1 Задание 9

1.1 Задача 1

Пусть R – регулярный язык, а A – КС-язык. Тогда $\mathcal{A}$ - МП-автомат, который будет распознавать A по принимающему состоянию. Еще у него будет сток, в который можно будет перейти по символам, по которым нельзя перейти из какого-то состояния. То есть если в каком-то состоянии нет перехода по какому-то символу, то мы добавляем переход по этому символу в этот сток. Потом добавим перхеды по любым символам из этого состояния в себя и по ε тоже. При этом стек не будет изменяться при этих переходах. $\mathcal{R}$ - полный ДКА, который распознает наш регулярный язык R. Будем считать, что алвафит A и R совпадают.
Построим $\mathcal{B}$ МП-автомат, который будет распознавать $A \cap R$.

- $Q_{\mathcal{B}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{R}}$
- $F_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{R}}$
- $q_0^{\mathcal{B}} = (q_0^{\mathcal{R}}, q_0^{\mathcal{A}})$
- Стек будет задаваться только стеком МП-автомата
- D: $D_{\mathcal{R}}(\sigma, q_{\mathcal{R}} = (p_{\mathcal{R}}), D_{\mathcal{A}}(\sigma, q_{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}) = (p_{\mathcal{A}}, \gamma)$
  Получаем $D_{\mathcal{B}}(\sigma, (q_{\mathcal{R}}, q_{\mathcal{A}})) = (p_{\mathcal{R}}, p_{\mathcal{A}}, \gamma)$
  Если $D_{\mathcal{A}}(\varepsilon, q_{\mathcal{A}}), \mathcal{Z}) = (p_{\mathcal{A}}, \gamma)$, получаем
  $D_{\mathcal{B}}(\varepsilon, (q_{\mathcal{R}}, q_{\mathcal{A}})) = (q_{\mathcal{R}}, p_{\mathcal{A}}, \gamma)$
- $\Sigma_{\mathcal{B}} = \Sigma_{\mathcal{R}}$
- $\Gamma_{\mathcal{B}} = \Gamma_{\mathcal{A}}$

Теперь посмотрим, почему этот автомат корректен.

- ε не изменят систему, т.к. дка может перейти по ε только в то же самое состояние, в котором и был. В дка нет переходов без считывания символа. Тогда по построенной функции перехода при ε переходе не изменятся ДКА-компонент пары.
- если слово принадлежит обоим языка, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}$ перейдут в принимающее состояния, а следовательно и $\mathcal{B}$ перейдет в принимающее состояние
- если слово не принадлежит хотя бы одному из языков, то $\mathcal{A}$ и/или $\mathcal{R}$ не перейдёт в принимающее состояние, а следовательно и $\mathcal{B}$ не перейдёт в принимаюшее состояние.

1.2 Задача 2

Являются ли следующие языки КС-языками?

а) $SQ = \{\omega\omega | \omega \in \{a, b\}^*\}$

б) $\Sigma^*\ SQ$

в) $\{a^{3^n} | n > 0\}$.

а) Нет, будем доказывать от противного, воспользуемся леммой о накачке: $L \in CFL \longrightarrow \exists p \geqslant 1 : \forall \omega \in L \exists x, y, z, y, v : \omega = xuyvz : |iyv| \leqslant p,\ |uv| \geqslant 1$, $\forall i \geqslant 0 \rightarrow xu^iyv^iz \in L$
Возьмём слово $\omega = a^pb^pa^pb^p$. Допустим, что выполняется лемма о накачке. Учитывая первое утверждение слово uyv либо состоит из одного симвлда (a или b), иначе из последовательностей каждого из символов (a^sb^t или b^ta^s). Для первого случая возьмём $i = 2$ и получим, что это противоречит третьему утверждению. Для второго случая выберем произвольное i из 3-его утверждения. Получим слово длины $4p - (k + l) + ki_li$, где $|u| = k, |v| = l$. По определению языка L, в нашем слове ω должны совпдаать символы по позициям s_1 и s_2, т.е. $s_2 = k + \frac{(k+l)(i-1)+4p}{2}$, где $s_1 = k$ - позиция, с которой будет начинаться слово u. Т.к. мы произвольно выбирали i получили противоречие, т.к. на рассмотренной позиции может стоять произвольный символ, в зависимости от выбора i. Можем взять i, к примеру, так, чтобы $s_1 =$ k меньше половины от длины слова.
б) Да, внимательным вглядыванием получим, что все слова нечетной длины принадлежат заданному языку. Построим грамматику $G = \langle N, T, P, S\rangle$ с правилами:
$S \longrightarrow AB|BA|A|B|\varepsilon$,
$A \longrightarrow aAa|aAb|bAb|a$
$B \longrightarrow aBa|aBb|bBa|bBb|b$ Видно, что правила $S \longrightarrow A$ и $S \longrightarrow B$ будут задавать слова нечетной длины, по индукции длины слова. $L(G) \subseteq \Sigma^*\ SQ$. По построению можно вывести слова вида $\omega_1 = T^naT^nT^mbT^m$ и $\omega_2 = T^nbT^nT^maT^m, n, m \in N$ Видим, что слова ω_1 и ω_2 будут лежать в языке L(G), потому что они имеют разные буквы на симметричных позициях.
$\Sigma^*\ SQ \subseteq L(G)$: по индукци длины слова получаем, что любое слово нечетной длины из языка $\Sigma^*\ SQ$ будет выводится из грамматики G. Для вывода же слов четной длины будем доказывать от противного. Пусть слово ω не имеет вида ω_1 или ω_2. Тогда $\forall i : 1 \geqslant i \geqslant n + m + 1 \longrightarrow \omega[i] = \omega[n + m + i + 1]$, получаем, что $\omega \in SQ$, а это противоречие, а из этого следует, что $\omega \in L(G)$.
в) Нет. От противного, допустим, что выполняется лемма о накачке, тогда будет существовать такое $p \geqslant 1$ что, для произвольного слова из языка найдется разбиение, которое будет удовлетворять трём условиям. Возьмем слово $\omega = a^{3^p}$. Для него будут выполняться все три условия по предположению. По условию 1 верно, что $|uyv| \leqslant p$:, возьмём $i = 2$: $|xuyvz| = 3^p < |xu^2yv^2z| \leqslant 3^p + p < 3^{p+1}$, $3^p < |xu^2yv^2z| < 3^{p+1}$. Откуда получили противоречие.

1.3 Задача 3

Для языка $L = \{\omega|\omega = xcy; x, y \in \{a, b\}^*; |x| = |y|\}$к

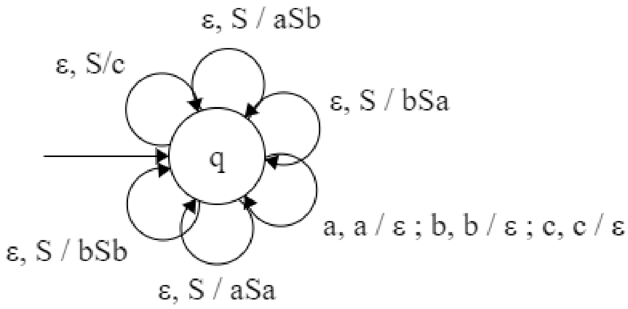
а) Построить КС-грамматику G, которая будет порождать язык L

б) Построить недетрминированный МА, эквивалентный этой грамматике

в) Продемонстрировать работу построенного МА на слове acab (все варианты поведения)

а) $G = \langle N, T, P, S\rangle = \langle\{S\}, \{a, b, c\}, P, S\rangle$, где P будет заваться вот так:
$S \longrightarrow aSa|aSb|bSa|bSb|c$
$R(G) \in L$: будем рассматривать произвольное слово ω из R(G). Из построения грамматики оно будет выглядеть вот так: $\omega = \{a, b\}^n c\{a, b\}^n$, то есть это и есть слово из L. Тогда получаем $\forall\omega \in R(G) \longrightarrow \omega \in L$
$L \in R(G)$: докажем по индукции n длины слова u $\subseteq \omega \in L$.
База индукции $n = 1$, используем правило $S \longrightarrow c$
Предположение индукции $n = k$: из грамматики G выводимы все слова вида x $=$ ycz, $y, z \in \{a, b\}^*$, $|y| = |z| = k$
Шаг индукции: $n = k + 1$, будем выводить произвольное слова $x \in L$ из предположения индукции: $S \to^* xSy$.
Если применим правило $S \longrightarrow c$, то получим x (на этом шаге верно то, что $x, y \in \{a, b\}^k$). Теперь воспользуемся правилом из P (но не $S \longrightarrow c$) и получим: $S \longrightarrow^* ySz \longrightarrow \alpha S\beta$, где $\alpha, \beta \in \{a, b\}^{k+1}$. Примени теперь правило $S \longrightarrow c$ и тогда получим вывод произвольного слова $\omega \in L$: $S \longrightarrow^* ySz \longrightarrow \alpha S\beta \longrightarrow \alpha c\beta$
б) Используемся алгоритм КС-грамматика G $\longrightarrow$ МП-автомат М.
Опишем МП-автомат М $= \langle Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle$:
$Q = \{q\}; T = \{a, b, c\}; \Gamma = N \cup T; q_0 = q; Z_0 = S; F = \emptyset$
Опишем функцию переходов $\delta : Q \times (T \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma \longrightarrow 2^{Q\times\Gamma^*})$:

- $S(\longrightarrow aSa) \in P \longrightarrow (q, aSa) \in \delta(q, \epsilon, S)$
- $S(\longrightarrow aSb) \in P \longrightarrow (q, aSb) \in \delta(q, \epsilon, S)$
- $S(\longrightarrow bSa) \in P \longrightarrow (q, bSa) \in \delta(q, \epsilon, S)$
- $S(\longrightarrow bSb) \in P \longrightarrow (q, bSb) \in \delta(q, \epsilon, S)$
- $S(\longrightarrow c) \in P \longrightarrow (q, c) \in \delta(q, \varepsilon, S)$
- $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}, \delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}, \delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}$



в) Заметим, что это слово не принадлежит языку L, т.к. $|a| \neq |ab|$, работа же построенного МА автомата продеморстрирована на картинке выше.

1.4 Задача 4

Coming soon

1.5 Задача 5

Coming soon

1.6 Задача 6

Язык L задан КС-грамматикой с правилами:
$S \longrightarrow aSa|aSB|bSa|bSb|a$

1. Является ли L регулярным языком?
2. Является ли дополнение L регулярным языком?
3. Является ли L КС-языком?
4. Является ли дополнение L КС-языком?

Изменим немного грамматику из 3-й задачи и получим: $S \longrightarrow aSa|aSb|bSa|bSb|a$

1. $L \notin REG$, потому что у него бесконечно много классов L-эквивалентности, к примеру слова, вида bb^*a
2. Сл-но Σ^* $L \notin REG$
3. Да, по причине того, что он задается КС-грамматикой
4. Распишем T^* $L = L_1 \cup L_2$ $L_1 = \{\omega : \omega = ybz, y, z \in \{a, b\}^*, b \in T, |y| = |z|\}\}$, $L_2 = \{\omega : |\omega| = 2n, n \geqslant 0\}$

Язык L_1 будет задаваться такой же грамматикой, что и L, только нужно заменить $S \longrightarrow a$ на правило $S \longrightarrow b$. Сл-но язык $L_2 \in CFL$
Язык L_2 будет задаваться такой же грамматикой, что и L, только нужно заменить правило $S \longrightarrow a$ на $S \longrightarrow \varepsilon$. Сл-но язык $L_2 \in CFL$. Т.к. КС-языки замкнуты относительно операции объединения, получаем, что $T^*\ L \in CFL$

1.7 Задача 7

Язык L задан КС-грамматикой с правилами:
$S \longrightarrow aSb|A|B|\varepsilon,\ A \longrightarrow aAa|\varepsilon, B \longrightarrow bBb|\varepsilon$

1. Является ли L регулярным языком?
2. Является ли дополнение L регулярным языком?
3. Является ли L КС-языком?
4. Является ли дополнение L КС-языком?

1. После k правил $S \longrightarrow aSb$, получим:

1. $S \longrightarrow A$, получим слово $\omega = a^{n+2k}b^n$
2. $S \longrightarrow B$, получим слово $\omega = a^n b^{n+2k}$
3. $S \longleftarrow \varepsilon$, получим слово $\omega = a^n b^n$

Если n - четна, то есть два случая:
1. $\omega = a^{2(m+k)}b^{2m}$
2. $\omega = a^{2m}b^{2(m+k)}$
Если n - нечетна, то есть два случая;
3. $\omega = a^{2(m+k)}abb^{2m}$
4. $\omega = a^{2k}abb^{2(m+k)}$
Составим регуляргое выражение, которое будет задавать язык L:
$R = (aa)^*ab(bb)^*|(aa)^*(bb)^*$

1. Т.к. есть регулярное выражние, то язык будет регулярным.
2. Также дополнение язык будет регулярным, это следует из того, что дополнение регулярного языка регулярно.
3. Он будет КС-языком, т.к. он задаётся грамматикой.
4. Да, т.к. дополнение языка является регулярным языком, следовательно и КС-языком.