1 Задание 2

1.1 Задача 1

Докажите, что если в моноиде M у всякого элемента существует левый (не обязательно единственный) обратный, т.е.

$$\forall a \in M \exists a^{-1} : a^{-1} \cdot a = e$$

то M является группой.

Моноид является по определению полугруппой и у него есть ещё единственный нейтральный элемент. А группа это моноид плюс к этому существование обратного элемента. Отличие в начальных условиях только в том, что у нас может существовать несколько обратных.

Тогда у нас существует обратный элемент для обратного элемента a. Т.е. $\exists a^* : a^* \cdot a^{-1} = e$.

Тогда получим:

$$a^{-1} \cdot a = e \to a^* \cdot a^{-1} \cdot a = a^* \cdot e \to e \cdot a = a^* e \to a = a^*$$

Теперь допустим, что a^{-1} не единственный обратный элемент к элементу a, т.е. $\exists a^\# : a^\# \cdot a = a \cdot a^\# = e, a^{-1} \neq a^\#$

Тогда получим:

$$a^\# \cdot a = a \cdot a^\# \to a^\# \cdot a \cdot a^{-1} = e \cdot a^{-1} \to a^\# \cdot e = e \cdot a^{-1} \to a^\# = a^{-1}.$$

Пришли к противоречию и получается, что обратный элемент единственный, тогда моноид M полностью удовлетворяет опеделению группы.

1.2 Задача 2

Постройте таблицу Кэли для группы G порядка 4, в которой $\forall g \in G g^2 = e$. Приведите явный пример такой группы.

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Пусть $e = 0, a = 01, b = 10, c = 11$, а за операцию · возьмём XOR, тогда получим таблицу:

XOR	0	01	10	11
0	0	01	10	11
01	01	0	11	10
10	10	11	0	01
11	11	10	01	0

1.3 Задача 3

Проверим первое свойство группы для чисел $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{3}{4}$

$$a \odot b = \{a - b\} = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\} = \frac{1}{6} - \lfloor\frac{1}{6}\rfloor = \frac{1}{6} - (0) = \frac{1}{6}$$

$$(a \odot b) \odot c = \{\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\} = -\frac{7}{12} - \lfloor-\frac{7}{12}\rfloor = -\frac{7}{12} - (-1) = -\frac{5}{12}$$

$$b \odot c = \{b - c\} = \{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\} = -\frac{5}{12} - \lfloor-\frac{5}{12}\rfloor = -\frac{5}{12} - (-1) = \frac{7}{12}$$

$$a \odot (b \odot c) = \{\frac{1}{2} - \frac{7}{12}\} = -\frac{1}{12} - \lfloor-\frac{1}{12}\rfloor = \frac{11}{12}$$

Но $\frac{11}{12} \neq -\frac{5}{12}$, сл-но это не группа.

1.4 Задача 4

Пусть $e = 0, a = 01, b = 10, c = 11$, а за операцию $\cdot$ возьмём XOR, тогда получим таблицу:

XOR	0	01	10	11
0	0	01	10	11
01	01	0	11	10
10	10	11	0	01
11	11	10	01	0

Меньшего порядка нельзя, исходя из того, что у нас должно быть как минимум 4 элемента в группе, чтобы было 4 решения уравнения.