

Experimentalphysik 4 - Boykott-Gruppenseminar

Fabs	Chris	Michi	Paul	Anton	Sören
	Hein	Martina	Mitsch		

18. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung - Ex3 Zusammenfassung	3
1.1	Notation der Quantenzahlen	3
1.2	Korrekturterme der Energieniveaus	4
1.3	Näherungen für mehrere Elektronen	4
1.4	Das Pauli-Prinzip	4
2	Ex4 - Atomphysik	6
2.1	Spektroskopische Notation	6
2.2	Hund'sche Regeln und Auswahlregeln	7
2.3	Vielelektronenprobleme	8
2.4	Moseley-Gesetz	9
2.5	LS-Kopplung, jj-Kopplung	10
3	Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik	13
3.1	Zerfallsgesetz	13
3.2	Fermis Goldene Regel	14
3.3	Wirkungsquerschnitt	16

1 Einleitung - Ex3 Zusammenfassung

Wir hatten die QUANTENMECHANIK eingeführt, siehe Theo 4:

Axiom 4: Es gilt die Schrödingergleichung: $\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle$
wobei $\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$

Diese hatten wir für das Wasserstoffatom (H-At.) **analytisch** gelöst. (Coulombpotential, Kugelkoordinaten, Separation: Schwerpunkt/Relativbew., Winkel-/Radialanteil). Die Lösungen sind Polynome mit ganzzahligen Parametern, "Quantenzahlen":

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot \Theta_l^{m_l}(\vartheta) \cdot \phi_{m_l}(\varphi)$$
$$\psi_{n,l,m_l} \propto e^{-\frac{Zr}{na_0}} \underbrace{L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \cdot P_l^{m_l}(\cos \vartheta)}_{\text{zugeordnete Laguerre- bzw. Legendrepolynome}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}$$

Es gilt für physikalische Lösungen: $|m_l| \leq l < n$

1.1 Notation der Quantenzahlen

Hauptquantenzahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \{K, L, M, \dots\}$ "Schale"

Bahndrehimpulsquantenzahlen $l \in \{0, 1, 2, \dots\} = \{s, p, d, f, \dots\}$ "Unterschale"

Magnetbahnquantenzahlen $m_l \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ "Orbital" (zzgl. "Spin")

$$E(\psi_n) = E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

"Rydberg-Formel", mit $E_0 := Ry = 13.6 \text{ eV}$ und Z als Kernladungszahl.
Dem Übergang entspricht dann die Differenz $E_n - E_m$.

1.2 Korrekturterme der Energieniveaus

Die Energieniveaus (EN) werden korrigiert durch:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{\Delta\hat{E}_{\text{rel}} + \Delta\hat{E}_{S-B} + \Delta\hat{E}_{\text{Darwin}}}_{\Sigma = \text{Feinstruktur } \Delta E_{FS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} + \Delta\hat{E}_{\text{HFS}} + \Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{rel}} = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2}$$

$$\Delta\hat{E}_{S-B} = \frac{Zq_e^2 \mu_0}{8\pi m_e^2 \langle r \rangle^3} \hat{\vec{l}} \cdot \hat{\vec{s}} = \frac{Zq_e^2 \mu_0 \hbar^2}{16\pi m_e^2 \langle r \rangle^3} \cdot \begin{cases} l, & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1), & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \Delta\hat{E}_{FS} \stackrel{\text{H-A}^t}{=} E_0 \frac{Z^2}{n^2} \left[\frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Darwin}} = \mu_0 \left(\frac{q_e \hbar}{m_e} \right)^2 Z \cdot \delta(\vec{r}) \text{ "Kernpotential"}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Lamb}} \hat{=} \text{quantenelektrodynamische Wechselwirkung (WW) mit dem Vakuum}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{HFS}} \propto \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{I}}_{\text{"Kernspin"}}$$

$$\Delta\hat{E}_{\text{Zeeman}} = \frac{\mu}{\hbar} \left(\hat{L}_z + g_e \hat{S}_z \right) B_z \text{ "anomal", normal f\"ur } \hat{S}_z = 0, \quad g_e \approx 2, \quad \mu = \frac{q_e \hbar}{2m_e}$$

1.3 Näherungen für mehrere Elektronen

Für mehrere Elektronen (e^-) müssen wir Näherungen machen, denn die $e^- - e^- - WW$ verhindert das analytische Lösen.

Helium (He):

1. $E_B = -Z^2 E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right)$ "Bindungsenergie" (negativ!)
2. $E_B = -E_0 \left(\frac{Z^2}{1^2} + \frac{(Z-1)^2}{n_2^2} \right)$ Abschirmung des $n_2 - e^-$
3. $E_B = -E_0 \left(-2Z_R^2 + (4Z - \frac{5}{4})Z_R \right)$ minimiere $E_B(Z_R)$
4. wahrer Wert $E_B \approx -79.0 \text{ eV}$

1.4 Das Pauli-Prinzip

Die relativistische Quantenmechanik fordert für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ [bzw. 0, 1, 2, ...] eine unter Teilchenvertauschung \hat{P}_{ij} antisymmetrische [bzw, symmetrische] **Gesamtwellenfunktion** $|\psi\rangle = |\psi_{\text{Ort}}\rangle \otimes |\chi_{\text{Spin}}\rangle$. Wir nennen diese Teilchen **Fermionen**

[bzw. **Bosonen**]. Aus diesem Postulat folgt das:

Pauli-Prinzip: Man kann nie mehr als ein Fermion im gleichen (Orts- & Spin-) Zustand haben.

Für zwei e^- (z.B. Helium) gilt daher:

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{symm.}} \Rightarrow \underbrace{|\chi_{-}\rangle}_{\text{Dies ist ein antisymmetrisches Singulett [2S+1=1]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \hat{=} \underbrace{|S=0, M_S=0\rangle}_{\substack{\text{[Großbuchstaben } S, M_S, J, \dots \\ \text{sind Gesamtquantenzahlen, Summen}]}}$$

$$|\psi_{\text{Ort}}\rangle_{\text{antisym.}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\chi_{+}, 1\rangle &= |\uparrow_1 \uparrow_2\rangle \\ |\chi_{+}, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle) \\ |\chi_{+}, -1\rangle &= |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle \end{aligned} \right\} \hat{=} \begin{aligned} &|S=1, M_S=0\rangle \\ &|1, 0\rangle \\ &|1, -1\rangle \end{aligned}$$

$|\chi_{+}, -\rangle$ ist ein **symmetrisches** Triplett [2S+1=3 heißt Multiplizität].

2 Ex4 - Atomphysik

In der Ex4-Vorlesung wird es um folgende Themen gehen:

- Atome
- Kerne und Elementarteilchen
- Symmetrien
- schwache und starke Wechselwirkung
- Spaltung und Fusion

Johanna Stachels Notation:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} J$$

$$1 \text{ fm} = 913 \text{ MeV}/c^2 = 1.66 \cdot 10^{-27} kg$$

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs} = 1.05 \cdot 10^{-34} Js$$

$$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} = \frac{1}{137}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

2.1 Spektroskopische Notation

Um den Zustand einer Unterschale n_l anzugeben, führen wir die spektroskopische Notation ein:

$$\boxed{n^{2S+1}L_J} \quad (2.1)$$

mit

$$S := |\sum_i m_{s,i}| \quad L := |\sum_i m_{l,i}|$$

$$J := |\vec{L} + \vec{S}| = |M_L + M_S| = |\sum_i m_{l,i} + \sum_i m_{s,i}|$$

Die Notation für die Elemente des Periodensystems lautet:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Massenzahl } \frac{m}{u} \\ \text{Kernladungszahl } Z \end{array} \text{ El } \frac{q}{q_e} \text{ Ionisierung}} \quad (2.2)$$

2.2 Hund'sche Regeln und Auswahlregeln

Die Elektronen werden für die Grundzustände so aufgefüllt, dass die Bindungsenergie(negativ) minimiert wird, das heißt deren Betrag maximal wird. Zwischen den Unterschalen gilt folgende Reihenfolge:

$5s^2$	$5p^6$	$5d^{10}$	$5f^{14}$
$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$
$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
$2s^2$	$2p^6$		
$1s^2$			

Abbildung 2.1. Auffüllung der Grundzustände

Pro Unterzustand hat man $N_e = 2(2l + 1)$ Elektronen. Die Gesamtzahl der Elektronen in der n-ten Schale entspricht somit $N_e = 2 \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 = 2n^2$

Innerhalb einer Unterschale gelten für die Grundzustände die hierarchischen **Hund'schen Regeln**:

1. Der Gesamtspin $S := |\sum_i m_{s,i}|$ wird maximal.
2. Der Gesamtdrehimpuls $L := |\sum_i m_{l,i}|$ wird maximal.
3. Ist die Unterschale bis zu (einschließlich) halb voll, so wird J minimal d.h.
 $J := |M_L + M_S| \stackrel{!}{=} |L - S|$, bei mehr als halb vollen Unterschalen muss $J \stackrel{!}{=} L + S$ sein.

Diese Regeln bestimmen die Feinstruktur des Elements. Regt man das Element an, so gelten diese Regeln nicht mehr.

Die Schalen-/Orbitalübergänge werden von den sog. **Auswahlregeln** beherrscht, die wohlgeordnet nicht hierarchisch sind.

1. $\Delta L \in \{-1, 1\}$ bei L-S-Kopplung
2. $\Delta M_L \in \{-1, 0, 1\}$
3. $\Delta S = 0$ für leichte Atome
4. $\Delta J \in \{-1, 0, 1\}$ wobei $J = 0 \rightarrow J = 0$ **verboten**

2.3 Vielelektronenprobleme

Für Elemente mit mehr als einem Elektron gibt es keine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung, auch numerische Verfahren sind mit zunehmender Elektronenzahl extrem aufwändig. Wir machen deshalb folgende Näherungen: **Alkaliatome (1.Hauptgruppe)**

- Alkaliatome haben nur ein Elektron außerhalb geschlossener Schalen. Die Grundzustände sind immer $^2S_{\frac{1}{2}}$ ($n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ nicht notiert).
- Wir betrachten zu Näherung ein **effektives Potential** $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2 Z_{eff}(r)}{r} \text{ mit } 1 < Z_{eff}(r) < Z \text{ und } Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1, Z_{eff} \xrightarrow{r \rightarrow 0} Z$$

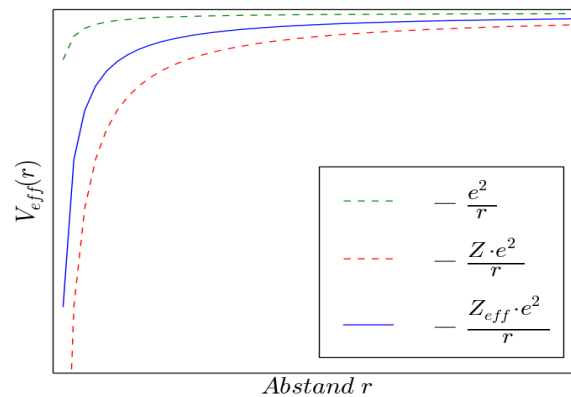


Abbildung 2.2. Effektives Potential

- Dies hebt die E_n -Entartung bezüglich Z bereits auf (Feinstruktur):
 $E_n(s) < E_n(p) < E_n(d) < E_n(f)$ (für kleine n am stärksten)
- Für große n und r (wasserstoffähnlich) lässt sich dies so schreiben:

$$E_{n,l} = -E_0 \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = -\frac{E_0}{n_{eff}^2} = -\frac{E_0}{(n - \delta_{n,l})^2} \quad E_0 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.3)$$

wobei $\delta_{n,l}$ der sog. **Quantendefekt** ist: $\delta_{n,l} = n - \sqrt{\frac{E_0}{-E_{n,l}}}$
 $E_{n,l} < 0$ ist die real gemessene Energie.

Um allgemeine Vielelektronenprobleme zu lösen, können wir (zumindest bis jetzt) nur nähern indem wir zur Lösung eines Elektron die anderen Elektronen unabhängig voneinander gelöst haben und das entstehen $V_{eff}(r)$ **kugelsymmetrisch** ist.

Wir suchen deshalb eine **Gesamtwellenfunktion für N Teilchen**.

Diese muss antisymmetrisch unter Vertauschung sein, wir nehmen zusätzlich an, dass sie sich als Produkt der Einteilchenwellenfunktionen schreiben lässt.

Analog zu $\psi_{ges}(1, 2) = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)$ definieren wir die

Slaterdeterminante:

$$\psi_{ges}(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Diese ist total antisymmetrisch unter Spaltenvertauschung als Summe aus $N!$ Produkten.

2.4 Moseley-Gesetz

Für Elektronen-übergänge zwischen Zuständen wurde empirisch festgestellt, dass $\sqrt{f} \propto Z$ ist, wobei f die Frequenz des emittierten Lichts ist.

$$\text{Moseley Gesetz: } f = E_0 c (1/n_2^2 - 1/n_1^2) (Z - b)^2$$

$$\text{mit } c = \lambda f : \lambda = E_0 (1/n_2^2 - 1/n_1^2) (Z - b)^2$$

für Übergänge $n_1 \rightarrow n_2$, b - Abschirmkonstante

Für das Wasserstoffatom entspricht das Moseley-Gesetz der Rydberg-Formel.

Für wasserstoffähnliche Atome ($b=1$) gilt : K-Linie: $n_2 = 1$, $\alpha : n_1 = 2$, $\beta : n_1 = 3$

Für schwere Atome ($Z > 40$) gilt : L-Linie: $n_2 = 2$, $b \approx 7.4$, $\alpha : n_1 = 3$, $\beta : n_1 = 4$

Die Auswahlregeln müssen gelten.

2.5 LS-Kopplung, jj-Kopplung

LS-Kopplung

- Wasserstoff: Potential \rightarrow Störungen \rightarrow Spin-Bahn-Kopplung
- Spin-Bahn-Kopplung: nicht ℓ und s sondern j relevant
- Viele Elektronen: J relevant

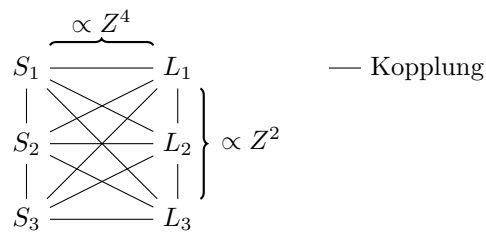


Abbildung 2.3. L-S-Kopplung

SATZ:

Sei die Spin-Bahnkopplung eines Elektrons \ll Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung zwischen den Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \sum_i \vec{\ell}_i + \sum_i \vec{s}_i$$

$$\begin{array}{ccc}
 s_1 & \ell_1 & \\
 + & + & \\
 s_2 & \ell_2 & \text{Anzahl der Feinstrukturaufspaltungen: } \min(2s+1; 2\ell+1). \\
 + & + & \\
 s_3 & \ell_3 & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{L+S=J} & &
 \end{array}$$

Entscheidend für die Feinstrukturaufspaltung ist die Zusammensetzung von L und S .

Beispiel:

Elektronenkonfiguration: $L = 2, S = 1 \rightarrow J = 1, 2, 3$.

Anzahl der J_S : $\min(2S + 1; 2L + 1)$

Hier: 3

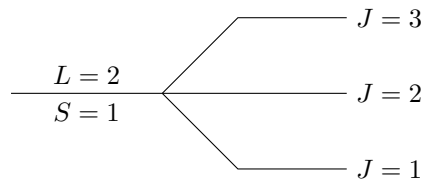


Abbildung 2.4. Termschema

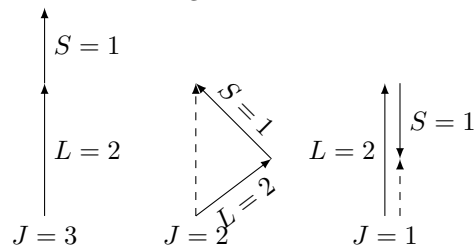


Abbildung 2.5. Vektordiagramme der möglichen Additionen

Feinstruktur ist sehr klein im verglichen mit den Energiedifferenzen zwischen verschiedenen L_S oder S .

Energien:

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + c \cdot L \cdot S = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - S(S+1) - L(L+1))$$

$$E_j(n, L, S) = E(n, L, S) + \frac{c}{2} (J(J+1) - 8) \hbar^2$$

$$\rightarrow J = 3 : E(n, L, S) + 2c\hbar^2$$

$$J = 2 : E(n, L, S) - 1c\hbar^2$$

$$J = 1 : E(n, L, S) - 3c\hbar^2$$

c ist am größten für kleine n . \rightarrow Bei großen n nur noch sehr kleine Feinstruktur.

jj-Kopplung**SATZ:**

Sei die Spin-Bahn-Kopplung eines Elektrons \gg Bahn-Bahn-Kopplung und Spin-Spin-Kopplung verschiedener Elektronen. Dann ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i \left| \vec{s}_i + \vec{\ell}_i \right|$$

- Bei jj-Kopplung sind L und S nicht definiert, daher nur Gesamtdrehimpuls J
- Multiplett-Zustände nicht mehr erkennbar.

$$s_1 \text{ --- } \ell_1$$

$$s_2 \text{ --- }^+ \ell_2$$

$$s_3 \text{ --- }^+ \ell_3$$

Abbildung 2.6. jj-Kopplung

3 Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

3.1 Zerfallsgesetz

Es gibt 3 verschiedene Zerfallsarten des Radioaktiven Zerfalls. (A: Nukleonenanzahl , Z: Kernladungszahl)

- α - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$
 α -Strahlung wird mittels Heliumkernen vermittelt (positiv geladen).
- β - Zerfall:
 1. β^- - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$
Beim β^- -Zerfall wird im Kern ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Dabei werden eine Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert.
 2. β^+ - Zerfall: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$
Beim β^+ -Zerfall wird im Kern ein Proton in ein Neutron umgewandelt. Dabei werden eine Elektron und ein Elektron-Neutrino emittiert.
- γ -Zerfall : ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$
Falls nach einem α - Zerfall oder β - Zerfall ein Atomkern in einem angeregten Zustand vorliegt, ist γ - Zerfall möglich. Beim Übergang in einen energetisch günstigeren Zustand wird hochfrequente elektromagnetische Strahlung emittiert. Meist folgt der γ -Zerfall unmittelbar auf einen α - oder β - Zerfall.

Für die Zerfallsrate(Aktivität) $A = \frac{d}{dt} N(t)$ gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) \quad (3.1)$$

λ : Zerfallskonstante beschreibt Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte radioaktive Zerfallsart. Sie ist unabhängig von Ort und Zeit, aber charakteristisch für den Kern.

Die Lösung dieser Gleichung gibt die Anzahl N der Atome zum Zeitpunkt t an:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.2)$$

Wobei man in diesem Zusammenhang noch folgende nützliche Größen definiert:

- Mittlere Lebensdauer: $\tau = 1/\lambda$
Nach dieser Zeit sind nurnoch $1/e$ ($\approx 37\%$) der ursprünglichen Atome vorhanden.
- Halbwertszeit : $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ Nach dieser Zeit sind nurnoch 50 % der ursprünglichen Atome vorhanden.

Der radioaktive Zerfall ist ein stat. Prozess. Die Wahrscheinlichkeit einen zerfallenden Kern anzutreffen ist bei $t=0$ am größten, danach fällt sie exponentiell ab. Diese Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell eine Binomial-Verteilung. Für eine hohe Anzahl an Versuchen und eine kleine Wahrscheinlichkeit konvergiert die Binomialverteilung gegen eine Poisson-Verteilung. Diese Näherung lässt sich auf den radioaktiven Zerfall anwenden, da man in der Regel viele Atome ($N \approx 10^{23}$) betrachtet, also eine hohe Anzahl Versuche durchführt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit in der Regel klein ist:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad (3.3)$$

Somit lässt sich der Zerfall also durch eine Poisson-Verteilung beschreiben mit dem Mittelwert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu}$ wobei der Zerfall k -mal eintreten soll.

$$P(k) = \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!} \quad (3.4)$$

3.2 Fermis Goldene Regel

Wir wollen eine Voraussage für die Übergangsrate λ (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit), mit der ein Anfangszustand unter dem Einfluss einer Störung in einen anderen Zustand übergeht, treffen. Wir nehmen dabei an, dass es sich um ein an sich zeitlich konstantes System handelt, welches durch den Hamilton-Operator H_0 beschrieben wird, und durch einen Störoperator V , welcher vergleichsweise klein gegenüber H_0 ist, gestört wird. Der gesamte Hamiltonoperator lautet also $H = H_0 + V$

Wir formulieren Fermis Goldene Regel:

$$\lambda_{A \rightarrow E} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_E | V | \psi_A \rangle|^2 \cdot \rho_E = \frac{dP}{dt} \quad (3.5)$$

Die Übergansrate hängt also davon ab wie stark die Störung V den Anfangszustand ψ_A und den Endzustand ψ_E koppelt. Außerdem skaliert die Übergangsrate mit der Anzahl der möglichen Übergänge welche durch die Endzustandsdichte ρ_E beschrieben wird.

Was ist $\rho(E)$ eigentlich ?

Wir bezeichnen den Phasenraum unseres Systems als den Raum, der durch die Ortskoordinaten \mathbf{x} und die dazugehörigen Impulse \mathbf{p} aufgespannt wird. In diesem Raum können wir einem Punkt ein Volumen von $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ zuordnen (Unschärferelation).

1 Dimension:

Zunächst betrachten wir einen jeweils eindimensionalen Orts- und Impulsraum mit Zuständen $(x, p) \in [x, x+L] \times [p_x, p_x+p]$. In diesem Fall kann die Gesamtfläche Lp mit $N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$ Zuständen gefüllt werden. Für die Zustandsdichte gilt dann:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2 \frac{dN}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \frac{2m}{p} = \frac{Lp}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (3.6)$$

Wobei wir im letzten Schritt auf Kugelkoordinaten transformieren. Der Faktor 2 kommt daher, dass die Zustände (x, p) und $(x, -p)$ bezüglich der Energie entartet sind, denn $E = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$.

3 Dimensionen:

Die Anzahl der Gesamtzustände N ist nun

$$N = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{x}^3 d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int d\mathbf{p}^3 = \frac{V}{2\pi\hbar} \int p^2 dp d\Omega \quad (3.7)$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$ folgern wir $\frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp}$ und erhalten damit für die Zustandsdichte für **1 Teilchen**

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2} \int d\Omega = \frac{VpE}{2\pi^2 c^2 \hbar^3} \quad (3.8)$$

Für **2 Teilchen** addieren sich die Impulse im Mittel zu 0, weshalb die Zustandsdichte konstant ist. Jedoch addieren sich die Energien zu $E = E_1 + E_2$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (3.9)$$

Da $p_1^2 = p_2^2$ folgt $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$\begin{aligned} \rightarrow dE &= \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2 p_1 dp_1 \\ \rightarrow \rho_2 &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 \int d\Omega_1 \end{aligned}$$

Wir können dies auf n Teilchen erweitern

$$\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3 p_i \quad (3.10)$$

3.3 Wirkungsquerschnitt

Die bisherigen Überlegungen dienten allesamt dazu die Reaktionsrate einer Zustandsänderung zu quantifizieren. Wir nennen nun eine letzte Größe kennen, die ebenfalls diesen Zweck erfüllt. Der Wirkungsquerschnitt σ gibt die Stärke einer Reaktion an. Um dies zu begreifen betrachten wir einen konstanten Fluss Φ von Teilchen, die allesamt der Sorte a zugehören und auf ein Target der Dicke x aus Teilchen der Sorte b geschossen werden.

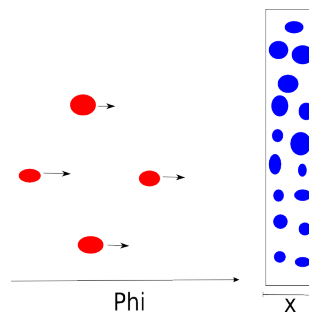


Abbildung 3.1. Teilchenfluss auf Target

Die Reaktionsrate pro Targetteilchen ist $W = \Phi \cdot \sigma$. Die Reaktionsrate im gesamten Target ist $W \cdot N = \Phi \cdot n_B \cdot x$ mit N Targetteilchen und der Volumenteilchendichte n_B .

Im Allgemeinen hängt der Wirkungsquerschnitt σ von der Art der Reaktion ab:

- Absorption σ_A
- elastische Streuung σ_E
- inelastische Streuung σ_I

Der Gesamtwirkungsquerschnitt ergibt sich dann via Addition $\sigma_{Ges} = \sigma_A + \sigma_E + \sigma_I$. Für Teilchen die sich innerhalb eines Mediums ausbreiten definiert man die mittlere freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{n_B \sigma}$. Diese gibt die durchschnittliche Strecke an, die ein Teilchen im Target ohne Wechselwirkung zurücklegen kann.

Das Volumen in dem 1 Targetteilchen ist ist also $V = \lambda \cdot \sigma = 1/n$
 Anhand der mittleren freien Weglänge lassen sich folgende Größen berechnen:

- Anzahl der Strahlteilchen im Targetmaterial : $N(x) = N_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Kollisionsrate: $c(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = \frac{N_0}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} = c_0 \cdot e^{-x/\lambda}$
- Wahrscheinlichkeit für Reaktion eines einfallenden Teilchens: $p(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

Aus Dimensionsbetrachtungen lässt sich darauf schliessen, dass der Wirkungsquerschnitt die Dimension einer Fläche hat. Wir werden dies nun veranschaulichen:

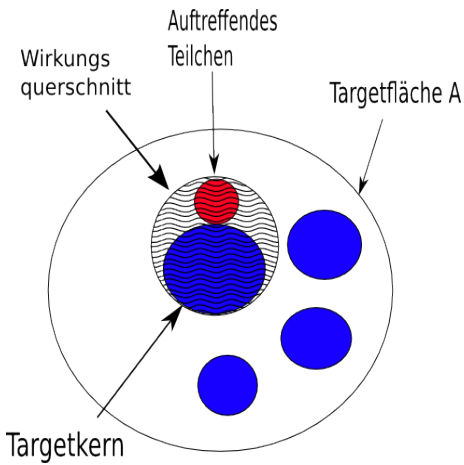


Abbildung 3.2. Wirkungsquerschnitt eines Teilchens (rot) das auf ein Targetteilchen (blau) trifft, mit Wirkungsquerschnitt (gewellte Fläche)

Im Allgemeinen ist bei Teilchenkollisionen der Wirkungsquerschnitt, die kleinste Fläche, die beide Teilchen komplett einschließt:

$$\sigma = \pi(r_K + r_P)^2 \quad (3.11)$$

Kernradius: r_K Projektilradius: r_P

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das n Projektile mit dem Target wechselwirken, als das Verhältnis der effektiven Flächen:

$$P = \frac{n\sigma}{A} \quad (3.12)$$