Семинар №5 по курсу «Основы высшей алгебры и теории кодирования»

Репеев Роман, Шиманогов Игорь

Определение 1 (Действие группы)
Действием группы G на множестве X называется гомоморфизм $\varphi\ \ G \to S(X)$ группы G в группу $S(X)$ биекций множества X (взаимно однозначных отображений множества X на себя). Говорят также, что группа G действует на множестве X.
Если ясно, о каком действии идёт речь, то $\varphi(g)(x)$ записывают как $g(x)$. Элементы множества X будем называть точками, чтобы отличать их от элементов группы G. Элементы группы g будем называть биекциями на X, имея в виду образ элемента при гомоморфизме φ.

Определение 2 (Действие сдвигами)
Группа G действует сама на себе левыми (для правых аналогично) сдвигами:

$$(\varphi(g))(h) = gh$$

Несложно проверить, что φ является гомоморфизмом, более того, $\varphi(G) \cong G$.

Определение 3 (Орбита)
Орбитой действия называется множество образов некоторой фиксированной точки x:

$$\mathrm{Orb}_x(G) = \big\{y \in X \mid y = g(x), g \in G\big\}$$

Утверждение 1
Орбиты действия разбивают точки множества X на классы эквивалентности по отношению

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Orb}_y$$

Определение 4 (Транзитивное действие)
Действие называется *транзитивным*, если у него ровно одна орбита, то есть всякая точка переводится в любую другую действием какого-то элемента группы.

Определение 5 (Стабилизатор)
Стабилизатором точки x называется множество элементов G, оставляющих точку x неподвижной:

$$\mathrm{Stab}_x(G) = \big\{g \in G \mid g(x) = x\big\}$$

Утверждение 2
$\mathrm{Stab}_x(G)$ является подгруппой G.

Лемма 1
Отображение $\varphi: \ y \mapsto \big\{g \in G \mid g(x) = y\big\}$ сопоставляет каждой точке орбиты Orb_x смежный класс по стабилизатору Stab_x. Это соответствие взаимно однозначно.
В частности, выполняется соотношение

$$|G| = |\mathrm{Stab}_x| \cdot |\mathrm{Orb}_x|$$

Следствие 1
Мощность орбиты равен индексу стабилизатора

$$|Orb_x| = (G : Stab_x)$$

Определение 6 (Сопряженный элемент)
Элемент b называется *сопряженным* элементу a посредством элемента g, если $b = gag^{-1}$.
Будем говорить, что b сопряжен a, если он сопряжен посредством какого либо элемента.

Утверждение 3
Сопряженность является отношением эквивалентности, поэтому группа разбивается на *классы сопряженности.*

Пример 1
В коммутативной группе каждый элемент является классом сопряженности, так как

$$x = gyg^{-1} \Leftrightarrow x = gg^{-1}y = y$$

Пример 2
Рассмотрим центр группы, *то есть*

$$Z(G) = \{x \mid \forall y \in G \ xy = yx\}$$

Каждый элемент центра является классом сопряженности, так как

$$y = gxg^{-1} = gg^{-1}x = x$$

Определение 7 (Действие сопряжениями)
Для фиксированной группы G мы можем определить *действие сопряжениями* так:

$$g(x) = gxg^{-1}$$

Из определений видно, что орбиты действия сопряжениями — это классы сопряженности. Отсюда получаем следствие.

Утверждение 4
Количество элементов в классе сопряженности делит порядок группы.

Определение 8 (Нормализатор)
Нормализатором $N(S)$ подмножества $S \subseteq G$ называется множество элементов g таких, что $gS = Sg$.

Стабилизатор действия сопряжениями: $\mathrm{Stab}_h = \{g \in G \mid h = ghg^{-1}\} = N(h)$.

Определение 9 (Цикловой тип перестановки)
Каждой перестановке сопоставим *цикловой тип*: $(c_1, \ldots, c_n)$, где c_i — количество циклов длины i в цикловом разложении.

Лемма 2
Перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда их цикловые типы совпадают.

Задача 1
Найти все классы сопряженности в группе S_5

Каждый класс сопряженности — это цикловой тип. Различные цикловые типы — это различные разбиения числа 5 в неупорядоченную сумму слагаемых.

Всего классов получается 7:

$$5 = 5 \qquad \text{(циклы длины 5)} \qquad \frac{5!}{5} = 24\text{штуки}$$

$$5 = 4 + 1 \qquad \text{(циклы длины 4)} \qquad 5 \cdot \frac{4!}{4} = 30\text{штук}$$

$$5 = 3 + 2 \qquad \text{(циклы длины 3 и 2)} \qquad \binom{5}{3} \cdot \frac{3!}{3} = 20 \text{ штук}$$

$$5 = 3 + 1 + 1 \qquad \text{(циклы длины 3)} \qquad 20 \text{ штук}$$

$$5 = 2 + 2 + 1 \qquad \text{(два цикла длины 2)} \qquad \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ штук}$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1 \qquad \text{(циклы длины 2)} \qquad \binom{5}{2} = 10 \text{ штук}$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \qquad \text{(тождественная перестановка)} \qquad 1 \text{ штука}$$

Можно убедиться, что сумма числа элементов в полученных классах действительно равна $5! = 120$.

Из теории действия групп вытекает следующая лемма, которая позволяет решать многие комбинатоные задачи про помощи механизмов теории групп.

Определение 10 (Неподвижная точка)
Множеством неподвижных точек относительно элемента g называется

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

Теорема 1 (Лемма Бернсайда)
Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Количество орбит действия даётся формулой:

$$\#\text{орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

В использовании леммы Бернсайда также показывается следующий полезный факт

Лемма 3 (Неподвижные точки сопряженных)
Пусть группа G действует на множестве X, а элементы группы g_1 и g_2 сопряжены. Тогда $|X_{g_1}| = |X_{g_2}|$.

Задача 2 (Раскраски куба)
Сколько есть раскрасок граней куба в 3 цвета, если считать одинаковыми раскраски, совмещающиеся поворотами?

Решение Нам нужно найти количество орбит действия группы куба на функциях $\{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3\}$, для этого нужно найти для каждого класса сопряжённости группы куба количество функций $\{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3\}$, которые сохраняются при действии симметрий из этого класса сопряжённости. Группа куба изоморфна S_4, поэтому в ней 5 классов сопряжённости. Рассмотрим сколько элементов находится в каждом классе

S_4	элементов в классе
$()$	1
(ijk)	$4 \cdot 3 \cdot 2$ / 3 (потому что у каждого цикла 3 разных сдвига) = 8
$(ijkl)$	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ / \ 4 = 6$
$(ij)(kl)$	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ / \ 2 \cdot 2 \cdot 2$ (потому что циклы еще можно переставить местами) = 3
(ij)	$4 \cdot 3 \ / \ 2 = 6$

Теперь поймем геометрический смысл каждой перестановки, ведь это перестановки больших диагоналей.

S_4	геометрия
$()$	тождественная
(ijk)	вокруг большой диагонали
$(ijkl)$	вокруг центров противоположных сторон на 90
$(ij)(kl)$	вокруг центров противоположных сторон на 180
(ij)	вокруг центров противоположных ребер на 180

Теперь нужно занумеровать грани куба и для каждого класса сопряжённости записать действие какого-нибудь элемента из этого класса на множестве граней, то есть чисел от 1 до 6. Мы используем этот элемент для подсчета мощности множества неподвижных точек, а она равна для всех элементов.

S_4	действие на гранях	элементов в классе	$\lvert X_g \rvert$
$()$	$()$	1	3^6
(ijk)	$(142)(356)$	8	3^2
$(ijkl)$	(1265)	6	3^3
$(ij)(kl)$	$(16)(25)$	3	3^4
(ij)	$(14)(25)(36)$	6	3^3

В последнем столбце указаны величины $|X_g|$ для каждого класса сопряжённости. Давайте приведем пример их вычисления на примере второй строки. Во второй строке указано количество функций, которые сохраняются перестановкой $(142)(356)$. Такие функции должны удовлетворять условиям $f(1) = f(4) = f(2)$, $f(3) = f(5) = f(6)$. Поэтому они однозначно задаются значениями $f(1)$ и $f(3)$, причём любая пара значений возможна. Поэтому общее количество функций равно 3^2. С помощью этой таблицы применение леммы Бернсайда сводится к простому арифметическому вычислению:

$$\#\text{раскрасок} = \frac{1}{24}\left(3^6 + 8 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3\right) = 57$$