

## Invarianti - Uzdevumi

---

1. *[Spēle uz tāfeles]* Uz tāfeles sarakstīti 2017 skaitļi 1 un 2018 skaitļi  $-1$ . Vienā gājienā atļauts izvēlēties divus skaitļus, kas uzrakstīti uz tāfeles, tos nodzēst un tā vietā uzrakstīt vienu skaitli 1, ja nodzēstie skaitļi bija vienādi un  $-1$ , ja tie bija dažādi.

Kāds būs pēdējais skaitlis, kas būs uzrakstīts uz tāfeles, veicot šādus gājienu?

2. *[Monētu spēle]* Luīzei ir viena monēta. Viņa ir uzgājusi naudas maiņas mašīnu, kura, ievietojot tajā jebkādu monētu, atgriež 5 monētas. Vai ar šīs mašīnas palīdzību Luīze var iegūt tieši 2018 monētas?

3. *[Zirdziņu šahs]* Ja zirdziņš sāk uz lauciņa  $a1$ , vai ir iespējams apciemot katru lauciņu tieši vienu reizi un pabeigt ceļojumu uz lauciņa  $h8$ ?

4. *[Akmentiņu spēle]* Spēles sākumā uz galda ir viena kaudzīte ar 2018 akmentiņiem. Vienā gājienā ir atļauts paņemt vienu kaudzīti, vienu akmentiņu no tās nomest uz grīdas, bet atlikušos sadalīt divās (ne obligāti vienādās) netukšās kaudzītēs, kuras nolikt atpakaļ uz galda.

Vai kādā šīs spēles brīdī ir iespējama situācija, ka katrā akmentiņu kaudzītē, kas atrodas uz galda, ir tieši 3 akmentiņi?

5. *[Apļa spēle]* Seši skaitļi -  $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$  - sarakstīti pa apli. Vienā gājienā atļauts pieskaitīt 1 diviem uz šī apļa blakus stāvošiem skaitļiem.

Vai ir iespējams sasniegt situāciju, kurā visi skaitļi uz šī apļa ir vienādi?

6. *[Picas spēle]* Apaļa pica sastāv no  $n \geq 3$  šķēlēm. Sākumā viena no šķēlēm ir apmesta ar sieru uz leju. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu šķēli, kas ir ar sieru uz leju, apmest to ar sieru uz augšu un divas blakusstāvošās šķēles apmest otrādi.

Kādām  $n$  vērtībām iespējams sasniegt stāvokli, kad visas picas šķēles ir ar sieru uz augšu?

7. *[Zelta kārtis - IMO2007 SLC1]* Uz galda gareniski saliktas 2009 kārtis, katrai viena puse ir melnā, bet otra - zelta krāsā. Sākotnēji visas kārtis pagrieztas ar zelta pusi uz augšu. Divi spēlētāji, stāvot vienā galda malā, spēlē spēli, pamīšus veicot gājienu. Katrs gājiens sastāv no 50 secīgu kāršu izvēles, ar nosacījumu, ka pirmā kārts no kreisās malas jau ir pagriezta ar zelta pusi uz augšu, un tad visu šo izvēlēto kāršu apgriešanu otrādi, tā, ka, ja kārts bija ar zelta pusi uz augšu, tad tagad tā ir ar melnu pusi uz augšu un otrādi. Tas spēlētājs, kurš nespēj veikt valīdu gājienu, zaudē.

a. Vai šī spēle garantēti beidzas?

b. Vai pirmajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija?

8. *[Skaitļu pāru spēle - IMO2012 SLC1]* Uz tāfeles virknē uzrakstīti vairāki naturāli skaitļi. Alise atārtoti veic šādu gājienu - izvēlas blakusstāvošus skaitļus  $x$  uz  $y$  tā, ka  $x > y$  uz  $x$  atrodas pa kreisi no  $y$ , un tas šo pāri  $(x, y)$  nodzēš un tā vietā uzraksta vai nu  $(y + 1, x)$  vai  $(x - 1, x)$ . Pierādiet, ka Alise šo spēli nevar turpināt bezgalīgi.