1 Задание 6

1.1 Задача 1

$$\mathbb{E}(X) = (\frac{5}{6})^3(-100) + 3\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2 \cdot 100 + 3(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6} \cdot (200) + +(\frac{1}{6})^3 300$$

Первое это не выпало нужное число, второе это выпало только один раз нужное число, второе это выпало два раза нужное число, и третье выпало три раза нужное чиисло. Перемножать вероятности можем, т.к. то что выпало на каждом отдельном кубике это независимое событие.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \frac{-1700}{6^3} = -7\frac{47}{54}$.

1.2 Задача 2

Пусть в лотерее участвовало всего n человек, тогда
$M = 0.4 \cdot 100 \cdot n$ – максимальный выигрыш. Пусть y человек выиграло в лотерею 5 тысяч или больше. $T = 5000 \cdot y$ – количество денег, которые выиграли эти люди.
Но по условия задачи T не превышает M, запишем это.
$T = 5000 \cdot y \leq M = 0.4 \cdot 100 \cdot n$, учитывая, что $p = \frac{y}{n}$ – вероятность выиграть 5 тысяч или больше.

Получим, что $\frac{y}{n} = p \leq \frac{0.4*100}{5000} = 0.008 \leq 10^{-3}$

Доказано

1.3 Задача 3

Будем смотреть на слово длины 20, у которого будет выделенное вхождение подслова ab. Это подслово мы можем расположить на 19 местах в нашем слове. После этого мы можем дописать 18 букв с разных сторон. Т.е. получим всего: $19 \cdot 2^{18}$ вариантов.
Теперь поделим на количество всех слов длины 20 (2^{20}), и получим
$\mathbb{E}(X) = \frac{19 \cdot 2^{18}}{2^{20}} = 19/4 = 4.75$.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = 4.75$

1.4 Задача 4

Всего у нас $n!$ перестановок, тогда вероятность каждой отдельной перестановки $\mathbb{P} = \frac{1}{n!}$. Рассмотрим некоторую перестановку и перестановку обратную ей, найдем количество инверсий в этих двух перестановках. Будем рассматривать все пары $1 \le i < j \le n$, всего их будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Эти пары будут образовывать инверсию либо в перестановке, либо в перевернутой ей.
(Если j стоит раньше i в обычной перестановке, то j будет стоять после i и уже не будет давать инверсию в обратной перестановке. Аналогично, если j стоит раньше i в обратной перестановке.) Всего же таких пар из обычной и перевернутой перестановки будет: $\frac{n!}{2}$. Получаем: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \frac{n(n-1)}{4}$

1.5 Задача 5

Введём индикатор события $\mathbb{1}_i$ $x_i = i$, он будет принимать значение 1, если входящая перестановка будет удовлетворять условию, в остальных случаях 0. Тогда вероятность такого события будет $p_k = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.
Таким образом, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_i$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Ответ: $\mathbb{E}(X) = 1$

1.6 Задача 6

Предположим, что это не так и $\mathbb{P}[X \ge 6] \ge \frac{1}{10}$.
Тогда, $\mathbb{E}[2^X] = 5 \ge \frac{1}{10} \cdot 2^6 + Y = 6.4 + Y$, но Y неотрицательная, т.к. отрицательных вероятностей у нас нет, а 2^X – положительная функция.
Следовательно наше предположение неверное и $\mathbb{P}[X \ge 6] < \frac{1}{10}$.

Доказано

1.7 Задача 7

Пусть у нас будет такой алгоритм «выбирания» независимого множества. Мы берем верешну и включаем её в множество, а все остальные можем включить тогда, когда их включение приводит к тому, что множество остаётся

независимым, то есть эта включимая вершина будет не соединена ни с одной вершиной, которая уже есть в этом множестве.
Пусть $X = X_1 + ... + X_n$, где X_i - это либо включена или не включена i-ая вершина в независимое множество.
Рассмотрим i-вершину, у которой есть k ребёр, у которых будут номера $i_1, ..., i_k$. Очевидно, что если она будет стоять на первом месте, то она точно войдёт, вероятность этого будет $\frac{1}{k+1}$.
Т.е. нужно найти $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_k \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{deg(k)+1}$
Теперь вспоним о неравенстве для средних, т.е.

$$\frac{\frac{1}{(deg(k_1)+1)} + ... + \frac{1}{(deg(k_n)+1)}}{n} \geq \frac{n}{(deg(k_1)+1) + ... + (deg(k_n)+1)}$$

Получаем, что

$$\mathbb{E}(X) \geq \frac{\frac{1}{(deg(k_1)+1)} + ... + \frac{1}{(deg(k_n)+1)}}{n} \geq \frac{n}{(deg(k_1)+1) + ... + (deg(k_n)+1)} \geq \frac{n}{n+nd/2}$$

$$\mathbb{E}(X) \geq \frac{n}{n+nd/2} = \frac{2n}{d+2} \geq \frac{n}{2d}$$

Вот мы и получили, что у нас есть независимое множество размера $\frac{n}{2d}$.
Доказано