Senioru mājas uzdevumi 3

1. Bātas Banka izlaiž monētas ar H un T pusēm. Harijam ir sarindojis virknē n šādas monētas. Viņš atkārtoti veic sekojošu darbību:

Ja virknē ir tieši $k > 0$ monētas ar H pusi uz augšu, tad viņš $k - to$ monētu (skaitot no kreisās puses) apgriež otrādi. Kad visas monētas ir ar T uz augšu, Harijs procesu beidz. Piemēram, ja $n = 3$, procesu var aprakstīt šādi $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ un tas ir pabeidzies ar trim operācijām.

a. Pierādiet, ka jebkurai sākotnējai virknei, Harija process beigsies pēc galīga darbību skaita.

b. Ar $L(C)$ apzīmēsim gājienu skaitu, kas nepieciešams, lai patvaļīgu konfigurāciju C novestu līdz procesa beigām. Piemēram $L(THT) = 3$ un $L(TTT) = 0$. Aprēķiniet vidējo $L(C)$ vērtību visām 2^n dažādajām konfigurācijām C.

2. Dots vesels skaitlis $N \geq 2$. Komanda no $N(N+1)$ dažāda auguma futbolistiem stāv ierindā. Sers Alekss grib no ierindas padzīt $N(N-1)$ spēlētājus tā, lai paliek ierinda ar $2N$ spēlētājiem un izpildās sekojošas N īpašības:

(1) neviens nestāv starp diviem garākajiem spēlētājiem,
(2) neviens nestāv starp trešo un ceturto garāko spēlētāju,
$\vdots$
(N) neviens nestāv starp diviem īsākajiem spēlētājiem.

Pierādiet, ka tas vienmēr ir iespējams!

3. Atrodiet visus veselos n, kuriem katrā $n \times n$ kvadrāta rūtiņā var ierakstīt burtus I, M un O tā, ka izpildās sekojošas īpašības:

- katrā rindā un katrā kolonnā tieši trešdaļa no visiem burtiem ir I, trešdaļa ir M un trešdaļa ir O
- katrā diagonālē, kurā rūtiņu skaits dalās ar 3, tieši viena trešdaļa burtu ir I, viena trešdaļa ir M un viena trešdaļa ir O.

Piezīme: $n \times n$ kvadrāta rindas un kolonnas ir sanumurētas ar skaitļiem 1 līdz n . Katru rūtiņu var apzīmēt ar naturālu skaitļu pāri (i, j) kur $1 \leq i, j \leq n$. Pie $n > 1$, kvadrātā ir $4n - 2$ diagonāles, pie kam - divu tipu. Pirmā tipa diagonāles sastāv no visām rūtiņām (i, j) kurām $i + j$ ir konstante, un otrā tipa diagonāles sastāv no rūtiņām, kurām $i - j$ ir konstante.

4. Dots vesels skatlis $n \geq 2$. Aplūkosim $n \times n$ šaha laukumu. Sauksim n torņu izkārtojumu uz laukuma par *miermīlīgu*, ja katra kolonna un katra rinda satur tieši vienu torni. Atrodiet lielāko veselo $k < n$, kuram katrā n torņu izkārtojumā var atrast $k \times k$ kvadrātu, kurš nesatur nevienu torni.

5. Katram naturālam n Keiptaunas banka izlaiž monētas vērtībā $\frac{1}{n}$. Dota galīga Keiptaunas monētu kolekcija (ar, iespējams, vienādām monētām), kuru kopējā vērtība nepārsniedz $99 + \frac{1}{2}$. Pierādiet, ka šīs monētas var sadalīt 100 vai mazāk grupās tā, ka katrā grupā monētu kopējā vērtība nepārsniedz 1.