Höhere Analysis

Dr. Philipp Reiter
WS 16/17 Universität Heidelberg

22. Dezember 2016

gesetzt in LaTeX von Sebastian Blänsdorf,
Fabian Krautgasser & Marvin Sipp

Dies ist das Vorlesungsskript zur Vorlesung *Höhere Analysis* bei Dr. Philipp Reiter im Wintersemester 16/17 an der Universität Heidelberg. Da dieses Skript von Studenten angefertigt wird, ist keine Garantie auf Exaktheit und Vollständigkeit gegeben. Ebenso ist dies kein Anspruch auf Originalität, da sich die Inhalte aus vielerlei Fachbüchern zusammen setzen. Wir bitten zu entschuldigen, dass diese nicht explizit angegeben sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Maßtheorie

Definition 1 (Algebra). Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X mit folgenden Eigenschaften:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} := X \backslash A \in \mathcal{A}$
- $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}, N \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathcal{A}$

Wir sprechen von einer σ-Algebra, wenn $N = \infty$ zulässig ist.

Lemma 2. *Sei X eine Menge. $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gehören auch $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ und beispielsweise $A_1 \backslash A_2$ zu $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir haben

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \underbrace{\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A_k^{\mathrm{C}}}_{\in \mathcal{A}} \right)}_{\in \mathcal{A}}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$$

Weiter ist $A_1 \backslash A_2 = A_1 \cap \underbrace{A_2^{\mathrm{C}}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ □

Beispiel. *Für $X = \{1, 2, 3\}$ ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$*

Definition 3. Allgemein ist $\mathfrak{P}(X)$ (=Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von X) die größte und $\{\emptyset, X\}$ die kleinste σ-Algebra. Sei $S \subset \mathfrak{P}(X)$, dann stellt

$$\Sigma(S) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \ \sigma\text{-Algebra mit } S \in \mathcal{A}\}$$

tatsächlich eine σ-Algebra dar. Es ist die kleinste σ-Algebra die S enthält und wird als *die von S erzeugte* σ-Algebra bezeichnet. $\Sigma(S)$ ist eindeutig bestimmt.
Ist X eine Menge mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $Y \subset X$. Dann bezeichnen wir

$$\mathcal{A} \cap Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

als *relative σ-Algebra.* Sie ist in der Tat eine σ-Algebra auf Y.

Lemma 4. *Die erzeugte und die relative σ-Algebra sind wohldefiniert, also eindeutig bestimmt, und tatsächlich σ-Algebren.*

Beweis. In der Übung. □

Behauptung. *Falls $S \subset \mathfrak{P}(X)$ die σ-Algebra $\Sigma = \Sigma(S \mid X)$*[1] *erzeugt, dann erzeugt für $Y \subset X$ die Menge $S \cap Y$ die σ-Algebra $\Sigma(S \cap Y \mid Y)$, und*

$$\Sigma(S \cap Y \mid Y) = \Sigma(S \mid X) \cap Y$$

Beweis.

"$\Leftarrow$" Weil $\Sigma \cap Y$ die Mengen aus $S \cap Y$ enthält, gilt $\Sigma(S \cap Y) \subset \Sigma \cap Y$

"$\Rightarrow$" Betrachte die Menge

$$\{A \subset \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\}$$

Dies ist eine σ-Algebra, weil diese die Menge S enthält, folgt

$$\Sigma(S) \subset \{A \in \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\} \subset \Sigma(S)$$

also Gleichheit und folglich $\Sigma(S) \cap Y = \{A \in \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\} \cap Y \subset \Sigma(S \cap Y)$

□

Definition 5 (Topologischer Raum)**.** Sei X eine Menge. Es gibt ein System von Teilmengen $\mathcal{O} \subset X$ mit $\varnothing, X \in \mathcal{O}$, das abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen. Dieses System $(X, \mathcal{O})$ heißt *topologischer Raum*. Formal muss gelten:

- $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
- $\{U_i\}_{i \in I}, U_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Definition 6 (Borel-σ-Algebra)**.** Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{O} \subset X$, so ist $\mathcal{B}(X)$ diejenige σ-Algebra, die von $\mathcal{O}$ erzeugt wird (also die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen von $(X, \mathcal{O})$ enthält). Wir bezeichnen $\mathcal{B}(X)$ als *Borel-σ-Algebra*, und die Mengen in $\mathcal{B}$ heißen *Borel-Mengen.*
Notation:

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \ \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$$

Bemerkung. *Die Familie aller endlichen offenen Intervalle $\subset \mathbb{R}$ erzeugt bereits $\mathcal{B}$.*

Definition 7 (Maßraum, Maß)**.** Eine Menge X mit einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Maßraum.* Ein *Maß* ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ mit:

- $\mu(\varnothing) = 0$

[1] Hier bezeichnet X den "Raum", der für Σ von Bedeutung ist.

- **σ-Additivität**: Für eine Folge[2] paarweise disjunkter[3] Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ist $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$

Die Elemente in $\mathcal{A}$ heißen *messbar*, und das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt somit *Maßraum*.

Definition 8 (σ-Finitheit). Ein Maß heißt *σ-finit*, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X gibt, also $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, sodass $\mu(X_k) < \infty \; \forall k$.
μ heißt *endlich*, falls $\mu(X) < \infty$, und *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$.

Beispiel 9.

(a) ***Zählmaß***: *Für X und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$ setze*

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & : A \text{ endlich} \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

μ ist endlich, wenn X endlich, und σ-finit, wenn X abzählbar ist.

(b) ***Dirac-Maß***: *Für einen fest gewählten Punkt $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$ setze für $A \subset X$*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : x_0 \notin A \\ 1 & : x_0 \in A \end{cases}$$

(c) ***Positive Linearkombinationen***: *Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann erhalten wir durch $\mu := \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ wieder ein Maß.*

Beispiel 10. *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $Y \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu_{|Y}(A) := \mu(A \cap Y)$ wieder ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.*

Bemerkung. *Für $Y \in \mathcal{A}$ können wir die σ-Algebra $\mathcal{A}$ zu*

$$\mathcal{A}_{|Y} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$$

einschränken. Dann ist $\mu_{|Y}(A) = \mu(A \cap Y)$, $A \cap Y \in \mathcal{A}$, ein Maß (siehe oben) und $\left(Y, \mathcal{A}_{|Y}, \mu_{|Y}\right)$ ein Maßraum und dieser ist μ-finit, falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-finit ist.

Notation 11.

$A_k \nearrow A$, falls $A_k \subset A_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

$A_k \searrow A$, falls $A_k \supset A_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Satz 12. *Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt:*

(i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ (Monotonie)

(ii) $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ (σ-Subadditivität)

[2] Folgen sind indizierbar mit $\mathbb{N}$. Im Unterschied dazu können Familien auch überabzählbar sein.
[3] $A_j \cap A_k = \varnothing$ für $j \neq k$

(iii) $A_k \nearrow A \Rightarrow \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$

(iv) $A_k \searrow A \Rightarrow \mu(A_k) \searrow \mu(A)$, *für* $\mu(A_1) < \infty$

Beweis.

(i) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow B = A \,\dot\cup\, (B\backslash A)\,,\ B\backslash A \in \mathcal{A}$, woraus folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B\backslash A) \\ &\geqslant \mu(A) \end{aligned}$$

(ii) Wir definieren $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ induktiv durch $B_1 := A_1$, $B_{k+1} = A_{k+1}\backslash \bigcup_{j=1}^{k} A_k \in \mathcal{A}$, woraus folgt

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{K}} B_k = \bigcup_{n=1}^{K} A_k \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Nach Definition gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \overset{(i)}{\leqslant} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

(iii) Definiere $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch $C_1 := A_1,\ C_{k+1} := A_{k+1}\backslash A_k$. Demnach ist

$$\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A$$

Die σ-Additivität liefert

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j) \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(C_k)}_{=\mu(A)} \left(\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\right)$$

(iv) $D_k := A_1\backslash A_k \forall k \in \mathbb{N}$. Damit ist $D_k \nearrow A_k\backslash A$, und wir haben

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1\backslash A_k) \underset{(iii)}{\xrightarrow{k\to\infty}} \mu(A_1\backslash A) - \mu(A)$$

Subtraktion von $\mu(A_1) < \infty$ liefert die Behauptung.

□

Bemerkung 13. *Zählmaß* μ *auf* $X = \mathbb{N}$ *und* $A_k = \{j \in \mathbb{N} \mid j \geqslant k\}$, $A_k \searrow \varnothing$, $\mu(A_k) = \infty\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mu(\varnothing) = 0$. *Hieraus erkennt man, dass die Bedingung* $\mu(A_1) < \infty$ *in* Satz $12_{\text{(iv)}}$ *wesentlich ist.*

Definition 14 (Borel-Maß)**.** Sei X ein topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$. Ein Maß μ auf $(X, \mathcal{B}(X))$ heißt *Borel-Maß*, falls es auf Kompakten[4] stets endliche Werte annimmt.

Beispiel 15. *Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Das Dirac-Maß ist ein Borel-Maß, das Zählmaß hingegen nicht.*

Definition 16 (Regularität)**.** Sei X ein topologischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt *regulär von außen*, wenn gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U,\ U \text{ offen}\}\ \forall A \in \mathcal{A}$$

Außerdem heißt das Maß μ *regulär von innen*, wenn gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}\ \forall A \in \mathcal{A}$$

Ein Maß heißt *regulär*, wenn es regulär von innen und außen ist.

Beispiel 17. *Das Zählmaß ist regulär von innen, jedoch nicht von außen. Das Dirac-Maß ist regulär ($X, \mathcal{A}$ wie in* Beispiel 15*).*

Strategie:

1. Starte mit einem sogenannten Prämaß λ auf der Algebra endlicher, disjunkter Vereinigungen von Intervallen, $\lambda =$ Summe der Längen.
2. Dies kann zu einem "äußeren Maß" auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden (keine σ-Additivität).
3. Einschränkung auf Borel-σ-Algebren liefert ein Maß.

Definition 18 (Dynkin-System)**.** Eine Familie $\mathcal{D} \subset \mathfrak{P}(X)$, X eine Menge, heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

- $X \in \mathcal{D}$
- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$
- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D},\ A_k \cap A_m = \varnothing\ \forall k, m,\ k \neq m \Rightarrow \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$

Bemerkung 19.

(i) Ein Dynkin-System ist abgeschlossen unter Mengensubtraktion:

$$A, B \in \mathcal{D},\ B \subset A \Rightarrow A \backslash B = A \cap B^{\mathrm{C}} = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

da $B^{\mathrm{C}}, A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$, und $A^{\mathrm{C}} \cup B \in \mathcal{D}$, denn $B \cap A^{\mathrm{C}} \subset A \cap A^{\mathrm{C}} = \varnothing$

(ii) Ist $S \subset \mathfrak{P}(X)$, so ist

$$\mathcal{D}(S) = \bigcap\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System, } S \in \mathcal{D}\}$$

das von S erzeugte Dynkin-System.

[4] Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in I$ besitzt.

(iii) *Das von S erzeugte Dynkin-System ist wohldefiniert, das heißt es ist eindeutig und tatsächlich ein Dynkin-System.*

Lemma 20. *Ist $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten oder alternativ unter beliebigen (also nicht notwendigerweise disjunkten) endlichen Vereinigungen, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.*

Beweis. In der Übung. □

Lemma 21. *Sei S eine (nichtleere) Familie, von Teilmengen einer Menge X, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Dann folgt $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$.*

Beweis. Nach Definition gilt $\mathcal{D}(S) \subset \Sigma(S)$. Die andere Inklusion, $\Sigma(S) \subset \mathcal{D}(S)$, folgt sofort, wenn wir zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ eine σ-Algebra ist. Nach *Lemma 20* genügt hierzu der Nachweis, dass $\mathcal{D}(S)$ abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Hierzu definieren wir für ein festes $A \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(S)$:

$$D(A) = \{B \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D}$$

Ziel: $D(A) = \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}$

Behauptung. *$D(A)$ ist ein Dynkin-System für beliebige $A \in \mathcal{D}$.*

Beweis.

- $X \in \mathcal{D},\ A \cap X = A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \in D(A)$
- $B \in D(A) \Rightarrow B \in \mathcal{D},\ A \cap B \in \mathcal{D}$.
  Hieraus folgt: $A \cap B^{\mathrm{C}} = A \setminus (B \cap A) \in \mathcal{D}$ $\left(\textit{vgl. Bem. } 19_{(i)}\right)$
- $B = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} B_k,\ B_k \in D(A) \Rightarrow B_k \in \mathcal{D},\ A \cap B_k \in \mathcal{D}$.
  Hieraus folgt: $B \in \mathcal{D},\ B \cap A = \dot{\bigcup}(B_k \cap A) \in \mathcal{D} \Rightarrow B \in D(A)$ (da $B_k \cap A \in \mathcal{D}$)

□

Behauptung. *$A \in S \Rightarrow S \subset D(A)$, denn $B \in S \Rightarrow A \cap B \in S \subset \mathcal{D} \Rightarrow B \in D(A)$. Da $\mathcal{D} = \mathcal{D}(S)$ das kleinste Dynkin-System ist, das S enthält, folgt*

$$\mathcal{D} \subset D(A) \Rightarrow \mathcal{D} = D(A)$$

Für beliebige $U \in S, \mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{D}} := D(U)$ folgt nach Definition $U \cap \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Dies impliziert $U \in D(\mathcal{V})$, also $S \subset D(\mathcal{V})\ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Wie eben ist $D(\mathcal{V}) \subset \mathcal{D}$, also $D(\mathcal{V}) = \mathcal{D}\ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Folglich ist $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten.

□

Bemerkung 22. Lemma 21 *lässt sich wie folgt anwenden:*

- *Verifiziere eine Eigenschaft ε auf einer Menge $S \subset \mathfrak{P}(X)$, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist.*

- *Zeige, dass die Menge aller Mengen in $\mathfrak{P}(X)$, die ε enthalten, ein Dynkin-System bildet.*
- *Schließe, dass ε auf $\Sigma(S)$ gilt.*

Lemma 21 *gilt auch unter der Voraussetzung "Abgeschlossenheit unter beliebigen endlichen Vereinigungen" (statt der Schnitte).*

Satz 23 (Eindeutigkeit der Maße). *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, und $S \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Familie von Mengen, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist, und $\Sigma(S) = \Sigma$. Weiter enthält S eine Folge aufsteigender Mengen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $X_k \nearrow X$ und $\mu(X_k) < \infty \; \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist μ auf $\Sigma = \Sigma(S)$ durch die Werte auf S eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei μ ein weiteres Maß mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf S (Ziel: $\mu = \tilde{\mu}$ überall).
Zunächst ist $\tilde{\mu}(X) \overset{\text{Satz 12}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\mu}(\underbrace{X_k}_{\in S}) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(X_k) \overset{\text{Satz 12}}{=} \mu(X)$

Sei nun $\mu < \infty$ □

Behauptung. $\mathcal{D} = \{A \in \Sigma \mid \tilde{\mu}(A) = \mu(A)\}$ *ist ein Dynikn-System (Ziel $\mathcal{D} = \Sigma(S)$)*

Beweis. $X \in \mathcal{D}$ wie gesehen. Für $A \in \mathcal{D}$ ist

$$\tilde{\mu}\underbrace{(A^c)}_{\in\Sigma} = \tilde{\mu}(X) - \tilde{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^c) \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$$

Abgeschlossenheit unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen. Betrachte $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$,
$B_j \cap B_k = \varnothing \; \forall j, k \in \mathbb{N}, B_k \in \mathcal{D}, B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(B)$$

Nach *Lemma 21* folgt nun $\underbrace{\Sigma(S)}_{\Sigma} = \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D} \subset \Sigma \Rightarrow \mathcal{D} = \Sigma$. Dies zeigt die Behauptung im Fall $\mu(X) < \infty$. □

Im allgemeinen Fall erhalten wir für jedes $A \in \Sigma$

$$\tilde{\mu}(a) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A \cap X_k) =^{5} \lim_{k\in\infty} \mu(A \cap X_k) = \mu(A)$$

Definition 24 (Prämaß). Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Algebra. Ein *Prämaß* auf X ist eine σ-additive Abbildung $\mu(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ und $\mu(\varnothing) = 0$.

Bemerkung. *Brauche hier σ-Additivität nur für solche (paarweise disjunkten) Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gewährleisten, deren Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ in $\mathcal{A}$ liegt. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra ist ein Maß.*

[5] Argumentation angewendet auf $X_k (\mu(X_k) < \infty)$

Corollar 25. *Sei μ ein σ-finites Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A}$. Dann gibt es höchstens eine Forsetztung auf $\Sigma(\mathcal{A})$*

Beweis. Setzte $S = \mathcal{A}$ wie in *Satz 23*. Offenbar ist S abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Da X σ-finit ist, gibt es eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ und $\mu(X_k) < \infty$. Für $A_k := \bigcup_{j=1}^k X_j$ ist $A_k \nearrow X$ und $\mu(A_k) \leqslant \sum_{j=1}^k \underbrace{\mu X_j}_{<\infty} < \infty$. Wenn es ein Maß auf (X, σ) gibt, ist es eindeutig (*Satz 23*). □

Beispiel 26. *Die Menge S aller Intervalle der Form $[a, b)$, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, erzeugt unter endlichen Vereinigungen eine Algebra $\mathcal{A}$. Wir setzten $\mu(\varnothing) := 0$, $\mu([a, b)) = \infty$ (für $a \neq b$). Dies definiert ein Prämaß auf $\mathcal{A}$. Es gibt (mindestens) zwei Fortsetztungen auf $\Sigma(S)$. a) mit dem Zählmaß (für $A \in \Sigma$ mit $\#A < \infty$) oder b) $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(A) = +\infty \; \forall \; A \in \Sigma \backslash \{\varnothing\}$*

Definition 27 (Äußere Maße)**.** Eine Funktion $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ ist ein *äußeres Maß*[6] auf X, falls $\forall \; (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{P}(x)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- $\mu^*(\varnothing) = 0$
- $\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(A_2)$, falls $A_1 \subset A_2$ (Monotonie)
- $\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$ (σ-Subadditivität)

Satz 28 (Fortsetzung äußere Maße)**.** *Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X. Wir sagen, die Menge $A \subset X$ erfülle die Carathéodory-Bedingung, falls*

$$\mu^*(E) = {}^7\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \; \forall \; E \cap X$$

gilt. Die Familie Σ aller Mengen $A \subset X$, die die Carathéodory-Bedingung erfüllen, bildet eine σ-Algebra Σ und $\mu^*|_\Sigma$ ist ein Maß.

Bemerkung. *Maße erfüllen wegen Additivität die Carathéodory-Bedingung*

Beweis.

a) **Behauptung.** Σ ist eine Algebra.

Beweis. Offenbar ist $X \in \Sigma$. Abgeschlossenheit unter Komplementbildung ist klar. Für endliche Vereinigungen betrachte $A, B \in \Sigma$. Sei $E \subset X$ beliebig.

$$\mu^*((A \cup B) \cap E) \overset{Subadd}{\leqslant} \mu^*(A \cap B^c \cap E) + \mu^*(A^c \cap B \cap E) + \mu^*(A \cap B \cap E)$$

Zweifache Anwendung der Carathéodory-Bedingung liefert

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\overset{A\in\Sigma}{=} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\overset{B\in\Sigma}{=} \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^{\mathrm{C}}) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

[6] Jedes Maß ist ein äußeres Maß
[7] $\leqslant$ gilt wegen Subbadditivität

Mit der obigen Abschätzung erhalten wir

$$\mu^* \geqslant \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*(E \cap \underbrace{A^c \cap B^c}_{(A\cup B)^c})$$

$\square$

b) **Behauptung.** Σ ist eine σ-Algebra.

Beweis. Sei also $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ (Ziel $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$). Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die A_k paarweise disjunkt sind (vgl. *Satz 12*). Setze $B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \Sigma$, also $B_k \nearrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Nun ist für jedes $E \subset X$

$$\begin{aligned}\mu^* \underbrace{(B_k \cap E)}_{\subset X} &\overset{A\in\Sigma}{=} \mu^* \underbrace{(B_k \cap E \cap A_k)}_{E\cap A_k} + \mu^* \underbrace{(B_k \cap E \cap A_k^c)}_{=E\cap B_{k-1} \text{ da } (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ paarweise disjunkt}^{10}} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap A_j)\end{aligned}$$

also haben wir:

$$\mu^*(E) \overset{B\in\Sigma}{=} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*(E \cap B_k^c) \overset{\text{Monotonie (Subadd.) 2er Term}\downarrow}{\geqslant} \left(\sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Mit $k \to \infty$ und Subadditivität erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap A_k)\right) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geqslant \mu^* \underbrace{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E \cap A_k)\right)}_{E\cap A} + \mu^*(E \cap A^c) \overset{Subadd}{\geqslant} \mu^*(E)\end{aligned}$$

Also gilt $A = \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$, und folglich ist Σ eine σ-Algebra $(*)$ $\square$

c) **Behauptung.** $\mu|_\Sigma$ ist ein Maß.

Beweis. Hierzu betrachte eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkte Mengen in Σ.
$\mu^*(\varnothing) = 0$ haben wir schon. Aus $(*)$ folgt mit $E = A := \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

$$\mu^*(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^* \underbrace{(A \cap A_k)}_{A_K} + \mu^* \underbrace{(A \cap A^c)}_{\varnothing} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$$

$\square$

[10] $B_k \cap A) := \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow B_k^c \supset A^c$

Bemerkung 29. *Das soeben konstruierte Maß $\mu^*|_\Sigma$ ist vollständig d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge*[11] *ist messbar.*

Beweis. Sei $A \in \Sigma$ $\mu(A) = 0,\ B \subset A$. Ziel $B \in \Sigma$ ($\Rightarrow \mu(B) = 0$ wg. Monotonie). Sei $E \cap X$

$$\mu^* \underbrace{E \cap B}_{\subset B \subset A} \leqslant \underbrace{\mu^*(A)}_{=0} \quad \mu^*(\underbrace{E \cap B^c}_{\subset E}) \leqslant \mu^*(E)$$

Insofern ist $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$, also $B \in \Sigma$. □

Lebesgue-Maß

(1) Für ein verallgemeinertes Integral I der Form (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ mit $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ setzen wir $\lambda(I) := b - a \in [0, \infty]$

(2) (TODO)

Lemma 31. *Dies ergibt ein eindeutiges σ-finites Prämaß auf der Algebra $\mathcal{A}$, die aus endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle im obigen Sinne besteht.*
Wir setzen $\lambda\left(\dot\bigcup_{j=1}^k I_j\right) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j)$.

(3) (TODO) Wir erhalten zunächst eine Fortsetzung von λ zu einem äußeren Maß λ^*, also $\lambda^* = \lambda$ auf $\mathcal{A}$, wobei jede Menge aus $\mathcal{A}$ die Carathéodory-Bedingung erfüllt.

(4) *Satz 28* liefert eine σ-Algebra $\Lambda \supset \mathcal{A}$, sodass $\lambda := \lambda^*|_\Lambda$ ein Maß ist.

(5)

Definition 32. Die Elemente von Λ heißen **Lebesgue-messbare** Mengen (bzw. **Lebesgue-Mengen**) und λ ist das **Lebesgue-Maß**.

Lemma 30 (Ad 3)**.** *Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$.*
Wir setzen für $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \,\middle|\, (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A, \quad A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\}$$

Dies definiert ein äußeres Maß μ^* mit $\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{A}$ und jede Menge aus $\mathcal{A}$ erfüllt die Carathéodory-Bedingung.

Beweis.
1. Teil: Übungsaufgabe 5.
2. Teil: (Carathéodory-Eigenschaft): Sei $E \subset X$ beliebig und $A \subset \mathcal{A}$.
(Ziel: $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A^{\mathrm{C}}) + \mu^*(E \cap A)$, $\leqslant$ folgt sofort aus der Subadditivität).

[11] $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$

Wir betrachten eine beliebige Überdeckung von E durch

$$(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \quad B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \supset E.$$

Dann ist zunächst auch $(B_k \cap A)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $E \cap A$ und entsprechend $(B_k \cap A^{\mathrm{C}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $E \cap A^{\mathrm{C}}$.
Wir erhalten hieraus

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k \cap A) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k \cap A^{\mathrm{C}}) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\mathrm{C}})$$

Indem wir das Infimum über $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \supset E$ nehmen, folgt

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\mathrm{C}}).$$

□

Dies erledigt (3). Für (2) erbringen wir

Beweis von Lemma 31.

(a) $\mathcal{A}$ *ist eine Algebra.* In der Tat, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Das Komplement einer endlichen Vereinigung disjunkter Intervalle (möglicherweise verallgemeinert) besitzt wieder diese Form.

Für den Fall endlicher Vereinigungen betrachte zunächst den Fall zweier aus je einem Intervall bestehender Mengen ($\to$ entweder disjunkte Vereinigung oder neues Intervall) und fahre induktiv fort.

(b) Offenbar gilt $\lambda(\varnothing) = 0$. Für σ-Additivität ist $\lambda(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_k)$ für alle paarweise disjunkten Folgen $(I_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ zu zeigen.

- Weil jedes I_k eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle ist, können wir umsortieren und umnummerieren und somit ohne Einschränkungen voraussetzen, dass jedes I_k ein Intervall ist (Nach wie vor $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt).
- Weiter können wir voraussetzen, dass $I := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ (= disjunkte Vereinigung endlich vieler Intervalle, da $\in \mathcal{A}$) aus genau einem Intervall besteht (betrachte jede Komponente der Vereinigung separat).

Wir haben erreicht:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \longleftarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j) \overset{\text{Add.}}{=\!=\!=} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \overset{\text{Monot.}^{12}}{\leqslant} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \lambda(I)$$

Für die andere Richtung wählen wir zunächst für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein *offenes* $J_k \supset I_k$ mit

$$\lambda(J_k) \leqslant \lambda(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

[12] $\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}}^{k} \lambda(B_j)$ vgl. Beweis zu *Satz 12(i)*.

für ein zu bestimmendes $\varepsilon > 0$.

Sei zunächst I kompakt. Dann können wir endlich viele J_k auswählen, sodass diese I überdecken[13]. Wir können durch Umnummerierung erreichen, dass dies die ersten K Elemente sind und wir haben

$$\lambda(I) \overset{\text{Monot.}^{12}}{\leqslant} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{K} J_j\right) \overset{\text{Subadd.}}{\leqslant} \sum_{j=1}^{K} \lambda(J_j) \overset{\text{Konstr.}}{\leqslant} \varepsilon + \sum_{j=1}^{K} \lambda(I)$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt σ-Additivität für kompakte I. Da wir mit Additivität und $\lambda(\{x\}) = \lambda([x, x]) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ Endpunkte an Intervalle hinzufügen / entfernen können, folgt die Behauptung auch für beschränkte I.

Sei I nun ein unbeschränktes Intervall, damit ist $\lambda(I) = \infty$.
Zu zeigen ist, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) = \infty$.
Sei $\xi \in I$. Durch Hinzufügen eines Punktes (sofern erforderlich) können wir erreichen, dass I abgeschlossen ist. Damit ist $I \cap [-x, x]$ kompakt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und wird folglich von den ersten K Elementen überdeckt, $K = K(\xi)$.

Demnach erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \geqslant \sum_{j=1}^{K} \lambda(I_j) \overset{\text{Konstr. } J_k}{\geqslant} \left(\sum_{j=1}^{K} \lambda(J_j)\right) - \varepsilon \overset{\text{s. o.}}{\geqslant} \lambda(I \cap [-x, x]) - \varepsilon \geqslant x - |\xi| - \varepsilon$$

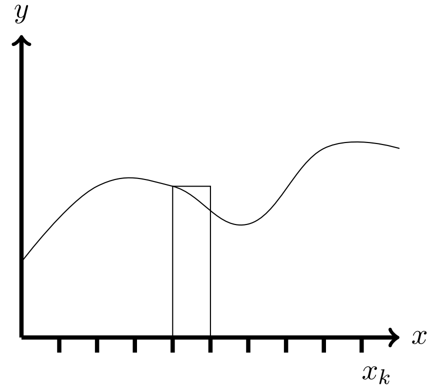
Hieraus folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \geqslant x - |\xi| - \varepsilon \xrightarrow{x \to \infty} \infty.$$

□

[13] Satz von Heine-Borel

Riemann-Integral

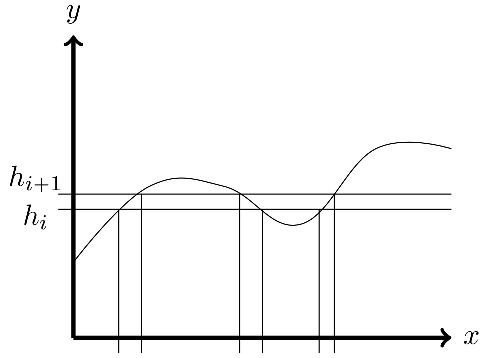


$$\int f \approx \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) f(x_j)$$

Kriterium
(Obersumme − Untersumme) → 0

f muss hinreichend „schön“ sein (z. B. nicht überabzählbar viele Sprünge).
z. B. nicht Riemann-integrierbar: $\chi_{\mathbb{Q}}$

Lebesgue-Integral



$$\int f \approx \sum_{k\in\mathbb{N}} h_k\, \lambda\Big(f^{-1}\big([h_k, h_{k+1}]\big)\Big)$$

Hierfür müssen die Urbilder der Intervalle messbar sein.

Definition 33. Seien (X, Σ_X), (Y, Σ_Y) Messräume.
Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heipt **messbar** (eigentlich **Σ_X-Σ_Y-messbar**), falls
$f^{-1}(A) \in \Sigma_X \quad \forall A \in \Sigma_Y$.
Ist X ein topologischer Raum und Σ_X die entsprechende Borel-σ-Algebra, so nennen wir eine messbare Funktion **Borel-Funktion**.

Bemerkung 34. *Es genügt, Messbarkeit für ein Messystem $S \subset \mathfrak{P}(Y)$ mit $\Sigma(S) = \Sigma_Y$ zu überprüfen.*
In der Tat ist $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$ für jedes $A \in S$, es folgt

$$f^{-1}(A^{\mathrm{C}}) = f^{-1}(Y\backslash A) = X\backslash f^{-1}(A) = \big(f^{-1}(A)\big)^{\mathrm{C}} \in \Sigma_X.$$

Weiter ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(A_k)}_{\in\Sigma_X} \in \Sigma_X.$$

Im Folgenden häufig $(Y, \Sigma) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Lemma 35. *Eine Funktion $f\colon (X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist genau dann messbar, wenn*

$$f^{-1}(I) \in \Sigma\ \forall I = \bigtimes_{j=1}^{n} (a_j, \infty)\,,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Insbesondere ist f genau dann messbar, wenn jede seiner Komponenten $x \mapsto \langle f(x), e_\ell \rangle$, $\ell = 1, \ldots, n$ messbar ist, und eine komplexwertige Funktion ist messbar genau dann, wenn Real- und Imaginärteil messbar sind.

Beweis. Die σ-Algebra, die von den verallgemeinerten Quadern I erzeugt wird, enthält sämtliche Quader der Form $\times_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$, $-\infty < a_j < b_j < \infty$. Diese bilden eine Basis für die Topologie und führen somit auf $\mathcal{B}^n$. Hieraus folgt unmittelbar die zweite Aussage. □

Die Intervalle (a_j, ∞) können äquivalent durch $[a_j, \infty)$ beziehungsweise $(-\infty, a_j)$ und $(-\infty, a_j]$ ersetzt werden.

Lemma 36. *Seien $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), (Z, \Sigma_Z)$ Maßräume. Sind $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ messbar, dann ist auch $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ messbar. Sind Σ_X, Σ_Y Borel-σ-Algebren und X, Y entsprechend topologische Räume, so ist jede stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ messbar.*

Beweis. Das Urbild offener Mengen (diese erzeugen die Borel-σ-Algebra Σ_Y) ist aufgrund der Stetigkeit offen, also messbar (da Σ_X alle offenen Mengen enthält). Ist $C \in \Sigma_Z$ messbar, so ist es auch $B := g^{-1}(C) \in \Sigma_Y$ und $A := f^{-1}(B) \in \Sigma_X$. □

Lemma 37. *Sind $f, g\colon (X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar, so auch $f + g$ und $f \cdot g$.*

Beweis. Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Somit folgt die Behauptung nach *Lemma 36.* □

Notation 38. Gelegentlich möchte man die Werte $\pm\infty$ zulassen; wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wir nennen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ *Borel-Menge*, wenn $A \subset \mathbb{R}$ eine Borel-Menge ist. Entsprechend ist $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine *Borel-Funktion*, wenn $f^{-1}(\{-\infty, \infty\})$ beide Borel-Mengen sind und $f|_{X \setminus f^{-1}(\{\pm\infty\})}$ eine Borel-Funktion ist. Die entsprechende Borel-σ-Algebra zu $\overline{\mathbb{R}}$ wird mit $\overline{\mathcal{B}}$ bezeichnet.

Bemerkung 39. *Wegen $\{+\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (k, +\infty]$, $\{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-k, +\infty]$ ist $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar genau dann, wenn $f((a, +\infty]) \in \Sigma\ \forall a \in \mathbb{R}$. Auch hier können wir alternativ $[a, +\infty]$ beziehungsweise $[-\infty, a)$ oder $[-\infty, a]$ verwenden. Insofern gilt* Lemma 37 *auch für $f, g\colon (X, \Sigma) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$, wenn man Ausdrücke der Form $\infty - \infty$ beziehungsweise $0 \cdot \infty$ vermeidet. In der Regel setzt man $\infty - \infty = 0$, $0 \cdot \infty = 0$.*

Wichtig: Die Menge der messbaren Funktionen ist unter Grenzwertbildung abgeschlossen, genauer:

Lemma 40. *Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $(X, \Sigma) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. Dann sind auch $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\limsup_{k \to \infty} f_k$, $\liminf_{k \to \infty} f_k$ messbar [14].*

[14] Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist der Limes inferior von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als $\liminf_{n \to \infty} x_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geqslant n} x_k$. Analog ist der Limes superior von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als $\limsup_{n \to \infty} x_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geqslant n} x_k$.

Beweis. Wir haben

$$\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}((a,\infty]) \overset{(*)}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}((a,\infty])$$

und dies ist $\forall a \in \mathbb{R}$ messbar. Hierbei wurde

$$x \in \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}((a,\infty]) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > a \Longleftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\colon f_{k_0}(x) > a$$

verwendet. Die restlichen Aussagen folgen mit

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)\,,\ \liminf_{n\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geqslant k} f_j,\ \limsup_{n\to\infty} f_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geqslant k} f_j.$$

□

Zusatz zu Lemma 40: Für messbare f, g sind auch $\min(f,g)$, $\max(f,g)$, $|f| = \max(f,-f)$, $f^{\pm} = \max(\pm f, 0)(\geqslant 0)$ sowie alle punktweisen Limites messbarer Funktionen messbar.

2 Integration

Im Folgenden sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

Definition 41. Eine messbare Funktion $f\colon (X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt *einfach*, wenn ihr Bild endlich ist, das heißt, es gibt Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j},$$

wobei χ_M die *charakteristische Funktion*

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & : x \notin M \\ 1 & : x \in M \end{cases}$$

bezeichnet. Wir können fordern, dass die A_j paarweise disjunkt sind, die α_j paarweise verschieden und $\bigcup A_j = X$ gilt: in diesem Fall ist $f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und $f^{-1}(\{\alpha_j\}) = A_j\ \forall j = 1, \ldots, m$ und diese Darstellung ist eindeutig. Der Vektorraum einfacher Funktionen wird mit $S(X, \mu)$ bezeichnet.

Definition 42 (Integral)**.** Das Integral einer nicht-negativen, einfachen Funktion über der Menge $A \in \Sigma$ wird durch

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap A)$$

erklärt, wobei wir $0 \cdot \infty = 0$ vereinbaren.

Lemma 43. *Das Integral hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \,\mathrm{d}\mu,\ f \in S(X, \mu),\ f \geqslant 0,\ A \in \Sigma$

(ii) $\int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{B_k} f \,\mathrm{d}\mu$*, für paarweise disjunkte* $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$

(iii) $\int_A \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ *für* $\alpha \geqslant 0$

(iv) $\int_A (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_A f\mu\mu + \int_A g \,\mathrm{d}\mu,\ g \in S(X, \mu)$

(v) $A \subset B,\ B \in \Sigma \Rightarrow \int_A f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f \,\mathrm{d}\mu$

(vi) $f \leqslant g \Rightarrow \int_A f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ *für* $g \in S(X, \mu),\ g \geqslant 0$

Beweis.

(i) folgt sofort aus *Definition 42*, denn $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap A) = \sum_{j=1}^{m} B_j \mu(A_j)$ für B_j, die auf $f \cdot \chi_{A_j}$ angepasst sind.

(ii) $\mu(A_j \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_j \cap B_k)$ (man darf Reihe über nicht negative Zahlen beliebig umsortieren.)

(iii) klar.

(iv) Für $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j},\ g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k}$ (wie in *Definition 42*) haben wir mit $C_{jk} = A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\ \mathrm{d}\mu &\overset{(ii)}{=} \sum_{j,k} \int_{C_{jk}} (f+g)\ \mathrm{d}\mu = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k)\,\mu(C_{jk}) \\ &= \underbrace{\sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk})}_{=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j)} + \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A f\ \mathrm{d}\mu + \int_A g\ \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

(v) folgt aus der Monotonie von μ

(vi) erhält man wie in *(iv)* mit

$$\int_A f\ \mathrm{d}\mu = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk}) \overset{(*)}{\leqslant} \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A g\ \mathrm{d}\mu,$$

wobei für $(*)$ gilt: auf $C_{jk} : \alpha_j \leqslant \beta_k$ (wegen $f < g,\ C_{jk}$ paarweise disjunkt).

□

Definition 44 (Integral)**.** Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, $f\colon (X,\Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar und nicht negativ. Dann ist

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int g\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; g \in S(X,\mu), g \leqslant f, g \geqslant 0 \right\}$$

Bis auf (ii) und (iv) übertragen sich die Aussagen aus *Lemma 43* auf bel. nicht-negtive messbare Funktionen durch Approximation.

Satz 45 (Monotone Konvergenz/ Beppo Levi)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer nicht-negativer Funktionen $f_k\colon (X,\Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B})$ mit $f_k \nearrow f$. Dann ist für $A \in \Sigma$*

$$\int_A f_k\,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. (f messbar wegen *Lemma 40*). Aus *Lemma 43* (vi) erhalten wir zunächst die Monotonie von $\int_A f_k\,\mathrm{d}\mu$ und hieraus die Konvergenz gegen ein $\varphi \in [0,\infty]$. Aus $f_k \leqslant f$ und $43(vi)$ folgt $\varphi \leqslant \int_A f\,\mathrm{d}\mu$. Für die Umkehrung wählen wir ein $g \in S(X,\mu),\ g \geqslant 0,\ g \leqslant f$. Mit $A_K := \{x \in$

$A \mid f_k(x) \geqslant \vartheta \cdot g(x)\}$ für ein festes $\vartheta \in (0,1)$. Nun ist $A_k \nearrow A$ ($\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \supset A$ erfordert $\varphi \in (0,1)$) und hieraus

$$\underbrace{\int_A f_k \,\mathrm{d}\mu}_{\xrightarrow{k\longrightarrow\infty}\varphi} \overset{43(\mathrm{v})}{\geqslant} \int_{A_k} f_k \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{A_k} \varphi\, g \,\mathrm{d}\mu \overset{43(\mathrm{ii})}{=} \varphi \int_{A_k} g \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \varphi \int_A g \,\mathrm{d}\mu$$

Insbesondere gilt dies auch für $\varphi = 1$, also $\varphi \geqslant \int_A g \,\mathrm{d}\mu$. Durch Supremumsbildung erhalten wir $\varphi = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. □

Bemerkung 46. *Für jede nicht-negative Funktion f mit einer monoton steigenden Folge nicht-negativer, einfacher Funktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $g_k \nearrow f$ ist $\int_A g_k \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. Eine geeignete Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lässt sich folgendermaßen konstruieren:*

$$g_k(x) := \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \chi_{f^{-1}(A_j)}(x) \text{ mit } A_j = \begin{cases} [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}), & j = 0, \ldots, k2^k - 1 \\ [k, \infty), & j = k2^k \end{cases} \tag{2.1}$$

Ist f (gleichmäßig[1]) beschränkt, so konvergiert $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig, denn $f \subset M$ impliziert $0 \leqslant f - g_k < \frac{1}{2^k}$ für $k > M$. Mit Satz 45 *überträgt man auch* 43(ii) *und* (iv)*, da Grenzwerte über nicht-negative Größen vertauschen.*

Lemma 47. *Ist $f \geqslant 0$ messbar, so wird durch $\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ ein Maß mit $\int g \,\mathrm{d}\nu = \int g f \,\mathrm{d}\mu$ für jedes messbare $g \geqslant 0$ definiert und wir schreiben $\mathrm{d}\nu = f \,\mathrm{d}\mu$*

Beweis.

$$\nu(\varnothing) = \int_\varnothing f \,\mathrm{d}\mu \overset{(i)}{=} \int \underbrace{\chi_\varnothing}_{\equiv 0} f \,\mathrm{d}\mu \overset{(i)}{=} 0 \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu \overset{0\cdot\infty=0}{=} 0$$

Weiterhin ist

$$\nu(A \cup B) = \int_{(A\cup B)} f \,\mathrm{d}\mu \overset{(ii)}{=} \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu = \nu(A) + \nu(B) \text{ für } (A \cup B) = \varnothing$$

Für abzählbare Vereinigungen liefert *Satz 45*

$$\nu(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} A_k) = \int_{\dot\bigcup A_k} f \,\mathrm{d}\mu \overset{(ii)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k)$$

Ist g einfach und nicht-negativ), so gilt $g = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{B_j}$ für disjunkte $B_j \in \sum$, $\bigcup B_j = X$ und $\alpha_j \geqslant 0$, und wir haben

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{B_j} f \,\mathrm{d}\mu \overset{43(iii)}{=} \sum_{j=1}^m \int \alpha_j f \chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mu \overset{43(iv)}{=} \int \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{B_j}\right)}_{=g} f \,\mathrm{d}\mu$$

Approximation liefert die Behauptung für beliebige $g \geqslant 0$ mit *Satz 45.* □

[1] Sei X eine beliebige Menge. Dann heißt eine Familie $\mathcal{F}$ von auf X definierten, reellwertigen Funktionen *gleichmäßig beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl S gibt, für die gilt: $\forall x \in X\ \forall f \in \mathcal{F}$: $|f(x)| \leqslant S$. Das heißt, S ist eine gemeinsame obere Schranke für die Werte der Beträge aller Funktionen aus $\mathcal{F}$.

Satz 48 (Lemma von Fatou). *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Funktionen $(X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so haben wir für ein beliebiges $A \in \Sigma$*

$$\int_A \liminf_{k\longrightarrow\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_A f_k \,\mathrm{d}\mu$$

Bemerkung 49. *Im Allgemeinen können wir keine Gleichheit erwarten. Z.B. ist für $f_k = \chi_{[k,k+1]} k \in \mathbb{N}$, einerseits $f_k(X) \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig, andererseits $\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}x = 1$. Genauso für $f_k = k\chi_{(0,1)}$ und $f_k = \frac{1}{k}\chi_{(0,k)}$ (in letzterem Fall haben wir sogar gleichmäßige Konvergenz).*

Beweis: Lemma von Fatou. Wir setzten $g_k := \inf_{j\geqslant k} f_j$, also $g_k \nearrow \lim_{j\longrightarrow\infty} f_j$. Weiterhin $g_k \leqslant f_k\ \forall k \in \mathbb{N}$, folglich $\int_A g_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f_k \,\mathrm{d}\mu$ nach *Lemma 43(vi)*. Übergang zum $\liminf_{k\longrightarrow\infty}$ liefert

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu \overset{\mathit{Satz}\ 45}{=} \int_A g_k \,\mathrm{d}\mu = \int_A \liminf_{k\longrightarrow\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu$$

□

Definition 50 (Nochmal Integral). Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum $A \in \Sigma$ $f : (X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar. Ist $\int_A f^{\pm} \,\mathrm{d}\mu < \infty$, so nennen wir f über A integrierbar und wir setzten

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_A f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_A f^- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

Die Menge der über A integrierbaren Funktionen bezeichnen wir $\mathscr{L}^1(A, \mu)$

Lemma 51. *Unter der Bedingung von* Definition 50 *ist das Integral linear und erfüllt sämtliche Eigenschaften aus* Lemma 43. *Eine Funktion ist genau dann integrierbar, wenn ihr Betrag integrierbar ist. Darüber hinaus gilt für integrierbare Funktionen $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\left|\int_A f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu$$

und die Dreiecksungleichung

$$\int |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Linearität und *Lemma 43* verifiziert man unmittelbar. Setzte $\varphi := \int f \,\mathrm{d}\mu$, dann ist

$$|\varphi| = (\operatorname{sign}\varphi)\varphi \overset{\text{Linearität}}{=} \int_A (\operatorname{sign}\varphi) f \,\mathrm{d}\mu \overset{43(vi)}{\leqslant} \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Die Dreiecksungleichung folgt mit $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ aus der Linearität des Integrals. □

Lemma 52. *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $F\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, messbar*

(i) Wir haben $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$

(ii) Ist f außerdem integrierbar oder nicht negativ und $A \in \Sigma$, so ist

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. ÜZ3/A10 □

Insofern ändert sich der Wert eines Integranten nicht, wenn wir den Integranten auf einer Nullmenge abändern.

Lemma 53 (Noch Fatou). *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt*

$$\int_A \liminf_{k\longrightarrow\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_A f_k \, \mathrm{d}\mu, \text{ falls } g \leqslant f_k \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\limsup_{k\longrightarrow\infty} \int_A f_k \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A \limsup_{k\longrightarrow\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu, \text{ falls } f_k \leqslant g \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis. Man wende für die erste Ungleichung das Fatou-Lemma auf $f_k - g$ an und subtrahiere $\int_A g \, \mathrm{d}\mu$ auf beiden Seiten.
Die zweite Aussage folgt mit $\liminf_{k\longrightarrow\infty}(-f_k) = -\limsup_{k\longrightarrow\infty} f_k$ □

Satz 54 (Dominierte Konvergenz). *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, $(f_k)_k \in \mathbb{N}$ eine Folge messbarer Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise[2] fast überall, d.h. bis auf μ-Nullmengen gegen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiere. Gibt es eine Majorante, das heißt ein integrierbares $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit* $\sup |(f_k)_{k\in\mathbb{N}}| \leqslant g$*, so ist auch f integrierbar und wir haben $\int_A f_k \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $-g \leqslant f_k \leqslant g \; \forall k \in \mathbb{N}$, folglich erhalten wir mit *Lemma 53*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A \liminf_{k\longrightarrow\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \overset{53}{\leqslant} \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_A f_k \, \mathrm{d}\mu \leqslant \limsup_{k\longrightarrow\infty} \int_A f \, \mathrm{d}\mu \overset{53}{\leqslant} \int_A \underbrace{\limsup f_k}_{\lim f_k = f} \, \mathrm{d}\mu$$

□

Zur Notwendigkeit der Voraussetzung an g, vergleiche *Beispiel 46*.

Bemerkung 55. *Für stetige und Lebesgue-integrierbare Funktionen auf reellen Intervallen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral überein.*
Sei $f \in C^0(a, b)$ Lebesgue-integrierbar auf (a, b).
Wir setzen

$$F(x) = \int_{(a,x]} f \, \mathrm{d}\lambda\,, \quad x \in (a, b)$$

[2] Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge. Die Funktionenfolge heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn $\forall x \in D$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Wir behaupten $F \in C^1(a,b)$ mit $F'(x) = f(x)\ \forall x \int_{(x,x+\varepsilon]} f(\xi)\,\mathrm{d}\lambda(\xi) n(a,b)$.
In der Tat, für $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon} &\overset{\textit{Lem. 43}}{=\!=} \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,x+\varepsilon]} f(\xi)\,\mathrm{d}\lambda(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,x+\varepsilon]} (f(x)+f(\xi)-f(x))\,\mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&\overset{\textit{Lem. 43}}{=\!=} \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,x+\varepsilon]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,x+\varepsilon]} \underbrace{(f(\xi)-f(x))}_{\leqslant sup_{\eta\in(x,x+\varepsilon]}|f(\eta)-f(x)|}\,\mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&\overset{\textit{L. 45}}{\leqslant} \frac{1}{\varepsilon} f(x)\underbrace{\lambda\big((x,x+\varepsilon]\big)}_{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\lambda\big((x,x+\varepsilon]\big)\sup|f(\eta)-f(x)|
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon} = f(x) + \int_{(x,x+\varepsilon]} (f(\xi)-f(x))\,\mathrm{d}\lambda(\xi)$$

mit

$$\left|\int_{(x,x+\varepsilon]} (f(\xi)-f(x))\,\mathrm{d}\lambda(\xi)\right| \overset{\textit{L. 51}}{\leqslant} \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,x+\varepsilon]} |f(\xi)-f(x)|\mathrm{d}\lambda(\xi) \leqslant \sup_{\eta\in(x,x+\varepsilon]} |f(\eta)-f(x)| \xrightarrow[\textit{Stetigk.}]{\varepsilon\searrow 0} 0.$$

Für $\varepsilon < 0$ argumentiere analog.
Ist f stetig auf einem kompakten Intervall, so ist f beschränkt und messbar, also Lebesgue-integrierbar.

Allgemeiner ist jede beschränkte messbare Funktion auf einem kompakten Intervall genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesgue-Nullmenge ist.
In diesem Fall stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral überein. Diese Aussage gilt nicht für verallgemeinerte Intervalle.

Beispiel. $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ *existiert als Riemann-Integral* $\lim_{R\nearrow\infty}\int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$, *andererseits ist* $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \infty$, *also keine Lebesgue-Integrierbarkeit.*

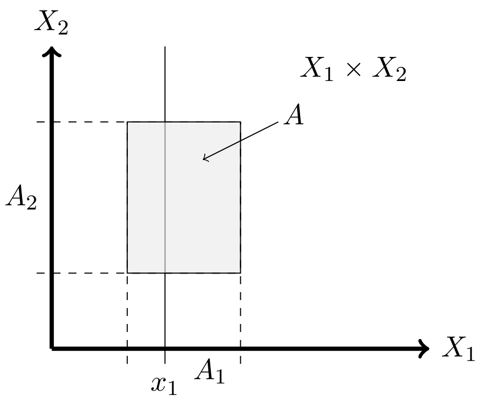
Produktmaße

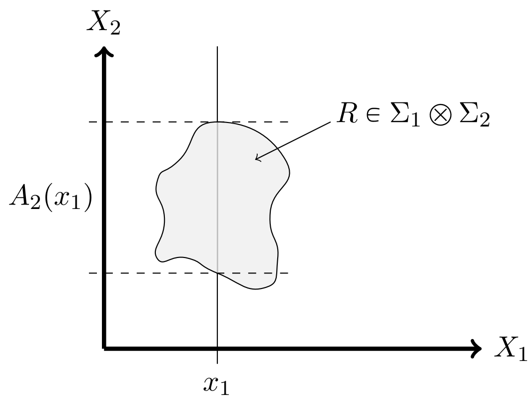
Notation 56. Für Messräume (X_1,Σ_1), (X_2,Σ_2) bezeichnen wir die σ-Algebra, die alle „Rechtecke" der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$ enthält, mit $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

Lemma 57 (Schnitt-Eigenschaft)**.** *Für Messräume (X_1,Σ_1), (X_2,Σ_2) und*
$A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \mathfrak{P}(X_1 \times X_2)$ liegen die Schnitte

$$\begin{aligned}
A_1(x_2) &= \{x_1 \in X_1 \mid (x_1,x_2) \in A\} \\
A_2(x_1) &= \{x_2 \in X_2 \mid (x_1,x_2) \in A\} \quad \forall x_1 \in X_1 \textit{ bzw. } x_2 \in X_2
\end{aligned}$$

in Σ_1 bzw. Σ_2.





Beweis. Setze $S = \{A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \mid A_1(x_2) \in \Sigma_1\}$. Natürlich ist $A_1 \times A_2 \in S$ für alle $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Insofern genügt es zu zeigen, dass S eine σ-Algebra ist.
In der Tat ist $X_1 \times X_2 \in S$ und für $A \in S$ ist

$$\left(A^{\mathrm{C}}\right)_1 (x_2) = \left\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in A^{\mathrm{C}}\right\} = \{x_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}^{\mathrm{C}} = (\underbrace{A_1(x_2)}_{\in \Sigma_1})^{\mathrm{C}} \in \Sigma_1.$$

Für $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ haben wir

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)_1 (x_2) = \left\{x_1 \,\middle|\, (x_1, x_2) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in A_k\}}_{=(A_k)_1(x_2)\in\Sigma_1}\} \in \Sigma_1$$

Für $A_2(x_1)$ argumentiere analog. □

Corollar 58. *Seien (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) Messräume und sei $f\colon (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar.*
Dann ist $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ für jedes $x_2 \in X_2$ auf X_1 messbar und entsprechend $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ für jedes $x_1 \in X_1$ auf X_2.

Beweis. Für $B \in \mathcal{B}$ und $x_2 \in X_2$ ist $f^{-1}(\cdot, x_2)(B) \overset{!}{\in} \Sigma_1$.
In der Tat haben wir $A := f^{-1}(B) \overset{f \text{ messb.}}{\in} \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, also ist

$$f^{-1}(\cdot, x_2)(B) = \{x_1 \in X_1 \mid f(x_1, x_2) \in B\} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} = A_1(x_2) \in \Sigma_1$$

und *Lemma 57*. □

Ziel: Definiere Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ mit

$$(*) \quad (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \Sigma_1,\ A_2 \in \Sigma_2$$

Sind μ_1 und μ_2 beide σ-finit, so folgt Eindeutigkeit des Produktmaßes (Existenz müssen wir noch zeigen) aus *Satz 23*.

Satz 59. *Sind (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) Maßräume mit σ-finiten Maßen und $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Dann sind die Abbildungen $x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$, $x_1 \mapsto \mu_1(A_1(x_2))$ auf X_1 bzw. X_2 messbar und es gilt*

$$\int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1)) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_1(x_2)) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 60. Seien (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) Maßräume mit σ-finiten Maßen.
Für $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ setzen wir

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) := \int_{X_1} \underbrace{\mu_2(A_2(x_1))}_{=\int_{X_2} \chi_A(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)} \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \underbrace{\mu_1(A_1(x_2))}_{=\int_{X_1} \chi_A(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)} \,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

Bemerkung. $\chi_{A_1(x_2)}(x_1) = \chi_A(x_1, x_2) = \chi_{A_2(x_1)}(x_2)$

Lemma 61. *Das Produktmaß ist für σ-finite Maße ebenfalls ein Maß und es ist eindeutig bezüglich $(*)$.*

Beweis. Eindeutigkeit: siehe oben; $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\emptyset) = 0$ ist klar und σ-Additivität folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\underbrace{(\mu_1 \otimes \mu_2)\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\tau}} A_k\right)}_{\xrightarrow[\text{vgl. Bew. Satz 12}]{\tau\to\infty} (\mu_1\otimes\mu_2)(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)} \overset{\text{Def.}}{=\!=} \int_{X_1} \mu_2\left(\underbrace{\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\tau}} A_k\right)_2 (x_1)}_{=\dot\bigcup_{k=1}^{\tau}(A_k)_2(x_1)} \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

$$\overset{\sigma\text{-Add.}}{=\!=} \int_{X_1} \sum_{k=1}^{\tau} \mu_2((A_k)_2(x_1)) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\tau} (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_k)$$

□

Satz 62 (Fubini). *Seien (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) Maßräume mit σ-finiten Maßen und $f : (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar.*

(i) (Tonelli) Ist f nicht-negativ, so sind $\int_{X_2} f(\cdot, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$ und $\int_{X_1} f(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$ als Funktion auf X_1 bzw. X_2 beide messbar und es gilt

$$\iint\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

(ii) *Allgemein ist* $f \in \mathscr{L}^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *äquivalent zu*

$$\int_{X_1} |f(x_1,\cdot)| \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \in \mathscr{L}(X_2,\mu_2)$$

$$\text{bzw.} \quad \int_{X_2} |f(\cdot,x_2)| \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \in \mathscr{L}(X_1,\mu_1)$$

und in diesem Fall gilt (i).

Beweis. Aufgrund der Linearität erhalten wir aus *Satz 59* für eine einfache Funktion $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad A_j \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad X = \bigcup_{j=1}^k A_j$

$$\int_{X_2} f(\cdot,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \underbrace{\mu_2((A_j)_2(\cdot))}_{\text{messbar nach } \textit{Satz 59}}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\iint\limits_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \iint\limits_{X_1\times X_2} \chi_{A_j}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)\\
&\overset{\text{Def. 60}}{=\!=} \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{X_1}\left(\int_{X_2} \chi_{A_j}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&= \cdots = \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

Sei nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(X_1 \times X_2, m\mu_1 \otimes \mu_2)$ mit $0 \leqslant f_k \nearrow f$. Dann haben wir

$$\int_{X_2} f_k(\cdot,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \leqslant \int_{X_2} f(\cdot,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{k\to\infty}\int_{X_2} f_k(\cdot,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \overset{\text{Satz 45}}{=\!=} \int_{X_2} f(\cdot,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

Nun sind erneut die Voraussetzungen für *Satz 45* erfüllt und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{X_1}\int_{X_2} f_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) &= \int_{X_1}\lim_{k\to\infty}\int_{X_2} f_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\
&= \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\end{aligned}$$

Genauso mit 1 und 2 vertauscht.
Einmalige Anwendung von *Satz 45* liefert

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{X_1\times X_2} f_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) = \iint\limits_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

(ii) folgt sofort auf *(i)* mit $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

Erinnerung: $f \in \mathscr{L}^1(X_1 \times X_2) \iff \iint |f| \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) < \infty.$ $\square$

Beispiel 63. *Sei* $X = \mathbb{R}^2,\ \Sigma = \mathcal{B}^2,\ f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$. *Wir betrachten das Riemann-Integral*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \overset{3}{=} -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = \frac{1}{1+y}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Wäre $f \in \mathscr{L}^1\left([0,1]^2\right)$, *so folge aus dem* Satz 62 (Fatou) *zunächst die Integrierbarkeit der Funktionen*

$$\int_{(0,1)} f(x_1, \cdot) \, \mathrm{d}\lambda(x_1), \int_{(0,1)} f(\cdot, x_2) \, \mathrm{d}\lambda(x_2)$$

und da f *auf* $(0,1) \times (0,1)$ *stetig ist, erhalten wir Übereinstimmung von Lebesgue- und Riemann-Integral und erneut mit* Satz 62

$$\iint f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \iint f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1. \quad \lightning$$

Lemma 64. *Seien* $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ *Messräume und* $S_1 \subset \Sigma_1,\ S_2 \subset \Sigma_2$ *mit* $\Sigma_{X_1}(S_1) = \Sigma_1,\ \Sigma_{X_2}(S_2) = \Sigma_2$. *Dann gilt*

$$\underbrace{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}_{\substack{\sigma\text{-Algebra erzeugt von} \\ A_1 \times A_2,\ A_j \in \Sigma_j}} \overset{\substack{\supset \text{ haben} \\ \text{wir schon} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\Sigma_{X_1 \times X_2}(S_1 \times S_2)}_{\substack{\sigma\text{-Algebra erzeugt von} \\ A_1 \times A_2,\ A_j \in S_j}} \quad \Sigma, =:$$

wobei $S_1 \times S_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in S_1,\ A_2 \in S_2\}$.

Beweis.

"$\supset$" klar.

"$\subset$" Die Menge $\{A_1 \in \Sigma_1 \mid A_1 \times X_1 \in \Sigma\}$ ist eine σ-Algebra (nachrechnen!), die S_1 enthält, also identisch mit Σ_1. Insbesondere mit $\Sigma_1 \times X_2 \overset{\text{def}}{=} \{A_1 \times X_2 \mid A_1 \in \Sigma_1\} \subset \Sigma$, ebenso gilt $X_1 \times \Sigma_2 \subset \Sigma$. Nun folgt

$$\begin{aligned}\Sigma_1 \times \Sigma_2 &= \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \Sigma_1,\ A_2 \in \Sigma_2\} \\ &= \{(A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) \mid A_1 \in \Sigma_1,\ A_2 \in \Sigma_2\} \\ &\overset{\text{def}}{=} (\Sigma_1 \times X_2) \cap (X_1 \times \Sigma_2) \subset \Sigma\end{aligned}$$

Weil Σ eine σ-Algebra ist, folgt $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \Sigma$.

$\square$

3 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} - 2\frac{x}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}$

Lemma 65. *Gegeben seien Maßräume* (X_j, Σ_j, μ_j), $j = 1, 2, 3$, *mit* σ*-finiten Maßen. Dann gilt* $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 = \Sigma_1 \otimes (\Sigma_2 \otimes \Sigma_3)$ *und* $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

Beweis. Die erste Identität folgt, weil beide Seiten jeweils von Mengen $A_1 \times A_2 \times A_3$, $A_j \in \Sigma_j$ erzeugt werden. Darüber hinaus stimmen die beiden Maße wegen

$$\begin{aligned}((\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3)(A_1 \times A_2 \times A_3) &= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)\\ &= (\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3))(A_1 \times A_2 \times A_3)\end{aligned}$$

auf allen "Rechtecken" überein und damit nach *Satz 23 (Eindeutigkeit)* überall. □

Satz 66 (Lebesgue-Maß). *Das durch* $\lambda^n := \lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \ldots \otimes \lambda_n$ *definierte Lebesgue-Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *besitzt die folgenden Eigenschaften (im Folgenden verwenden wir immer die Borel-*σ*-Algebra)*

(i) *Durch die Werte auf der Menge* $\mathcal{I}$ *sämtlicher Quader der Form* $I = \times_{j=1}^{n} I_j$, *wobei* I_j *Intervalle sind, ist* λ^n *eindeutig bestimmt.*

(ii) *Für jedes* $B \in \mathcal{B}^n$ *gilt:*

$$\lambda^n(B) = \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^n(A_k) \,\middle|\, (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I},\ B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right\}$$

(vgl. Lemma 30*).*

(iii) *Das Maß* λ^n *ist translationsinvariant und bis auf Normierung das einzige Borelmaß mit dieser Eigenschaft.*

Bemerkung. *Das Produktmaß zweier vollständiger Maße (*Bem. 29*) ist i.A. nicht vollständig.*

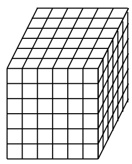
Beweis Lebesgue-Maß.

(i) Da $\mathcal{I}$ unter Schnitten abgeschlossen ist, und wegen *Lemma 64* die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ erzeugt, folgt die Behauptung mit dem Eindeutigkeitssatz (23).

(ii) Sei $\mathcal{A}$ die Algebra (nachrechnen!) endlicher Vereinigungen disjunkter Quader aus $\mathcal{I}$. Nun ist $\mu := \lambda^n|_{\mathcal{A}}$ ein Prämaß. Die angegebene Formel ist gerade die Konstruktion des äußeren Maßes in *Lemma 30*, und mit *Satz 28* erhalten wir eine σ-Algebra Σ mit $\mathcal{A} \in \Sigma$, sodass $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu^*|_\Sigma)$ ein Maßraum ist. Weil $\mathcal{A}$ sämtliche offenen Quader $\times_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$ enthält, folgt $\mathcal{B}^n = \Sigma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{A}) \subset \Sigma$ und $\mu^*|_{\mathcal{B}^n}$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}^n$, was zu zeigen war.

(iii) Die Translationsinvarianz ergibt sich unmittelbar aus (ii). Sei nun μ ein weiteres translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Sei Q_r ein halboffener Würfel mit Seitenlänge r. Wir nehmen Œ $\mu(Q_1) = 1$ an. Weil wir Q_1 in m^n Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{m}$ zerlegen können, folgt mit Translationsinvarianz und Additivität des Maßes:

$$1 = \mu(Q_1) = m^n \mu\left(Q_{\frac{1}{m}}\right) = m^{-n}.$$



Hieraus folgt $\mu(Q_r) = r^n \; \forall r \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)$. Mit *Satz 12(iii)* folgt das $\forall r > 0$. Hieraus erhält man $\mu = \lambda^n$ auf $\mathcal{I}$ und, mit (i), auf $\mathcal{B}^n$.

$\square$

Lemma 67 (Bildmaß). *Seinen (X,Σ_X), (Y,Σ_Y) Messräume auf $f\colon X \longrightarrow Y$ messbar. Ist μ ein Maß auf (X,Σ_X) so wird durch*

$$(f_*\mu)(B) := \mu\underbrace{\left(f^{-1}(B)\right)}_{\stackrel{def}{=}\{x\in X \mid f(x)\in B\}},\; B \in \Sigma_Y$$

ein Maß auf Y definiert, das Bildmaß von μ bezüglich f. *Wir haben $(f_*\mu)(B) = 0 \; \forall B \in \Sigma_Y$ mit $B \cap f(X) = \varnothing$.*

Beweis. Wir haben $f_*\mu(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = 0$, da $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $(f_*\mu)(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \mu\left(f^{-1}(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)\right)$ für eine Folge paarweise disjunkter Mengen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_Y$. Dann wird durch $A_k := f^{-1}(B_k)$ ebenfalls wieder eine Folge paarweise disjunkter Mengen erzeugt (nachrechnen!) und wir haben wegen $f^{-1}(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_k)$ und σ-Additivität

$$(f_*\mu)\left(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \mu\left(\dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_k)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (f_*\mu)(B_k).$$

Ist $B \in \Sigma_Y$ mit $B \cap f(X) = \varnothing$, so folgt $(f_*\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(\varnothing) = 0$. $\square$

Satz 68. *Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, Y ein topologischer Raum, $f(X,\Sigma) \longrightarrow (Y,\mathcal{B}(Y))$, $g\colon (Y,\mathcal{B}(Y)) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B})$ messbar. Nun ist $g \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann μ-fast überall nicht-negativ oder integrierbar, wenn das auf g bzgl. $f_*\mu$ zutrifft, und in diesem Fall gilt:*

$$\int_Y g \,\mathrm{d}(f_*\mu) = \int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Für $A = \{x \in X \mid (g\circ f)(x) \geqslant 0\}$ und $B = \{y \in Y \mid g(x) \geqslant 0\}$ gilt:

$$(f_*\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \in B\}) = \mu(A).$$

Also $(f_*\mu)(B^{\mathrm{C}}) = \mu(A^{\mathrm{C}})$. Für die Integrierbarkeit betrachten wir zunächst einfache Funktionen g. Sei also $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{B_j}$, $\alpha_j \geqslant 0$, $B_j \in \mathcal{B}(Y)$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $Y = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Zunächst ist $\chi_{B_j} \circ f = \chi_{f^{-1}(B_j)}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_Y g\,\mathrm{d}(f_*\mu) &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_Y \chi_{B_j}\,\mathrm{d}(f_*\mu) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(f^{-1}(B_j))\\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \chi_{f^{-1}(B_j)}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \chi_{B_j}\circ f\,\mathrm{d}\mu = \int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Sei g eine messbare, nicht-negative Funktion. Wie in *Bem. 55* konstruieren wir eine Folge nicht negativer Funktionen $(g_k)_k \subset S(Y, f_*\mu)$ mit $g_k \nearrow g$. Dann ist (wie eben gezeigt) auch $g_k \circ f$ eine Folge nicht-negativer Funktionen mit $g_k \circ f \nearrow g \circ f$. Der *Satz 45* über monotone Konvergenz liefert

$$\int_X g_k \circ f \nearrow \int_X g \circ f, \quad \int_Y g_k \,\mathrm{d}(f_*\mu) \nearrow \int_Y g \,\mathrm{d}(f_*\mu).$$

Mit $g = g^+ - g^-$ folgt die Identität im allgemeinen Fall, aus der sich ebenfalls die Äquivalenz der Integrierbarkeit ergibt. □

Beispiel 69. *a) Verkettung von Bildmaßen:* $f\colon X \to Y, : Y \to Z$

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*\mu(c) &= \mu((g \circ f)^{-1}(C)) = \mu((f^{-1} \circ g^{-1})(C)) \\ &= \mu(f^{-1}(g^{-1}(C)) = f_*\mu(g^{-1}(C)) \\ &= g_* f_* \mu(C)\end{aligned}$$

b) Sei $f\colon X \to Mx + b, \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar,* $b \in \mathbb{R}$

$$\text{zz: } f_*\lambda^n = \frac{1}{|\det M|}\lambda^n$$

Zunächst $f_*\lambda^n$ *ist translationsinvariant und damit nach Satz 66, iii) ist* $f_*\lambda^n$ *ein Vielfaches von* λ^n. *Da M invertierbar, existieren* $V_1, V_2 \in D(n)$, *D Diagonalmatrix, sodass* $M = V_1 D V_2$.
c)

$$\int_A g(\underbrace{Mx + b}_{f}) \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_A (g \circ f) \,\mathrm{d}\lambda^n \overset{\text{Satz 68}}{=} \int_{MA+b} g \,\mathrm{d}f_*\lambda^n \overset{b)}{=} \frac{1}{|\det M|} \int_{MA+b} g \,\mathrm{d}\lambda^n \quad (2.2)$$

Satz 70 (Transformationssatz). *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f \in C^1(U, V)$, *f Diffeomorphismus*[4], *dann gilt* $(f^{-1})_*\lambda^n = |J_f|\lambda^n$, $J_f = \det(Df)$, *Df Jacobi Matrix und es gilt:*

$$\int_U (G \circ f)|J_f| \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_V g \,\mathrm{d}\lambda^n \forall \text{ nicht negativen oder integrierbaren Funktionen } g := V \to \mathbb{R}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $g = 1$ und offene Quader, $R, \overline{R} \subset U$ zz

$$\int_R |J_f| \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_{f(R)} \mathrm{d}\lambda^n = \lambda^n(f(R))$$

Betrachte $\frac{\chi_{B_1(0)}}{\lambda^n(B_1(0))}$ und setzte $\varphi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{y}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Es gilt nach 69c) $\left[M = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \right]$

$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) = 1$

[4] $f \in C^1(U, V), ^{-1} \in C^1(V, U)$

Definiere

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{f(R)} |J_f(f^{-1}(y))| \int_R \varphi_\varepsilon(f(z)-y)\,\mathrm{d}\lambda^n(z)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) \\ &= \int_{f(R)} |J_f(f^{-1}(y))| h_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) \end{aligned}$$

Nach Definition von φ_ε ist $h_\varepsilon \neq 0$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$ nur für $z \in K := f^{-1}(B_\varepsilon(y))$ K kompakt. Setzte $x\colon f^{-1}(y) \in K$, dann erhalten wir mit der Transformation $z \mapsto x+\varepsilon z$ und $W_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(K-x)$ aus 69c)

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(y) &= \int_K \varphi_\varepsilon(f(z)-y)\,\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &= \varepsilon^{-n}\int_K \varphi(\frac{f(z)-y}{\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &= \int_{W_\varepsilon(x)} \varphi(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda^n(z) \end{aligned}$$

Wegen $|\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}| \geqslant \frac{|z|}{C}$, für C:= $\sup_k |D(f^{-1})|$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $x+\varepsilon z \in U$ ist der Integrand beschränkt für $z \in B_C(0)$ überdeckt und wir erhalten mit dem Satz von der dominierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_C(0)} \varphi(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &=^{5} \int_{B_C(0)} \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon})\,\mathrm{d}\lambda^n(z)) \end{aligned}$$

$$\varphi(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(\mathrm{Df}(x)z)$$

Betrachte $z \in \mathbb{R}^n |\mathrm{Df}(x)z| = 1$ ist Nullmenge. Somit gilt die Konvergenz fast überall und mit Lemma 52:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\ to0} h_\varepsilon(y) &= \int_{B_C(0)} \varphi(\mathrm{Df}(x)z)\,\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &=^{6} \frac{1}{|\det \mathrm{Df}(x)} \int_{\mathrm{Df}(x)B_C(0)} \varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= |J_f(f^{-1}(y))|^{-1} \end{aligned}$$

[5]dom. Konvergenz

Der Satz von der dominierten Konvergenz ergibt dann:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon = \int_{f(R)} 1 \,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \lambda^n(f(R))$$

Für die linke Seite benutze Fubini

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \int_R \int_{f(R)} |J_f(f^{-1}(y))| \varphi_\varepsilon(f(z)-y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \,\mathrm{d}\lambda^n(z)$$

Weil $f(z)$ für $z \in R$ ein innerer Punkt ist von $f(R)$ impliziert die Stetigkeit von $|J_f(f^{-1}(\cdot))|$

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\varepsilon f(z)}} |J_f(f^{-1}(y))| \varphi_\varepsilon(f(z)-y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \\
&= \int_{B_{\varepsilon f(z)}} (|J_f(f^{-1}(y))| - |J_f(f^{-1}(f(z)))| + |J_f(f^{-1}(f(z)))|) \varphi_\varepsilon(f(z)-y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \\
&= |J_f(z)| + \int_{B_{\varepsilon f(z)}} (\underbrace{|J_f(f^{-1}(y))| - |J_f(f^{-1}(f(z)))|}_{\leqslant \sup\limits_{\eta \in B_\varepsilon(f(z))} |J_f(f^{-1}(\eta)) - J_f(f^{-1}(f(z)))| \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0} \varphi_\varepsilon(f(z)-y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y)
\end{aligned}$$

Dominierte Konvergenz $\to \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_R |J_f(z)| \,\mathrm{d}\lambda^n(z)$.
Setzte für $B \in \mathscr{B}(v)$ $\mu(B) = \int_B |J_f(z)| \,\mathrm{d}\lambda^n(z)$ ist ein Maß nach Lemma 47. Das Rechtecke die Borelsche σ-Algebra erzeugen, folgt mit dem 1. Schritt und dem Eindeutigkeitssatz (Satz 23) die Identität $\mu(\cdot) = \lambda^n(f(\cdot)) = (f^{-1})_* \lambda^n$ auf $(B)(v)$ Damit gilt der Satz $\forall g = \chi_B, \in \mathscr{B}(v)$. Funktionen $g = g^+ - g^-$ □

Beispiel (Polarkoordinaten). *Wir betrachten* $T_2\colon [0,\infty) x [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ *mit*

$$\begin{aligned}
&T_2(\rho,\varphi) = (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)) \quad \{0\} \times [0,2\pi) \\
&\det DT_2(\rho,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \rho \\
&U \subseteq [0,\infty) \times [0,2\pi) \\
&\int_u g(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))\rho \,\mathrm{d}\lambda(\rho,\varphi) = \int_{T_2(U)} g \,\mathrm{d}\lambda^2
\end{aligned}$$

Beispiel (Sphärische Koordinaten).

$$\begin{aligned}
&T_3(\rho,\varphi,\omega) = (\rho\sin(\omega)\cos(\varphi), \rho\sin(\omega)\sin(\varphi), \rho\cos(\omega) \\
&\rho \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi), \omega \in [0,\pi] \\
&\det DT_3 = \rho^2 \sin(\omega) \\
&U \subseteq [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi] \\
&\int_U g(T_3(\rho,\varphi,\omega))\rho^2 \sin(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\rho,\varphi,\omega) = \int_{T_3(K)} g \,\mathrm{d}\lambda^3
\end{aligned}$$

[6] 69c)

3 L^p-Räume

Notation. Im Folgenden sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

Definition 1 (L^p-„Norm“)**.** Die *L^p-Norm* einer messbaren Funktion $f\colon (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ wird durch

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

erklärt.

Mit $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, deren L^p-Norm endlich ist.
Zunächst ist $\mathscr{L}(X, \mu)$ wegen

$$|f + g|^p \leqslant 2^p \max(|f|, |g|)^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

ein Vektorraum.

Ziele:

(1) L^p-Norm ist tatsächlich eine Norm. (Problem: Nullmengen – herausteilen $\to$ L^p-Raum)

(2) Dreiecksungleichung mit Minkowski ($\Longleftarrow$ Hölder $\Longleftarrow$ Jensen)

(3) L^p-Räume sind Banachräume

(4) Approximation von L^p-Funktionen

Lemma 2. *Sei $f\colon (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar.*
Dann gilt

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Beweis. Mit $g := |f|^p$ erhalten wir aus *Lemma I.52*

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff g = 0 \quad \mu\text{-f. ü.} \iff f = 0 \quad \mu\text{-f. ü.}$$

□

Also folgt $\|g\|_{L^p} = 0 \implies g = 0$ μ-fast überall.
Wir setzen

$$\mathcal{N}(X,\mu) = \{f\colon (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}) \mid f \text{ messbar}, f(x) = 0 \ \mu\text{-f. ü.}\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{N}$ ein linearer Unterraum von $\mathscr{L}^p$. Insofern können wir den Quotientenraum[1] bilden und definieren

$$L^p(X,\mu) := \mathscr{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu).$$

Für $X \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir $L^p(X) := L^p(X,\lambda^n)$.
Aus *Lemma 2* folgt die Wohldefiniertheit der L^p-Norm auf L^p.
Man beachte, dass für $f \in L^p(X,\mu)$ und $x \in X$ der Wert $f(x)$ im Allgemeinen nicht wohldefiniert ist (es sei denn, es gibt einen stetigen Vertreter von f und stetige Funktionen mit unterschiedlichen Werten gehören zu verschiedenen Äquivalenzklassen in L^p, z. B. λ^n).

Im Fall $p = 2$ haben wir einen Hilbertraum (d. h. einen vollständigen (wegen Riesz-Fischer) normierten Raum mit Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$).
Im Fall $p = \infty$ definieren wir das *essentielle Supremum* von f

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty} &:= \inf\{s \geqslant 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant s\}) = 0\} \\ &= \sup\{s \geqslant 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant s\}) > 0\}\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $B(X,\mu)$ die Menge der essentiell beschränkten Funktionen und wir setzen wie gehabt

$$L^\infty(X,\mu) = B(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu)$$

und $\|f\|_{L^\infty(x,\mu)}$ ist nach Konstruktion unabhängig vom gewählten Vertreter.

Beispiel 3.

$$\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\lambda)} = 0, \quad \|\chi_{\mathbb{Q}}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Dirac}}}{\delta_0})} = 1$$

Sei X ein metrischer Raum, der *lokalkompakt* ist (d. h. jeder Punkt aus X besitzt eine kompakte Umgebung).
Dann heißt $f\colon (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$ *lokal p-integrierbar*, falls $f \in L^p(K,\mu)$ für jedes Kompaktum $K \subset X$ gilt.
Die Menge aller lokal p-integrierbaren Funktionen (bzw. die Menge deren Äquivalenzklassen) wir mit $L^p_{\text{loc}}(X,\mu)$ bezeichnet.

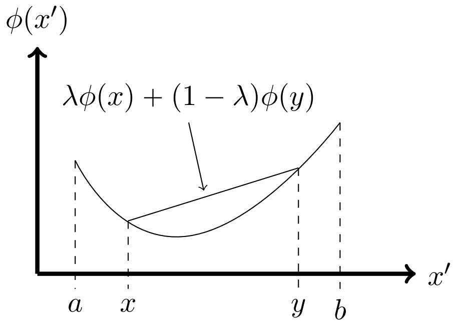
[1]Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum.
Für $v_1, v_2 \in V$ wird durch $v_1 \sim v_2 :\Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in U$ eine Äquivalenzrelation definiert.
Es ist also für jeden Punkt $v \in V$ die Äquivalenzklasse $[v] := v + U := \{v + u \mid v \in U\}$.
Der Quotienten- bzw. Faktorraum von V nach U ist durch $V/U := \{[v] \mid v \in V\}$ definiert.

Ungleichungen

Erinnerung: Eine reelle Funktion $\phi\colon (a,b) \to (\mathbb{R})$ heißt *konvex*, falls

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$$

für alle $x, y \in (a,b)$, $\lambda \in (0,1)$ bzw. *strikt konvex*, wenn die strikte Ungleichung (also „$<$") gilt.



Jede Norm auf einem Vektorraum X ist konvex, denn für $f, g \in X$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_X \leqslant \lambda\|f\|_X + (1-\lambda)\|g\|_X.$$

Wir erhalten für jede konvexe Funktion ϕ mit $a < x < z < y < b$, also $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für ein $\lambda \in (0,1)$

$$(*) \qquad \frac{\phi(z)-\phi(x)}{z-x} \leqslant \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x} \leqslant \frac{\phi(y)-\phi(z)}{y-z}$$

und die Ungleichung ist strikt, wenn ϕ strikt konvex ist.

Lemma 4. *Die folgenden Aussagen gelten für jedes konvexe $\phi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$:*

(i) Die Funktion ϕ ist lokal Lipschitz-stetig, d. h. für jedes kompakte Intervall $I \subset (a,b)$ gibt es ein $L_I < \infty$ mit $|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L_I|x-y|$ für alle $x, y \in I$.

(ii) Die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\phi'_{\pm}(x) = \lim_{h\searrow 0} \frac{\phi(x \pm h) - \phi(x)}{\pm h}$$

existieren und sind monoton nicht-fallend.
Darüber hinaus existiert ϕ' bis auf eine Nullmenge.

(iii) Für ein festes $\bar{x} \in (a,b)$ und jedes $\alpha \in [\phi'_-(\bar{x}), \phi'_+(x)]$ gilt

$$\phi(y) \geqslant \phi(\bar{x}) + \alpha(y - \bar{x}) \quad \forall y \in (a,b).$$

Diese Ungleichung ist strikt für strikt konvexe ϕ und $y \neq \bar{x}$.

Beweis. Setze $D(x,y) := \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y}$. Aus $(*)$ folgt

$$D(x,z) \leqslant D(x,y) \leqslant D(y,z)$$

für $x < z < y$.
Damit ist $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \implies D(\underbrace{x+\varepsilon_1}_{=z}, x) \leqslant D(\underbrace{x+\varepsilon_2}_{=y}, x)$, also $\varepsilon \mapsto D(x+\varepsilon, x)$ monoton steigend und (auf Kompakta) beschränkt. Folglich existiert $\phi'_+(x)$ und analog $\phi'_-(x)$.
Wegen $D(x-\varepsilon,x) \leqslant D(x+\varepsilon,x)$ folgt $\phi'_-(x) \leqslant \phi'_+(x)$ und weiter $\phi'_+(x) \leqslant \phi'_-(y)$ für $x < y$, sodass wir insgesamt

$$\phi'_-(x) \leqslant \phi'_+(x) \leqslant \phi'_-(y) \leqslant \phi'_+(y)$$

erhalten.
Da eine monotone Funktion nur abzählbar viele Sprungstellen haben kann, folgt *(ii)*.
Aus $(*)$ gewinnen wir direkt $\phi'_+(x) \leqslant D(x,y) \leqslant \phi'_-(y)$, was die äquivalenten Ungleichungen

$$\phi(y) \geqslant \phi(x) + \phi'_\pm(x)(y-x) \iff \phi(y) \geqslant \phi(x) + \alpha(y-x)$$

impliziert $\Rightarrow$ *(iii)*.

Für $a < \alpha < x < y < \beta < b$ ist

$$\phi'_+(\alpha) \leqslant D(x,y) \leqslant \phi'_-(\beta).$$

Somit folgt *(i)* mit $L_{[\alpha,\beta]} := \{|\phi'_+(\alpha)|, |\phi'_-(\beta)|\}$. □

Satz 5 (Jensen)**.** *Sei $\phi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex für $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.*
Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (X,Σ) und $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ mit $a < f(x) < b$ für alle $x \in X$, dann ist der negative Teil von $\phi \circ f$ integrierbar und

$$\phi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X (\phi \circ f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Ist $\phi \geqslant 0$ nicht-fallend, $f \geqslant 0$ und $\phi(b) := \lim_{x \nearrow b} \phi(x)$, so gilt die Schlussfolgerung auch für nicht-integrierbare (messbare) f.

Beweis. Eigenschaft *(iii)* des Lemmas impliziert

$$\phi(\underbrace{f(x)}_{\in(a,b)}) \geqslant \underbrace{\phi(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \in\mathbb{R}}}{\alpha}(f(x) - \underset{\substack{\uparrow\\ \in\mathbb{R}}}{\bar{x}}) \quad \forall x \in X \text{ und } \bar{x} = \int_X f\,\mathrm{d}\mu \in (a,b).$$

Damit ist $(\phi \circ f)_-$ integrierbar und wir erhalten

$$\int_X \phi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x) \geqslant \phi(\bar{x}) + \alpha\left(\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \bar{x}\right),$$

was die Behauptung für $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ zeigt.
Ist nun $f \geqslant 0$, aber $f \notin \mathscr{L}^1(X, \mu)$, so setzen wir $X_n := \{x \in X \mid \underbrace{f(x)}_{\geqslant 0 \text{ n. V.}} \leqslant n\}$ und erhalten aus dem bislang Gezeigten

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(X_n)} \int_{X_n} f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \frac{1}{\mu(X_n)} \int_{X_n} (\phi \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir wegen $X_n \nearrow X$ einerseits $\mu(X_n) \nearrow \mu(X)$ und die Konvergenz der Integrale aus dem Satz über monotone Konvergenz. □

Satz 6 (Hölder). *Seien $p, p' \in [1, \infty)$* dual, *das heißt $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ist $f \in L^p(X, \mu)$ und $g \in L^{p'}(X, \mu)$, so folgt $fg \in L^1(X, \mu)$ und*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Beweis. Den Fall $p, p' \in \{1, \infty\}$ erhalten wir direkt aus den Eigenschaften des Integrals, vgl. *Lemma I.48*. Wir können weiter $g \neq 0$ in $L^{p'}$ voraussetzen und Œ $\|g\|_{L^{p'}} = 1$ annehmen[2]. Sei $A = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$. Wir erhalten mit

$$(1 - p')p = p'p\left(\frac{1}{p'} - 1\right) = p'p\left(-\frac{1}{p}\right) = -p'$$

durch Anwenden der Jensen-Ungleichung auf $\varphi(y) = |y|^p$, für $y \in \mathbb{R}$, und $h = |f||g|^{1-p'}$ auf das Maß ν, mit

$$\mathrm{d}\nu = |g|^{p'} \,\mathrm{d}\mu \quad \left(\nu(x) = \int_X 1 \,\mathrm{d}\nu = \int_X |g|^{p'} \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_{L^{p'}}^{p'} = 1\right),$$

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^1}^p &= \left|\int_X \underbrace{|fg|}_{\leqslant |f||g|} \,\mathrm{d}\mu\right|^p \overset{3}{\leqslant} \left|\int_A \underbrace{|f||g|^{1-p'}}_{h} \underbrace{|g|^{p'} \,\mathrm{d}\mu}_{\mathrm{d}\nu}\right|^p = \varphi\left(\int_A h \,\mathrm{d}\nu\right) \\ &\overset{\text{Jensen}}{\leqslant} \int_A (\varphi \circ h) \,\mathrm{d}\nu = \int_A |f|^p \underbrace{|g|^{(1-p')p}|g|^{p'}}_{=1} \,\mathrm{d}\mu \overset{A \subset X}{\leqslant} \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

□

Zusatz: Im Fall $p \in (1, \infty)$ ist $y \mapsto |y|^p$ strikt konvex, sodass Gleichheit impliziert, dass $h = |f||g|^{1-p'}$ konstant ist, d.h. $g = 0$ oder $|f| = \lambda |g|^{p'-1}$ für ein $x \in \mathbb{R}$.

Corollar 7. *Für jedes $f \in L^p(X, \mu)$ mit $p \in [1, \infty)$ gilt*

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; g \in L^{p'}(X, \mu),\ \|g\|_{L^{p'}} = 1\right\}.$$

[2] Dies ist möglich, da wir uns ein $\tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_{L^{p'}}}$ definieren können, und mit diesem $\tilde{g}$ den Beweis führen können. Daher gilt der Beweis auch für g.

Beweis. "$\geqslant$" folgt sofort aus Hölder. Für " $\leqslant$ " wählen wir geeignete "Testfunktion" g. Im Fall $p \in (1, \infty)$ nehmen wir

$$g = \frac{\operatorname{sign}(f)|f|^{p-1}}{\| \, |f|^{p-1} \, \|_{L^p}} \quad (\text{ für } f \neq 0 \in L^p).$$

Für $p = 1$ wählen wir $g = \operatorname{sign}(f)$. ☐

Lemma 8. *Sei μ ein σ-finites Maß, $f\colon (X, \Sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar und $p \in [1, \infty)$. Gilt $f \cdot s \in L^1(X, \mu)$ für jedes $s \in S(X, \mu) \cap \mathscr{L}^1(X, \mu)$, so folgt $f \in L^p(X, \mu)$ und*

$$\|f\|_{L^p} = \sup \left\{ \int_X f \cdot s \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; s \in S(X, \mu) \cap \mathscr{L}^1(X, \mu), \; \|s\|_{L^{p'}} = 1 \right\}.$$

Beweis. In der Übung. ☐

Satz 9 (Minkowski)**.** *Seien μ, ν zwei σ-finite Maße auf Maßräumen $(X, \Sigma, \mu), (Y, \Upsilon, \nu)$ und f eine $(\mu \otimes \nu)$-messbare Funktion. Dann haben wir für $p \in [1, \infty)$*

$$\underbrace{\left\| \int_Y f(\cdot, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right\|_{L^p}}_{\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y)\right|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}} \leqslant \underbrace{\int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} \, \mathrm{d}\nu(y)}_{\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \mathrm{d}\nu(y)}.$$

Beweis. Sei $g \in L^p(X, \mu)$ mit $g \geqslant 0$ und $\|g\|_{L^{p'}} = 1$. Aus *I.62 (Fubini)* folgt

$$\int_X g(x) \int_Y |f(x, y)| \, \mathrm{d}\nu(y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \underbrace{\int_X |f(x, y)| g(x) \, \mathrm{d}\mu(x)}_{\leqslant \|f(\cdot, y)\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \, \mathrm{d}\nu(y)$$

Durch Anwenden von *Lemma 8* schließen wir, dass die linke Seite gerade die L^p-Norm von $\int_Y f(\cdot, y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ ist. ☐

Ist $\nu = \delta_{\eta_1} + \delta_{\eta_2}, \; \eta_1, \eta_2 \in Y$, so haben wir (Aufgabe 19)

$$\|f(\cdot, \eta_1) + f(\cdot, \eta_2)\|_{L^p} \leqslant \|f(\cdot, \eta_1)\|_{L^p} + \|f(\cdot, \eta_2)\|_{L^p}.$$

(Im Falle von $p = \infty$ rechne direkt nach.)
Aus *Fatous Lemma I.48* erhalten wir die Unterhalbsstetigkeit der Normen: Gilt $f_n \longrightarrow f$ punktweise μ-fast überall, so haben wir

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X \liminf_{k \to \infty} |f_k|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k \to \infty} \underbrace{\int_X |f_k|^p \, \mathrm{d}\mu}_{= \|f_k\|_{L^p}^p}.$$

Diese Ungleichung lässt sich wie folgt quantisieren:

Lemma 10. *Sei $p \in [1,\infty)$ und $f_k \in L^p(X,\mu)$ mit $M := \sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k\|_{L^p} < \infty$ konvergiere punktweise μ-fast überall gegen eine Grenzfunktion f. Dann ist $f \in L^p(X,\mu)$ und*

$$\|f_k\|_{L^p}^p - \|f_k - f\|_{L^p}^p \xrightarrow{k\to\infty} \|f\|_{L^p}^p.$$

Beweis. Mit *Fatou* erhalten wir sofort

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p} \leqslant M.$$

Weiterhin gibt es $\forall\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$ mit

$$\Big||s-t|^p - |t|^p - |s|^p\Big| \leqslant \varepsilon|t|^p + C_\varepsilon|s|^p.$$

Mit $t = f - f_k,\ s = f$ erhalten wir

$$\underbrace{\Big||f_k|^p - |f - f_k|^p - |f|^p\Big|}_{=:A} \leqslant \varepsilon\underbrace{|f - f_k|^p + C_\varepsilon|f|^p}_{=:B}.$$

Nun ist $B - A \geqslant 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} C_\varepsilon\|f\|_{L^p}^p &\leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_X\left(\varepsilon\underbrace{|f-f_k|^p}_{\leqslant|f|+|f_k|} + C_\varepsilon|f|^p - \Big||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p\Big|\right)\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \varepsilon\Big(\underbrace{2\sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k\|_{L^p}}_{\leqslant M}\Big)^p + C_\varepsilon\|f\|_{L^p}^p - \limsup_{k\to\infty}\int_X\Big||f_k|^p - |f_k - f|^p - |f|^p\Big|\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit $\varepsilon\searrow 0$. □

3.1 Vollständigkeit

Satz 11 (Riesz-Fischer (Vollständigkeit)). *Der Raum $L^p(X,\mu)$ ist für $p \in [1,\infty]$ vollständig mithin ein Banachraum*

Bemerkung. *Wir verwenden hierzu die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Sei zunächst $p < \infty$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*

$$\forall j,k \geqslant K:\ \|f_j - f_k\|_{L^p} < \varepsilon$$

Wir möchten zeigen, dass es ein Grenzelement $f \in L^p(X,\mu)$ mit $\|f_k - f\|_{L^p} \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} 0$ gibt. Es genügt die für eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu verifizieren. Durch Aussortieren von Elementen der Folge könne wir $\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leqslant 2^{-k}\ \forall k \in \mathbb{N}$.
Mit $f_0 := 0,\ g_k := f_k - f_{k-1}\forall k \in \mathbb{N}\ G := \sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k|$ erhalten wir

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} |g_j| \right\|_{L^p} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|g_j\|_{L^p} \leqslant \|g_1\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{k2^{-j}} \leqslant \|g_1\|_{L^p} + 1$$

Aus dem Satz der monotonen Konvergenz (I. 45) gewinnen wir $G \in L^p$ *und wir haben insbesondere* $G(x) < \infty$ *für fast alle* $x \in X$. *Ans diesen Punkten konvergiert*

$$\tilde{f} \colon \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} g_k = \lim_{k \to \infty} f_k$$

absolut. Dort ist also $\left| f_k(x) - \tilde{f}(x) \right|^p \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0$ *und wir haben*

$$\left| f_k - \tilde{f} \right|^p = \left| \sum_{j=1}^{k} g_j - \sum_{j=1}^{\infty} g_j \right|^p = \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} g_j \right|^p \leqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} |g_j| \right|^p \leqslant |G|^p$$

dort wo $G < \infty$. *Nun ist* $|G|^p \in L^1$, *mit* $f \colon \liminf_{k \to \infty} f_k$ *erhalten wir eine messbare Funktion mit* $f = \tilde{f}$ μ*-fast überall. Nun folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz (I. 54)*

$$\|f_k - f\|_{L^p}^p = \int_X |f_k - f|^p \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0$$

Im Fall $p = \infty$ *gilt für die Cauchyfolge* $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\forall m \in \mathbb{N} \, \exists \, M(m) \in \mathbb{N} \, \forall j, k \geqslant M \;\; \|f_k - f_j\|_{L^\infty} < \frac{1}{m}$$

Also gibt es eine μ*-Nullmenge* $A_{j,k,m} \in \Sigma$ *mit*

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leqslant \frac{1}{m} \; \forall x \in X \backslash A_{j,k,m}$$

Nun ist auch $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j,k \geqslant M} A_{j,k,m}$ *eine* μ*-Nullmenge. Folglich ist* $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *für jedes* $x \in X \backslash A$ *eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen* $f(x) := \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$
Damit haben wir zunächst $|f_j(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m} \; \forall x \in X \backslash A und j \geqslant M$. *Weiterhin ist f messbar (I.40). Nun gilt.*

$$\begin{aligned} |f_k - f|_{L^\infty} &= \sup\{s \geqslant 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \geqslant s\}) > 0\} \\ &= \sup\{s \geqslant 0 \mid \underbrace{\mu(\{x \in X \backslash A \mid \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{\leqslant \frac{1}{m} \text{ falls } k \geqslant M} \geqslant s\})}_{= \Phi \text{ falls } k \geqslant M \text{ und } s > \frac{1}{m}} > 0\} \\ &\leqslant \frac{1}{m} \text{ für } k \geqslant M \end{aligned}$$

Also $\|f_k - f\|_{L^\infty} \to 0$ *für* $k \to \infty$

Corollar 12. *Konvergiert eine Folge in $L^p(X,\mu)$, $p \in [1,\infty]$, so gibt es eine Teilfolge, die punktweise μ-fast überall konvergiert (A. 24). Die Grenzwerte einer in L^p und L^q, $p,q \in [1,\infty]$ konvergierenden Folge stimmen fast überall überein.*

Beispiel 13 (Raumschiff).

$$\underbrace{\chi_{[0,\frac{1}{2}]},\ \chi_{[\frac{1}{2},1]}}_{\|\|_{L^p}=\frac{1}{2}},\ \underbrace{\chi_{[0,\frac{1}{3}]},\ \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]},\ \chi_{[\frac{2}{3},1]}}_{\|\|_{L^p}=\frac{1}{3}},\ \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$$

Also Konvergenz gegen Nullfunktion in L^p, aber nicht punktweise fast überall. Für $p=\infty$ braucht man nicht zu einer Teilfolge überzugehen.

3.2 Approximation

Definition 14. Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt dicht, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine gegen x konvergierende Folge in A gibt.
Erinnerung (A.13): Eine Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\xi_0 \in X$, falls es für jede offene Umgebung U von ξ_0 (also U offen $\xi_0 \in U$) ein $K = K(\xi_0, U) \in \mathbb{N}$ mit $\xi_k \in U\ \forall k \geqslant K$ gibt.

Satz 15. *Sei X ein lokal kompakter (jeder Punkt liegt in einer kompakten Umgebung) metrischer Raum und μ ein reguläres Borelmaß (endliche Werte auf Kompakta)*

$$\begin{aligned} \textit{reg. von innen}&: \mu(A) = \sup\{\mu(X) \mid A \supset K \textit{ kompakt} \\ \textit{reg. von außen}&: \mu(A) = \inf\{\mu(X) \mid A \subset U \textit{ offen} \end{aligned}$$

Dann ist die Menge $C_c^0(X)$ aller stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger dicht in $L^p(X,\mu)$, $p \in [1,\infty)$. Hierbei wird für $f\colon X \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

als Träger von f (support) bezeichnet.

Beweis. Wie in Bem. I.46 erläutert, können wir nicht negative messbare Funktionen durch eine Folge einfacher Funktionen bzg L^1-Norm approximieren. Man überträgt das Argument leicht auf eine beliebige integrierbare Funktionen und Funktionen aus $\mathscr{L}$ (bzgl L^p-Norm) $p \in [1,\infty)$. Die in I.46 konstruierten einfachen Funktionen waren linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Urbildern halboffener Mengen, da das Maß nach Vorraussetztung regulär von innen ist, können wir diese durch Kompakta beliebig gut approximieren. Folglich genügt es zu zeigen, dass ξ_k für kompakte $K \subset X$ bezüglich L^p-Norm beliebig gut durch stetige Funktionen approximiert werden kann. Aufgrund äußerer Regularität finden wir für $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U mit $K \subset U$ und $\mu(U\backslash K) = \mu(U) - \mu(K) < \varepsilon$. Wir setzten $f_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,U^c)^4}{\operatorname{dist}(x,K)+\operatorname{dist}(x,U^c)}$.

Dies liefert eine stetige Funktion $X \in [0,1]$ mit

$$f\varepsilon(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(x, U^c) = 0 \Leftrightarrow x \notin U$$
$$f\varepsilon(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(x, K) = 0 \Leftrightarrow x \in K!$$

Wegen

$$\int_X \underbrace{|f_\varepsilon - \xi_K|^p}_{=0 \text{ auf } U^c \cup K} \,\mathrm{d}\mu = \int_{U \setminus K} \underbrace{|f_\varepsilon - \underbrace{\xi_K}_{=0}|^p}_{\leqslant 1} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \mu(U \setminus K) < \varepsilon$$

folgt $\|f_\varepsilon - \xi_K\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ $\square$

Die Aussage gilt nicht für $p = \infty$, da für stetige Funktionen L^∞-Norm und Supremumsnorm übereinstimmen und der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Definition 16 (Faltung). Für integrierbare $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ setzen wir:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y)$$

und bezeichnen den Ausdruck $f * g$ als *Faltung*.

Die Faltung ist selbst integrierbar, wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \,\mathrm{d}\lambda^n &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)| \,\mathrm{d}\lambda^n(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &\overset{\substack{\text{Fubini}\\ \downarrow}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{d}\lambda^n(x)}_{\substack{=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \|f\|_{L^1}\\ \uparrow\\ \text{Trafo.}}} |g(y)| \,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1} < \infty\end{aligned}$$

Lemma 17. *Die Faltung besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $f(x-\cdot)g(\cdot)$ genau dann integrierbar, wenn $f(\cdot)g(x-\cdot)$ integrierbar ist und in diesem Fall gilt

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

(ii) Für $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ folgt $f * \phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_\alpha(f * \phi) = (\partial_\alpha \phi) * f$$

für jede partielle Ableitung einer Ordnung $\leqslant k$. Dabei ist α ein sogenannter Multiindex.

[4] $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf \operatorname{dist}_{y \in Y}(x, y)$

(iii) Für $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$ (d. h. es gibt einen Räpresentanten mit kompaktem Träger) ist

$$f * \phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$$

(iv) Für $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ gilt auch $f * \phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und wir haben

$$\|f * \phi\|_{L^p} \leqslant \|\phi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}. \quad \textit{(Young-Ungleichung)}$$

Beweis.

(i) folgt durch Koordinatenwechsel (vgl. Bemerkung vor Trafo-Satz).

(ii) folgt induktiv durch vertauschen von Differentiation und Integration (siehe Übungsaufgabe 9).

(iii) Ist $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} \phi \subset B_R(0)$ für $R > 0$, so erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (f * \phi)(x) &\overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \overset{!}{\neq} 0 \\ &\implies y, x-y \overset{!}{\in} B_R(0) \implies x = (x-y) + y \overset{!}{\in} B_{2R}(0). \end{aligned}$$

Demnach ist $\operatorname{supp} f * \phi \in B_{2R}(0)$.

(iv) Für $p = \infty$ ist

$$\begin{aligned} \|f * \phi\|_{L^\infty} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(\cdot - y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \right\|_{L^\infty} \\ &\underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_{L^\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\cdot - y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \right\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Sei nun $p \in [1, \infty)$. Wir können Œ $\|\phi\|_{L^1} = 1$ annehmen.
Anwendung der Jensenschen Ungleichung liefert (mit $\varphi(\xi) = |\xi|^p$, $\mathrm{d}\mu = |\phi| \,\mathrm{d}\lambda^n$, also μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß)

$$\begin{aligned} \|f * \phi\|_{L^p}^p &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |\phi(y)| \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \right|^p \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varphi\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \right)}_{\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x-y)|) \,\mathrm{d}\mu(y)} \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &\underset{\text{Fubini}}{\leqq} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \,\mathrm{d}\lambda^n(x)}_{\underset{\text{Trafo.}}{=} \|f\|_{L^p}^p} \mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

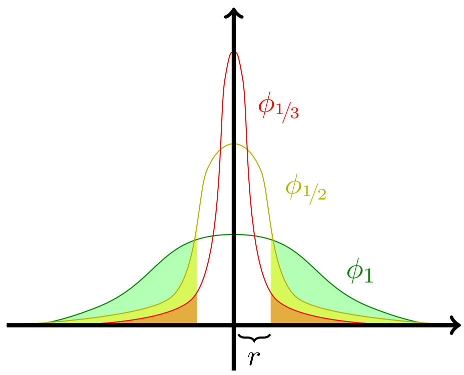
□

Definition 18. Eine Familie $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ integrierbarer Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *approximative Identität*, falls

(i) $\sup_{\varepsilon>0} \|\phi_\varepsilon\|_L^1 < \infty$
(auch häufig zu finden: $\phi_\varepsilon \geqslant 0 \quad \forall \varepsilon > 0$)

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon \,\mathrm{d}\lambda^n = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon| \,\mathrm{d}\lambda^n \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \quad \forall r > 0$



Ein *Glättungskern* (engl. *mollifier*) ist eine nicht-negative Funktion $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\phi\|_{L^1} = 1$.

Bemerkung 19. *Aus jedem Glättungskern ϕ erhält man vermöge*

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine approximative Identität. Häufig zum Einsatz kommt der Standard-Glättungskern

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \textit{falls } |x| < 1 \\ 0, & \textit{falls } |x| \geqslant 1 \end{cases} \quad \textit{(Übungsaufgabe 25).}$$

Für den Rest dieses Kapitels verwenden wir (ohne Beweis) die Regularität des Lebesgue-Maßes.

Lemma 20. *Sei $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Identität und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty)$. Dann gilt*

$$\|f * \phi_\varepsilon - f\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.$$

Beweis. Sei zunächst $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Wir fixieren ein $\delta > 0$ und erhalten aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit (nach dem Satz von Heine) von f

$$|f(x-y) - f(x)| \xrightarrow{|y| \searrow 0} 0 \quad \textit{gleichmäßig} \text{ in } x.$$

Weiterhin erhalten wir aufgrund des kompakten Trägers für $|y| < r$ (r hinreichend klein)

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - y) - f)\|_{L^p} &\overset{5}{=} \left(\int_{B_r(\operatorname{supp} f)} |f(x-y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}\lambda^n(x)\right)^{1/p} \\ &\leqslant \|f(\cdot - y) - f\|_{L^\infty} \left(\int_{B_r(\operatorname{supp} f)} 1^p \,\mathrm{d}\lambda^n(x)\right)^{1/p} \\ &\leqslant \frac{\delta}{2\sup_{\varepsilon>0}\|\phi_\varepsilon\|_{L^1}} \qquad \text{für } r \text{ hinreichend klein.} \end{aligned}$$

[5]Für $E \subset \mathbb{R}^n$ definiere $B_s(E) := \bigcup_{\xi \in E} B_s(\xi)$.

Nun ist weiter

$$(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}\lambda^n(y)$$

und die Minkowski-Ungleichung (*Satz 9*) liefert

$$\|(f*\phi_\varepsilon) - f\|_{L^p} \overset{\substack{\Delta\text{-Ungl.}\\ \downarrow}}{\leqslant} \underbrace{\left\|\int_{B_r(0)} \phi_\varepsilon(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot))\,\mathrm{d}\lambda^n(y)\right\|_{L^p}}_{(*)} + \underbrace{\left\|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r(0)} \phi_\varepsilon(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot))\,\mathrm{d}\lambda^n(y)\right\|_{L^p}}_{(**)},$$

wobei man die beiden Terme weiter abschätzen kann:

$$(*) \leqslant \int_{B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)| \underbrace{\|f(\cdot - y) - f)\|_{L^p}}_{\leqslant \delta/(2\sup_{\varepsilon>0}\|\phi_\varepsilon\|_{L^1})} \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \leqslant \delta/2$$

$$(**) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)| \underbrace{\|f(\cdot - y) - f)\|_{L^p}}_{\leqslant 2\|f\|_{L^p}} \,\mathrm{d}\lambda^n(y) \leqslant 2\,\|f\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(y)$$

$(**) \leqslant \frac{\delta}{2}$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$.
Somit ist die Behauptung für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ gezeigt.
Da diese Funktionen nach *Satz 15* dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegen, wählen wir für eine allgemeine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_{L^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}\|f*\phi_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leqslant \underbrace{\|f*\phi_\varepsilon - f_k*\phi_\varepsilon\|_{L^p}}_{=\|(f-f_k)*\phi_\varepsilon\|_{L^p}} + \underbrace{\|f_k*\phi_\varepsilon - f_k\|_{L^p}}_{\substack{\xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} 0\\ \text{f. festes } k}} + \underbrace{\|f_k - f\|_{L^p}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\\ &\leqslant \underbrace{\|f - f_k\|_{L^p}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \underbrace{\|\phi_\varepsilon\|_{L^1}}_{\leqslant M}\end{aligned}$$

Wähle erst k hinreichend groß und dann ε hinreichend klein $\implies$ Behauptung. □

Satz 21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt die Menge $C_c^\infty(\Omega)$ aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(\Omega)$ für $p \in [1,\infty)$.*

Beweis. Nach *Satz 15* genügt es zu zeigen, dass jede Funktion aus $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ durch Funktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden kann, denn wir können $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} = 0$ setzen.
Wir wählen einen Glättungskern ϕ und schließen, dass $f * \phi_\varepsilon$ kompakte Träger hat und C^∞-glatt ist (vgl. *Lemma 17(iii)*).
Die Behauptung folgt nun aus *Lemma 20*. □

4 Fouriertransformation

Definition 1 (Fouriertransformation)**.** Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle p\,,\,x\rangle} f(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(x),\ p \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ das Skalarprodukt darstellt.

Offenbar ist $\mathcal{F}\colon f \mapsto \widehat{f}$ eine lineare Abbildung, die beschränkt ist. Eine lineare Abbildung A zwischen normierten Räumen $X, Y,\ A\colon X \longrightarrow Y$ heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $C > 0$ mit $\|Ax\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|_X\ \forall x \in X$ gibt.
Im Folgenden ist $C_b^0(X)$ der Raum der stetigen und beschränkten Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}^n$. Also $C_b^0 = C^0 \cap \mathscr{L}^\infty$.

Lemma 2. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist eine lineare beschränkte Abbildung $L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}.$$

Ist f nicht-negativ, so gilt Gleichheit.

Beweis. Die Abschätzung ergibt sich sofort aus der Definition. Es bleibt Stetigkeit von $\widehat{f}$ zu zeigen. Hierzu wählen wir eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n,\ p_k \longrightarrow p_0 \in \mathbb{R}^n$ für $k \longrightarrow \infty$. Wegen $\left|\mathrm{e}^{-i\langle p\,,\,x\rangle}\right| = 1$ ist $|f|$ eine integrierbare Majorante des Integranden und mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt die Behauptung. Ist $f \geqslant 0$, so haben wir

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|\ \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle 0\,,\,x\rangle} f(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= (2\pi)^{n/2}\widehat{f}(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def } L^\infty}}{\leqslant} (2\pi)^{n/2} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

□

Lemma 3. *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n),\ a, p \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0$ gilt:*

(i) $\widehat{f(\cdot + a)}(p) = \mathrm{e}^{-i\langle a\,,\,p\rangle}\widehat{f}(p)$*, wobei die linke Seite die Fourier-Transformierte $x \mapsto f(x+a)$ ist.*

(ii) $\widehat{\mathrm{e}^{-i\langle \cdot\,,\,a\rangle} f}(p) = \widehat{f}(p - a)$

(iii) $\widehat{f(\lambda \cdot)}(p) = \frac{1}{\lambda^n}\widehat{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$

(iv) $\widehat{f(-\cdot)}(p) = \widehat{f}(-p)$

(v) $\widehat{f}g,\ f\widehat{g} \in L^1$ *mit* $\int \widehat{f}g = \int f\widehat{g}$

Beweis. In der Übung. $\square$

Lemma 4. *Sei* $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\lim_{|x|\longrightarrow\infty} f(x) = 0$ *und* $f, \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *für ein* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Dann ist*

$$\widehat{\partial_j f}(p) = ip_j\widehat{f}(p)\ \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Sind umgekehrt f *und* $(x \mapsto x_j f(x))$ *integrierbar (also* $\in L^1$*), so ist* $\widehat{f}$ *nach* p_j *differenzierbar und es gilt*

$$\widehat{\cdot_j f(\cdot)}(p) = i\partial_j\widehat{f}(p)\ \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Partielle Integration liefert im ersten Fall

$$\begin{aligned}(2\pi)^{n/2}\widehat{\partial_j f}(p) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\mathrm{e}^{-i\langle p\,,\,x\rangle}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}_{\text{stetig!}}\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \overset{\overset{\text{P.I.}}{\downarrow}}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \mathrm{e}^{-i\langle p\,,\,x\rangle}}{\partial x_j} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= ip_j\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle p\,,\,x\rangle} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = (2\pi)^{n/2}ip_j\widehat{f}(p).\end{aligned}$$

Für den zweiten Fall erhalten wir aus *Aufgabe 9*

$$\begin{aligned}\widehat{\cdot_j f(\cdot)}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\mathrm{e}^{-i\langle x\,,\,p\rangle}\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{i\frac{\partial \mathrm{e}^{-i\langle x\,,\,p\rangle}}{\partial p_j} f(x)}_{\frac{\partial}{\partial p_j}\underbrace{\left(i\mathrm{e}^{-i\langle x\,,\,p\rangle}\right)}_{|\cdot|\leqslant 1} f(x)}\ \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= i\frac{\partial}{\partial p_j}\widehat{f}(p),\end{aligned}$$

was insbesondere die partielle Differenzierbarkeit von $\widehat{f}$ beweist. $\square$

Notation 5. Das soeben bewiesene Resultat überträgt sich induktiv auf den Fall höherer Ableitungen. Für $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leqslant k$ setzen wir

$$\partial_\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}},\quad \text{wobei } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \text{ ist.}$$

Ein Element $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ heißt *Multiindex* und $|\alpha|$ ist seine Ordnung. Natürlich ist $(\lambda x)^\alpha = \lambda^{|\alpha|}x^\alpha$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 6 (Schwartz-Raum)**.** Wir definieren

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \colon \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial_\beta f)(x)| < \infty \right\}.$$

Die Elemente heißen *Schwartz-Funktionen* bzw. *schnell-fallende Funktionen.*

Bemerkung 7. *Offenbar ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty]$ und wegen $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (insbesondere $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$) ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty)$ nach* Satz II.21 *sogar dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mit f liegen auch $x \mapsto x^\alpha f(x)$ und $\partial_\alpha f$ für jeden Multiindex α im Schwartz-Raum.*

Lemma 8. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein Operator $\mathcal{F} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere gilt für jeden Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n,\ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ p \in \mathbb{R}^n$:*

$$\widehat{\partial_\alpha f}(p) = (ip)^\alpha \widehat{f}(p) \quad \textit{und} \quad \widehat{\cdot^\alpha f(\cdot)}(p) = i^{|\alpha|} \partial_\alpha \widehat{f}(p).$$

Beweis. Die Formeln erhält man induktiv aus *Lemma 4*. Insbesondere ist $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Um $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, verwenden wir zunächst, dass $\widehat{f}$ nach *Lemma 2* beschränkt ist. Damit f nach *Bemerkung 7* auch $(x \mapsto \partial_\alpha(x^\beta f(x))) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und dessen Fourier-Transformierte ebenfalls beschränkt ist, erhalten wir eine gleichmäßige Schranke aus

$$p^\alpha \partial_\beta \widehat{f}(p) = i^{-|\beta|} p^\alpha \widehat{\cdot^\beta f(\cdot)}(p) = i^{-|\alpha|-|\beta|} \underbrace{\widehat{\underbrace{\partial_\alpha(\cdot^\beta f(\cdot))}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}}(p)}_{\text{gleichmäßig beschränkt in } p \text{ wegen } \textit{Lemma 2}}$$

für beliebige Multiindizes $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. □

"Moral": Das Abklingverhalten einer Funktion korrespondiert mit der Regularität[1] der Fourier-Transformierten, und die Regularität einer Funktion umgekehrt mit dem Abklingverhalten ihrer Fourier-Transformierten.
Insbesondere verschwindet die Fourier-Transformierte einer integrierbaren Funktion im Unendlichen, was im folgenden Corollar gezeigt wird. Mit $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ bezeichen wir den Raum aller stetigen Funktionen f, die $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x) = 0$ erfüllen.

Corollar 9 (Riemann-Lebesgue)**.** *Die Fouriertransformation bildet $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ ab.*

Beweis. Sei zunächst $f \in C_C^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist für $p \in \mathbb{R}^n$ mit $p_j \neq 0$

$$\left|\widehat{f}(p)\right| \overset{\text{Lemma 4}}{=} \left|\frac{1}{ipj} \widehat{\partial_j f(p)}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{\leqslant} \frac{\|\partial_j f\|_{L^1}}{|2\pi|^{\frac{n}{2}} |p_j|}$$

folglich

$$\left|\widehat{f}(p)\right| \leqslant \min_{j \in \{1, \ldots, n\},\, p_j \neq 0} \frac{\|\partial_j f\|_{L^1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |p_j|} \leqslant \frac{\max \|\partial_j f\|_{L^1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \max_j |p_j|} \xrightarrow{\|p\| \longrightarrow \infty} 0$$

[1] Glattheit

Zu beliebigem $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ finden wir nach Satz 2.21 eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} 0$. Nun ist für $\left|\widehat{f}(p)\right| \leqslant \underbrace{\left|\widehat{f}_k(p)\right|}_{\text{für festes } k\in\mathbb{N}\xrightarrow{|p|\longrightarrow\infty}0} + \underbrace{\left\|\widehat{f}_k - \widehat{f}\right\|_{L^\infty}}_{=\left\|\widehat{f_k-f}\right\|_{L^\infty}\overset{\text{Lemma 2}}{\leqslant} C\|f_k-f\|_{L^1}\xrightarrow{k\longrightarrow\infty}0}$

□

Satz 10 (Fourierinversion). *Die Fouriertransformation ist eine (beschränkte lineare) invertierbare Abbildung.*

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

Die Inverse ist durch

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ipx - \frac{\varepsilon^2|p|^2}{2}} \widehat{f}(p) \,\mathrm{d}\lambda^n(p)$$

gegeben, wobei der Grenzwert bezüglich der L^1-Norm zu verstehen ist.

Beweis. Wir betrachen die Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ und definiere $\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\frac{\cdot}{\varepsilon}$. Nach A17 ist $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\lambda^n = 1$ insofern ist $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Identität. Weiter ist

$$\widehat{\phi(\varepsilon\cdot)}(p) \overset{\text{Lemma 3 (iii)}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\widehat{\phi}(\frac{p}{\varepsilon}) \overset{\text{Ü.A.}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{p}{\varepsilon}) = \phi_\varepsilon(p)$$

Nun haben wir $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ipx - \frac{\varepsilon^2|p|^2}{2}} \widehat{f}(p) \,\mathrm{d}\lambda^n(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ipx}\phi(\varepsilon p)\widehat{f}(p) \,\mathrm{d}\lambda^n(p) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f(\cdot + x)}(p)\phi(\varepsilon p) \,\mathrm{d}\lambda^n(p) \overset{\text{Lemma 3(v)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(p+x) \underbrace{\widehat{\phi(\varepsilon\cdot)}(p)}_{\phi_\varepsilon(p)} \,\mathrm{d}\lambda^n(p)
\end{aligned}$$

Sei g = -p

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \underbrace{\phi_\varepsilon(-y)}_{=\phi_\varepsilon(y)} \,\mathrm{d}\lambda^n(y) = (f * \phi_\varepsilon)(x)$$

Nach Lemma 2.20 konvergiert die rechte Seite für $\varepsilon \to 0$ bezüglich der L^1-Konvergenz gegen f. □

Corollar 11. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\check{(\widehat{f})} = f$ wobei $\check{f}(p) := \widehat{f}(-p)$. Also $\check{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ipx} f(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(x)$ Insofern ist $\mathcal{F}$ eine Bijektion auf:*

$$F^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

und insbesondere ist $\mathcal{F}\big|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Bijektion.

Beweis. Wegen $\phi(\varepsilon p) \xrightarrow{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir $\left|\mathrm{e}^{ipx}\phi(\varepsilon p)\widehat{f}(p)\right| < \frac{\left|\widehat{f}(p)\right|}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ Nach Vorraussetzung liefert dies eine integrierbare Majorante und wir dürfen in der Formel aus Satz 10 Grenzwert und Integration vertauschen (Um punktweise Konvergenz zu erhalten, gehen wir zunächst von einer Teilfolge über (L^p-Konvergenz $\to$ punktweise Konvergenzfür eine Teilfolge) und erhalten die Konvergenz insgesamt (und teilfolgenunabhängig aus dem Teilfolgenprinzip)). Nun folgt $\check{(\widehat{f})} = f$ wie behauptet □

Lemma 12. *Sei $f \in F^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f, \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\underbrace{\|f\|_{L^2}^2 = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2}_{\text{Plancherel Identität}} \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^1}$$

Beweis. Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(p)\right|^2 \mathrm{d}\lambda^n(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\mathrm{e}^{-ipx}\overline{\widehat{f}(p)}}_{=\overline{\mathrm{e}^{ipx}\widehat{f}(p)}} \mathrm{d}\lambda^n(x)\, \mathrm{d}\lambda^n(p) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ipx} \widehat{f}(p)\, \mathrm{d}\lambda^n(p)}}_{=(2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{\check{(\widehat{f})}(x)}\overline{f(x)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(x)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x)\overline{f(x)\ \mathrm{d}\lambda^n(x)}}_{|f(x)|^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Insbesondere } \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_R |f(x)|\ \mathrm{d}\lambda^n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|eipx|}_{=1} \left|\widehat{f}(p)\right| \mathrm{d}\lambda^n(p)$$

□

Satz 13 (Unschärferelation). *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $p_0,\ x_0 \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n$ gilt.*

$$\|(\cdot_j - x_0) f(\cdot)\|_{L^2} \left\|(\cdot_j - p_0)\widehat{f}(\cdot)\right\|_{L^2} \geqslant \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2$$

Beweis. Indem wir f durch $\widehat{f}(x) := \mathrm{e}^{-ix_j p_0} f(x + x_0 \widehat{e}_j)$ ersetzten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(\cdot_j - x_0)(f\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(x_j - x_0) f(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |x_j f(x + x_0 \widehat{e}_j)|^2 \, \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= \left\| \cdot_j \widehat{f}(\cdot) \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\cdot_j - p_0)(f\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(p_j - p_0) f(p)|^2 \, \mathrm{d}\lambda^n(p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |p_j f(p + p_0 \widehat{e}_j)|^2 \, \mathrm{d}\lambda^n(p) \\ &= \left\| \cdot_j \widehat{\tilde{f}}(\cdot) \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

und $\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2}^2$ Sodass wir ohne Einschränkung $p_0 = x_0 = 0$ annehmen dürfen. Nun liefert partielle Integration

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \, |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda^n(x) \stackrel{f \in \mathscr{S}}{=} 0 - \int_{\mathbb{R}^n} x_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} |f(x)|^2}_{= 2 f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)} \, \mathrm{d}\lambda^n(x)$$

demnach ist

$$\|f\|_{L^2}^2 \stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leqslant} 2 \, \|\cdot_j f(\cdot)\|_{L^2} \underbrace{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot) \right\|_{L^2}}_{\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \left\| \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \right\| \stackrel{\text{Lemma 4}}{=} \left\| i \cdot_j \widehat{f}(\cdot) \right\|_{L^2} = \left\| \cdot_j \widehat{f}(\cdot) \right\|_{L^2}}$$

□

Satz 14. *Sei X ein normierter Raum mit dichter Teilmenge $\mathscr{V}$, und Y sei ein Banachraum. Ist $A\colon \mathscr{V} \to Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung, das heißt, es gibt insbesondere ein $C_A > 0$ mit $\underbrace{\|A_x\|_Y}_{=A(x)} \leqslant C_A \|x\|_X \; \forall x \in \mathscr{V}$ so gibt es genau eine Fortsetztung $\tilde{A}$, also eine lineare und* *beschränkte Abbildung $\tilde{A}\colon X \to Y$, $\tilde{A}|_V = A$, die die Abschätzung mit der selben Konstante $C_A \forall x \in X$ erfüllt. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum* [2]

$$
\begin{aligned}
&\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0 \,\forall x \in X\\
&\|\lambda x\| = |\lambda| \,\|x\| \;\forall \lambda \in \mathbb{R},\; x \in X\\
&\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \;\forall x, y \in X
\end{aligned}
$$

gibt.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{V}$ eine Cauchyfolge, dann ist wegen $\|Ax_j - Ax_k\|_Y = \|A(x_j - x_k)\|_Y \leqslant C_A \|x_j - x_k\|_X \to 0$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge und diese besitzt einen eindeutigen Grenzwert $\tilde{A}x_0 := \lim_{k\to\infty} Ax_j$, sofern $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in X$ existiert. Damit ist $\tilde{A}\colon X \to Y$ eindeutig gegeben, denn für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{V}$ mit $x_k \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} x_0 \xleftarrow{k\longrightarrow\infty} y_k$ ist

$$\|Ax_k - Ay_k\|_y = \|A(x_k - y_k)\|_Y \leqslant C_A \|x_k - y_k\|_X \leqslant C_A(\|x_k - x_0\|_X + \|y_k - y_0\|_Y) \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} 0$$

Aufgrund von Stetigkeit von Vektoraddition und skalarer Mulitplikation erhalten wir die Linearität von $\tilde{A}$ und aus der Stetigkeit der Normen die behauptete Abschätzung. ☐

Satz 15 (Plancherel-Identität). *Die Foureiertransformation $\mathcal{F}$ lässt sich zu einer linearen beschränkten Abbildung $\widetilde{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, die unitär ist, d. h.*

$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}(f)\,, \widetilde{\mathcal{F}}(g)\rangle_{L^2} = \langle f\,, g\rangle_{L^2}$$

[2]Es sei V eine Menge, $(K,\, +,\, \cdot)$ ein Körper X heißt normierter Raum, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\|_X : X \to [0, \infty]$ mit $\oplus\colon V \times V \to V$ eine innere zweistellige Verknüpfung, genannt Vektoraddition, und $\odot\colon K \times V \to V$ eine äußere zweistellige Verknüpfung, genannt Skalarmultiplikation. Mann nennt dann $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über dem Körper K oder kurz K-Vektorraum. (Eigenschaften Vektoraddition, Skalarmultiplikation siehe Wikipedia)