1 Задание №6

1.1 Задача №1

Приведем пример кольца, не являющегося циклической группой по сложению:

Рассмотрим кольцо рациональных чисел с операциями сложения и умножения. В первую очередь обратим внимание, что это кольцо, так как множество замкнуто относительно операций, также оно является коммутативной группой относительно сложения с нейтральным элементом 0 (обратным для любого элемнта x является $-1 \cdot x$). Умножение ассоциативно, и в силу свойств операций выполняется дистрибутивность.

Предположим, что в кольце существует элемент a такой, что $\forall b \in \langle \mathbb{Q},\ +,\ \cdot \rangle\ \exists\, k \in \mathbb{Z}:\ \ b = ka$, то есть кольцо является циклической группой по сложению, тогда заметим, что элемент $\frac{1}{5}a \in \langle \mathbb{Q},\ +,\ \cdot \rangle$, но не существует $k \in \mathbb{Z}:\ \ ka = \frac{1}{5}a$. Противоречие, значит пример корректен.

1.2 Задача №2

Докажем, что в коммутативном кольце сумма нильпотентных элементов — тоже нильпотентный элемент. А также приведем пример некоммутативного кольца, где это не выполняется.

Элемент кольца a называется нильпотентным, если существует $n > 0$ такое, что $a^n = 0$. Рассмотрим два нильпотентных элемента $a\ \ b$ кольца M с операциями $\langle +,\ \cdot\ \rangle$. По определению $\exists\ n,\ m > 0:\ \ a^n = 0,\ b^m = 0$. Если же рассмотреть сумму данных элементов в степени mn и разложить ее в бином Ньютона (это справедливо, так как кольцо по условию коммутативное):

$$(a+b)^{mn} = \sum_{k=1}^{mn} C_{mn}^{k} a^{mn-k} b^k$$

Видим, что слагаемые при $k \geq m$ равны 0, так как $b^k = 0$. В случае же $k < m$ (будем считать, что $m, n > 1$, иначе тривиальный случай, когда $a = 0$ или $b = 0$ и утверждение подавно выполняется) получаем, что $mn - k > mn - m = m(n-1) \geq n$, следовательно, $a^{mn-k} = 0$, то есть $(a+b)^{mn} = 0$.

В качестве некоммутативного кольца возьмем матрицы 2 на 2: $M_{2\times 2}$

Рассмотрим $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

При этом матрица $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которая в нечетных степенях равна себе же, а в четных степенях является единичной матрицей. Пример корректен из построения.

1.3 Задача №3

Найдем все нильпотентные элементы в кольце $\mathbb{Z}/(72)$.

Мы знаем, что множество элементов данного кольца представимо в виде $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{71}$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathbb{Z}/(72)$. Условие $a^k = \overline{0}$ равносильно делимости a^k на 72, отсюда следует, что нильпотентные вычеты — это те вычеты, которые дают остатки, делящиеся на все простые числа в разложении $72 = 2^3 \cdot 3^2$, то есть 2, и 3 или другими словами кратные 6. Нетрудно понять, что таковыми будут числа

$$\overline{0},\ \overline{6},\ \overline{12},\ \overline{18},\ \overline{24},\ \overline{30},\ \overline{36},\ \overline{42},\ \overline{48},\ \overline{54},\ \overline{60},\ \overline{66}.$$

Ответ: $\overline{6k}$, где $k = \overline{0, 11}$.

1.4 Задача №4

1) Докажем, что в кольце с единицей из нильпотентности x следует обратимость $1-x$, то есть существует левый и правый обратные элементы (левый и правый один и тот же из определения с лекции). Из определения нильпотентного элемента существует $n : \ \ x^n = 0$. Тогда, используя дистрибутивность, получаем

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})-(x+x^2+\ldots+x^n) = 1-x^n = 1$$

Отсюда следует существование правого обратного элемента. Аналогичным образом при перестановке множителей множителей получаем левый обратный (умножение степеней x коммутативно). Следовательно, $1-x$ обратимый.

2) Покажем, что в любом кольце R с единицей обратимые элементы образуют группу по умножению. Замкнутость: произведение двух обратимых элементов является обратимым элементом, поскольку если $a, b \in R$ обратимы, то для них существуют обратные элементы $a^{-1}, b^{-1} \in R$, а потому

$$a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1 \ \ (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

То есть присутствует замкнутость относительно операции. Ассоциативность операции следует из определения кольца. Очевидно, единица является нейтральным элементом. Ну и наконец, если $a \in R$ обратим, то, по определению, существует $\in R$ такой, что $a = a = 1$, при этом, как можно заметить, тоже является обратимым.

3) Найдем порядок группы обратимых элементов в кольце $\mathbb{Z}/(12)$ и проверим, является ли она циклической. Обратимыми элементами в данном кольце являются те остатки по модулю 12, которые при умножении дают остаток 1 по тому же модулю. Таковыми являются числа 1, 5, 7 и 11:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 = 1 &\equiv 1 \mod 12, \\ 5 \cdot 5 = 25 &\equiv 1 \mod 12, \\ 7 \cdot 7 = 49 &\equiv 1 \mod 12, \\ 11 \cdot 11 = 121 &\equiv 1 \mod 12. \end{aligned}$$

Группа конечная, ее порядок равен 4. При этом нетрудно видеть, что она не является циклической, поскольку любой элемент группы во второй степени уже равен единице.
Ответ: порядок группы равен 4, она не является циклической.

Происходили обсуждения с Никитой и Даней по ходу всей домашки