

Grafi 2 - Uzdevumi

1. *[Satiksme Emirātos]* Emirātā ir 8 pilsētas. Sultāns grib izbūvēt tādu ceļu¹ sistēmu, ka no katras pilsētas var nonākt citā, braucot cauri ne vairāk kā vienai citai pilsētai, un lai no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļi.

Kads ir mazākais k , kuram tas vienmēr ir iespējams?

2. *[Kliķes atgriežas]* Pierādiet, ka katrā grupā no 6 cilvēkiem vienmēr eksistēs vismaz divas kliķes ar izmēru 3 (3 cilvēku kliķe ir grupa no 3 cilvēkiem, kas vai nu visi viens otru pazīst, vai nu visi viens otru nepazīst)!

3. *[Eilera formula planāriem grafiem]* Grafs ir planārs, ja to var uzzīmēt uz papīra tā, ka šķautnes nekrustojas ārpus virsotnēm.

Pierādiet, ka jebkuram planāram grafam izpildās sakarība $V + F - E = 2$, kur V - virsotņu skaits, E - šķautņu skaits un F - grafa skaldņu skaits (grafa skaldne ir plaknes daļa, kuru norobežo grafa šķautnes, ieskaitot bezgalīgo plaknes daļu, kas atrodas grafa ārpusē, kad tas ir uzzīmēts vienā plaknē)!

4. *[Labirinta pilsēta]* Labirinta pilsētā katrā krustojumā satiekas tieši trīs ielas. Ielas ir izkrāsotas trīs krāsās tā, ka katrā krustojumā satiekas trīs dažādu krāsu ielas. No pilsētas ārā iet tikai trīs ielas.

Pierādiet, ka šīs trīs ielas ir dažādās krāsās!

5. *[Impērijas kartēšana]* Impērija sastāv no daudzām valstīm. Ir zināms, ka neviena valsts nerobežojas ar vairāk kā k citām valstīm (ieskaitot anklāvus). Imperators ir pavēlējis uzzīmēt tādu Impērijas karti, kurā katra valsts ir izkrāsota kādā no $k + 1$ krāsām (anklāvi ir tādā pat krāsā, kā valsts, kurai tie pieder) un nevienas divas valstis, kurām ir kopēja robeža, nav izkrāsotas vienādā krāsā.

Pierādiet, ka tas vienmēr ir iespējams!

6. *[Antiņš un Hidra]* Hidra sastāv no kakliem un galvām (katrs kakls savieno tieši divas galvas). Ar vienu zobena cirtieni var pārcirst visus kaklus, kas iziet no vienas Hidras galvas A . Taču, tā izdarot, tūlīt izaug jauni kakli no galvas A uz visām galvām, ar kurām iepriekš A nebija tiešā veidā savienota ar kakliem. Skaitās, ka Antiņš ir uzveicis Hidru, ja viņam to izdodas sadalīt divās nesavienotās daļās.

Ar kādu mazāko skaitu cirtieni Antiņš var uzveikt simtkaklainu Hidru?

7. *[Bonus uzdevums - Citurzemes ceļi]* Citurzemē bija 2014 pilsētas. Tās bija savienotas ar ceļiem tā, ka aizliedzot iebraukt un izbraukt jebkurā vienā pilsētā, joprojām bija iespējams nonākt no jebkuras pilsētas jebkurā citā (izņemot aizliegto, protams). Citurzemes ķēniņam nepatīk cikliski maršruti. Katru gadu viņš izvēlas kādu ciklisku maršrutu savā karaļvalstī un uzbūvē jaunu pilsētu, ar tiešiem ceļiem savienojot to ar visām izvēlētajā maršruta pilsētām. Pēc tam cikliskā maršruta ceļus slēdz, jo tie nav ķēniņam tīkami.

Pēc vairākiem šādiem gadiem Citurzemē nav palicis neviens ciklisks maršruts. Pierādiet, ka Citurzemē tagad ir vismaz 2014 pilsētas, no kurām iziet tieši viens ceļš!

¹Šeit un citur ar uzskatīsim, ka katrs ceļš savieno divas pilsētas un, krustojoties ārpus pilsētām, ceļi nav savienoti (tiem ir viadukti)