

Matemática Discreta

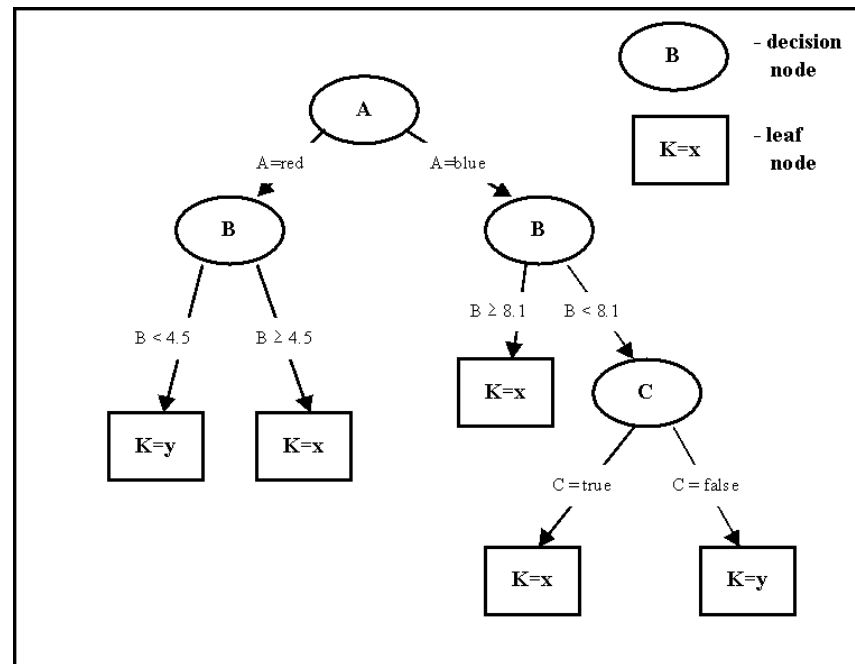
Leandro Colombi Resendo

Grafos e Árvores

- Grafos e Suas Representações
- Árvores e suas Representações
- Árvores de Decisão
- Códigos de Huffman

Grafos e Suas Representações

Definição: Uma **árvore de decisão** é uma árvore na qual os nós internos representam ações, os arcos representam os resultados de uma ação e as folhas representam resultados os finais.



Grafos e Suas Representações

Algoritmos de Busca

Busca sequencial

O que significa o comprimento da raiz até uma folha?

Qual a altura de uma árvore de decisão de um algoritmo de busca sequencial?

Grafos e Suas Representações

Algoritmos de Busca

Busca binária

Qual a altura de uma árvore de decisão de um algoritmo de busca binária para uma árvore cheia?

Ex: pense em uma árvore de decisão para uma busca binária em uma lista de 8 elementos.

Lembrar: no contexto de árvores binárias, os significa $1 + \lfloor \log n \rfloor$

Grafos e Suas Representações

Algoritmos de Busca

Busca binária

Qual a altura de uma árvore de decisão de um algoritmo de busca binária para uma árvore cheia?

Qual a altura de uma árvore de decisão de um algoritmo de busca binária?

Ex: desenhe um árvore de decisão para um algoritmo de busca binária para um conjunto de 5 elementos.

Grafos e Suas Representações

Cotas inferiores para Algoritmos de Busca

- 1) Qualquer árvore binária de altura d tem, no máximo, $2^{d+1} - 1$ nós.
- 2) Qualquer árvore binária com m nós tem altura $\geq \lfloor \log m \rfloor$

Prova “2”: Suponha árvore binária com m nós tem altura $d < \lfloor \log m \rfloor$, ...

Grafos e Suas Representações

Teorema sobre a Cota Inferior para um Algoritmo de Busca

“Qualquer algoritmo que resolva um problema de busca em uma lista com n elementos comparando o elemento desejado x com os elementos na lista tem que fazer, pelo menos, $\lfloor \log n \rfloor + 1$ comparações no pior caso.”

Note que o algoritmo de busca binária não faz mais do que a quantidade **mínima** de operações, assim ele é um **algoritmo ótimo** (para o pior caso).

Grafos e Suas Representações

Árvore de Busca Binária

- 1) 1º elemento é a raiz
- 2) Elemento menor que o nó filho à esquerda
- 3) Elemento maior que o nó filho à direita

Construir uma árvore binária para a sequência:

- a) 5, 8, 2, 12, 10, 14, 9
- b) 9, 12, 10, 5, 8, 2, 14
- c) 12, 9, 14, 5, 10, 8, 2
- d) Qual a altura dessas árvores?

Grafos e Suas Representações

Algoritmo de Ordenação

Ex: Desenhe uma árvore de decisão para um algoritmo de ordenação, para 3 elementos. Considere um algoritmo pouco esperto (ignorando a transitividade de $<$).

OBS: Note que uma folha representa o resultado final, isto é, as folhas representam as possibilidades de arranjos ordenados dos n elementos ($n!$).

Seja p o nº de folha da árvore de altura d , então $p \leq 2^d$ (exercício)
 $\rightarrow \log p \leq d$, se d é inteiro então $d = \lceil \log p \rceil$

Grafos e Suas Representações

Algoritmo de Ordenação

Seja p o nº de folhas da árvore de altura d ,
então $p \leq 2^d$ (exercício)

→ $\log p \leq d$, se d é inteiro, então
 $d = \lceil \log p \rceil \geq \lceil \log n! \rceil$ (pois $p \geq n!$)

Teorema sobre Cotas Inferiores para Algoritmos de Ordenação: Qualquer algoritmo que ordena uma lista de n elementos comparando pares de elementos na lista tem que fazer, pelo menos, $\lceil \log n! \rceil$ comparações no pior caso.

Lista Mínima de Exercícios

Seção 5.3: 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23.