5.4 Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

Vimos na Seção 5.3 que a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método muito poderoso para calcular a integral definida de uma função, desde que possamos encontrar uma primitiva dessa função. Nesta seção, vamos introduzir uma notação para primitivas, rever as fórmulas para as primitivas e então usá-las para calcular integrais definidas. Também reformularemos o TFC2, para torná-lo mais facilmente aplicável a problemas da ciência e engenharia.

Integrais Indefinidas

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as primitivas e as integrais definidas. A Parte 1 diz que se f é contínua, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f. A Parte 2 diz que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrado calculando-se $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de f e é chamada **integral indefinida**. Logo,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x).}$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante C).

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma *função* (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Parte 2 do Teorema Fundamental: se f é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de primitivas de funções. Portanto, vamos apresentar de novo a Tabela de Fórmulas de Primitivação da Seção 4.9, com algumas outras, na notação de integrais indefinidas. Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Lembre-se de que, pelo Teorema 4.9.1, a primitiva mais geral *sobre um dado intervalo* é obtida adicionando-se uma constante a uma dada primitiva. **Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo**. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\[2mm] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 1 Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUÇÃO Usando nossa convenção e a Tabela 1, temos

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C$$

$$= 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C$$

Você pode verificar essa resposta derivando-a.

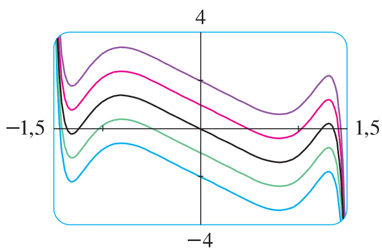


FIGURA 1

A integral indefinida no Exemplo 1 tem seu gráfico traçado na Figura 1 para vários valores de C. Aqui o valor de C é a intersecção com o eixo y.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUÇÃO Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \operatorname{cossec}\theta\ \operatorname{cotg}\theta\ d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

EXEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando o TFC2 e a Tabela 1, temos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\bigg]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75$$

Compare esse cálculo com o Exemplo 2(b) da Seção 5.2.

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

A Figura 2 mostra o gráfico do integrando no Exemplo 4. Sabemos da Seção 5.2 que o valor da integral pode ser interpretado como a área resultante: soma de áreas com o sinal de mais menos a área com sinal de menos.

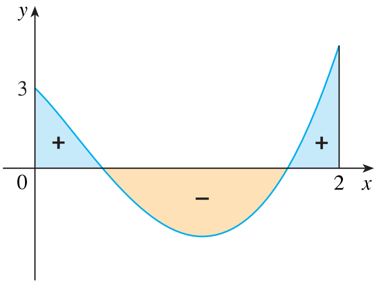


FIGURA 2

SOLUÇÃO O Teorema Fundamental fornece

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\operatorname{tg}^{-1}x\bigg]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\operatorname{tg}^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\operatorname{tg}^{-1}2$$

Esse é o valor exato da integral. Se uma aproximação decimal for desejada, poderemos usar uma calculadora para aproximar $\operatorname{tg}^{-1}2$. Fazendo isso, obtemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0{,}67855$$

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUÇÃO Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$
$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\bigg]_1^9$$
$$= \left(2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}\cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Aplicações

A Parte 2 do Teorema Fundamental diz que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f. Isso significa que $F' = f$, de modo que a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, crescer, decrescer e, então, crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a *variação total* em y.] Logo, podemos reformular o TFC2 em palavras da forma a seguir.

Teorema da Variação Total A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais discutidas na Seção 3.7. Aqui estão alguns exemplos dessa ideia:

- Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

 é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

- Se $[\mathrm{C}](t)$ for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

 é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

- Se a massa de uma barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear é $\rho(x) = m'(x)$. Logo,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

 é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

- Se a taxa de crescimento populacional for dn/dt, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

 é a alteração total da população no período de tempo de t_1 a t_2. (A população cresce quando ocorrem nascimentos e decresce quando ocorrem óbitos. A variação total leva em conta tanto nascimentos quanto mortes.)

- Se $C(x)$ é o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada de $C'(x)$. Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

 é o crescimento do custo quando a produção está aumentando de x_1 a x_2 unidades.

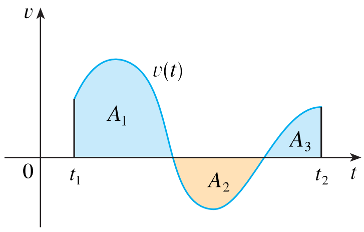
- Se um objeto se move ao longo de uma reta com a função de posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$, logo

$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento,* da partícula durante o período de tempo de t_1 a t_2. Na Seção 5.1 conjecturamos que isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora demonstramos que é sempre verdade.

Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geqslant 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leqslant 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade escalar. Portanto,

$$\boxed{3} \qquad \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distância total percorrida.}$$



$$\text{Deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termo de áreas sob uma curva velocidade.

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).
(a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Encontre a distância percorrida durante esse período de tempo.

SOLUÇÃO
(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$, logo, $v(t) \leqslant 0$ no intervalo $[1, 3]$ e $v(t) \geqslant 0$ em $[3, 4]$. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

Para integrarmos o valor absoluto de $v(t)$, usamos a Propriedade 5 das integrais da Seção 5.2 para dividir a integral em duas partes, uma onde $v(t) \leqslant 0$ e outra onde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$

EXEMPLO 7 A Figura 4 mostra o consumo de energia por um dia em setembro em São Francisco (P é medido em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia consumida naquele dia.

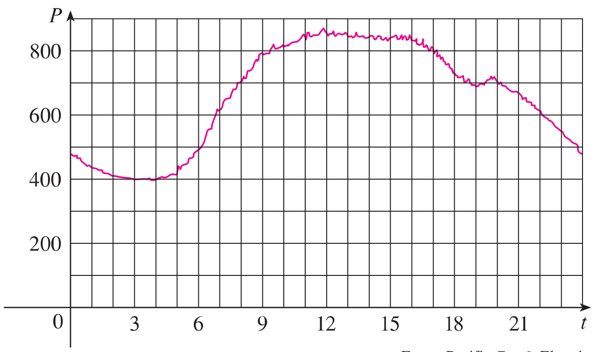


FIGURA 4

Fonte: Pacific Gas & Electric

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia: $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia consumida naquele dia. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\quad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15.840.\end{aligned}$$

A energia usada foi aproximadamente 15.840 megawatts-hora.

Uma observação sobre unidades Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e Δt, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\,dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 Exercícios

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Encontre a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$

7. $\displaystyle\int \left(x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2\right)dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1{,}8y^2 - 2{,}4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (u + 4)(2u + 1)\,du$

10. $\displaystyle\int v(v^2 + 2)^2\,dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

13. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\,dx$

14. $\displaystyle\int (\operatorname{cossec}^2 t - 2e^t)\,dt$

15. $\displaystyle\int (\theta - \operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta)\,d\theta$

16. $\displaystyle\int \sec t\,(\sec t + \operatorname{tg} t)\,dt$

17. $\displaystyle\int (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,d\alpha$

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

19–20 Encontre a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

19. $\displaystyle\int \left(\cos x + \tfrac{1}{2}x\right)dx$

20. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)\,dx$

21–46 Calcule a integral.

21. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-2}^0 \left(\tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{1}{4}t^3 - t\right)dt$

24. $\displaystyle\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\,dw$

25. $\displaystyle\int_0^2 (2x - 3)(4x^2 + 1)\,dx$

26. $\displaystyle\int_{-1}^1 t(1 - t)^2\,dt$

27. $\displaystyle\int_0^\pi (5e^x + 3\operatorname{sen} x)\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx$

29. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right)du$

30. $\displaystyle\int_0^4 (3\sqrt{t} - 2e^t)\,dt$

31. $\displaystyle\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx$

32. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}\,dy$

33. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)dx$

34. $\displaystyle\int_0^1 (5x - 5^x)\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^1 (x^{10} + 10^x)\,dx$

36. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^2\theta\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

39. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$

42. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\,dt$

44. $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx$

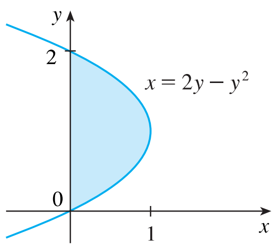
45. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

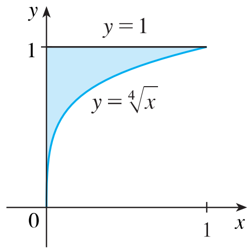
47. Use um gráfico para estimar a intersecção com o eixo x da curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. A seguir, use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

48. Repita o Exercício 47 para a curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Encontre a área da região.



50. As fronteiras da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encontre a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 49).



51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\,dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\,dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\,dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\,dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\,dx$?

59–60 A função velocidade (em metros por segundo) é dada para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

61–62 A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.

64. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

65. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

66. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$, cujos materiais sólidos são lançados na atmosfera, sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

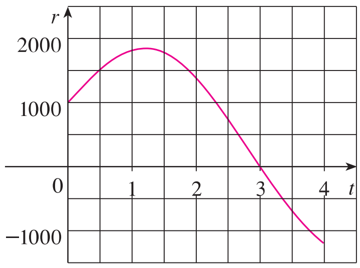
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

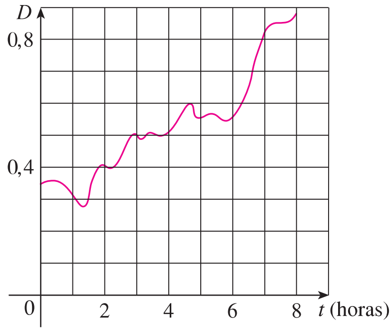
67. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por metro). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

68. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25 000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade de água no tanque depois de quatro dias.

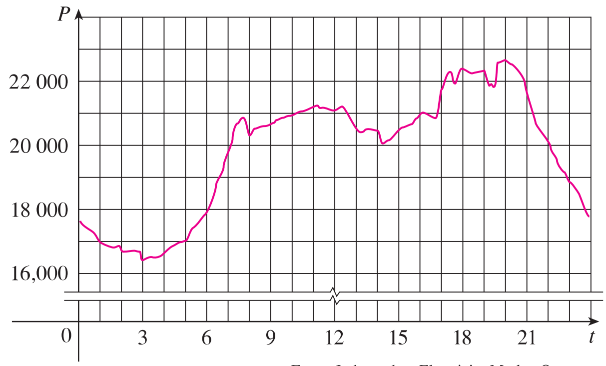


69. Uma população de bactérias é de 4 000 no tempo $t = 0$ e sua taxa de crescimento é de $1000 \cdot 2^t$ bactérias por hora depois de t horas. Qual é a população depois de uma hora?

70. O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na internet entre meia-noite e as 8 horas da manhã. D denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.



71. A seguir, está ilustrada a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Usando o fato de que a potência é a taxa de variação da energia, estime a energia usada naquele dia.



Fonte: Independent Electricity Market Operator

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.

(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour*, 125 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56;4
Fim da manobra de inclinação	15	97;2
Regulador de combustível a 89%	20	136;2
Regulador de combustível a 67%	32	226;2
Regulador de pressão a 104%	59	403;9
Pressão dinâmica máxima	62	440;4
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265;2

PROJETO ESCRITO NEWTON, LEIBNIZ E A INVENÇÃO DO CÁLCULO

Algumas vezes lemos que os inventores do cálculo foram Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Mas sabemos que as ideias básicas por trás da integração foram investigadas há 2.500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudóxio e Arquimedes, e que os métodos para encontrar as tangentes foram inventados por Pierre Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677), entre outros. Barrow, professor em Cambridge que teve grande influência sobre Newton, foi o primeiro a entender a relação inversa existente entre a derivação e a integração. O que Newton e Leibniz fizeram foi usar essa relação, na forma do Teorema Fundamental do Cálculo, para desenvolver o cálculo em uma disciplina matemática sistemática. É nesse sentido que é atribuída a Newton e a Leibniz a invenção do cálculo.

Leia sobre as contribuições desses homens em uma ou mais das referências sugeridas e escreva sobre um dentre os três tópicos listados a seguir. Você pode incluir detalhes biográficos, mas o propósito principal de seu relatório deve ser a descrição, em detalhes, de seus métodos e notações. Em particular, você deve consultar os livros que trazem trechos das publicações originais de Newton e Leibniz, traduzidas do latim para o inglês.

O Papel de Newton no Desenvolvimento do Cálculo

O Papel de Leibniz no Desenvolvimento do Cálculo

A Controvérsia entre os Seguidores de Newton e de Leibniz sobre a Primazia na Invenção do Cálculo

Referências

1. Boyer, C., Merzbach, U. *A History of Mathematics.* Nova York: Wiley, 1987, Capítulo 19.
2. Boyer, C. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* Nova York: Springer-Verlag, 1979, Capítulos 8 e 9.
4. Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics,* 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. Gillispie, C. C. *Dictionary of Scientific Biography.* Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Leibniz de Joseph Hofmann no Volume VIII e o artigo sobre Newton de I. B. Cohen in Volume X.
6. Katz, V. *A History of Mathematics:* an introduction. Nova York: HarperCollins, 1993, Capítulo 12.
7. Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Nova York: Oxford University Press, 1972, Capítulo 17.

Livros fontes

1. Fauvel, J.; Gray, J. *The History of Mathematics:* A Reader. Londres: MacMillan Press, 1987, Capítulos 12 e 13.
2. Smith, D. E. *A Sourcebook in Mathematics.* Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969, Capitulo V.