1 Задание 6

1.1 Задача 1

Кажется, что да, попробуем это доказать.

Единица на нечетном месте, будем считать слева направо, при делении на 3 даёт остаток 1, на четном даёт остаток 2:

$1 \bmod 3 \equiv 1$, $2 \bmod 3 \equiv = 2$, $4 \bmod 3 \equiv = 1$.

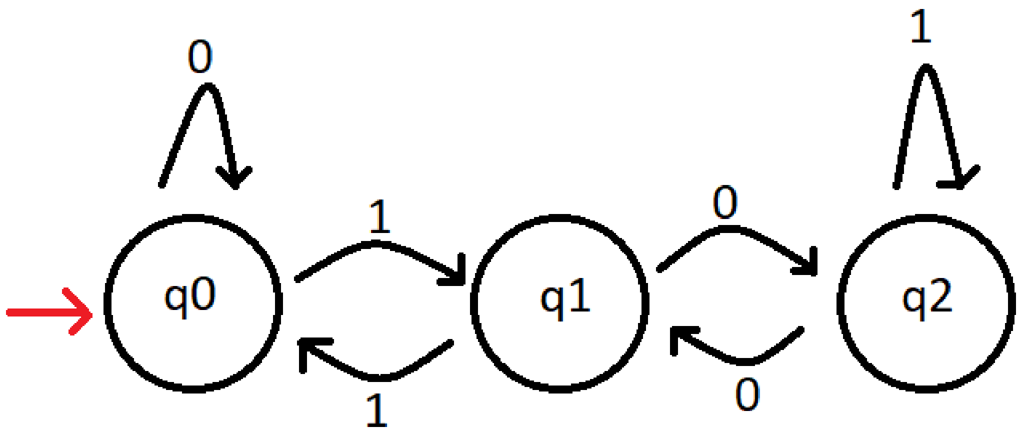
При добавлении символа каждая четная позиция становится нечетной, и каждая нечетная становится четной. Новый символ (слева) меняет позиции с четных на нечетные и нечетные на четные, а сам считываемый символ всегда на несчитываемой символ. Тогда будем рассматривать следующие комбинации: Кол-во Ч (Остаток от деления кол-ва единиц на четных местах), Кол-во Н (Остаток от деления кол-ва единиц на нечетных местах), s - слово, которое будем дописывать.

N	Кол-во Ч	Кол-во Н	$\omega \bmod 3$	s	ω·s mod 3
1	1	1	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	0	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \equiv 0 \bmod 3$
2	1	2	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	0	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \equiv 2 \bmod 3$
3	1	0	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	0	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \equiv 1 \bmod 3$
4	2	1	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	0	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \equiv 1 \bmod 3$
5	2	2	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	0	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \equiv 0 \bmod 3$
6	2	0	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	0	$0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \equiv 2 \bmod 3$
7	0	1	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	0	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \equiv 2 \bmod 3$
8	0	2	$0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	0	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \equiv 1 \bmod 3$
9	0	0	$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	0	$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \equiv 0 \bmod 3$
10	1	1	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	1	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \equiv 1 \bmod 3$
11	1	2	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	1	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3$
12	1	0	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	1	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \equiv 2 \bmod 3$
13	2	1	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	1	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \equiv 2 \bmod 3$
14	2	2	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	1	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \equiv 1 \bmod 3$
15	2	0	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	1	$0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3$
16	0	1	$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 3$	1	$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3$
17	0	2	$0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$	1	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \equiv 2 \bmod 3$
18	0	0	$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 3$	1	$0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \equiv 1 \bmod 3$

Остатки при делении на 3 задают классы эквивалентности по отношению $\sim$ действительно:

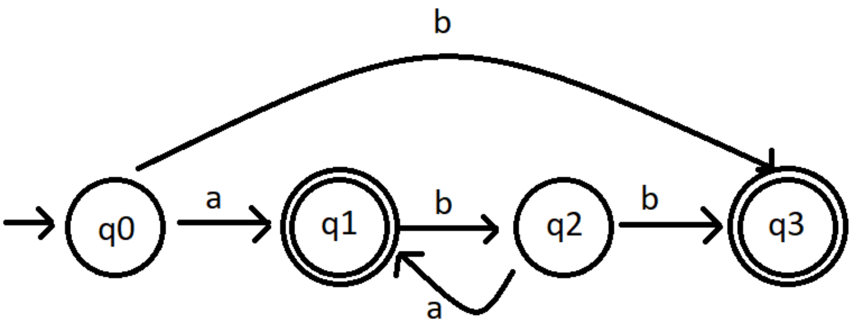
1. $\omega \bmod 3 \equiv 1$, то $\omega \cdot 0 \bmod 3 \equiv 2 \in$ L, $\omega \cdot 1 \bmod 3 \equiv 0 \notin$ L
2. $\omega \bmod 3 \equiv 2$, то $\omega \cdot 0 \bmod 3 \equiv 1 \notin$ L, $\omega \cdot 1 \bmod 3 \equiv 2 \in$ L
3. $\omega \bmod 3 \equiv 0$, то $\omega \cdot 0 \bmod 3 \equiv 0 \notin$ L, $\omega \cdot 1 \bmod 3 \equiv 1 \notin$ L

Построим ДКА из этих классов по алгоритму и получим:

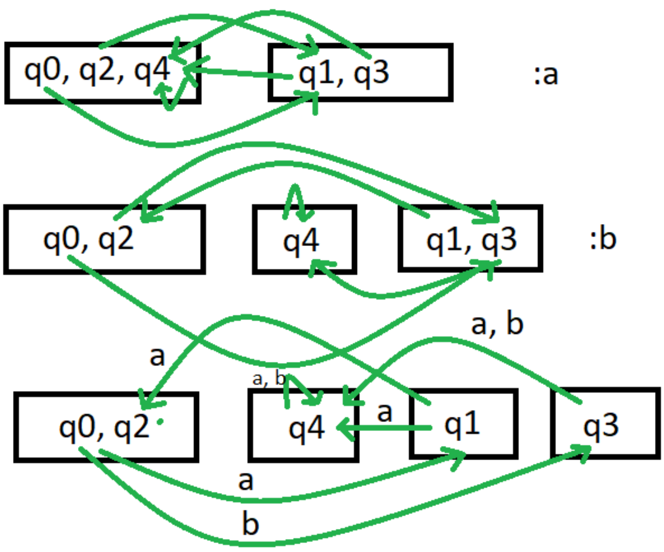


Доказано

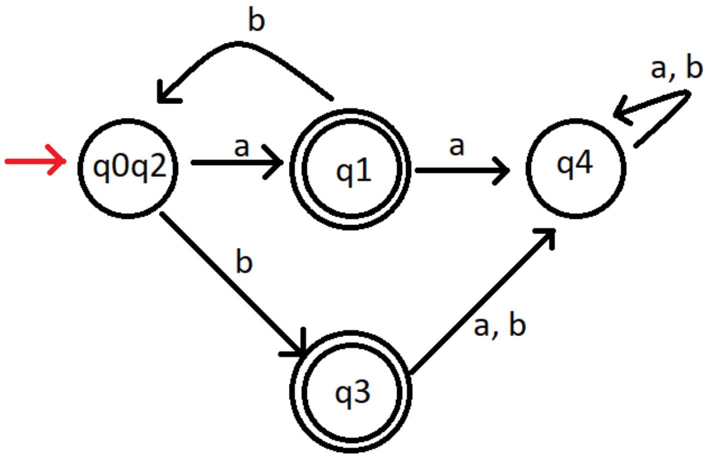
1.2 Задача 6



Построим табличку непринимающих состояний и принимающих состояний и выполним алгоритм.



Ура, всё получилось, теперь можем построить ДКА из этой картинки.



1.3 ХУЙ

1.4 Задача 7

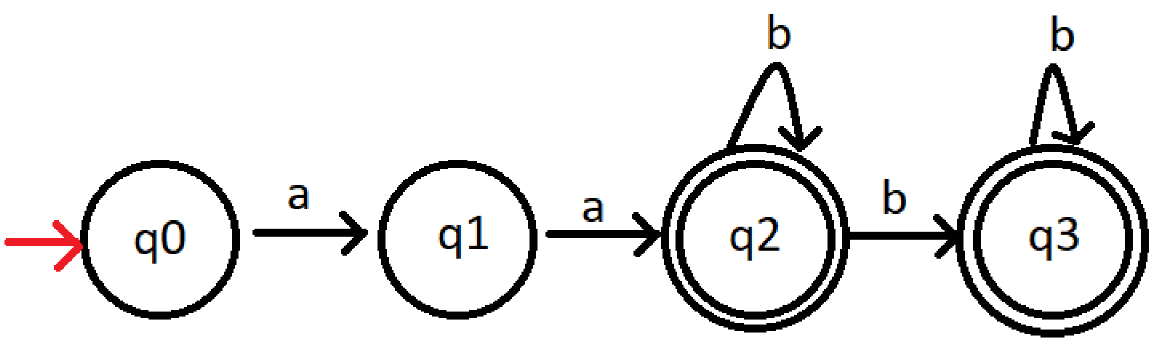
L = $\{ab^{2^i} \mid \text{i} \geqslant 0 \} \cup \{b^j \mid \text{j} \geqslant 0\} \cup \{a^m b^n \mid \text{m} > 1, \text{n} \geqslant 0 \}$
$L_1 = \{ab^{2^i} \mid \text{i} \geqslant 0 \}$
$L_2 = \{b^j \mid \text{j} \geqslant 0\}$
$L_3 = \{a^m b^n \mid \text{m} > 1, \text{n} \geqslant 0 \}$
L = $L_1 \cup L_2 \cup L_3$

Теперь, докажем, что лемма о накачке выполняется для этого языка L.

Рассмотрим лемму: для L_1 можем взять $p_1 = 1$, $x = \epsilon$, y = a(|y| = 1 $\leqslant p_1$), z = b^{2^i}. Тогда при k = 0 $xy^k z = b^{2^i} \in L_2 \subseteq L$; При k = 1 $xy^k z = ab^{2^i} \in L_1 \subseteq L$. При k > 1 $xy^j = a^j b^{2^i} \in L_3 \subseteq L$. Значит все слова из L_1 удовлетворяют лемме о накачке для L.

Рассмотрим лемму: для L_2 можем взять $p_2 = 1$, $x = \epsilon$, y = b(|y| = 1 $\leqslant$ p), z = b^{j-1}. Тогда $xy^k z = b^{j+k-1} \in L_2 \subseteq L$. Значит все слова из L_2 удовлетворяют лемме о накачке для L.

Для L_3 можно построить ДКА $\mathcal{A}_3$. Приведу его ниже:



Значит для L_3 выполняется лемма о накачке: $\exists p_3 \forall \omega \in L_3 : |\omega| > p_3, \exists xyz = \omega$

$((y \neq \epsilon) \wedge (|xy| \geqslant p_L)) \wedge (\forall i \geqslant 0\ xy^i z \in L)) \to xy^i z \in L$.

Доказано

Теперь докажем, что $L \notin REG$. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $L_1 \cap L_3 = \emptyset$, $L_2 \cap L_3 = \emptyset$. $L1 = L\ (L_2 \cup L_3)$. REG замкнуто относительно разности и объединения, тогда от противного предположим, что L $\in$ REG, т.к. $L_3 \in REG$ по доказанному выше, а $\{b\} \in REG \to L_2 = \{b\}^* \in REG, (L_2 \cup L_3) \in REG \to L_1 \in REG$.

Но $L_1 \notin REG$. Для него не выполняется лемма о накачке, т.е.

$\forall p \exists \omega \in L : |\omega| > p, \forall xyz = \omega((y = \epsilon) \bigvee (|xy| > p) \bigvee (\exists \geqslant 0 : xy^t z \notin L))$

Теперь попробуем показать это: Если взять $x = \epsilon$, y $=$ ab^k, то $xy^0 z = b^{2^i - k} \notin L_1$, если взять y $= b^k$, то $xy^i z = ab^{2^i - k + tk} = ab^{2^i + (t-1)k}$. Если бы $L_1 \in REG$, то $\forall k > 0$ $\forall t \geqslant 0\ 2^i + (t-1)k = 2^j$. Но при четном k, i $>$ 0 или нечетного k, i $=$ 0 это не будет выполнено ни для какого четного t, а в случае нечетного k, i $>$ 0 или четного k, i $=$ 0 - ни для какого четного t.

Следовательно лемма не выполнется, т.е. $L_1 \notin REG \to L \notin REG$

Доказано