

Bacharel em Sistemas de Informações
Matemática Discreta – Lista de Exercícios

1) Use Indução matemática para provar que as seguintes proposições são verdadeiras.

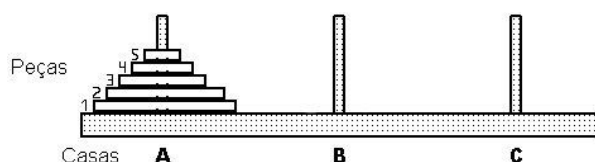
- a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$; para $n \geq 1$
- b) $n^2 > 2n$; para $n > 2$
- c) $2^{3n} - 1$ é divisível por 7

2) Considere a seguinte propriedade dos números da Sequência de Fibonacci.

$$F(n+6) = 4F(n+3) + F(n); \text{ para } n \geq 1$$

- a) Demonstre que essa propriedade é verdadeira usando apenas a definição da sequência
- b) Demonstre que essa propriedade é verdadeira usando o 1º Princípio de Indução
- c) Demonstre que essa propriedade é verdadeira usando o 2º Princípio de Indução

3) Considere o problema da torre de Hanói para n discos:



Resolve Hanoi (n)

Se ($n = 1$) faça

um movimento no disco para mudar de pino

Se ($n > 1$) faça

Resolve Hanoi ($n - 1$)

um movimento do disco n para o pino vazio

Resolve Hanoi ($n - 1$)

- a. Escreva a equação recorrente do processo recursivo que resolve o problema da torre de Hanói.
- b. Resolva essa recorrência para descobrir o número de movimento necessário para resolver o problema da torre de Hanói

4) Considere o algoritmo abaixo.

Cálculo(inteiro a , inteiro não-negativo n)

1. Variáveis inteiras i, j
2. $i = 1$
3. $j = a + 1$
4. **Enquanto** $i \neq n$ **faça**
5. $j = j + (i + 1)$
6. $i = i + 1$
7. **Fim Enquanto**
8. **retorne** j

a) Encontre a expressão matemática que represente o valor de j desse algoritmo. Isso dará uma conjectura para a invariante do laço.

Sugestão: Use o teste de mesa

b) Prove que a invariante do laço

c) Considerando a invariante do laço, apresente o resultado final do algoritmo.

5) Resolva a relação de recorrência dada, sujeita às condições básicas.

a) $T(1) = 3$

$T(n) = T(n/2) + n$ para $n \geq 2$, $n = 2^m$.

b) $A(1) = 1$

$A(n) = A(n - 1) + n$ para $n \geq 2$.

c) $S(1) = 1$

$S(n) = 2S(n/2) + 1$ para $n \geq 2$, $n = 2^m$.

d) $S(1) = 1$

$S(n) = nS(n - 1) + n!$ para $n \geq 2$.

6) Considerando o algoritmo de Ordenação por Fusão (Merge Sort):

a) Escreva a relação de recorrência para o número de comparações desse algoritmo.

b) Resolva essa relação de recorrência.