

Leonhard Euler und die 7 Brücken von Königsberg

15

Die russische Stadt Kaliningrad hieß bis 1945 Königsberg und der Fluss Pregolja, an dem Kaliningrad liegt, hieß zu Königsberger Zeiten die Pregel. Mit der Stadt Königsberg und diesem Fluss verbindet sich ein altes mathematisches Rätsel, das den Anlass zur Entstehung völlig neuer mathematischer Teilgebiete, der Graphentheorie und der Topologie, gab. Alles begann damit, dass der große Mathematiker Leonard Euler im Jahre 1736 dieses Rätsel zur Veranschaulichung eines von ihm gelösten mathematischen Problems benutzte. Man nennt dieses Rätsel bzw. die ihm korrespondierende mathematische Verallgemeinerung das *Sieben-Brücken-Problem von Königsberg*.

15.1 Das Sieben-Brücken-Problem von Königsberg

Das alte Rätsel ging folgendermaßen:

In der alten preußischen Stadt Königsberg wurde die Pregel in der folgenden Weise von sieben Brücken überspannt:

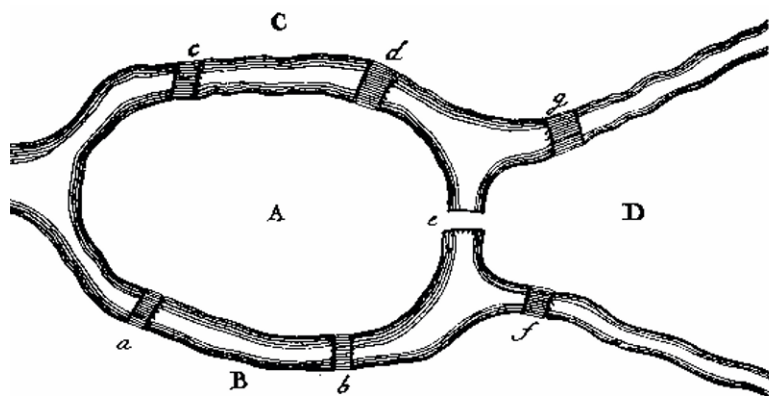


Bild 15-1: Skizze der 7 Brücken von Königsberg

Diese Skizze stammt von Euler selber, Sie finden sie – und viele Erläuterungen dazu – auf der sehr interessanten Seite: www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Koenigsb

Die Frage war: Ist es möglich, durch die Stadt zu gehen, dabei jede Brücke genau einmal zu überqueren und zum Ausgangspunkt zurück zu kommen? Es gelang niemanden in Königsberg, solch einen Weg zu finden, aber es wurde immer wieder probiert. Bis es Leonhard Euler 1736 gelang, zu beweisen, dass solch ein Weg nicht existiert. Er argumentierte folgendermaßen:

Angenommen solch ein Weg wäre möglich und ein Fußgänger würde ihn gehen. Wie oft wäre dieser Fußgänger auf der Insel A? Einmal? Nein, denn dann hätte er nur zwei der 5 Brücken benutzt, die zur Insel A führen. Zweimal? Wieder nein, dann wären erst 4 Brücken »verbraucht«. Dreimal? Immer noch nein, denn dafür wären 6 Brücken nötig, die ja alle nur einmal begangen werden dürfen. Also ist kein Weg der geforderten Art möglich. So leicht löste Euler dieses alte Problem.

Natürlich hat das Königsberger Brückenproblem keine besondere wissenschaftliche Bedeutung, aber die Ideen, die Euler zur Lösung dieses Problems entwickelte, gaben den Anstoß zur Entstehung einer ganz neuen mathematischen Disziplin, der Graphentheorie. Die Graphentheorie spielt in der Informatik eine äußerst wichtige Rolle. Man benötigt sie unter anderem

- bei der Modellierung von Netzwerken,
- bei der Darstellung von Abhängigkeiten in Produktions- und Logistikprozessen,
- bei der Organisation und Strukturierung von komplexen und großen Datenbeständen,
- bei Navigationsproblemen in Datenbanken,
- bei der Strukturierung und Analyse von Ausdrücken, die nach bestimmten Grammatikregeln gebildet sind (z.B. Überlegen Sie beispielsweise, wie Sie ein Programm schreiben würden, dass Ausdrücke der Art $-3 - 4 + 5 \cdot (4 + 2 \cdot 7)$ «versteht» und die richtige Antwort 83 berechnet),
- bei der theoretischen Fundierung und praktischen Durchführung des so genannten Data-Mining, bei dem es um die Analyse von Datenbeständen geht,
- bei der Planung von kürzesten Routen von Handlungsreisenden, die zunächst nur wissen, welche Städte sie besuchen wollen. (Was hat das mit Informatik zu tun? Haben Sie ein bisschen Geduld).

Wir wollen daher die Argumente von Euler ein bisschen genauer untersuchen.

15.2 Eulers allgemeine Lösung

Euler sah, dass das Königsberger Brückenproblem mit Brücken überhaupt nichts zu tun hat, sondern vielmehr durch das folgende abstrakte Diagramm vollständig beschrieben wird. Dieses Bild zeigt das, was wichtig ist: Es gibt 4 Orte, die durch 7 Brücken verbunden sind. Eulers Beweis beruht einfach auf der Tatsache, dass ein Spaziergang durch die Stadt notwendigerweise eine gerade Anzahl von Brücken hin zur Insel A benötigt, aber A hat eine ungerade Anzahl von Brücken, die auf ihr münden.

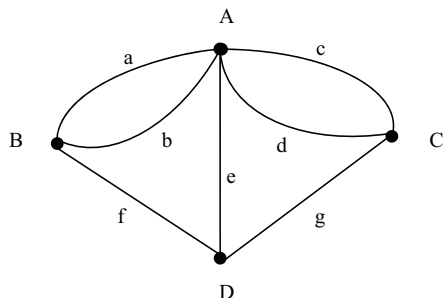


Bild 15-2: Graph für die 7 Brücken von Königsberg