1 Задание 4

1.1 Задача 1

Доказательство: будем доказывать по индукции:

1. база $m = 1$ очевидна из условия, т.к. $ab \in N$
2. предположим, что верно для $m = n \in \mathbb{N}$, т.е $a^n b^b \in N$
3. тогда шагом индукции будет доказательство принадлежности к N элемента $a^{n+1}b^{n+1}$. Используем лемму: два элемента группы g_1 и g_2 принадлежат одному классу смежности по подгруппе H тогда и только тогда, когда $g_1^{-1}g_2 \in H$. Сама подгруппа также является классом смежности, тогда элементы $a^n b^n$ и $a^{n+1}b^{n+1}$ принадлежат одному и тому же классу смежности, т.е. N, т.к. $a^n b^n \in N$, если $(a^n b^n)^{-1}a^{n+1}b^{n+1} \in N$. Совершим преобразования: $(a^n b^n)^{-1}a^{n+1}b^{n+1} = b^{-n}a^{-n}a^{n+1}b^{n+1} = b^{-n}abb^n$ Т.к. N – нормальная подгруппа, то для $b^{-n} \in G$ выполняется $b^{-n}N = Nb^{-n}$, тогда для $ab \in N \exists h \in N : b^{-n}ab = hb^{-n}$. Воспользуемся данным равенством и подставим его в ранее полученное выражение: $b^{-n}abb^n = hb^{-n}b^n = h \in N$. Следовательно из критерия получаем, что $a^{n+1}b^{n+1} \in N$, т.е. утверждение доказано.

Из определения нормальной группы следует, т.к. $a \in G, ab \in N \to a^{-1}aba = ba \in N$, тогда в точности аналогично пункту доказывается, что $\forall m \in \mathbb{N} \to b^m a^m \in N$

Теперь заметим, тчо из определения подгруппы $a^0b^0 = b^0a^0 = e \in N$. Что касается целых отрицательных степеней, всё довольно очевидно, по определению подгруппы, если элемент лежит в ней, то и обратный элемент лежит. Тогда остается воспользоваться тем, что $\forall m \in \mathbb{N}(a^m b^m)^{-1} = b^{-m}a^{-m} \in N$ и $\forall m \in \mathbb{N}(b^m a^m)^{-1} = a^{-m}b^{-m} \in N$. Таким образом, мы доказывали, что $\forall m \in \mathbb{Z} \to a^m b^m, b^m a^m \in N$

1.2 Задача 2

Рассмотрим симметрическую группу S_3, перестановок из 3-х элементов. В качестве примера группы, которая не будет являться нормальной будет $F = \{e,\ (1\ 2)\ \}$, очевидно, что $H < S_3$. Докажем, что не является нормальной: $\exists x = (1\ 3) \in S_3$. Тогда $xF = \{\ (1\ 3),\ (1\ 3)(1\ 2)\ \}$, $Fx = \{(1\ 3),\ (1\ 2)(1\ 3)\ \}$, учитывая, что $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3) \neq (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$, т.е. $xF \neq Fx$. Т.е. такая группа подходит.

Покажем, используя данный пример, что множество левых смежных классов с операцией, как у факторгруппы не образует группу. Рассмотрим левые смеэные классы (2 3) F и (1 3 2)F, тогда получим, что (2 3)$F = \{$(2 3), (1 3 2) $\}$, (1 3 2)$F = \{$(1 3 2), (2 3)$\}$, т.е (2 3)F =(1 3 2)F. Рассмотрим операцию, определенную на множестве левых смежных классов: (2 3)$F*$ (2 3)$F = F$, при этом в силу равенства (2 3)H =(1 3 2)H можно записать то же произведение классов, как (1 3 2)$F*$(2 3)F =(1 3 2)(2 3)F =(1 3)F= $\{$ (1 3), (1 2 3)$\} \neq F$, получаем, что определить групповую операцию на множестве левых смежных классов по подгруппе F не получится, и группой данное множество с такой операций не будет являться.

1.3 Задача 3

В силу операции сложения, определенной на рассматриваемой группе, получим, что $\mathbb{Z}^3$ – абелева. Тогда её подгруппа $F = \{$(x, y, z) $\mid x + y + z = 0\}$ – нормальная. Отсюда по определению следует, что определена факторгруппа $\mathbb{Z}^3/H$. Докажем, тчо $\mathbb{Z}^3/H = \{M_k | \forall (x, y, z) \in M_k \to x + y + z = k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Сначала будем доказывать, что любые элементы, обладающие одним и тем же свойством, т.е. элементы $M_k = \{(x, y, z) | x + y + z = k\}$ лежат в одном классе смежности, воспользуемся леммой 2, т.е. $\forall g_1, g_2 \in M_k \to (-g_1) + g_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, остается заметить, что сумма компонент полученного вектора есть 0, сл-но, $(-g_1) + g_2 \in H$, по критерию элементы будут лежать в одном классе.

Теперь докажем, что если элементы лежат в разных множествах, то они лежат в разных классах, пользоваться будем той же леммой 2, т.е. будем рассматривать M_k и M_n, где $n \neq k$, тогда возьмём произвольные элементы из M_k и M_n, соотвественно, $g_k, g_n \to (-g_k) + g_n = (x_n - x_k, y_n - y_k, z_n - z_k)$, сумма компонент этого вектора: $n - k \neq 0$, полуачем, что $(-g_k) + g_n \notin H$, по критерию элементы лежат в разных классах смежности. Предположим, что существует такой класс смежности, который не будет описан с помощью M_k, тогда существует вектор, лежащий в этом классе, сумма которого некоторое целое число – p. Значит, этот вектор лежит в M_p, но классы смежности не пересекаются, пришли к противоречию. Таким образом, мы доказали, что разбиение на классы смежности верное, а значит и описание факторгруппы верно.

1.4 Задача 5

В качестве искомого гомоморфизма подойдёт $\varphi : \langle \mathbb{Q}, + \rangle \to \langle \mathbb{Q}[0,1], \circ \rangle$, где $Q[0,1) = \{q | q \in \mathbb{Q}\ 0 \leq q \leq 1\}$, а операция описывается следующим образом: $\forall A, b, \in\ \mathbb{Q}[0,1)\ \to\ a \circ b = \{a + b\}$, т.е. это дробная часть от суммы двух чисел. Довольно очевидно, что $\langle \mathbb{Q}[0,1), \circ \rangle$ – группа, ассоциативность следует из описания операции, нейтральный элемент это нуль, а для любого элемента $a \in \mathbb{Q}[0,1)\ \exists \{1 - a\}$ (дробная часть взята, чтобы учесть случай $a = 0$). Осталось лишь описать само отображение:
$\varphi : \forall x \in \mathbb{Q} \to \varphi(x) = \{x\}, obviously \{x\} \in \mathbb{Q}[0,1)$

Будем доказывать, что это отображение суть гомоморфизм: $\varphi(a + b) = \{a + b\} = \{[a] + \{a\} + [b] + \{b\}\} = \{[a] + [b] + [\{a\} + \{b\}] + \{\{a\}\{b\}\}\} = \{\{a\} + \{b\}\} = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, следовательно, по определению это гомоморфизм, причем в силу такого отображения, очевидно, что образ элемента есть нуль тогда и только тогда, когда элемент принадлжеит множеству целых чисел, т.е. $\ker \varphi = \mathbb{Z}$. Показали, что приведенный пример корректен.

Докажем, что $\langle \mathbb{Q}, + \rangle / \ker \varphi$ бексконечна, но каждый её элемент будет иметь конечный порядок. Используем теорему о гомморфизме, т.к. φ гомоморфизм, сл-но, $\langle \mathbb{Q}, + \rangle / \ker \varphi \cong \varphi(\langle \mathbb{Q}, + \rangle) = \langle \mathbb{Q}[0,1), \circ \rangle$, отсюда следует, что $\langle \mathbb{Q}, + \rangle / \ker \varphi$ бексконечна, т.к. бесконечна группа $\langle \mathbb{Q}[0,1), \circ \rangle$, т.к. иначе бы не было биекции, т.е. изоморфизма. Аналогичными рассуждениями можно провести по поводя порядка элементов, т.е. пойдем от противного. Предположим, что порядок какого-то элемента из $a \in \langle \mathbb{Q}, + \rangle / \ker \varphi$ бесконечен, тогда в силу свойства изоморфизма биективности, а также, что $\varphi(a^k) = (\varphi(a))^k$, где k произвольное натуральное число, получим, что существует элемент в $\langle \mathbb{Q}[0,1), \circ \rangle$, который имеет бесконечный порядок, но любой элемент оттуда имеет конечный порядок, т.к. любая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ на $[0,1)$ имеет конечный знаменатель, тогдас сложив с помощью операции $\circ$ рассматриваемую дроб n раз, мы получим, нуль, т.е. порядок любой дроби из данной группы не превосходит знаменатель. Отсюда получим противоречие, т.к. все элементы имеют конечный порядок.