

# Módulo 1 - Diapositiva 8

## Desigualdades y Valor Absoluto

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

# Temas

- Desigualdades
- Intervalos
- Valor absoluto
- Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

# Desigualdades

## Desigualdades o inecuaciones

Es un enunciado en el que se comparan dos expresiones mediante la relación mayor o menor que (mayor o igual, menor o igual)

Las siguientes son ejemplos de desigualdades:

$$x < 2, \quad a \leq b + c, \quad 3x^2 - x + 5 > 0$$

# Desigualdades

## Inecuaciones

La inecuación:

$$-1 < x < 3$$

posee infinitas soluciones, pues todos los valores de  $x$  entre  $-1$  y  $3$  verifican la desigualdad, por tanto el conjunto solución de la desigualdad puede verse intuitivamente como el tramo de la recta real entre  $-1$  y  $3$ .

Cómo pueden definirse estos conjuntos que dan solución a estas desigualdades?

# Intervalos

Suponga que  $a, b$  son dos números reales tales que  $a < b$ . En estas condiciones definimos lo siguiente:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

# Intervalos: Representación Geométrica

## Intervalo cerrado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



## Intervalo abierto

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$



## Ejercicio

Mostre la representación geométrica de los intervalos faltantes.

# Desigualdades

## Propiedades de las desigualdades

Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$

- $a^2 \geq 0$
- $a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$
- $a \leq b$  y  $c \leq d$ , entonces  $a + c \leq b + d$ .
- Si  $c > 0$ , entonces:  $a \leq b \Leftrightarrow ca \leq cb$
- Si  $c < 0$ , entonces:  $a \leq b \Leftrightarrow ca \geq cb$
- Si  $a > 0$  y  $b > 0$ , entonces:  $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
- Si  $a > 0$ , entonces  $\frac{1}{a} > 0$  y si  $a < 0$ , entonces  $\frac{1}{a} < 0$

## Ejemplos de desigualdades lineales

- ❶ Para solucionar la desigualdad  $2x - 5 > 3$ , tenemos en cuenta las propiedades de las desigualdades y obtenemos que

$$x > \frac{3 + 5}{2}, \quad \text{es decir} \quad x > 4.$$

Por tanto el conjunto solución es el intervalo  $(4, \infty)$ .

- ❷ Para solucionar la desigualdad  $-6 - x \geq -9$ , tenemos en cuenta las propiedades de las desigualdades y obtenemos que

$$-x \geq -9 + 6, \quad \text{es decir} \quad x \leq 3.$$

Por tanto el conjunto solución es el intervalo  $(-\infty, 3]$ .



## Ejemplo de desigualdad no lineal

Para solucionar la desigualdad

$$16x \leq x^3$$

es necesario factorizar:

$$(4 - x)(4 + x)x \leq 0$$

y analizar cuando el producto de estos tres factores es negativo o cero.

Para esto basta analizar el signo de cada uno de estos tres factores y el conjunto solución será aquel en el cual los tres factores sean negativos o uno solo de los tres sea negativo.

Así el conjunto solución es:

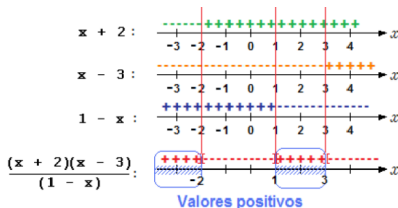
$$[-4, 0] \cup [4, \infty)$$

## Ejemplo:

Para resolver la desigualdad:  $\frac{x^2 - x - 6}{1 - x} \geq 0$

Factorizamos y aplicamos la ley de los signos a:  $\frac{(x + 2)(x - 3)}{(1 - x)} \geq 0$

La imagen muestra como cambian los signos para cada uno de los factores que componen la fracción:

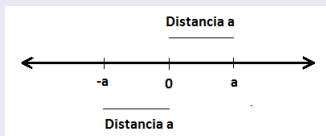


Así, la solución está dada por el conjunto:  $(-\infty, -2] \cup (1, 3]$

# Valor Absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real, puede verse gráficamente como la distancia que hay de la representación de dicho número en la recta real al origen.

## Interpretación geométrica



## Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real  $x$  está dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

# Propiedades del valor absoluto

## Propiedades

Para  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|ab| = |a| |b|$
- $|a|^2 = a^2$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0.$

Suponga que  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c > 0$  :

$$|a| = c \Leftrightarrow a = c \quad \text{ó} \quad a = -c$$

$$|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$$

$$|a| \geq c \Leftrightarrow a \leq -c \quad \text{ó} \quad a \geq c$$

## Ejemplo

Si queremos resolver la siguiente ecuación con valor absoluto:

$$\left| \frac{3x - 1}{4x} \right| = 1$$

necesitamos primero imponer la condición  $x \neq 0$  para que la expresión tenga sentido en los reales. Luego utilizamos la propiedad para igualdades con valor absoluto

$$\frac{3x - 1}{4x} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{3x - 1}{4x} = -1$$

y obtenemos dos soluciones

$$x = -1 \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{7}$$

## Ejemplo

Para resolver la desigualdad:

$$|x - 1| \geq 1$$

utilizamos la propiedad para desigualdades con valor absoluto

$$x - 1 \leq -1 \quad \text{ó} \quad x - 1 \geq 1.$$

Resolvemos ambas desigualdades por separado para luego hacer la unión de los dos conjuntos solución y obtener la solución de la desigualdad, que en este caso es el conjunto

$$(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

## Ejemplo

Si queremos resolver la desigualdad:

$$\left| \frac{x+4}{x-2} \right| \leq 2$$

necesitamos primero imponer la condición  $x \neq 2$  para que la expresión tenga sentido en los reales. Luego utilizamos la propiedad para desigualdades con valor absoluto

$$-2 \leq \frac{x+4}{x-2} \leq 2$$

y resolvemos las siguientes dos desigualdades por separado

$$-2 \leq \frac{x+4}{x-2} \quad \text{y} \quad \frac{x+4}{x-2} \leq 2$$

luego hacemos la intersección de los dos conjuntos solución y esta será la solución de la desigualdad, que en este caso es el conjunto:

$$(-\infty, 0] \cup [8, \infty)$$

## Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7<sup>a</sup> Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13<sup>a</sup> Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3<sup>a</sup> Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.