Spēles un Procesi - Uzdevumi

1. [$IMO2009SLC1$] Anna un Beāte spēlē sekojošu spēli. Uz gara galda rindā stāv 2009 kartiņas. Katrai kartiņai viena puse ir melna, bet otra - balta. Sākumā visas kartiņas ir pagrieztas ar melno pusi uz augšu. Katrā gajienā drīkst izvēlēties 50 secīgas kartiņas tā, ka pati labējā ir melna un visas apgriezt uz pretējo pusi. Spēlētāja, kura nevar izdarīt gājienu, zaudē. Anna sāk.

a. Vai šī spēle noteikti beidzas?

b. Vai Annai ir uzvaroša stratēģija šai spēlē?

2. [$IMO2015SLC1$] Līnijzemē ir $n > 1$ ciemati, visi izkārtoti gar vienu ceļu, kas iet no kreisās uz labo pusi. Katram ciematam ir *kreisais buldozers* (novietots uz ceļa pa kreisi no ciemata un pavērsts uz kreiso pusi) un *labais buldozers* (novietots pa labi no ciemata un pavērts uz labo pusi). Šo $2n$ buldozeru izmēri ir dažādi. Katru reizi, kad kreisais buldozers satiek labo buldozeru, lielākais mazāko nostumj no ceļa. Buldozeri brauc tikai uz priekšu, bet pagriezties un uzbraukt atpakaļ uz ceļa nevar. No aizmugures buldozeri ir pavisam neaizsargāti un, ja kāds pielavās citam no muguras, tad nostumj to no ceļa neatkarīgi no izmēra. Satiekot ne-savu ciematu, buldozers to *izlīdzina*.
Pierādiet, ka eksistē tieši viens ciemats, kuru nav iespējams izlīdzināt!

3. [$IMO2012SLC1$] Virknē sarakstīti vairāki pozitīvi veseli skaitļi. Aija pati ar sevi spēlē sekojošu spēli - katrā gājienā viņa izvēlas divus blakusstāvošus skaitļus x un y tā, ka x atrodas pa kreisi no y un $x > y$, un aizstāj šo pāri ar vai nu pāri $(y + 1, x)$ vai pāri $(x - 1, x)$.
Pierādiet, ka šī rotaļa nevar turpināties bezgalīgi!
*Cik gājienus šī spēle var ilgt?

4. [$IMO2011SLC3$] Kopa S satur vismaz divus plaknes punktus. Zināms, ka nekādi trīs no S punktiem neatrodas uz vienas taisnes.
Par *vējdzirnavām* sauksim sekojošu procesu. Sākam ar taisni l, kas iet caur punktu $P \in S$. Rotējam l ap *pagrieziena punktu* P līdz taisne satur vēl kādu punktu $Q \in S$. Tagad S kļūst par pagrieziena punktu un vējdzirnavas turpina griezties. Pierādiet, ka var izvelēties tādus l un P, ka vējdzirnavas apmeklēs katru S punktu bezgalīgi daudz reižu!

5. [$IMO2009SLC5$] Pieci identiski 2-litru spaiņi izkārtoti pa apli. Pelnruškīte un Pamāte spēlē sekojošu spēli. Pamāte savā gājienā no upes iesmeļ krūkā 1 litru ūdens un sadala šo ūdeni pa spaiņiem. Tad gājiens ir Pelnruškītei un viņai atļauts no diviem blakusstāvošiem spaiņiem ūdeni izliet atpakaļ upē. Pamātes mērķis ir panākt, ka kāds spainis pārpildās. Pelnruškītes mērķis ir panākt, lai neviens spainis nepārpildītos.

a. Kura uzvar šajā spēlē, pareizi spēlējot?

b. *Kādiem jābūt spaiņu tilpumiem, lai uzvarētu tā, kura neuzvar ar 2-litru spaiņiem?

6. [$IMO2010SLC4$] Rindā sakārtotas sešas monētu kaudzītes $S_1, S_2, ..S_6$. Sākumā katrā kaudzītē ir viena monēta. Ir pieļaujami divi gājienu veidi:

i. Ja kaudzītē $S_k, 1 \leqslant k \leqslant 5$, ir vismaz viena monēta, to monētu var noņemt un kaudzītei S_{k+1} pievienot divas monētas

ii. Ja kaudzītē $S_k, 1 \leqslant k \leqslant 4$, ir vismaz viena monēta, to monētu var noņemt un samainīt vietām kaudzītes S_{k+1} un S_{k+2}

Vai ir iespējams iegūt situāciju, kad pirmās piecas kaudzītes ir tukšas, bet sestā satur 2010^{2010} monētas?
*Vai tas pats iespējams ar $2010^{2010^{2010}}$ monētām?