1 Задание 4

1.1 Задача 1

Считаем, количество нулей и единиц в массиве, это можно сделать за $O(n)$ операций. Потом первые k элементов заполняю нулями в массиве, следующие $n-k$ элементов единицами.

1.2 Задача 2

Упорядочим отрезки, пусть $n+1$ отрезок содержится в n. Тогда нужны интервалы $[l_{\frac{2n}{3}}; l_{\frac{2n}{3}+1})$ и $(r_{\frac{2n}{3}}; r_{\frac{2n}{3}+1}]$. Для этого найдём $\frac{2n}{3}$ и $\frac{2n}{3}+1$ порядковые статистики левых граний и $\frac{2n}{3}$ и $\frac{2n}{3}+1$ порядковые статистики правых границ, они находятся за $O(n)$. Получаем, что алгоритм работате за $O(n)$.

1.3 Задача 3

Пусть T(n) – время работы алгоритма, тогда:

$$T(n) \leq T\left(\frac{5n}{7}\right) + T\left(\frac{n}{7}\right) + cn$$

Где $T\left(\frac{n}{7}\right)$ – время нахождение медианы медиан, $T\left(\frac{5n}{7}\right)$ – максимальное время работы поиска k порядковой статистики в одной из двух частей массива (элементов больших медианного элемента и меньших). $\frac{5n}{7}$ – количество элементов меньших, медианного элемента не меньше, чем $\frac{n}{2} \cdot \frac{4}{7}$, больших столько же $\frac{2n}{7}$. Получаем, что количество элементов меньших, чем медианный элемент не меньше, чем $\frac{2n}{7}$, и не больше, чем $\frac{5n}{7}$. Аналогично получаем для элементов больших медиаянного значения. Т.к. есть $c \cdot n$, то нижняя оценка, очевидно, это линия. Теперь докажем оценку сверху, пусть есть такое $d : T(n) < d \cdot n$, т.е. $T(n) = O(n)$. База будет выполняться , т.к. при малых k, $T(k) = \Theta(1)$, т.е. можем выбрать достаточное большое d.

$$d \cdot \frac{5n}{7} + d \cdot \frac{n}{7} + c \cdot n \leq d \cdot n$$

Получаем:

$$7 \cdot c \leq d$$

Возьмёмум $d = 8 \cdot c$ и это будет верно. Получаем, что $T(n) = \Theta(n)$.

<u>Ответ:</u> $T(n) = \Theta(n)$

1.4 Задача 4

Будем рассматривать две точки, очевидно, что расстояние от любой точки, лежащей на отрезке, который соединяет эти две точки, будет постоянным и минимальным. Значит, нужно найти медиану данного массива, т.е. за $O(n)$.

Корректность: Рассмотрим такую функцию $Sum(s) = |x_1 - s| + ... + |x_{2n+1} - s|$. Существует минимум, т.к. Sum(s) всегда будет неотрицательной. Т.к. количество модулей нечётно, то при любом s наклон прямой не равен нулю, получается, что минимумом может быть только конечное количество точек. Методом пристального взгляда заметим, что медиана данного массива – это экстремум функции. Т.к. до неё коэффициент наклона прямой был всегда отрицательным, а после неё всегда положительный.

Ответ: $\Theta(n)$

1.5 Задача 5

Перепишем это уравнение:

$$M \cdot y - a \cdot x = b$$

Как можем заметить это диофантовое уравнение, которое можно решить с помощью алгоритма Евклида, который работате за $O(n^3)$.

Ответ: Алгоритм Евклида для $M \cdot y - a \cdot x = b$ – $\Theta(n^3)$.

1.6 Задача 6