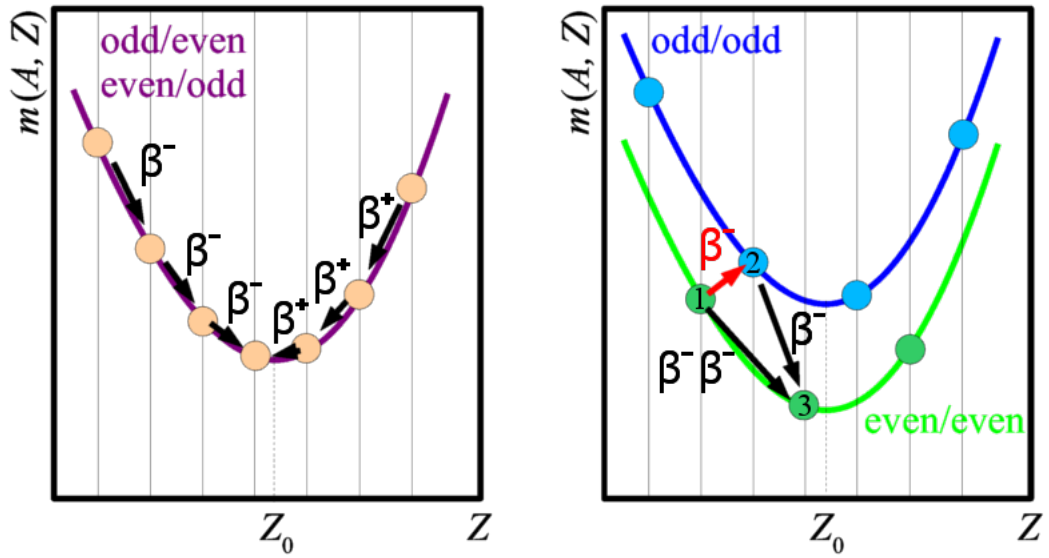


Abbildung 11.4. Massenparabel: hierbei ist quasi nur der geringste Energiezustand stabil.

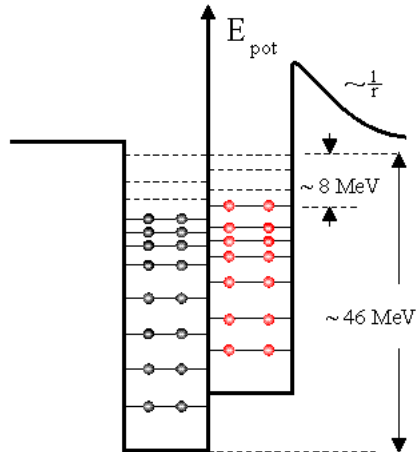


Abbildung 11.5. Der Potentialtopf eines Neutrons (links) bzw. eines Protons (rechts). n besetzte Niveaus