Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

«Линейное пространство и СЛАУ»

Описание работы

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

1) поставлены требуемые задачи;
2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
3) указаны используемые теоретические положения и методы;
4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ –> Полезные ссылки –> Корпоративная стилистика –> Презентации (в самом низу)). Отчёт должен содержать:

1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/, Geogebra: https://www.geogebra.org/ или других);
5) выводы;
6) оценочный лист
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, f(x)=3*x^2), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
    а) в MS Office есть встроенный редактор формул;
    б) в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
    в) Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
    г) в LaTeX встроен набор формул;
    д) можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул https://editor.codecogs.com/ и скачать формулу в виде изображения;
    е) или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

Задание 1. СЛАУ и определители

Даны две системы линейных алгебраических уравнений:

№ команды	СЛАУ	
1.	a) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$
2.	a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = -1 \\ 3x + y - z = 3 \end{cases}$
3.	a) $\begin{cases} 2x + y - 5z = -1 \\ x + 2y - 4z = 4 \\ x - y - z = -5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$
4.	a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$
5.	a) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 3x + 5y - 11z = 3 \\ 3x + 4y - 10z = 3 \end{cases}$
6.	a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = 3 \\ -x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$
7.	a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$
8.	a) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 4x - y - z = 8 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

План:

1) Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него (о количестве решений).
2) Для совместной определенной системы (если она есть):
    а) Найдите определитель основной матрицы методом разложения по 3-й строке и затем по 2-му столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями).
    б) Решите её, проверьте решение подстановкой.
3) Для неопределенной или несовместной системы (если она есть):

а) Запишите её как однородную. Найдите базис подпространства, которое задаётся этой системой. Изобразите подпространство решений на графике.
Как изобразить на графике?

- открыть Геогебру 3D: https://www.geogebra.org/3d
- задать базисные векторы подпространства
  например, если ранг базиса равен 1:
  $a = (1,1,1)$
- задать линейную оболочку, натянутую на этот базис
  например, если ранг базиса равен 1:
  $t \cdot a$

б) Найдите множество всех решений неопределённой системы, изобразите его на том же графике.
Как изобразить на графике?

  - задать вектор частного решения неоднородной СЛАУ
    например:
    $x0 = (1,2,3)$
  - добавить к нему линейную оболочку из п. а)
    например, если ранг базиса линейной оболочки равен 1:
    $x0 + t \cdot a$

Задание 2. Координаты вектора в базисе

Докажите, что система $\mathcal{A}$ является базисом в соответствующем линейном пространстве L. Найдите в этом базисе координаты элемента x.

а) L – пространство матриц второго порядка:

№ ком.	$\mathcal{A} = \{A_1, A_2. A_3, A_4\}$ и x
1.	$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2.	$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3.	$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$
4.	$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
6.	$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$
8.	$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

б) L – пространство многочленов степени не больше четырёх, $x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$:

№ ком.	$\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
1.	$e_1 = 1,\quad e_2 = 1 + t,\quad e_3 = 1 + t + t^2,\quad e_4 = 1 + t + t^2 + t^3,$ $e_5 = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4$
2.	$e_1 = 1 + t,\quad e_2 = t + t^2,\quad e_3 = t^2 + t^3,\quad e_4 = t + t^3,\quad e_5 = t^2 + t^4$
3.	$e_1 = 1 + t^2,\quad e_2 = t + t^3,\quad e_3 = t^2 + t^4,\quad e_4 = 1 + t^3,\quad e_5 = t + t^4$

4.	$e_1 = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4, \quad e_2 = t + t^2 + t^3 + t^4, \quad e_3 = t^2 + t^3 + t^4,$ $e_4 = t^3 + t^4, \quad e_5 = t^4$
5.	$e_1 = 1, \quad e_2 = 1 + t, \quad e_3 = t + t^2, \quad e_4 = t^2 + t^3, \quad e_5 = t^3 + t^4$
6.	$e_1 = 1 + t + t^2, \quad e_2 = t + t^2 + t^3, \quad e_3 = t^2 + t^3 + t^4,$ $e_4 = 1 + t^3 + t^4, \quad e_5 = 1 + t + t^4$
7.	$e_1 = 1 + t + t^2 + t^3, \quad e_2 = 1 + t^2 + t^3 + t^4, \quad e_3 = 1 + t + t^3 + t^4,$ $e_4 = 1 + t + t^2 + t^4, \quad e_5 = 1 + t^2$
8.	$e_1 = 1 + t^4, \quad e_2 = t + t^3, \quad e_3 = 1 + t, \quad e_4 = t + t^2, \quad e_5 = t^2 + t^3$

Задание 3. Линейная оболочка и СЛАУ

Найдите систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A}$.

№ ком.	$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$	№ ком.	$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$
1.	$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	5.	$a_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
2.	$a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$	6.	$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3.	$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$	7.	$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ -21 \\ -9 \end{pmatrix}$
4.	$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$	8.	$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Задание 4. Координаты при смене базиса

В линейном пространстве со стандартным базисом $E=\{e_1,e_2,e_3\}$, где

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

заданы системы векторов $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$.

1) Покажите, что каждая система образует базис.
2) Проверьте каждый из этих базисов на ортогональность и ортонормированность.
3) Найдите матрицу перехода T из базиса $\mathcal{A}$ в базис $\mathcal{B}$.
4) Вектор x в базисе $\mathcal{B}$ имеет координаты $x_{\mathcal{B}}=(x_1',\ x_2',\ x_3')^T$. Найдите его координаты $x_{\mathcal{A}}$ в базисе $\mathcal{A}$.
5) В базисе E изобразите векторы базиса $\mathcal{A}$ и вектор x.
(используйте для этого, например, Геогебру 3D: https://www.geogebra.org/3d)

*Для расчётов рекомендуется использовать онлайн-калькулятор.

№ ком.	$\mathcal{A}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$	$x_{\mathcal{B}}=(x_1',x_2',x_3')^T$
1.	$a_1=\begin{pmatrix}0.3536\\0.9268\\0.1268\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}-0.6124\\0.1268\\0.7803\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}0.7071\\-0.3536\\0.6124\end{pmatrix}$ $b_1=\begin{pmatrix}-0.8712\\-1.0267\\2.0462\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}1.9319\\1.5999\\-1.307\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}-2.3801\\2.1143\\-0.93\end{pmatrix}$	$x_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2.6\\1.7\\1.2\end{pmatrix}$
2.	$a_1=\begin{pmatrix}0.433\\0.808\\0.3995\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0.25\\-0.5335\\0.808\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}0.866\\-0.25\\-0.433\end{pmatrix}$ $b_1=\begin{pmatrix}4.0801\\1.1495\\-1.741\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}0.933\\-0.259\\2.0155\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}2.2811\\3.5245\\-2.0915\end{pmatrix}$	$x_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-0.4231\\0.8077\\1.3462\end{pmatrix}$
3.	$a_1=\begin{pmatrix}0.433\\-0.8995\\0.058\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0.25\\0.058\\-0.9665\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}0.866\\0.433\\0.25\end{pmatrix}$ $b_1=\begin{pmatrix}0.25\\2.2901\\-0.8325\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}2.6651\\2.3146\\-1.241\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}2.1651\\-0.0335\\0.558\end{pmatrix}$	$x_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1.8\\-2.4\\3.2\end{pmatrix}$
4.	$a_1=\begin{pmatrix}-0.5\\0.0795\\0.8624\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0.5\\-0.7866\\0.3624\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}0.7071\\0.6124\\0.3536\end{pmatrix}$ $b_1=\begin{pmatrix}-0.9142\\-4.1326\\3.3295\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}-2.1213\\-3.2513\\1.3888\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}-0.7929\\0.1436\\4.1654\end{pmatrix}$	$x_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1.3448\\-0.4138\\-0.5517\end{pmatrix}$

5.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.3536 \\ -0.8624 \\ 0.3624 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -0.6124 \\ 0.0795 \\ 0.7866 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1.2501 \\ 0.7965 \\ 3.4355 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3.4408 \\ 0.3042 \\ -1.4382 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1.7424 \\ 0.8178 \\ 3.6463 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -8.7143 \\ -5.8571 \\ 5.5714 \end{pmatrix}$$

6.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.6124 \\ -0.7866 \\ 0.0795 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0.3536 \\ 0.3624 \\ 0.8624 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2.3801 \\ -0.5758 \\ 0.0582 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0.8712 \\ -1.7108 \\ 1.5213 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1.8625 \\ -2.8737 \\ -1.5077 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1.0625 \\ 0.75 \\ 0.5625 \end{pmatrix}$$

7.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -0.6124 \\ 0.2803 \\ 0.7392 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -0.3536 \\ 0.7392 \\ -0.5732 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ -0.6124 \\ -0.3536 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3.5101 \\ 0.8426 \\ -2.8229 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1.2247 \\ 2.6514 \\ 0.6855 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1.1554 \\ -4.9474 \\ -0.4337 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1.0526 \\ -1.4211 \\ -0.6316 \end{pmatrix}$$

8.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.6124 \\ -0.2803 \\ -0.7392 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -0.3536 \\ 0.7392 \\ -0.5732 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ 0.6124 \\ 0.3536 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -0.1895 \\ 0.3054 \\ -2.9784 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3.0872 \\ 1.2732 \\ -1.6876 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2.9232 \\ 1.2514 \\ 3.2999 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1.2174 \\ -0.913 \\ 0.3478 \end{pmatrix}$$
