Задача 1

В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б)* если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

Решение:

В задаче б) легко привести пример "непродолжаемой" расстановки девяти кораблей (рис. а).

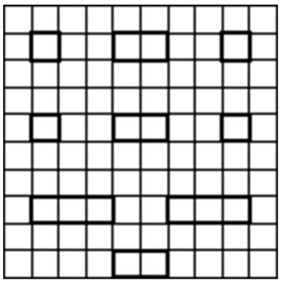
В задаче а) есть "подводный камень": казалось бы достаточно доказать, что найдется место последнему одноклеточному кораблю. Но, на самом деле, нужно доказать, что в процессе расстановки найдется место каждому очередному кораблю.

Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого отметим 8 вспомогательных кораблей 1×3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. б). Каждый из поставленных кораблей может задеть (пересечь или коснуться) не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

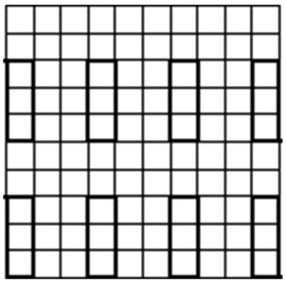
Пусть уже расставлены следующие корабли: 1×4, два 1×3 и меньше трех 1×2. Докажем, что еще один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. в). Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1×1 с интервалом две клетки (рис. г). Поставленные корабли задевают не больше 15 отмеченных.

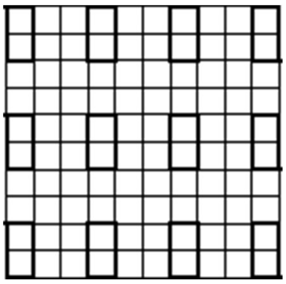
Комментарий. Интересно найти максимальное число одинаковых кораблей, например, 1×4, которые заведомо поместятся.



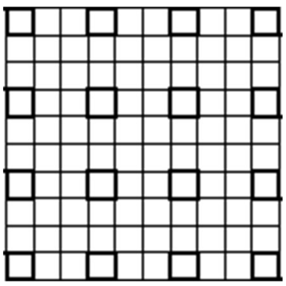
а)



б)



в)



г)

Задача 2

Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных.

Решение:

Лемма. Среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел можно выбрать не более четырех так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Доказательство. Разобьем 13 чисел a , $a+1$, $a+12$ на 9 групп (из одного или двух чисел) и запишем группы по кругу в следующем порядке: $\{a+4\}$, $\{a,a+9\}$, $\{a+5\}$, $\{a+1,a+10\}$, $\{a+6\}$, $\{a+2, a+11\}$,$\{a+7\}$,$\{a+3,a+12\}$, $\{a+8\}$. Если выбрано 5 или более чисел, то некоторые два из них окажутся в одной группе или в соседних группах. Однако из двух соседних групп можно выбрать не более одного числа. Лемма доказана. Отметим 4 средних числа 599, 600, 601, 602, а все остальные числа от 1 до 1200 разобьем на (1200-4)/13=92 группы по 13 последовательных чисел (это возможно, так как 598 делится на 13). Из леммы следует, что в группах по 13 чисел можно выбрать не более $92\cdot 4=372-4$ числа требуемым в условии образом. Значит, отмеченные 4 числа выбраны.

Задача 3

В однокруговом футбольном турнире играли $n>4$ команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков.
а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений.
б) При каком наименьшем n могут не найтись 5 таких команд?

Решение:

Если две команды набрали поровну очков, то разность между количествами ничьих у них кратна трем. Количество ничьих у команды находится в пределах от 0 до $n-1$. Поэтому количество групп, в каждой из которых команды имеют поровну выигрышей, ничьих и поражений, не превосходит $k=[\frac{n+2}{3}]$. Значит, найдется такая группа, состоящая не менее чем из трех команд. Предположим, что все группы состоят из трех или менее команд. Тогда групп ровно k (иначе $n<3k-2$ и $[\frac{n+2}{3}]<k$ – противоречие). Рассмотрим группы с наименьшим и наибольшим количеством ничьих.

Если $n=3k-2$, то у команд первой группы количество ничьих равно 0 , а у команд второй $3k-3$. Значит, команды второй группы свели вничью все игры, в том числе с командами первой группы, у которых нет ничьих, – противоречие.

Если $n=3k-1$ и у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по $l+3k-3$ ничьих, т.е. по $1-l$ результативных встреч. Если $l=1$, то вторая группа может содержать только одну команду, так как две команды сыграли бы вничью с командой первой группы, у которой только одна ничья. Если же $l=0$, то первая группа может содержать лишь одну команду, так как две команды имели бы результативную игру с командой второй группы, у которой результативная игра только одна. Таким образом, одна из этих групп содержит лишь одну команду. Но тогда оставшиеся команды нельзя разбить на k-1 группу, каждая из которых содержит не более трех команд.

Если $n=3k$, то все группы должны содержать ровно по 3 команды. При этом если у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по 2-l результативных игр. Поэтому друг против друга команды этих групп проводят не более чем $3l+3(2-l)=6$ игр – противоречие.

б) Нетрудно составить турнир 10 команд, три из которых имеют по 1 победе и 8 ничьих, четыре – по 2 победы, 2 поражения и 5 ничьих, и еще три – по 3 победы, 4 поражения и 2ничьих.

	1	1	1	1	1	1	3	1	1
1		1	1	1	1	1	1	3	1
1	1		1	1	1	1	1	1	3
1	1	1		0	1	1	0	3	3
1	1	1	3		1	1	0	0	3
1	1	1	1	1		3	3	0	0
1	1	1	1	1	0		3	3	0
0	1	1	3	3	0	0		3	0
1	0	1	0	3	3	0	0		3
1	1	0	0	0	3	3	3	0	

Докажем, что случай $n<10$ невозможен. Так как не все команды имеют поровну побед, ничьих и поражений, найдутся команды, которые выиграли больше встреч, чем проиграли, и команды, которые проиграли больше, чем выиграли. Предположим сначала, что в каждой из этих групп команд количества побед и поражений отличаются на 1, т. е. в одной группе команды одержали x побед, потерпели x-1поражение и $n-2x$ встреч завершили вничью, а в другой эти числа равны соответственно y-1 , y и $n-2y$. Тогда, приравнивая набранные командами очки, получаем, что $x=y-3$. Так как $n-2y\geq 0$, то $n-2x\geq 6$, а поскольку $x\geq 1$, получаем, что $n\geq 8$. Пусть теперь есть команды, у которых разность между количеством побед и поражений по модулю больше 1. Аналогичные рассуждения показывают, что существуют команды, завершившие вничью по крайней мере 9 встреч. Таким образом, неравенство $n \geq 8$ выполнено всегда, а случай $n<10$ возможен, только когда разность между количеством побед и поражений у любой команды по модулю не превышает 1. Предположим, что $n=8$. Тогда, как показано выше, есть k команд, у которых побед на одну больше, чем поражений, k команд, у которых побед на одну меньше, чем поражений, и $8-2k$ команд, у которых побед и поражений поровну. При этом количество ничьих у команд первой группы на 6 больше, чем у команд второй. Это возможно в единственном случае, когда эти команды имеют одну победу и 6 ничьих. Соответственно, у команд второй группы по 3 победы и 4 поражения. Команды первой группы против команд второй проводят k^2 встреч, среди которых нет ничейных (команды второй группы вничью не играли), и не больше чем k результативных (по одной на каждую команду первой группы). Значит, $k^2 \leq k$, т. е. $k=1$ и $n-2k=8-2k>4$ (такой турнир существует). Аналогично доказывается, что $k \leq 2$ при $n=9$, и $n-2k=9-2k>4$.

Ответ:

Задача 4

На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n+1)^2$ попыток?

Решение:

Пусть на листе бумаги осталось $k \geq 1$ неразгаданных точек $c_{k,1}$, $c_{k,2}$, …, $c_{k,k}$. Покажем, как с помощью $2k + 1$ попытки разгадать одну из них. Начертим на листе бумаги отрезок прямой l, не пересекающей отмеченный круг. На этом отрезке так укажем $(k + 1)$ точку $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, …, $a_{k,k+1}$, что $a_{k,j}$ лежит строго между $a_{k,j-1}$ и $a_{k,j+1}$ для всех $j = 2,3, \dots , k$. Пусть Миша назвал для этих точек расстояния $d_{k,1}$, $d_{k,2}$, … , $d_{k,k+1}$ соответственно.

Найдём с помощью циркуля и линейки и укажем такие точки $b_{k,j}$ ($j = 1,2,\dots,k$), что они лежат по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг, и отстоят от точек $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+}$

$_1$соответственно (те индексы j, для которых такую точку $b_{k,j}$ указать невозможно, мы пропускаем).

Докажем, что среди указанных точек $b_{k,j}$ найдётся по крайней мере одна из точек $c_{k,i}$ ($i = 1,2,\ldots,k$). Действительно, по принципу Дирихле найдутся по крайней мере две точки $a_{k,j}$ и $a_{k,m}$ ($1 \le j < m \le k + 1$), для которых ближайшей из неразгаданных точек будет одна и та же точка $c_{k,i}$ для некоторого i ($1 \le i \le k$). Тогда, как нетрудно показать, для любой точки из отрезка $[a_{k,j}, a_{k,m}]$, и в частности для точки $a_{k,j+1}$, точка $c_{k,i}$ также будет являться ближайшей из всех неразгаданных точек. Следовательно, $c_{k,i}$ будет отстоять от точек $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+1}$ соответственно, и лежать по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг. Таким образом, точка $c_{k,i}$ совпадает с одной из указанных нами точек $b_{k,j}$ ($j = 1,2,\ldots,k$). Итак, не более чем за $2k + 1$ попытки можно заведомо разгадать одну из неразгаданных точек.

Докажем индукцией по n, что действуя указанным выше образом для $k = n, n - 1, \ldots, 1$, Коля разгадает все загаданные Мишей точки менее чем за $(n + 1)^2$ попытку. Пусть $n = 1$, тогда указанный выше способ позволяет угадать единственную неразгаданную точку за $3 < (n + 1)^2$ попытки. Предположим, что N неразгаданных точек можно заведомо разгадать менее чем за $(N + 1)^2$ попытку. Пусть $n = N + 1$. Разгадаем одну из загаданных Мишей точек указанным выше способом не более чем за $2N + 3$ попытки. Тогда по предположению индукции, все точки могут быть разгаданы менее чем за $(N + 1)^2 + 2N + 3 = (N + 2)^2$ попыток. Утверждение доказано.

Задача 5

Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

Решение:

Данные прямые не могут пересекать соседние стороны квадрата $ABCD$, так как иначе образуются не два четырехугольника, а треугольник и пятиугольник. Пусть прямая пересекает стороны BC и ADв точках M и N. Трапеции $ABMN$ и $CDNM$ имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как средние линии, т. е. MN делит отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, в отношении 2 : 3. Точек, делящих средние линии квадрата в отношении 2 : 3, имеется ровно четыре. Так как данные девять прямых проходят через эти четыре точки, то через одну из точек проходят по крайней мере три прямые.

Задача 6

Числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

Решение:

Пусть числа выписаны в порядке $a_1, ..., a_{100}$; x_k и y_k – соответственно наибольшие длины возрастающей и убывающей последовательностей, начинающихся с a_k. Предположим, что $x_k \le 10$ и $y_k \le 10$ для всех k. Тогда количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит 100. Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k < l$. Но этого не может быть: если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

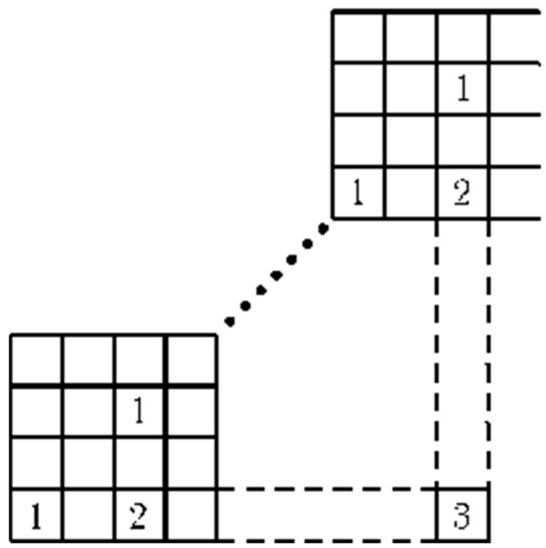
Задача 7

Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Докажите, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

Решение:

Предположим, что нет равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, параллельными сторонами клеток, и вершинами одного цвета. Для удобства можно считать, что раскрашены не узлы, а клетки. Разобьем лист на квадраты со стороной 4; тогда на диагонали каждого такого квадрата найдутся две клетки одного цвета. Пусть число n больше количества различных раскрасок квадрата со стороной 4. Рассмотрим квадрат, состоящий из n^2 квадратов со стороной 4. На его диагонали найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4. Возьмем, наконец, квадрат K, на диагонали которого найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной $4n$.

Рассмотрев квадрат со стороной $4n$ и в нем два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4, получим четыре клетки первого цвета, две клетки второго цвета и одну клетку третьего цвета (см. рис.). Аналогично, рассмотрев квадрат K, получим клетку, которая не может быть ни первого, ни второго, ни третьего цвета.


1
1
2
1
1
2
3