Домашнее задание №3 по курсу «Основы высшей алгебры и теории кодирования»

Задача 1 (1 балл)
Докажите:

$$\text{НОД}(k, n) = 1 \iff \exists t :\ t \cdot k \equiv 1 \mod n$$

Задача 2 ($0,5$ балла)
Вычислите $17^{668} \mod 27$.

Задача 3 ($1,5^*$ балла)
Вычислите $2^{21^{42069}} \mod 14$.
Подсказка: подумайте, чему равно $2^{3+1} \mod 14$

Задача 4 ($0,5 + 0,5$ балла)
Изоморфны ли группы:

1. $C_{13} \times C_{13}$ и C_{169}
2. $C_7 \times C_{15}$ и $C_5 \times C_{21}$

Задача 5 (1^* балл)
Найдите все автоморфизмы группы $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

Задача 6 (1 балл)
Пусть G — абелева группа порядка n. Пусть число a такое, что $\text{НОД}(a, n) = 1$. Докажите, что тогда отображение

$$\varphi :\ x \mapsto ax = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{a \text{ раз}}$$

является автоморфизмом группы G.

Задача 7 (1 балл)
Порождают ли перестановки порядка 3 группу S_{33}?
То есть, верно ли, что множество всевозможных произведений всевозможных степеней перестановок из S_{33}, имеющих порядок 3, равно всему S_{33}?

Задача 8 (1* балл)
Назовем группы G_1 и G_2 антиизоморфными, если существует биекция $\mathrm{f} : G_1 \longrightarrow G_2$, такая что $\mathrm{f}(ab) = \mathrm{f}(b)\mathrm{f}(a)$ для всех $a, b \in G_1$. Докажите, что антиизоморфные группы изоморфны.

Задача 9 (2, 5* балла)
Доказать, что если возведение в куб, то есть отображение $\varphi : G \to G \quad \forall a \in G \ \varphi(a) = a^3$ является автоморфизмом группы, то она абелева.

Задача 10 (2* балла)
Пусть абелева группа A изоморфна подгруппе группы B, а группа B изоморфна подгруппе группы A. Могут ли эти группы быть неизоморфными?