1 Задание 1

1.1 Задача 1

1. Нет, т.к. b $\notin \{1, 2, 3\}$ или же $1 \notin \{a, b\}$.
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, т.к. мы можем выбрать |A| элементов из первого множества и |B| элементов из второго множества, сл-но всего элементов в множестве $|A \times B|$ будет $|A| \cdot |B|$
3. Это получится $\varnothing$, т.к. пустое множество не содержит в себе элементов, а значит и в множестве $\mathbb{N} \times \varnothing$ hv е будет элементов, сл-но оно пустое.

1.2 Задача 2

a) Да, верно, т.к. пустое слово содержится в любом непустом множестве.
b) Да, верно, т.к. пустое множество содержитс в непустом множестве.

1.3 Задача 3

Регулярное выражение: X^+X^+, т.к. у нас будут все слова в этом множестве вида $a^n a^m$, где $m, n \in \mathbb{N}$ & $m, n > 1$

1.4 Задача 4

a) $R = ((a|b)^*$ | ((ab) | (ba))$^+$ $(b|a)^*)$ $(a|b)^*$ - задаёт количество некоторого количество идущих букв a или, $((ab)|(ba))^+$ задаёт то, что встретится хотя бы одна рядом, стоящая букв a и b, $(a|b)^*$ задаёт все оставшиеся слова, т.к. после (ab) или (ba) может идти любой набор букв. А значит в этом языке, которое задаёт РВ всегда есть как буква a, так и буква b, доказано включение R в L. Теперь докажем включение L в R. База n = 2, это либо ab, либо ba, а значит содержитя в R. При n = k предположим, что это верно. Тогда при n = k + 1, мы дописываем либо букву a, либо букву b мы это вполне можем сделать, т.к. выражение $(a|b)^*$ в конце это учитвает. Но по предположению у нас это слово уже содержит и a, и b. Сл-но и содержит слово длины n = k + 1.
б) (b^*a^*) ab (b^*a^*) Я исхожу, из доказанного регулярного выражения в пункте в), то есть РВ: b^*a^* задаёт слово, не содержащее ab, сл-но оно должно задавать все подслова до ab и после ab, сл-но это регулярное выражение верное.
в) b^*a^*, в этом языке не может идти ни одной буквы b, после буквы a, иначе это слово содержит в себе подслово ab, сл-но оно состоит из нескольких (или нуля) подряд идущих букв b или нескольких (или нуля) подряд идущих букв

а. Это и описывает заданное регулярное выражение.

1.5 Задача 5

1. Предлагаю сначала доказать включение L в R, у нас нет слов, содержащих 3 букв b подряд в языке L, база, у нас есть только $\mathcal{E}, b, bb$, база доказана таких слов нет. Теперь предположим, что их нет и на n-1, составлении при помощи правила 2, тогда при составлении слова на n шаге, мы можем составить слово из букв ax, bax и bbax, но в x нет последовательности из 3-х подряд b, а при составлении не возникает трех подряд идущих b, т.к. их от других b отделяет буква а.

Теперь нужно доказать, что из языка L можно составить любое слово, не содержащее

2. R = ($(a^* \mid (bba)^* \mid (ba)^*)^*$ | (abb) | (ab) | (bb) | (b) | $\mathcal{E}$)
Докажем включение R $\subseteq$ L.
a^* порождает слова с любым количеством букв а, $(bba)^*$ порождает все слова, состоящие из bba $(ba)^*$ порождает все слова, состоящие из ba, еще нужно учесть, что слово может оканчиваться на abb, ab, или bb, b (если только из b и состоят). Таким образом получили, что у нас никогда не могут встретиться 3 b подряд.
Включение L $\subseteq$ R докажем индукцией. База n = 1, слово состоит из a или b, при n = 2 слово состоит из aa, ab, ba или bb при n = 3 слово состоит из aaa, bba, aba, baa, aab, bab, abb. Предположим, что это верно и для n = k,

1.6 Задача 6

1. $\{(a^m, b^k) \mid m > 0 \ \& \ k \geq 0\}$
2. $\{a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}, a^{18}, a^{21}, ...\} \cap \{a, a^6, a^{11}, a^{16}, a^{21}, ...\}^* \Longrightarrow \{a^{6+15n} \mid n \geq 0\}$