

Módulo 1 - Diapositiva Quiz 1

Polinomios y Productos Notables

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Expresiones Algebraicas y Polinomios
- Operaciones con Polinomios
- Productos Notables

Expresión algebraica

Una expresión algebraica es una expresión que contiene letras, números y operaciones aritméticas.

Ejemplos

$$2x^2 - 4x + 5, \quad xy - x^2 + 1, \quad \frac{z - 4}{z^3 - 4z + 1}$$

Polinomios en \mathbb{R}

Polinomio en la variable x

Es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y cada coeficiente $a_k \in \mathbb{R}$ para $k = 0, 1, \dots, n$.

Cuando $a_n \neq 0$ decimos que el polinomio tiene grado n .

Polinomio

Ejemplos

Polinomio	Tipo	Grado
5	Monomio	0
$\frac{2}{5}x^3$	Monomio	3
$x^4 - \sqrt{2}x$	Binomio	4
$x^2 - 3x + \pi$	Trinomio	2

Observaciones:

- $2x^5 - x^{-3} + 5$ es una expresión algebraica pero no es un polinomio.
- $\frac{x^2 - 2x}{x^3 - x^2}$ y $x^5 - 2\sqrt{x} + 1$ no son polinomios.

Podemos también definir polinomios en varias variables, por ejemplo el polinomio

$$p(x, y) = 2x^3y^2 - 5x^2y + x - 3y + 5$$

es un polinomio en las variables x y y .

Igualdad de polinomios

A cada uno de los monomios de un polinomio lo llamaremos términos del polinomio.

Polinomios iguales

Dos polinomios son iguales, si y solo si, son iguales término a término. Así para que el polinomio

$$p(x) = ax^2 - 3x + b$$

sea igual al polinomio

$$q(x) = cx^3 - 2x^2 - dx + 7$$

es necesario que

$$c = 0, \quad a = -2, \quad d = 3 \quad \text{y} \quad b = 7.$$

Términos semejantes

Dos términos son semejantes si tienen las mismas variables y cada una de las variables tiene el mismo exponente en ambos términos.

Ejercicio

Identifique cuáles de los siguientes término son semejantes:

① $2x^2y^3$

③ $\frac{2}{3}x^2y^3$

⑤ $\sqrt{2}a^2$

② $2x^3y^2$

④ $2a^2$

⑥ $2b^2$

Suma, Resta y Producto de Polinomios

Sean

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{3}{5}x + \sqrt{2}$$

y

$$q(x) = x^4 - 3x^3 + 8x - \pi$$

Determine los polinomios: $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$, $q(x) - p(x)$ y $p(x) \cdot q(x)$.

Es $\frac{p(x)}{q(x)}$ un polinomio?

Suma

Sumando términos semejantes obtenemos el polinomio:

$$p(x) + q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \frac{37}{5}x + (\sqrt{2} - \pi)$$

Resta

Restando términos semejantes obtenemos los polinomios:

$$p(x) - q(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - \frac{43}{5}x + (\sqrt{2} + \pi)$$

y

$$q(x) - p(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + \frac{43}{5}x - (\sqrt{2} + \pi)$$

Producto

Utilizando la ley distributiva y las leyes de los exponentes realizamos el producto:

$$p(x) \cdot q(x) = \left(x^3 + 2x^2 - \frac{3}{5}x + \sqrt{2}\right) (x^4 - 3x^3 + 8x - \pi)$$

y reorganizando términos obtenemos el polinomio:

$$\begin{aligned} x^7 - x^6 - \frac{33}{5}x^5 + \left(\frac{49}{5} + \sqrt{2}\right)x^4 + (16 - 3\sqrt{2} - \pi)x^3 - \\ \left(\frac{24}{5} - 2\pi\right)x^2 + (8\sqrt{2} + \frac{3}{5}\pi)x - \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Suma, Resta y Producto de Polinomios

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad (5 - 3x) + (2x - 8) = -x - 3$$

$$\textcircled{2} \quad 4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 + 2x - 4) = x^2 - 18x + 32$$

$$\textcircled{3} \quad (2x - 5)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 5$$

$$\textcircled{4} \quad (x - 1)(x + 2) - 7(x^3 - 2x) = -7x^3 + x^2 + 15x - 2$$

División de un polinomio por un monomio

Al realizar la división de dos polinomios el resultado no siempre es un polinomio. El siguientes ejemplo muestra la división de un polinomio por un monomio, la cual da como resultado otro polinomio.

Ejemplo

$$\begin{aligned}\frac{4x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 2x}{4x} &= \frac{4x^4}{4x} - \frac{12x^3}{4x} + \frac{8x^2}{4x} + \frac{2x}{4x} \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Note que en la división fueron utilizadas las leyes de los exponentes para simplificar.

Productos Notables

Algunos productos de polinomios en las variables x y y :

Suma por diferencia

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Suma y resta al cuadrado

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Suma y resta al cubo

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Productos Notables

Ejemplos

Utilizando productos notables

$$\textcircled{1} \quad (5a + 2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$$

$$\textcircled{2} \quad (2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$\textcircled{3} \quad (x - 2y)^2(x + 2y)^2 = x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$$

$$\textcircled{4} \quad (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7ª Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13ª Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3ª Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.