

Высокопроизводительные вычисления

Лабораторная работа №1

Исследование алгоритмических и программных методов ускорения реализации функций вещественных переменных

Цель работы: Изучение методов реализации функций от вещественных переменных, представленных степенными рядами. Приобретение умений и навыков варьирования соотношения «затраты памяти – время реализации» в рамках этих методов.

Порядок работы и содержание отчета:

1. Анализ разложения в ряды функций, фигурирующих в варианте задания.

В отчете должны быть приведены отдельные формулы для каждой из функций варианта задания и общая формула, получаемая в результате композиции функций согласно выражению в варианте задания.

2. Разработка процедуры-функции контроля `int flverify(float fl, PFLOAT p)`, на вход которой подается значение аргумента и указатель на процедуру, реализующую исследуемую функцию при представлении чисел данными типа `float`. Тип указателя объявляется на языке Си так: `typedef float (*PFLOAT)(float)`. Эта процедура пробегает по ряду значений из диапазона значений аргумента x и для каждого из них сравнивает результат вычисления по процедуре $p(x)$ с результатом вычисления по эталонной реализации. Если модуль разности больше заданной погрешности, то функция `verify` возвращает 1, иначе 0. Эталонная реализация для плавающей точки должна быть в теле процедуры `flverify`.

Отчет должен содержать самодокументированный исходный текст этой процедуры.

3. Исследование времени вычисления для данных типа `float`

А) Разработка на языке Си набора процедур реализации функции для случая использования данных типа `float`. В этот набор включаются следующие процедуры: а) процедура `FlMath` с использованием вызовов функции, фигурирующей в качестве первого слагаемого в выражении варианта задания на лабораторную работу (функции библиотеки `math`); б) процедура `FlCyclNoGorner` с циклом, построенным без использования схемы Горнера; в) процедура `FlCyclGorner` для многочлена с циклом на основе схемы Горнера; г) процедура `FlNoCyclNoGorner` с бесцикловой реализацией функции на основе выражения ряда без схемы Горнера; д) процедура `FlNoCyclGorner` с бесцикловой реализацией функции на основе выражения, представляющего схему Горнера многочлена.

Б) Проведение измерений затрат времени вычисления функции через различные процедуры. *Отчет должен содержать самодокументированный исходный текст разработанных процедур и пять чисел, представляющих среднее значение времени вычисления каждой из функции для диапазона значений аргумента.*

4. Разработка макросов обработки чисел с фиксированной точкой.

Здесь разрабатываются макросы, которые обеспечивают следующее:

- а) преобразование чисел между форматом `float` и форматом с фиксированной точкой,
- б) базовые арифметические операции над данными с фиксированной точкой. Формат с фиксированной точкой предполагает использование в Си-программе целочисленных данных типа `long` если этого потребуют ограничения на погрешность.

Отчет должен содержать самодокументированные тексты макросов, вспомогательных программ для их отладки и протоколы отладки.

5. Исследование времени вычисления для данных с фиксированной точкой.

Здесь разрабатываются и исследуются две процедуры: а) `FixCyclGorner` на основе реализации схемы Горнера с циклом; б) `FixNoCyclGorner` на основе бесцикловой реализации схемы Горнера.

Предварительно разрабатывается функция верификации `int fixverify(int fix, PFIX p)`, которая отличается от `flverify` тем, что обслуживает данные и процедуры с фиксированной точкой (тип `PFIX`

объявлен как `typedef float (*PFIX)(fix))`. Преобразование типов не должно попадать в интервал измерения времени.

Отчет должен содержать самодокументированный исходный текст разработанных процедур и два числа, представляющих среднее значение времени вычисления каждой из функции для диапазона значений аргумента.

6. Исследование таблично-алгоритмических реализаций функций.

А) Разработка процедуры генерации таблиц с коэффициентами степенного ряда.

Б) Разработка и исследование нескольких таблично-алгоритмических реализаций. В первой реализации разрядность адреса таблицы равна 8, во второй – 9 и т.д. до значения N, при котором заданная точность обеспечивается линейной функцией $a_0 + a_1 * x$. Здесь должна использоваться бесцикловая схема Горнера и данные с фиксированной точкой.

Отчет должен содержать самодокументированные тексты программ и оценку времени реализации функции для каждого из значений разрядности адреса.

7. Формирование сводной таблицы результатов

В сводную таблицу должны попасть все результаты, полученные в ходе измерения времени.

Варианты заданий

Во всех вариантах по умолчанию считается, что диапазон аргумента равен $0 \leq x < 1$.

На 3 достаточно сделать только плав. точку, на 4 – еще и фиксированную, на 5 – все полностью.

№	Функция	Число точных знаков результата после двоичной точки	Фамилия студента
1.	$\sin(x)$	21	Краюшкин
2.	$\operatorname{tg}(x)$	20	Рыськин
3.	$\cos(x)$	22	Носак
4.	$\operatorname{csc}(x)$	21	Игнатьев М.А.
5.	$\ln(1-x)$	19	Игнатьев Ю.М.
6.	$\ln((1+x)/(1-x))$	18	Яшина
7.	$\ln(\cos x)$	17	Бачурин
8.	$\arcsin(x)$	18	Ермохин
9.	$\arccos(x)$	19	
10.	$\operatorname{arctg}(x)$	21	
11.	$\operatorname{ch}(x)$	18	
12.	$\operatorname{sch}(x)$	20	

Приложение 1. Базовые сведения из математического справочника

Таблица разложения функций в ряды

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
<i>Тригонометрические функции</i>		
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a + x \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \dots + \frac{x^n \sin(a + \frac{n\pi}{2})}{n!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} - \dots + \frac{x^n \cos(a + \frac{n\pi}{2})}{n!} \pm \dots$	$ x < \infty$
$\lg x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$ $\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots \right]^{-1}$	$0 < x < \pi$
$\sec x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$ $\dots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\csc x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \dots$ $\dots + \frac{127}{60480}x^7 + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$	$0 < x < \pi$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

** E_n — числа Эйлера (см. стр. 297).

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
<i>Показательные функции</i>		
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$ x < \infty$
$a^x = e^{x \ln a}$	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$	$ x < \infty$
$\frac{x}{e^x - 1}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$	$ x < 2\pi$
<i>Логарифмические функции</i>		
$\ln x$	$2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right]$ $\dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots$	$x > 0$
$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \pm \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{nx^n} + \dots$	$x > \frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right]$	$-1 \leq x < 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{Arth} x$	$2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]$	$ x < 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{Arcth} x$	$2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \right]$ $\dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots$	$ x > 1$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

328

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
$\ln \sin x $	$\ln x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots$ $\dots - \frac{2^{2n-1}B_n}{n(2n)!}x^{2n} - \dots$	$0 < x < \pi$
$\ln \cos x $	$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots$ $\dots - \frac{2^{2n-1}(1-2^{2n})B_n}{n(2n)!}x^{2n} - \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\ln \operatorname{tg} x $	$\ln x + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{315}x^5 + \frac{61}{1575}x^7 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n-1} + \dots \right]$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$
<i>Обратные тригонометрические функции</i>		
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^7 + \dots$ $\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^7 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots \right]$	$ x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots$ $= \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \pm \dots$	$ x < 1$ $ x > 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots \right]$	$ x < 1$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

** Первый член $\frac{\pi}{2}$ берется со знаком «+» при $x > 1$ и со знаком «-» при $x < -1$.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ 329

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
<i>Гиперболические функции</i>		
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$ x < \infty$
$\operatorname{th} x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} \pm \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} \pm \dots$	$0 < x < \pi$
$\operatorname{sch} x$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{61}{720}x^6 + \frac{1385}{8064}x^8 - \dots$ $\dots + (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} \pm \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{csch} x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \dots$ $\dots + \frac{2(1-2^{2n})B_n}{(2n)!}x^{2n-1} \pm \dots$	$0 < x < \pi$
<i>Обратные гиперболические функции</i>		
$\operatorname{Arth} x$	$x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^7 + \dots$ $\dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}x^{2n+1} \pm \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{Arch} x$	$\pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \right]$	$ x > 1$
$\operatorname{Arth} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{Arcth} x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots$ $\dots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \dots$	$ x > 1$

* B_n — числа Бернулли (см. стр. 297).

** E_n — числа Эйлера (см. стр. 297).

*** Функция двучленная.

Числа Бернулли B_k :

$$19) 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots + \frac{1}{n^{2k}} + \dots = \frac{\pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_k,$$

$$20) 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \dots \pm \frac{1}{n^{2k}} \mp \dots = \frac{\pi^{2k} (2^{2k-1} - 1)}{(2k)!} B_k,$$

$$21) 1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + \dots = \frac{\pi^{2k} (2^{2k} - 1)}{2 \cdot (2k)!} B_k$$

Таблица первых чисел Бернулли

k	B_k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174\ 611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854\ 513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43\ 867}{798}$		

Числа Эйлера E_k :

$$22) 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \dots \pm \frac{1}{(2n-1)^{2k+1}} \mp \dots = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2} (2k)!} E_k$$

Таблица первых чисел Эйлера

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50 521
2	5	6	2 702 765
3	61	7	199 360 981
4	1385		

Числа Бернулли получаются как решения системы равенств:

$$C_1^1 B_0 = 1$$

$$C_1^2 B_1 + C_2^2 B_0 = 0$$

$$C_1^3 B_2 + C_2^3 B_1 + C_3^3 B_0 = 0$$

$$C_1^4 B_3 + C_2^4 B_2 + C_3^4 B_1 + C_4^4 B_0 = 0$$

...

$$\text{где } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{Имеем } \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k} = 0 \quad \text{Или} \quad (n+1)B_n + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k} = 0$$

$$\text{Отсюда } B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}$$

Т.е. рекуррентно можно вычислить числа

Приложение 2. Схемы вычисления степенных рядов

2.1. Наивная схема (FlCyclNoGorner и FlNoCyclNoGorner)

Берется формула из справочника и программируется без всяких оптимизационных «премудростей».

2.2. Схема Горнера (FlCyclGorner и FlNoCyclGorner, FixCyclGorner и FixNoCyclGorner)

$$a[0] + a[1]*x + a[2]*x^2 + a[3]*x^3 + \dots a[n]*x^n = (((... (a[n]*x + a[n-1])*x + a[n-2])*x + \dots + a[1])*x + a[0])$$

Бесцикловое вычисление предполагает непосредственную запись формулы из правой части в виде арифметического выражения. Здесь возможны два варианта: обращение к элементам массива коэффициентов и явное вписывание констант в выражение.

Цикловое вычисление схемы Горнера строится на основе тела цикла: $s = s*x + a[i]$;

Приложение 3. Вычисления с фиксированной запятой

В языке Си, как и в почти всех других языках высокого уровня нет вещественных чисел с фиксированной запятой. Поэтому приходится реализовывать обработку чисел с фиксированной запятой через обработку целочисленных данных.

При сложении или вычитании целочисленных данных, у которых положение запятой совпадает, целочисленный сумматор-вычитатель все делает правильно. Например (для простоты берем байты):

00010001	00.010001
+ 11110001	+ 11.110001
=====	=====
100000010	100.000010

При умножении ситуация меняется. Дело в том, что полное произведение целочисленных операндов имеет длину, равную сумме разрядностей этих операндов. Например, если мы умножаем число из диапазона 0..99 на число из диапазона 0..9999, то результат будет шестиразрядным. При сложении двух целых беззнаковых двоичных восьмиразрядных чисел мы получаем 16-разрядное двоичное. Если умножаются N-разрядные беззнаковые вещественные числа с фиксированной запятой, которые всегда меньше 1, то старшие N разрядов как раз задают произведение с той точностью, которая имеет место для исходных операндов. Например, если мы имеем байты, запятая для которых фиксирована перед старшим разрядом (это как раз числа, меньшие 1), то вес младшего разряда равен 2^{-8} , т.е. $1/256$. Если мы умножим исходные операнды как целые беззнаковые числа, то запятая должна фиксироваться перед старшим байтом двухбайтового произведения и взятие этого старшего байта в качестве произведения означает получение произведения с такой же точностью, какую имеют исходные сомножители.

Если у двух беззнаковых сомножителей M старших разрядов задают целую часть (т.е. запятая фиксируется после M старших разрядов), то в произведении будем иметь $2 \cdot M$ старших разрядов, задающих целую часть произведения (дома проверить на умножении $00.010001 * 11.110001$, т.е. $17 * 241$). Это означает, что при приведении произведения к формату M.N (M целых и N дробных битов) мы должны взять в качестве целой части результата младшую половину $2 \cdot M$ старших разрядов и N следующих разрядов произведения в качестве дробной части. Иначе говоря, $2 \cdot (M+N)$ -разрядное произведение мы должны сдвинуть вправо на $(M+N-M/2)$ разрядов (в системе команд x86 есть команда SHRD, которая сдвигает 64-разрядный операнд).

Если имеется знаковый разряд, то он приводит к увеличению на один разряд части результата, располагаемой левее воображаемой фиксированной точки (дома умножить $00.010001 * 11.110001$, считая, что старший разряд является знаковым при использовании дополнительного кода, т.е. $17 * (-15)$).

Приложение 4. Таблично-алгоритмическая реализация

Используется разложение аргумента функции на два слагаемых: $x = x_{ст} + x_{мл}$, где первое слагаемое формируется на основе старших разрядов аргумента x.

Например, 24-разрядное число $.101010101010101010101010$ при разрядности старшей части, равной 12, можно разложить как

	.101010101010	000000000000
+	000000000000	101010101010

При таком разложении аргументов формируется таблица коэффициентов для 4096 разложений функций в степенные ряды. Каждое разложение действует для своего значения $x_{ст}$. По сути дела мы имеем 4096 функций: $F_{0000000000}(x_{мл})$, $F_{0000000001}(x_{мл})$, $F_{0000000010}(x_{мл})$, ..., $F_{1111111111}(x_{мл})$.

Такое разложение позволяет уменьшить длину ряда. Пусть, например, допустимая погрешность вычисления функции равна 2^{-23} . Тогда в степенном ряду величина $a[2] * x_{мл}^2$ при $a[2]$ не больше единицы окажется меньше 2^{-24} . Это связано с тем, что максимальное значение $x_{мл}$ чуть меньше 2^{-12} (когда все разряды $x_{мл}$ равны 1). Возведение в куб даст число, меньшее 2^{-36} и т.п. Это означает, что любая функция из 4096-ти представляется рядом $a[0] + a[1] * x$. Ясно, что при разрядности старшей части от 8 до 11 нам придется использовать ряд со степенью 2, а при разрядности 6 или 7 – со степенью 3. Увеличение разрядности старшей части укорачивает ряд, но увеличивает таблицу и

вероятность кэш-промаха. Значит, возникает задача рационального выбора, для решения которой в лабораторной работе предлагается поставить несколько экспериментов.

Для получения 2^m групп коэффициентов, где m – разрядность старшей части, можно использовать формулу разложения в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + (x-a) * f'(a) / 1! + (x-a)^2 * f''(a) / 2! + \dots + (x-a)^n * f^{(n)}(a) / n! + \dots$$

$$f(a+h) = f(a) + h * f'(a) / 1! + h^2 * f''(a) / 2! + \dots + h^n * f^{(n)}(a) / n! + \dots$$

Выражение остаточного члена:

$$R_n = (h^{n+1} / (n+1)!) * f^{(n+1)}(a) * (1 + \theta * h), \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Формулы для некоторых производных:

$$(x^n)' = n * x^{n-1}$$

$$f'(a[0] + a[1]*x + a[2]*x^2 + \dots + a[n]*x^n) = a[1] + 2*a[2]*x + 3*a[3]*x^2 + 4*a[4]*x^3 + \dots + n*a[n]*x^{n-1}$$

$$f''(a[0] + a[1]*x + a[2]*x^2 + \dots + a[n]*x^n) = 2*a[2] + 2*3*a[3]*x + 3*4*a[4]*x^2 + 4*5*a[5]*x^3 + \dots + n*(n-1)*a[n]*x^{n-2}$$

$$f'''(a[0] + a[1]*x + a[2]*x^2 + \dots + a[n]*x^n) = 2*3*a[3] + 2*3*4*a[4]*x + 4*5*a[5]*x^2 + \dots + n*(n-1)*(n-2)*a[n]*x^{n-3}$$

Впрочем, производная берется в точке (например, $a = .101010101010$ для приведенного выше примера), поэтому можно вычислить ее численным методом через $\Delta y / \Delta x$, выбирая Δx достаточно малым, чтобы не нарушить ограничения точности вычислений.