I C 3. ANALYTISCHE ZAHLENTHEORIE

VON

PAUL BACHMANN

IN WEIMAR.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

S. unter I C 1. Das einzige bisher vorhandene Lehrbuch über das Gebiet ist *P. Bachmann,* Zahlentheorie 2. Teil: Die analytische Zahlentheorie, Leipzig 1894. Vgl. *Lej.-Dirichlet,* Vorl. herausg. v. *Dedekind,* 4. Aufl., Braunschweig 1894.

1. Zerfällung der Zahlen (ihre additiven Darstellungen). *Die analytische Zahlentheorie* giebt die zahlentheoretischen Untersuchungen, die auf analytischen Betrachtungen beruhen, elliptische Funktionen ausgeschlossen, worüber I C 6, II B 6 a zu sehen. Solche stellte zuerst *L. Euler* an *in zweifacher Richtung.*

Erstens[1]). Die additive Darstellung der Zahlen aus Teilen bestimmter Art (*Zerfällung, partitio numerorum*) ruht auf der Entwick-

1) *L. Euler*, Introd. in anal. infin. 1, Laus. 1748, deutsch von *A. C. Michelson,* Berl. 1788/90, *H. Maser,* Berl. 1885, cap. 16 oder Comment. arithm. coll. 1, p. 73, 391 = Petrop. N. Comm. 3, 1750/51, p. 125; 14, 1769, p. 168.

lung unendlicher Produkte[2]), wie $\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i z)$, $\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i z}$ u. s. w. nach den Potenzen von x und z. So folgen u. a. die *Sätze:* Jede positive ganze Zahl kann ebenso oft in verschiedene, als in gleiche oder verschiedene aber ungerade Summanden, und so oft in h verschiedene Summanden zerfällt werden, als sie in die ersten h mindestens einmal genommenen Zahlen zerfällt[3]). Ferner der *Pentagonalzahlensatz:* Die Anzahl der Zerfällungen von n in eine gerade Anzahl ist gleich der Anzahl derjenigen in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden, ausser wenn $n=\frac{3h^2+h}{2}$, wo für h gerade oder ungerade sie um 1 grösser resp. kleiner ist[4]). *K. G. J. Jacobi* gewann mittels elliptischer Funktionen, später direkt eine Gleichung[5]), aus der Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl $24k+3$ in die Summe dreier Quadratzahlen [I C 2, Nr. **d**, 7)] fliessen. Auch bewies er (J. f. Math. 32, 1846, p. 164 = Werke 6, p. 303), später *F. Franklin* (Par. C. R. 92, 1881, p. 448) den Pentagonalzahlensatz *arithmetisch*, wie *K. Th. Vahlen*[6]) eine Menge Sätze über bestimmte Zerfällungen und die Beziehungen der betreffenden Anzahlen zu einander. Z. B.: Unter den Zerfällungen von n in verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der letztern h ist, giebt es gleichviel in eine gerade wie in eine ungerade Anzahl Summanden, ausser wenn $n=\frac{3h^2-h}{2}$, wo für gerades oder ungerades h es eine gerade resp. ungerade mehr giebt. *Euler*'s betreffender Satz folgt durch Summation über die zulässigen h. Auch findet so u. a. *Vahlen* eine von *J. Liouville* [J. de math. (2) 1, 1856, p. 349] gegebene Rekursionsformel für die Teilersumme ungerader Zahlen.

Euler gab für die Summe $\int(n)$ [I C 1, Nr. **1**] aller Teiler von n die Formel:

---

2) Über die Konvergenz solcher Produkte s. *A. Pringsheim,* Math. Ann. 33, 1889, p. 119; s. auch I A 3, Nr. **42**.

3) Zur Bestimmung der Anzahl der Zerfällungen von n in h gleiche oder verschiedene Summanden aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ haben *F. Brioschi, J. J. Sylvester, P. Volpicelli* (Ann. sci. mat. fis. 8 (1857), p. 5, 12, 22) und *Faà di Bruno* (J. f. Math. 85 (1878), p. 317, Math. Ann. 14 (1879), p. 241) Methoden gegeben.

4) *Euler,* Petr. N. Comm. 3 (1750/51), p. 125 = Comm. Ar. 1, p. 73 und 5 (1754/55), p. 75 = Comm. Ar. 1, p. 234. Historische Angaben darüber bei *Jacobi,* J. f. Math. 32 (1846), p. 164 = Werke 6, p. 303.

5) J. f. Math. 21 (1840), p. 13 = Werke 6, p. 281.

6) *K. Th. Vahlen,* J. f. Math. 112 (1893), p. 1.