

## Dirihlē princips 1 - Uzdevumi

---

1. *[Hobiti]* 5 hobiti rotaļājās meža pļaviņā. Paugurā pļavas malā bija 3 hobitu alas. Pēkšņi no meža atskanēja orku kaujas saucieni un visi hobiti saskrēja alās. Ko ir iespējams pateikt par hobitu skaitu alās?
  2. *[Vairāk hobitu]* Tas pats jautājums, bet ar 7 hobitiem un 3 hobitu alām?
  3. *[Vēl vairāk hobitu]* Tas pats jautājums, bet ar  $n$  hobitiem un  $m$  hobitu alām?
  4. *[Futbola problēma]* Kurmenistānā ir  $m$  futbola komandas, katrā pa 11 spēlētājiem. Visi šie spēlētāji ir savākušies lidostā, lai dotos uz futbola turnīru uz Turlandi. Lidmašīna veica 10 reisus no Kurmenistānas un Turlandi un katru reizi aizveda  $m$  spēlētājus. Vēl viens spēlētājs nenocietās un aizbrauca uz Turlandi ar autobusu. Pierādiet, ka Turlandē šobrīd vismaz viena no komandām ir pilnā sastāvā!
  5. *[Draugu daudzums]* Pierādiet, ka jebkurā 5 cilvēku kompānijā eksistē divi ar vienādu paziņu skaitu<sup>1</sup> šajā kompānijā!
  6. *[Unikālās atķirības]* Doti 8 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 15. Pierādiet, ka starp šo skaitļu savstarpējām starpībām ir vismaz trīs vienādas!
  7. *[Pārāk daudz karaļu]* Kādu maksimālo daudzumu karaļu var novietot uz šaha laukuma tā, lai neviens no tiem neapdraudētu citu?
  8. *[Pārāk daudz naudas]* Kvadrātā  $1 \times 1$  metrs sameta 51 (punktveida) monētu. Pierādiet, ka ar  $20 \times 20$  cm papīra lapu var pārklāt vismaz 3 monētas!
  9. *[Kliķu neizbēgamība]* Pierādiet, ka starp jebkuriem 6 cilvēkiem eksistē vai nu trīs savstarpēji pazīstami, vai nu trīs savstarpēji nepazīstami!
  10. *[ $3^n$  pēdējie cipari]* Pierādiet, ka eksistē skaitļa 3 pakāpe, kas beidzas ar cipariem 001!
  11. *[Koledžas problēmas]* 11 studenti apmeklē 5 lekcijas (ne obligāti visas). Pierādiet, ka eksistē tādi studenti  $A$  un  $B$ , ka visas lekcijas, ko apmeklē  $A$ , apmeklē arī  $B$ !
  12. *[Kvadrāti no haosa]* Kopa  $A$  sastāv no 2016 dažādiem skaitļiem, visi šo skaitļu pirmreizinātāji ir mazāki par
    - a) 29
    - b) 30
- Pierādiet, ka kopā  $A$  var atrast tādus 4 dažādus skaitļus, ka  $a \cdot b \cdot c \cdot d = n^2$  kādam naturālam  $n$ !
13. *[Bonus uzdevums 1]* Izdomājiet Dirihlē principa vispārinājumu –  $a$  hobiti saskrēja  $b$  alās, un zināms, ka alas maksimālā ietilpība ir  $c$ ...
  14. *[Bonus uzdevums 2]* Vai jūs varat pierādīt Dirihlē principu?

---

<sup>1</sup>šeit un turpmāk uzskatīsim, ka draudzības un pazišanās ir abpusējas