1 Задание 6

1.1 Задача 1

$\mathbb{E}(X) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot (-100) + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot (100) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot (200) +$
$+ \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 300$

Первое это не выпало нужное число, второе это выпало только один раз нужное число, второе это выпало два раза нужное число, и третье выпало три раза нужное чиисло. Перемножать вероятности можем, т.к. то что выпало на каждом отдельном кубике это независимое событие.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \frac{-1700}{6^3} = -7\frac{47}{54}$.

1.2 Задача 2

Пусть в лотерее участвовало всего n человек, тогда
$M = 0.4 \cdot 100 \cdot n$ – максимальный выигрыш. Пусть y человек выиграло в лотерею 5 тысяч или больше. $T = 5000 \cdot y$ – количество денег, которые выиграли эти люди.
Но по условия задачи T не превышает M, запишем это.
$T = 5000 \cdot y \leq M = 0.4 \cdot 100 \cdot n$, учитывая, что $p = \frac{y}{n}$ – вероятность выиграть 5 тысяч или больше.

Получим, что $\frac{y}{n} = p \leq \frac{0.4 * 100}{5000} = 0.008 \leq 10^{-3}$

Доказано

1.3 Задача 3

Будем смотреть на слово длины 20, у которого будет выделенное вхождение подслова ab. Это подслово мы можем расположить на 19 местах в нашем слове. После этого мы можем дописать 18 букв с разных сторон. Т.е. получим всего: $19 \cdot 2^{18}$ вариантов.
Теперь поделим на количество всех слов длины 20 (2^{20}), и получим
$\mathbb{E}(X) = \frac{19 \cdot 2^{18}}{2^{20}} = 19/4 = 4.75$.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = 4.75$

1.4 Задача 4

Всего у нас $n!$ перестановок, тогда вероятность каждой отдельной перестановки $\mathbb{P} = \frac{1}{n!}$. Рассмотрим некоторую перестановку и перестановку обратную ей, найдем количество инверсий в этих двух перестановках. Будем рассматривать все пары $1 \le i < j \le n$, всего их будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Эти пары будут образовывать инверсию либо в перестановке, либо в перевернутой ей.
(Если j стоит раньше i в обычной перестановке, то j будет стоять после i и уже не будет давать инверсию в обратной перестановке. Аналогично, если j стоит раньше i в обратной перестановке.) Всего же таких пар из обычной и перевернутой перестановки будет: $\frac{n!}{2}$. Получаем: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \frac{n(n-1)}{4}$

1.5 Задача 5

Пусть у нас k элементов стоятт на своих местах не переставленные, тогда вероятность того, что k элементов не переставят будет равна: $\mathbb{E}(p_k) = \frac{C_n^k \cdot (n-k)!}{n!}$, теперь найдем мат. ожидание.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{C_n^k \cdot (n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n! \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}$$

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}$

1.6 Задача 6

Предположим, что это не так и $\mathbb{P}[X \ge 6] \ge \frac{1}{10}$.
Тогда, $\mathbb{E}[2^X] = 5 \ge \frac{1}{10} \cdot 2^6 + Y = 6.4 + Y$, но Y неотрицательная, т.к. отрицательных вероятностей у нас нет, а 2^X – положительная функция.
Следовательно наше предположение неверное и $\mathbb{P}[X \ge 6] < \frac{1}{10}$.

Доказано