Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Princípio da indução matemática

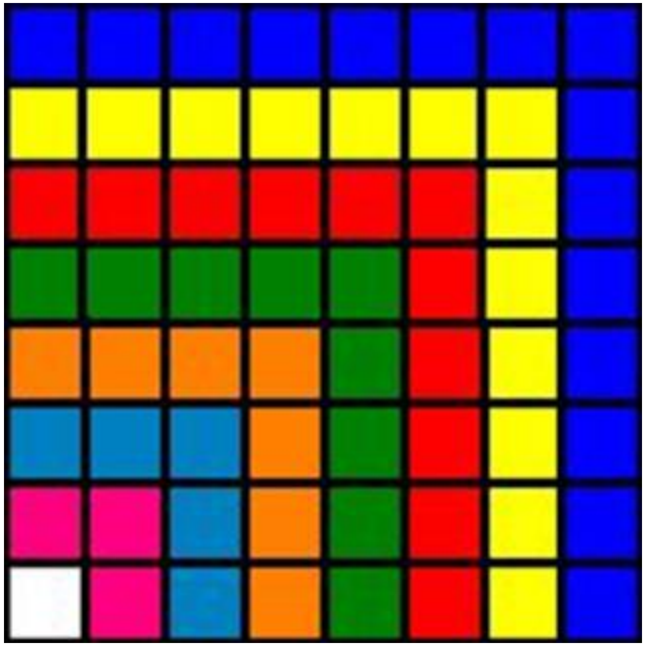
Imagine a seguinte situação

$P(1) : 1 = 1^2$

$P(2) : 1 + 3 + = 2^2$

$P(3) : 1 + 3 + 5 = 3^2$

$P(4) : 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$



http://formatematica.blogspot.com/2010/11/soma-dos-primeiros-numeros-impares.html

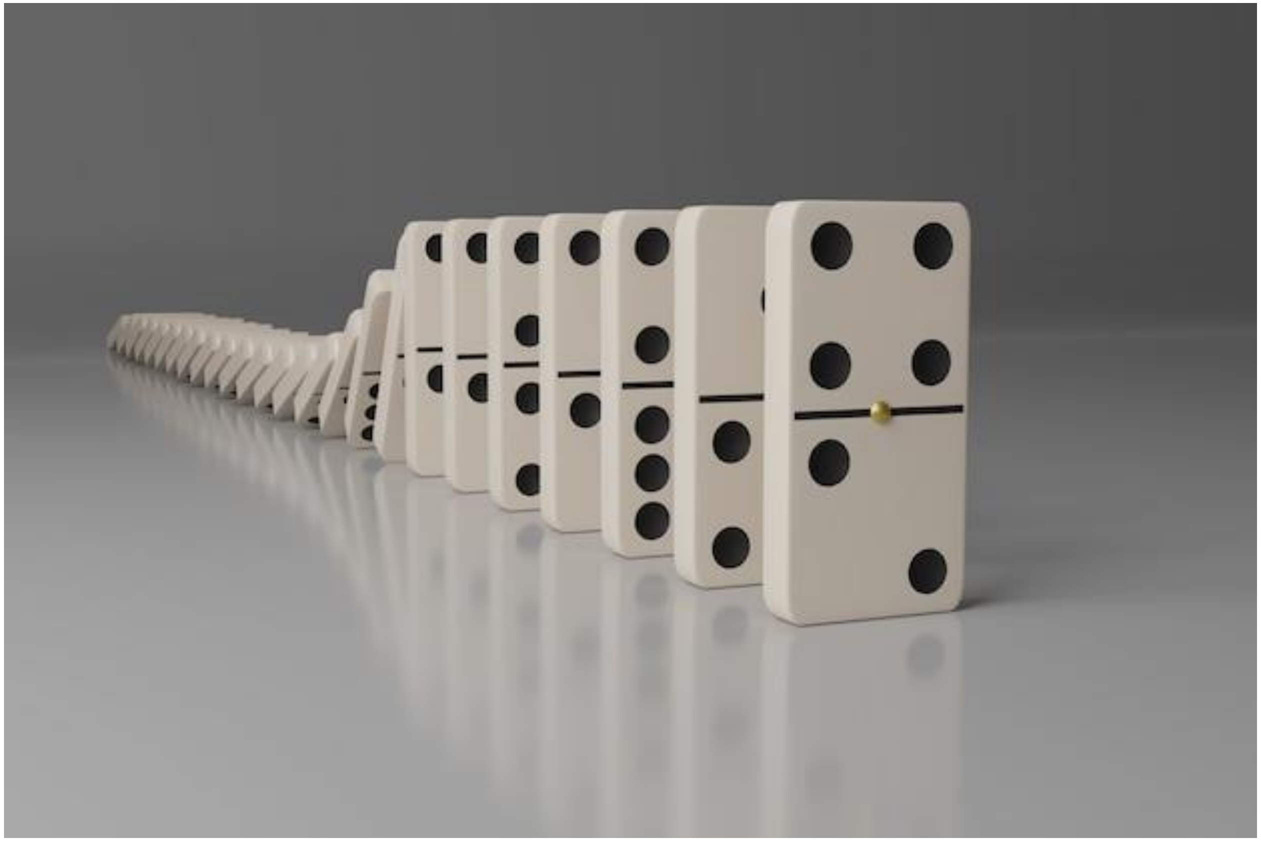
Parece que

$P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para todo $n \in IN^*$.

Indução

1. Você consegue derrubar o primeiro dominó. (proposição)
2. Se um dominó cair então o próximo também cairá (condicional)

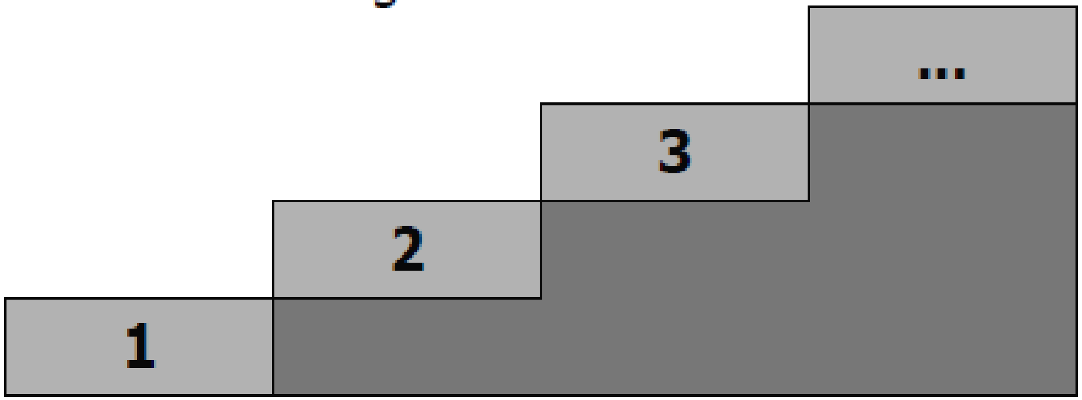
INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica



Indução

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau. (proposição)
2. Uma vez chegando a um degrau, você é capaz de chegar ao próximo. (condicional)

- Nesse caso, ambas as hipóteses são necessárias. Se apenas a primeira fosse V, não teríamos a garantia de passar do primeiro degrau.
  - Se apenas a 2ª fosse V, poderíamos não ser capazes de começar nunca.
- Numerando os degraus...



- Seja uma propriedade de que cada número que identifica o degrau possa ter.
  - Ao invés de chegar a um degrau arbitrário, podemos buscar um número inteiro positivo que tenha essa propriedade.

Indução

Escrito formalmente...

Primeiro Princípio de indução Matemática

Dada uma propriedade P:

1. *P(1) é verdade* *(base da indução)*
2. *$(\forall k)[P(k)$ verdade $\rightarrow P(k+1)$ verdade]* *(passo indutivo)*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Resumo	
Passo 1	Prove a base da indução
Passo 2	Suponha P(k)
Passo 3	Prove P(k+1)

Exemplo 1: Mostre que

$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Provando a base da indução: $P(1): 1 = 1^2 = 1$

Suponha válido para $P(k)$

$P(k): 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) = k^2$

Mostrar para $P(k+1)$

$P(k+1)$:1 + 3 + ⋯ + (2k−1)+ (2[k+1] -1) = $(k+1)^2$

1 + 3 + ⋯ + (2k−1)+ (2[k+1] -1) =

Usando a hipótese de indução

$k^{2} +\ 2k+1\ =$

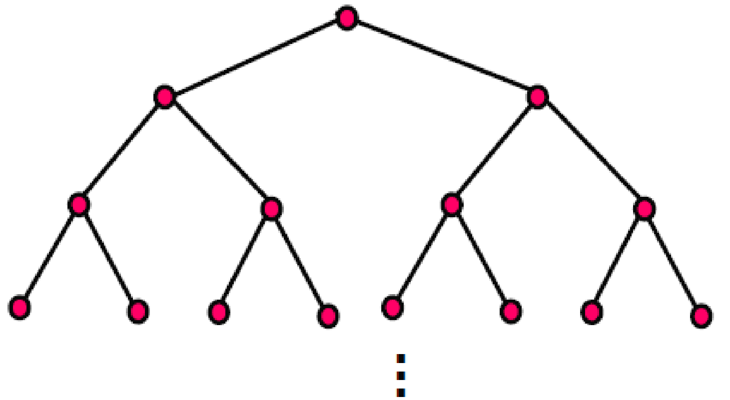
$(k+1)^2 = (k+1)^2$ cqd.

Resumo	
Passo 1	Prove a base da indução
Passo 2	Suponha P(k)
Passo 3	Prove P(k+1)

Exemplo 2:

Em uma árvore binária o número de elementos do nível n é igual 2^n.

OBS: Considere a raiz como nível 0.



Nivel 1 : $2^1 = 2$
Nivel 2 : $2^2 = 4$
Nivel 3 : $2^3 = 8$

$\vdots$

Nivel n : 2^n

Provando a base da indução: $P(1) = 2^1 = 2$

Suponha válido para $P(k) = 2^k$
mostrar para $P(k+1) = 2^{k+1}$
Vamos

$P(k+1) = 2.P(k) = 2.2^k = 2^{k+1}$, cqd

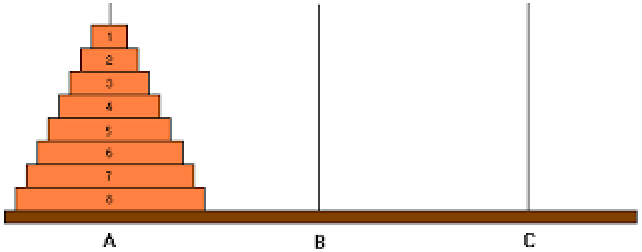
Torre de Hanói é um quebra-cabeça que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três

Objetivo: mover todos os discos para o pino da direita.

Regras: clicando e arrastando com o mouse, você deve mover um disco de cada vez, sendo que um disco maior nunca pode ficar em cima de um disco menor.

http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/

https://www.matematica.br/programas/hanoi/index.html



Indução

Ex: (**Torre de Hanói**) “Consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação”[1]. Prove:

a) É possível mover todos os anéis para um dos pinos vazios;
b) É possível fazer isso com $2^n - 1$ movimentos.

[1] fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanói

Indução

Exemplo 3: Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

Exemplo 4: Prove que, para qualquer inteiro positivo n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$.

Exemplo 6: Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

Indução

Exemplo 7: Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

Passo 1: P(4) OK!

Passo 2: Suponha que $k^2 > 3k$ e mostre que $(k+1)^2 > 3(k+1)$

Passo 3: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ (por hipótese)

$> 3k + 2k + 1$ (como $k \geq 4$)

$\geq 3k + 8 + 1$ ...

Indução

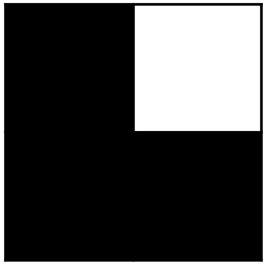
Exercício 1 : Prove que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

Indução

Prova geométrica

Exemplo 8: Mostrar que, para qualquer inteiro positivo n, se removermos um quadrado de um tabuleiro originalmente com 2^n x 2^n quadrados, ele pode ser ladrilhado com “ângulos de ferro”.

ângulo de ferro:



Indução

Para lembrar:

Primeiro Princípio de indução Matemática

Dada uma propriedade P:

1. *$P(1)$ é verdade*
2. *$(\forall k)[P(k)$ verdade $\rightarrow P(k+1)$ verdade$]$*

Então $P(n)$ é verdade para todo inteiro positivo n.

Segundo Princípio de indução Matemática

1. *$P(1)$ é verdade*
2. *$(\forall k)[P(r)$ verdade para todo r, $1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1)$ verdade$]$*

Então $P(n)$ é verdade para todo inteiro positivo n.

Exemplo 1: Prove que, para todo $n \geq 2$, n é um primo ou é produto de primos.

Exemplo2 : A sequência de Fibonacci é dada por:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n > 1 \end{cases}$$ (Relação de recorrência)

Mostre que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 1$$

Exemplo 3:

Prove que qualquer quantia, para franquia postal, maior ou igual a 8 centavos pode ser conseguida usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos.

Lista Mínima de Exercícios

Seção 2.2: 3, 5, 9, 13, 15, 22, 23, 28, 31, 33, 38, 42, 45, 49, 55, 61, 67 e 69.