Задача 1

Школьник сказал своему приятелю Вите Иванову: -- У нас в классе тридцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с одиннадцатью одноклассниками... -- Не может этого быть, — сразу ответил Витя Иванов, победитель математической олимпиады. Почему он так решил?

Решение:

Представим себе, что между каждыми двумя друзьями протянута ниточка. Тогда каждый из 35 учеников будет держать в руке 11 концов ниточек, и значит, всего у протянутых ниточек будет 11 35 = 385 концов. Но общее число не может быть нечётным, так как у каждой ниточки 2 конца.

Задача 2

В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Решение:

Рассмотрим два произвольных города и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью дорог, в которой начало очередной дороги совпадает с концом предыдущей. Каждый из этих двух городов по условию соединен не менее, чем с 7 другими; при этом все упомянутые города различны - ведь если какие-то два из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города.

Таким образом, мы указали не менее 16 городов. Противоречие.

Задача 3

а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

Решение:

а) Если это возможно, то ясно, что проволока идет по ребрам куба без наложения, то есть мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги. Но это невозможно, так как у куба восемь нечетных вершин. б) Поскольку нечетных вершин восемь, то таких кусков нужно не менее четырех.

Задача 4

В стране несколько городов (больше одного); некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой город, проезжая по нескольким дорогам. Кроме того, дороги не образуют циклов, т.е. если выйти из некоторого города по какой-то дороге и далее двигаться так, чтобы не проходить по одной дороге дважды, то невозможно возвратиться в начальный город. Докажите, что в этой стране найдутся хотя бы два города, каждый из которых соединен дорогой ровно с одним городом.

Подсказка:

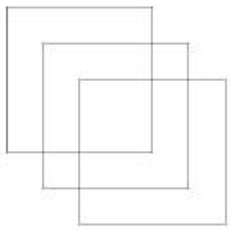
Можно рассмотреть самую длинную цепь из дорог, концы этой цепи будут искомыми городами.

Решение:

Рассмотрим самую длинную цепь из дорог, т.е. возьмем самую длинную последовательность попарно различных городов $A_1,A_2,...,A_k$ такую, что два соседних города в этой последовательности соединены дорогой. Докажем, что из городов A_1 и A_k выходит ровно одна дорога (соответственно в A_2 и A_{k-1}). Пусть, например, из A_1 идет дорога в некоторый город B, отличный от A_2. Если B - один из городов $A_3,...,A_k$, то возникает цикл из дорог, что противоречит условию. Таким образом, город B отличен от городов $A_1,A_2,...,A_k$. Следовательно, в последовательности городов $B,A_1,A_2,...,A_k$ города попарно различны и соседние города соединены дорогой. Но эта последовательность содержит больше k городов вопреки выбору последовательности $A_1,A_2,...,A_k$. Итак, из города A_1 идет ровно одна дорога - в город A_2. Аналогичным образом, из города A_k идет ровно одна дорога - в город A_{k-1}. На языке графов факт, о котором говорится в задаче, формулируется следующим образом: в связном графе, не содержащем циклов (такие графы называются деревьями), найдутся по крайней мере две висячие вершины. Отбрасывая висячие вершины, можно показать, что каждое дерево с n вершинами содержит n-1 ребро.

Задача 5

Можно ли нарисовать эту картинку (см. рис.), не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?



Решение:

Нарисовать эту фигуру можно следующим образом. Пронумеруем три квадрата, из которых состоит фигура. Начнем рисовать первый квадрат с любой его точки до тех пор, пока не дойдем до точки пересечения со вторым квадратом. Затем прерываем обход первого квадрата и рисуем второй до тех пор, пока не дойдем до его точки пересечения с третьим. Затем рисуем полностью третий квадрат, окончив дорисовываем второй, затем — первый. Каждый раз мы будем оканчивать рисовать квадрат в той же точке, в которой начинали, то есть в точке пересечения с предыдущим квадратом.

Задача 6

На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

Подсказка:

Число выходящих стрелок равно числу вершин многоугольника.

Решение:

Пусть n - число сторон данного многоугольника, а k - число вершин, в которые входит по две стрелки. Всего стрелок - n, из них 2k стрелок входят в данные k вершин, остальные n-2k стрелок входят еще в n-2k вершин (в каждую - по одной штуке). Остается n-k-(n-2k)=k вершин, в которые не входит ни одной стрелки, т.е. из которых выходит по две стрелки.

Задача 7

30 команд сыграли турнир по олимпийской системе. Сколько всего было сыграно матчей?

Решение:

29 - столько же, сколько выбывших команд.

Задача 8

Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)? (Задача с сайта www.cryptography.ru.)

Подсказка:

Указание - оцените снизу число минимально необходимых линий связи и постройте пример сети соединений, показывающий достижимость оценки.

Решение:

Для того, чтобы сохранилась связь при выходе из строя любых двух узлов, необходимо, чтобы в каждый узел входило не менее трех линий связи. Ситуация, когда некоторый узел A соединен с двумя (или менее) узлами B и C недопустима, так как при выходе из строя узлов B и C узел A становится недоступным. Таким образом, всего линий связи должно быть не менее 10*3/2=15. Возможный пример с 15 линиями связи - это каркас пятиугольной призмы (10 вершин - это узлы, а ребра - это линии связи). Если вышли из строя два узла на одном пятиугольнике - основании призмы, то связь сохранится через другой пятиугольник. Если вышли из строя по одному узлу на разных пятиугольниках, то связь сохранится по боковым ребрам призмы.