1 Задание 1

1.1 Задача 1

1. Нет, т.к. b $\notin \{1, 2, 3\}$ или же $1 \notin \{a, b\}$.
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, т.к. мы можем выбрать |A| элементов из первого множества и |B| элементов из второго множества, сл-но всего элементов в множестве $|A \times B|$ будет $|A| \cdot |B|$
3. Это получится $\varnothing$, т.к. пустое множество не содержит в себе элементов, а значит и в множестве $\mathbb{N} \times \varnothing$ hv е будет элементов, сл-но оно пустое.

1.2 Задача 2

a) Нет, неверно, т.к. пустое слово не содержится в этом языке.
b) Да, верно, т.к. пустой язык содержится в любом языке.

1.3 Задача 3

Регулярное выражение: X^+X^+, т.к. у нас будут все слова в этом множестве вида $a^n a^m$, где $m, n \in \mathbb{N}$ & $m, n > 1$

1.4 Задача 4

a) $R = ((a|b)^*$ | ((ab) | (ba))$^+$ $(b|a)^*)$
$(a|b)^*$ - задаёт количество некоторого количество идущих букв a или b, $((ab)|(ba))^+$ задаёт то, что встретится хотя бы одна рядом, стоящая букв a и b, $(a|b)^*$ задаёт все оставшиеся буквы a, или б, или пустые, т.к. после (ab) или (ba) может идти любой набор букв. А значит в этом языке, которое задаёт R всегда есть как буква a, так и буква b, доказано включение R в L.
Теперь докажем включение L в R. База n = 2, это либо ab, либо ba, а значит содержитя в R. При n = k предположим, что это верно. Тогда при n = k + 1, мы дописываем либо букву a, либо букву b мы это вполне можем сделать, т.к. выражение $(a|b)^*$ в конце это учитывает. Но по предположению у нас это слово уже содержит и a, и b. Сл-но и содержит слово длины n = k + 1. Сл-но L содержится в R, получаем, что R = L.
б) R = $(b^*a^*$ab$b^*a^*)$ Я исхожу, из доказанного регулярного выражения в пункте в), то есть РВ: b^*a^* задаёт слово, не содержащее ab, сл-но оно должно задавать все подслова до ab и после ab, сл-но это регулярное выражение верное.
в) R = b^*a^*, в этом языке не может идти ни одной буквы b, после буквы a, иначе это слово содержит в себе подслово ab, сл-но оно состоит из нескольких

(или нуля) подряд идущих букв b или нескольких (или нуля) подряд идущих букв a. Доказано включение R в L. Теперь докажем включение L в R. Это можно доказать по индукции, база верна, предположим, что это верно для слова длины n, если оно заканчивается на a, то дописать мы можем только a и все верно, если на b, то и дописать мы можем только b для этого случая тоже верно. Это и описывает заданное регулярное выражение.

1.5 Задача 5

1. Предлагаю сначала доказать включение L в T, у нас нет слов длины 3, содержащих 3 букв b подряд в языке L, база, у нас есть только aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, база доказана таких слов нет. Теперь предположим, что их нет и на n-1, составлении при помощи правила 2, тогда при составлении слова на n шаге, мы можем составить слово из букв ax, bax и bbax, но в x нет последовательности из 3-х подряд b, а при составлении не возникает трех подряд идущих b, т.к. их от других b отделяет буква a.

Теперь нужно доказать, что любое слово из языка T содержится в L. Для слова длины n = 3 это верно, мы можем составить из T любое слово длины 3, в этом мы убедились ранее, оно содержится в языке L, база доказана. Преположим, что это верно для n = k. При n = k + 1 мы можем составить совсем любое слово длины k -2 это верно по предположению, т.к. по базе мы можем составить любое слово длины 3, то мы можем его дописать слева от слова длины k-2, сл-но мы можем составить любое слово. Доказано включение T в L. Сл-но T = L.

2. R = ((a^* | $(bba)^*$ | $(ba)^*$)* | (abb) | (ab) | (bb) | (b) | $\mathcal{E}$)

Докажем включение R $\subseteq$ T.

a^* порождает слова с любым количеством букв a, $(bba)^*$ порождает все слова, состоящие из bba $(ba)^*$ порождает все слова, состоящие из ba, еще нужно учесть, что слово может оканчиваться на abb, ab, или bb, b (если только из b и состоят). Таким образом получили, что у нас никогда не могут встретиться 3 b подряд.

Включение T $\subseteq$ R докажем индукцией. База n = 1, слово состоит из a или b, при n = 2 слово состоит из aa, ab, ba или bb при n = 3 слово состоит из aaa, bba, aba, baa, aab, bab, abb. Предположим, что это верно и для n = k, тогда при n = k+1, мы можем добавить только либо букву a или букву b, и получится либо xa и в x по предположению нет подряд идущих трех букв b, если в x последние две буквы bb, то мы не можем дописать b, иначе это слово не содержится в L, тогда получаем xb и по предположению там не содержится подпоследовательность из трех подряд идущих букв b. Сл-но есть включение T в R, сл-но R = T.

1.6 Задача 6

1. $\{(a^m, b^k) \mid m > 0 \ \& \ k \geq 0\}$ из определения декартового произведения
2. $\{a, a^6, a^{11}, a^{16}, a^{21}, ...\}^* = \{\mathcal{E}, a, a^2, a^3, a^4, ...\}$ (это следует из определения звездочки Килини)
$\{a^3, a^6, a^9, ...\} \cap \{a, a^6, a^{11}, a^{16}, a^{21}, ...\}^* \Longrightarrow \{a^3, a^6, a^9, ...\}$