# Höhere Analysis

Dr. Philipp Reiter
WS 16/17 Universität Heidelberg

26. Oktober 2016

gesetzt in LaTeX von Sebastian Blänsdorf,
Fabian Krautgasser & Marvin Sipp

Dies ist das Vorlesungsskript zur Vorlesung *Höhere Analysis* bei Dr. Philipp Reiter im Wintersemester 16/17 an der Universität Heidelberg. Da dieses Skript von Studenten angefertigt wird, ist keine Garantie auf Exaktheit und Vollständigkeit gegeben. Ebenso ist dies kein Anspruch auf Originalität, da sich die Inhalte aus vielerlei Fachbüchern zusammen setzen. Wir bitten zu entschuldigen, dass diese nicht explizit angegeben sind.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Maßtheorie** **4**

# 1 Maßtheorie

**Definition 1** (Algebra)**.** Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge $X$ mit folgenden Eigenschaften:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}, N \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathcal{A}$

Wir sprechen von einer $\sigma$-Algebra, wenn $N = \infty$ zulässig ist.

**Lemma 2.** *Sei $X$ eine Menge. $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gehören auch $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ und beispielsweise $A_1 \setminus A_2$ zu $\mathcal{A}$.*

*Beweis.* Wir haben

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \underbrace{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{A_k^{\mathrm{C}}}_{\in\,\mathcal{A}}\right)}_{\in\,\mathcal{A}}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$$

Weiter ist $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap \underbrace{A_2^{\mathrm{C}}}_{\in\,\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ □

**Beispiel.** *Für $X = \{1, 2, 3\}$ ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$*

**Definition 3.** Allgemein ist $\mathfrak{P}(X)$ (=Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von X) die größte und $\{\emptyset, X\}$ die kleinste $\sigma$-Algebra. Sei $S \subset \mathfrak{P}(X)$, dann stellt

$$\Sigma(S) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra mit } S \in \mathcal{A}\}$$

tatsächlich eine $\sigma$-Algebra dar. Es ist die kleinste $\sigma$-Algebra die $S$ enthält und wird als *die von $S$ erzeugte* $\sigma$-Algebra bezeichnet. $\Sigma(S)$ ist eindeutig bestimmt.
Ist $X$ eine Menge mit $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ und $Y \subset X$. Dann bezeichnen wir

$$\mathcal{A} \cap Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

als *relative $\sigma$-Algebra.* Sie ist in der Tat eine $\sigma$-Algebra auf Y.

**Lemma 4.** *Die erzeugte und die relative $\sigma$-Algebra sind wohldefiniert, also eindeutig bestimmt, und tatsächlich $\sigma$-Algebren.*

*Beweis.* In der Übung. □

**Behauptung.** *Falls $S \subset \mathfrak{P}(X)$ die $\sigma$-Algebra $\Sigma = \Sigma(S \mid X)$*[1] *erzeugt, dann erzeugt für $Y \subset X$ die Menge $S \cap Y$ die $\sigma$-Algebra $\Sigma(S \cap Y \mid Y)$, und*

$$\Sigma(S \cap Y \mid Y) = \Sigma(S \mid X) \cap Y$$

*Beweis.*

"$\Leftarrow$" Weil $\Sigma \cap Y$ die Mengen aus $S \cap Y$ enthält, gilt $\Sigma(S \cap Y) \subset \Sigma \cap Y$

"$\Rightarrow$" Betrachte die Menge

$$\{A \subset \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\}$$

Dies ist eine $\sigma$-Algebra, weil diese die Menge $S$ enthält, folgt

$$\Sigma(S) \subset \{A \in \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\} \subset \Sigma(S)$$

also Gleichheit und folglich $\Sigma(S) \cap Y = \{A \in \Sigma(S) \mid A \cap Y \in \Sigma(S \cap Y)\} \cap Y \subset \Sigma(S \cap Y)$

□

**Definition 5** (Topologischer Raum)**.** Sei $X$ eine Menge. Es gibt ein System von Teilmengen $\mathcal{O} \subset X$ mit $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, das abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen. Dieses System $(X, \mathcal{O})$ heißt *topologischer Raum*. Formal muss gelten:

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
- $\{U_i\}_{i \in I}, U_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

**Definition 6** (Borel-$\sigma$-Algebra)**.** Ist $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{O} \subset X$, so ist $\mathcal{B}(X)$ diejenige $\sigma$-Algebra, die von $\mathcal{O}$ erzeugt wird (also die kleinste $\sigma$-Algebra, die die offenen Mengen von $(X, \mathcal{O})$ enthält). Wir bezeichnen $\mathcal{B}(X)$ als *Borel-$\sigma$-Algebra*, und die Mengen in $\mathcal{B}$ heißen *Borel-Mengen*.
Notation:

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \ \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$$

**Bemerkung.** *Die Familie aller endlichen offenen Intervalle $\subset \mathbb{R}$ erzeugt bereits $\mathcal{B}$.*

**Definition 7** (Maßraum, Maß)**.** Eine Menge $X$ mit einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *Maßraum*. Ein *Maß* ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ mit:

- $\mu(\emptyset) = 0$

[1] Hier bezeichnet $X$ den "Raum", der für $\Sigma$ von Bedeutung ist.

- **$\sigma$-Additivität**: Für eine Folge[2] paarweise disjunkter[3] Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ist $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$

Die Elemente in $\mathcal{A}$ heißen *messbar*, und das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt somit *Maßraum*.

**Definition 8** ($\sigma$-Finitheit)**.** Ein Maß heißt $\sigma$*-finit*, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von $X$ gibt, also $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, sodass $\mu(X_k) < \infty\ \forall k$.
$\mu$ heißt *endlich*, falls $\mu(X) < \infty$, und *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$.

**Beispiel 9.**

*(a)* ***Zählmaß****: Für $X$ und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$ setze*

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & : A \text{ endlich} \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

*$\mu$ ist endlich, wenn $X$ endlich, und $\sigma$-finit, wenn $X$ abzählbar ist.*

*(b)* ***Dirac-Maß****: Für einen fest gewählten Punkt $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$ setze für $A \subset X$*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : x_0 \notin A \\ 1 & : x_0 \in A \end{cases}$$

*(c)* ***Positive Linearkombinationen****: Seien $\mu_1, \mu_2$ Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann erhalten wir durch $\mu := \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ wieder ein Maß.*

**Beispiel 10.** *Sei $\mu$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $Y \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu_{|Y}(A) := \mu(A \cap Y)$ wieder ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.*

**Bemerkung.** *Für $Y \in \mathcal{A}$ können wir die $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ zu*

$$\mathcal{A}_{|Y} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$$

*einschränken. Dann ist $\mu_{|Y}(A) = \mu(A \cap Y)$, $A \cap Y \in \mathcal{A}$, ein Maß (siehe oben) und $\left(Y, \mathcal{A}_{|Y}, \mu_{|Y}\right)$ ein Maßraum und dieser ist $\mu$-finit, falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-finit ist.*

**Notation 11.**

$A_k \nearrow A$, falls $A_k \subset A_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

$A_k \searrow A$, falls $A_k \supset A_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

**Satz 12.** *Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt:*

*(i)* $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

*(ii)* $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ ($\sigma$-Subadditivität)

---

[2] Folgen sind indizierbar mit $\mathbb{N}$. Im Unterschied dazu können Familien auch überabzählbar sein.
[3] $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$

*(iii)* $A_k \nearrow A \Rightarrow \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$

*(iv)* $A_k \searrow A \Rightarrow \mu(A_k) \searrow \mu(A)$, *für* $\mu(A_1) < \infty$

*Beweis.*

(i) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A)\,,\ B \setminus A \in \mathcal{A}$, woraus folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ &\geq \mu(A) \end{aligned}$$

(ii) Wir definieren $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ induktiv durch $B_1 := A_1$, $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_k \in \mathcal{A}$, woraus folgt

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{K}} B_k = \bigcup_{n=1}^{K} A_k \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Nach Definition gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \overset{(i)}{\leq} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

(iii) Definiere $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch $C_1 := A_1,\ C_{k+1} := A_{k+1} \setminus A_k$. Demnach ist

$$\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A$$

Die $\sigma$-Additivität liefert

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j) \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(C_k)}_{=\mu(A)} \left(\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\right)$$

(iv) $D_k := A_1 \setminus A_k \forall k \in \mathbb{N}$. Damit ist $D_k \nearrow A_k \setminus A$, und wir haben

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) \underset{(iii)}{\xrightarrow{k\to\infty}} \mu(A_1 \setminus A) - \mu(A)$$

Subtraktion von $\mu(A_1) < \infty$ liefert die Behauptung.

$\square$

**Bemerkung 13.** *Zählmaß* $\mu$ *auf* $X = \mathbb{N}$ *und* $A_k = \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq k\}\,,\ A_k \searrow \emptyset$, $\mu(A_k) = \infty\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mu(\emptyset) = 0$. *Hieraus erkennt man, dass die Bedingung* $\mu(A_1) < \infty$ *in* Satz $12_{\text{(iv)}}$ *wesentlich ist.*

**Definition 14** (Borel-Maß)**.** Sei $X$ ein topologischer Raum mit Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$. Ein Maß $\mu$ auf $(X, \mathcal{B}(X))$ heißt *Borel-Maß*, falls es auf Kompakten[4] stets endliche Werte annimmt.

**Beispiel 15.** *Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Das Dirac-Maß ist ein Borel-Maß, das Zählmaß hingegen nicht.*

**Definition 16** (Regularität)**.** Sei $X$ ein topologischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß $\mu$ heißt *regulär von außen*, wenn gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U,\ U \text{ offen}\}\ \forall A \in \mathcal{A}$$

Außerdem heißt das Maß $\mu$ *regulär von innen*, wenn gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}\ \forall A \in \mathcal{A}$$

Ein Maß heißt *regulär*, wenn es regulär von innen und außen ist.

**Beispiel 17.** *Das Zählmaß ist regulär von innen, jedoch nicht von außen. Das Dirac-Maß ist regulär ($X, \mathcal{A}$ wie in* Beispiel 15*).*

### Strategie:

1. Starte mit einem sogenannten Prämaß $\lambda$ auf der Algebra endlicher, disjunkter Vereinigungen von Intervallen, $\lambda =$ Summe der Längen.
2. Dies kann zu einem "äußeren Maß" auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden (keine $\sigma$-Additivität).
3. Einschränkung auf Borel-$\sigma$-Algebren liefert ein Maß.

**Definition 18** (Dynkin-System)**.** Eine Familie $\mathcal{D} \subset \mathfrak{P}(X)$, $X$ eine Menge, heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

- $X \in \mathcal{D}$
- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$
- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D},\ A_k \cap A_m = \emptyset\ \forall k, m,\ k \neq m \Rightarrow \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$

**Bemerkung 19.**

*(i) Ein Dynkin-System ist abgeschlossen unter Mengensubtraktion:*

$$A, B \in \mathcal{D},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

*da $B^{\mathrm{C}}, A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$, und $A^{\mathrm{C}} \cup B \in \mathcal{D}$, denn $B \cap A^{\mathrm{C}} \subset A \cap A^{\mathrm{C}} = \emptyset$*

*(ii) Ist $S \subset \mathfrak{P}(X)$, so ist*

$$\mathcal{D}(S) = \bigcap\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System, } S \in \mathcal{D}\}$$

*das* von $S$ erzeugte Dynkin-System.

[4]Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in I$ besitzt.

(iii) *Das von $S$ erzeugte Dynkin-System ist wohldefiniert, das heißt es ist eindeutig und tatsächlich ein Dynkin-System.*

**Lemma 20.** *Ist $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten oder alternativ unter beliebigen (also nicht notwendigerweise disjunkten) endlichen Vereinigungen, so ist $\mathcal{D}$ eine $\sigma$-Algebra.*

*Beweis.* In der Übung. □

**Lemma 21.** *Sei $S$ eine (nichtleere) Familie, von Teilmengen einer Menge $X$, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Dann folgt $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$.*

*Beweis.* Nach Definition gilt $\mathcal{D}(S) \subset \Sigma(S)$. Die andere Inklusion, $\Sigma(S) \subset \mathcal{D}(S)$, folgt sofort, wenn wir zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ eine $\sigma$-Algebra ist. Nach *Lemma 20* genügt hierzu der Nachweis, dass $\mathcal{D}(S)$ abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Hierzu definieren wir für ein festes $A \in \mathcal{D} \coloneqq \mathcal{D}(S)$:

$$D(A) = \{B \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D}$$

Ziel: $D(A) = \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}$

**Behauptung.** *$D(A)$ ist ein Dynkin-System für beliebige $A \in \mathcal{D}$.*

*Beweis.*

- $X \in \mathcal{D},\ A \cap X = A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \in D(A)$
- $B \in D(A) \Rightarrow B \in \mathcal{D},\ A \cap B \in \mathcal{D}$.
  Hieraus folgt: $A \cap B^{\mathrm{C}} = A \setminus (B \cap A) \in \mathcal{D} \Big($*vgl. Bem. 19*$_{(i)}\Big)$
- $B = \dot\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k,\ B_k \in D(A) \Rightarrow B_k \in \mathcal{D},\ A \cap B_k \in \mathcal{D}$.
  Hieraus folgt: $B \in \mathcal{D},\ B \cap A = \dot\bigcup (B_k \cap A) \in \mathcal{D} \Rightarrow B \in D(A)$ (da $B_k \cap A \in \mathcal{D}$)

□

**Behauptung.** *$A \in S \Rightarrow S \subset D(A)$, denn $B \in S \Rightarrow A \cap B \in S \subset \mathcal{D} \Rightarrow B \in D(A)$. Da $\mathcal{D} = \mathcal{D}(S)$ das kleinste Dynkin-System ist, das $S$ enthält, folgt*

$$\mathcal{D} \subset D(A) \Rightarrow \mathcal{D} = D(A)$$

*Für beliebige $U \in S, \mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{D}} \coloneqq D(U)$ folgt nach Definition $U \cap \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Dies impliziert $U \in D(\mathcal{V})$, also $S \subset D(\mathcal{V})\ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Wie eben ist $D(\mathcal{V}) \subset \mathcal{D}$, also $D(\mathcal{V}) = \mathcal{D}\ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D}$. Folglich ist $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten.*

□

**Bemerkung 22.** Lemma 21 *lässt sich wie folgt anwenden:*

- *Verifiziere eine Eigenschaft $\varepsilon$ auf einer Menge $S \subset \mathfrak{P}(X)$, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist.*

- *Zeige, dass die Menge aller Mengen in $\mathfrak{P}(X)$, die $\varepsilon$ enthalten, ein Dynkin-System bildet.*
- *Schließe, dass $\varepsilon$ auf $\Sigma(S)$ gilt.*

Lemma 21 *gilt auch unter der Voraussetzung "Abgeschlossenheit unter beliebigen endlichen Vereinigungen" (statt der Schnitte).*

**Satz 23** (Eindeutigkeit der Maße)**.** *Sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum, und $S \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Familie von Mengen, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist, und $\Sigma(S) = \Sigma$. Weiter enthält $S$ eine Folge aufsteigender Mengen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $X_k \nearrow X$ und $\mu(X_k) < \infty\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu$ auf $\Sigma = \Sigma(S)$ durch die Werte auf $S$ eindeutig bestimmt.*