# 1 Messtechnik

## 1.1 Grundlagen Drehspulmesser

### 1.1.1 Windungen im Wickelraum

$$\boxed{A_W = N \cdot d^2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $A_W$ | Wickelraum | |
| $N$ | Anzahl der Windungen | |
| $d^2$ | Drahtdurchmesser | $\mathrm{m}^2$ |

### 1.1.2 Elektrisches Moment

$$\boxed{M_{el} = A \cdot N \cdot B \cdot I}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Anzahl der Windungen | |
| $I$ | Stromstärke | A |
| $A$ | Fläche | $\mathrm{m}^2$ |
| $B$ | Feldstärke | T |

### 1.1.3 Mechanisches Moment

$$\boxed{M_{mech} = \alpha \cdot D}$$

| | | |
|---|---|---|
| $D$ | Federkonstante | N m/90° |
| $\alpha$ | Ausschlagwinkel | ° |

### 1.1.4 Zeigerausschlag

$$\boxed{\alpha = I \cdot \frac{A \cdot N \cdot B}{D}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | Anzahl der Windungen | |
| $I$ | Stromstärke | A |
| $A$ | Fläche | $\mathrm{m}^2$ |
| $D$ | Federkonstante | N m |

### 1.1.5 Strommessung mit Nebenwiderstand

$$\boxed{(I - I_M)R_N = I_M(R_M + R_V)}$$

$$R_N = \frac{I_M(R_M + R_V)}{I - I_M}$$

| | | |
|---|---|---|
| $I_M$ | Messwerkstrom | A |
| | 1mA oder 100µA | |
| $I$ | Stromstärke | A |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | Ω |
| $R_N$ | | Ω |
| $R_V$ | | Ω |

*Temperaturkoeffizient Kupfer: 4%/10K

### 1.1.6 Güteklasse mit Temperaturkoeffizient

$$\boxed{G = \frac{R_M}{R_M + R_V} \cdot 4\%/10\mathrm{K}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | Güteklasse | |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | Ω |
| $R_N$ | | Ω |
| $R_V$ | | Ω |

### 1.1.7 Rückwirkungsfehler Strommessung

$$\boxed{F_I = \frac{I_M - I_0}{I_0} = -\frac{R_M}{R_0 + R_L + R_M}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $F_I$ | systemischer Fehler | |
| $I_0$ | | A |
| $I_M$ | | A |
| $R_0$ | | $\Omega$ |
| $R_L$ | Lastwiderstand | $\Omega$ |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | $\Omega$ |

### 1.1.8 Spannungsmesser

$$\boxed{R_V = \frac{U}{I_M} - R_M}$$

| | | |
|---|---|---|
| $I_M$ | | A |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | $\Omega$ |
| $R_V$ | Vorwiderstand | $\Omega$ |
| $U$ | Spannung | V |

### 1.1.9 Rückwirkungsfehler Spannungsmessung

$$\boxed{F_U = \frac{U_M - U_0}{U_0} = -\frac{R_0}{R_0 + R_i}}$$

$$U_M = \frac{U_0}{R_0 + R_i} R_i$$

$$R_i = R_M + R_V$$

| | | |
|---|---|---|
| $F_U$ | systemischer Fehler | |
| $U_0$ | | V |
| $U_M$ | | V |
| $R_0$ | | $\Omega$ |
| $R_i$ | | $\Omega$ |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | $\Omega$ |
| $R_V$ | Vorwiderstand | $\Omega$ |

## 1.2 Grundlagen DVN

### 1.2.1 DVN Genauigkeit Bit

$$\boxed{B(n) = \frac{\log(2 \cdot 10^n)}{\log(2)}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | Stellen der Anzeige | $\mathbb{N}$ |

### 1.2.2 DVN Genauigkeit %

$$\boxed{e_r = \frac{1}{2 \cdot 10^n - 1}}$$

$$e_r = \frac{1}{2^{B(n)} - 1}$$

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | Stellen der Anzeige | $\mathbb{N}$ |

### 1.2.3 Anzeigen Auflösung

Bestimmung durch den Kehrwert der Anzeige. Beispiel für $3\frac{1}{2}$

$$\boxed{0.5 \cdot 10^{-3}}$$

### 1.2.4 Spannung pro Digit

$$\boxed{I_{Dig} = I \cdot n}$$

| | |
|---|---|
| $n$ | Kehrwert der Anzeige |
| $Mess_{max}$ | Max Wert Messbereich |

### 1.2.5 Rückwirkungsfehler

Dieser ist größer als bei Analogen Messverfahren denn $R_P \geq R_M$.

$$\boxed{F_I = \frac{I_M - I_0}{I_0} = -\frac{R_P}{R_0 + R_L + R_P}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $F_I$ | systemischer Fehler | |
| $I_0$ | | A |
| $I_M$ | | A |
| $R_0$ | | Ω |
| $R_L$ | Lastwiderstand | Ω |
| $R_P$ | | Ω |

### 1.2.6 Rückwirkungsfehler Spannungsmessung

$$\boxed{F_U = \frac{\frac{R_i R_P}{R_i + R_P} - R_P}{R_P} = -\frac{R_P}{R_i + R_P}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $F_U$ | systemischer Fehler | |
| $U_0$ | | V |
| $U_M$ | | V |
| $R_0$ | | Ω |
| $R_i$ | | Ω |
| $R_M$ | Spulenwiederstand (Kupfer*) | Ω |
| $R_V$ | Vorwiderstand | Ω |

# 2 Regelungstechnik

## 2.1 Stabilität von Regelkreisen

Es gilt:

$$\boxed{F_G = \frac{F_o}{1+F_o}}$$

$$\boxed{F_G = \frac{Z_o}{Z_o+N_o}}$$

$$\boxed{F_o = F_R \cdot F_S}$$

| | |
|---|---|
| $F_G$ | geschlossener Kreis |
| $Z_o$ | Zähler offener Kreis |
| $N_o$ | Nenner offener Kreis |
| $F_o$ | offener Kreis |
| $F_G$ | geschlossener Kreis |

### 2.1.1 Hurwitz-Kriterium

charakteristische Gleichung des geschl. Regelkreises:

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$$

notwendige Bedingung: alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises müssen vorhanden und positives Vorzeichen haben.

hinreichende Bedingung: Alle Hauptabschnitssdeterminanten $D_i$ der Hurwitzdeterminantte H müssen positiven Wert haben.

$$\boxed{D_2 = a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0}$$

| | |
|---|---|
| $D_2$ | Determinante rel. für System 3.Ord. |

### 2.1.2 Allgemeine Lösung Hurwitz-Kriterium für Systeme 3. Ortnung

$$F_S(p) = \frac{V_S}{(T_1 p + 1) T_0 p} \tag{1}$$

$$F_R(p) = \frac{V_R}{T_R p + 1} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
F_0(p) &= F_S(p) \cdot F_R(p) \\
&= \frac{V_S}{(T_1 p + 1) T_0 p} \cdot \frac{V_R}{T_R p + 1} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{((T_1 p + 1) T_0 p) \cdot (T_R p + 1)} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{(T_0 T_1 p^2 + T_0 p) \cdot (T_R p + 1)} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
G_W(p) &= \frac{F_0(p)}{1 + F_0(p)} \\
&= \frac{\dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}}{1 + \dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}} \\
&= \frac{\dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}}{1 + \dfrac{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p + V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{p^3 (T_0 T_1 T_R) + p^2 (T_0 T_R + T_0 T_1) + p(T_0) + V_S V_R}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Eine notwendige Bedingung die erfüllt sein muss lautet: Alle $a_i$ sind vorhanden und $a_i > 0$. Dies ist im gezeigten Beispiel gegeben.

$$
\begin{aligned}
G_W(p) &= \frac{F_0(p)}{1 + F_0(p)} \\
&= \frac{\dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}}{1 + \dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}} \\
&= \frac{\dfrac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}}{1 + \dfrac{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p + V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p}} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{p^3 (T_0 T_1 T_R) + p^2 (T_0 T_R + T_0 T_1) + p(T_0) + V_S V_R}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Bei Systemen 3. Ortnung, welche die notwendigen Bedingungen erfüllen folgt die Berechnungen von $D_2$ nach:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 \\
&= T_0 \cdot T_0(T_1 + T_R) - V_S V_R \cdot T_0 T_1 T_R \\
&= T_0^2(T_1 + T_R) - V_S V_R T_0 T_1 T_R
\end{aligned} \tag{6}
$$

Die Bedingung zur Erfüllung des Hurwitz-Kriteriums lautet $T_0^2(T_1 + T_R) - V_S V_R T_0 T_1 T_R > 0$. Auflösung nach $T_R$:

$$
\begin{aligned}
T_0^2 T_1 + T_0^2 T_R - V_S V_R T_0 T_1 T_R &> 0 \\
T_0^2 T_1 &> V_S V_R T_0 T_1 T_R - T_0^2 T_R \\
T_0^2 T_1 &> T_R(V_S V_R T_0 T_1 - T_0^2) \\
\frac{T_0^2 T_1}{V_S V_R T_0 T_1 - T_0^2} &> T_R \\
\frac{T_0 T_1}{V_S V_R T_1 - T_0} &> T_R
\end{aligned} \tag{7}
$$

### 2.1.3 Niquist-Kriterium

Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der kritische Punkt (-1,0) links der Ortskurve $F_o(j\omega)$ seines offenen Kreises liegt.

$\boxed{F_o(j\omega) = \frac{K}{A(j\omega) + jB(j\omega)}}$

$\omega_k \Rightarrow B(\omega) = 0$

$\frac{K}{A(\omega_k)} > -1$

| | |
|---|---|
| $F_o(j\omega)$ | Übertragungsfkt. offenen Kreis<br>Berechnungen zum Prüfen d. Stabilität |

### 2.1.4 Allgemeines Niquist-Kriterium

Formale Voraussetzung:

- Totzeit $T_z \geq 0$ (Wenn nicht vorhanden ist dieses Kriterium gegeben.)
- $F_0(s)$: Zählergrad $<$ Nennergrad

Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn die Winkeländerung der Ortskurve von -1 aus betrachtet folgender Winkeländerung entspricht:

$$\boxed{W = \pi \left( r_0 + \frac{a_0}{2} \right)}$$

| | |
|---|---|
| $W$ | Winkeländerung |
| $r_0$ | Anzahl reeler Pole mit pos. Realteil |
| $a_0$ | Anzahl Pole auf der j-Achse |

### 2.1.5 Allgemeine Lösung 3. Ortnung

$$F_S(p) = \frac{V_S}{(T_1 p + 1) T_0 p} \tag{8}$$

$$F_R(p) = \frac{V_R}{T_R p + 1} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
F_0(p) &= F_S(p) \cdot F_R(p) \\
&= \frac{V_S}{(T_1 p + 1) T_0 p} \cdot \frac{V_R}{T_R p + 1} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{((T_1 p + 1) T_0 p) \cdot (T_R p + 1)} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{(T_0 T_1 p^2 + T_0 p) \cdot (T_R p + 1)} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{T_0 T_1 T_R p^3 + T_0 T_R p^2 + T_0 T_1 p^2 + T_0 p} \\
&= \frac{V_S \cdot V_R}{p^2 (T_0 T_1 T_R p + T_0 T_R + T_0 T_1 + \frac{T_0}{p})}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
F_0(jw) &= F_S(jw) \cdot F_R(jw) \\
&= \frac{V_S V_R}{j^2 w^2 (T_0 T_1 T_R jw + T_0 T_R + T_0 T_1 + \frac{T_0}{jw})} \\
&= \frac{V_S V_R}{-T_0 T_1 T_R j w^3 - T_0 T_R w^2 - T_0 T_1 w^2 + T_0 jw} \\
&= \frac{V_S V_R}{w^2 (-T_0 T_R - T_0 T_1) + j (T_0 w - T_0 T_1 T_R w^3)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
B(w) = 0 = T_0 w - T_0 T_1 T_R w^3 = w (T_0 - T_0 T_1 T_R w^2) \tag{12}
$$

$$
w_0 = 0 \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= T_0 - T_0 T_1 T_R w^2 \\
T_0 T_1 T_R w^2 &= T_0 \\
w^2 &= \frac{T_0}{T_0 T_1 T_R} = \frac{1}{T_1 T_R} \\
w_{1,2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{T_1 T_R}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Da negative Werte keinen Sinn ergeben, wird $w_2$ ignoriert. Nun wird $w_1 = w_k = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_R}}$ in die folgende Formel eingesetzt:

$$
K = V_R V_S \tag{15}
$$

$$
A(w) = w^2 (-T_0 T_R - T_0 T_1) \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
F_0(jw_k) &= \frac{K}{A(w_k)} = \frac{V_R V_S}{w_k^2(-T_0T_R - T_0T_1)} \\
&= \frac{V_R V_S}{(\frac{1}{\sqrt{T_1T_R}})^2(-T_0T_R - T_0T_1)} \\
&= \frac{V_R V_S}{(\frac{1}{T_1T_R})(-T_0T_R - T_0T_1)} \\
&= \frac{V_R V_S}{\frac{-T_0T_R}{T_1T_R} - \frac{T_0T_1}{T_1T_R}} = \frac{V_R V_S}{-\frac{T_0T_R - T_0T_1}{T_1T_R}} = \frac{V_R V_S}{-\frac{T_R - T_1}{T_1T_R}} = -\frac{V_R V_S T_1 T_R}{T_0T_R + T_0T_1}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Nach dem Nyquist Kriterium muss nun $-\frac{V_R V_S T_1 T_R}{T_0T_R + T_0T_1} > -1$ gelten.

$$
\begin{aligned}
-\frac{V_R V_S T_1 T_R}{T_0T_R + T_0T_1} &> -1 \\
\frac{V_R V_S T_1 T_R}{T_0T_R + T_0T_1} &< 1 \\
V_R V_S T_1 T_R &< T_0T_R + T_0T_1 \\
V_R V_S T_1 T_R - T_0T_R &< T_0T_1 \\
T_R(V_R V_S T_1 - T_0) &< T_0T_1 \\
T_R &< \frac{T_0T_1}{V_R V_S T_1 - T_0}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

## 2.2 Regelgüte

$F_z(p) = \frac{x(p)}{Z(p)} = \frac{-F_s}{1+F_o} = 0$
$F_W(p) = \frac{x(p)}{w(p)} = \frac{F_o}{1+F_o} = 1$

| | |
|---|---|
| $F_z(p)$ | ideales Störverhalten |
| $F_W(p)$ | ideales Führungsverhalten |

### 2.2.1 Bleibende Regelabweichung Führungsverhalten

$\boxed{R_{1W} = \lim\limits_{p\to 0} \frac{1}{1+F_o(p)}}$
$R_{1WP} = \frac{1}{1+V_o}$
$R_{1WI} = 0$

| | |
|---|---|
| $R_{1W}$ | bleibende Regelabweichung Führungsverhalten allgemein |
| $R_{1WP}$ | P-Regelkreis (ohne I-Glied) |
| $R_{1WI}$ | I-Regelkreis |

### 2.2.2 Bleibende Regelabweichung Störverhalten

$$\boxed{R_{1Z} = \lim_{p \to 0} \frac{F_s(p)}{1+F_o(p)}}$$

$$R_{1ZP} = \lim_{p \to 0} \frac{F_s}{1+F_R F_S} = \frac{V_S}{1+V_R V_S} \approx \frac{1}{V_R}$$

$$R_{1ZIS} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{pT_{IS}+V_R} = \frac{1}{V_R}$$

$$\boxed{R_{1ZIR} = \lim_{p \to 0} \frac{pT_{IR} * V_S}{pT_{IR}+V_S} = 0}$$

| | |
|---|---|
| $R_{1Z}$ | bleibende Regelabweichung Störverhalten allgemein |
| $R_{1ZP}$ | P-Regelkreis (ohne I-Glied) für $V_R V_S >> 1$ |
| $R_{1ZIS}$ | I-Regelkreis, Strecke mit I-Glied |
| $R_{1ZIR}$ | I-Regelkreis, Strecke ohne I-Glied |

### 2.2.3 Geschwindigkeitsfehler

Führungsgröße als Rampenfunktion
$w(t) = a \cdot t \Rightarrow w(p) = \frac{a}{p^2}$

$$\boxed{R_2 = \lim_{p \to 0} p \cdot w(p) \frac{1}{1+F_o(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p} \cdot \frac{1}{1+F_o(p)}}$$

$$R_{2P} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p} \cdot \frac{1}{1+V_o} = \infty$$

$$R_{2I} = \frac{aT_o}{V_o}$$

| | |
|---|---|
| $R_2$ | Geschwindigkeitsfehler allgemein |
| $R_{2P}$ | P-Regelkreis (ohne I-Glied) |
| $R_{2I}$ | I-Regelkreis |