

### 3.6 - Derivadas de Funções Logarítmicas

Do mesmo modo que usamos a derivação implícita para obter as derivadas de funções trigonométricas inversas, podemos obter a derivada de logaritmos, pois também são funções inversas.

Para o logaritmo base 'a', se  $y = \log_a x$ , então  $a^y = x$ . Derivando implicitamente, temos  $\frac{d}{dx} a^y = \frac{d}{dx} x \Rightarrow \frac{d}{dy} a^y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \ln a \cdot a^y \cdot y' = 1$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a \cdot a^y} \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

E para o logaritmo natural fica:

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

**EXEMPLO 1** Derive  $y = \ln(x^3 + 1)$ .

**3**

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx} [\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

**EXEMPLO 2** Encontre  $\frac{d}{dx} \ln(\sin x)$ .

**EXEMPLO 3** Derive  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

**EXEMPLO 4** Derive  $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$ .

**EXEMPLO 5** Encontre  $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ .

**EXEMPLO 6** Encontre  $f'(x)$  se  $f(x) = \ln|x|$ .

4

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

## Derivação Logarítmica

**EXEMPLO 7** Derive  $y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$ .

### Passos na Derivação Logarítmica

1. Tome o logaritmo natural em ambos os lados de uma equação  $y = f(x)$  e use as Propriedades dos Logaritmos para simplificar.
2. Derive implicitamente em relação a  $x$ .
3. Isole  $y'$  na equação resultante.

$$y' = y \cdot \frac{d}{dx} \ln|y|$$

Com a derivação logarítmica é simples demonstrar o caso mais geral da regra da potência. Se  $y = x^n$ , então

$$y' = y \cdot \frac{d}{dx} \ln|y| \Rightarrow y' = x^n \cdot \frac{d}{dx} \ln|x|^n, x \neq 0$$

$$\Rightarrow y' = n \cdot x^n \cdot \frac{d}{dx} \ln|x|$$

$$\Rightarrow y' = n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}, x \neq 0$$

Para  $x = 0$  é facilmente demonstrado a partir da definição de derivada.

**EXEMPLO 8** Derive  $y = x^{\sqrt{x}}$ .