Домашнее задание №4 по курсу «Основы высшей алгебры и теории кодирования»

Задача 1 ($1 + 2^*$ баллов)
Пусть $N \trianglelefteq G$ и N содержит произведение ab некоторых элементов a и b из G. Докажите, что N содержит элементы $a^m b^m$ для любого натурального m.
($*$) Докажите, что N содержит элементы $a^m b^m$ и $b^m a^m$ для любого *целого* m.

Задача 2 ($0,75 + 0,75$ балла)

1. Приведите пример группы и её подгруппы, не являющейся нормальной.
2. Продемонстрируйте на этом примере, что множество левых смежных классов с операцией, как у факторгруппы, не образует группу.

Задача 3 (2 балла)
Найдите факторгруппу $\mathbb{Z}^3$ по подгруппе $H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.

Задача 4 (1 балл)
Постройте граф Кэли для группы

$$\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ (ab)^n = 1 \rangle$$

Построение подразумевает доказательство, что он должен выглядеть именно так, как построено.
Совет: в случае, когда $x^2 = 1$, то есть $x^{-1} = x$, принято в графе Кэли рисовать соответствующее ребро неориентированным (хотя можно, наоборот, ставить стрелки в две стороны)

Замечание 1
Данное представление — это альтернативное представление для диэдральной группы D_n. Здесь под порождающими элементами подразумеваются отражения относительно двух соседних осей: два последовательных таких отражения дают поворот.

Задача 5 ($0,75 + 0,75$ баллов)

1. Постройте гомоморфизм φ группы $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ (куда, решайте сами), ядром которого является $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

2. Покажите, что $\langle \mathbb{Q}, + \rangle / \operatorname{Ker} \varphi$ бесконечна, но каждый ее элемент имеет конечный порядок.

Задача 6 (4* балла)
Пусть абелева группа A изоморфна подгруппе группы B, а группа B изоморфна подгруппе группы A. Могут ли эти группы быть неизоморфными?

Замечание 2
Эта задача уже была в прошлом задании. Ее присутствие здесь означает, что ее все еще можно решить и получить баллы, плюс ее стоимость возросла.