INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Leandro Colombi Resendo

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Indução

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau. (proposição)
2. Uma vez chegando a um degrau, você é capaz de chegar ao próximo. (condicional)

Escrito formalmente...

Primeiro Princípio de indução Matemática

Dada uma propriedade P:

3. *P(1) é verdade*
4. *$(\forall k)[P(k)$ verdade $\rightarrow P(k+1)$ verdade$]$*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Indução

Ex: Em uma árvore binária o número de elementos do nível *n* é igual 2^n. OBS: Considere a raiz como nível 0.

Ex: Prove que a equação $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para qualquer inteiro positivo *n*.

Resumo	
Passo 1	Prove a base da indução
Passo 2	Suponha P(k)
Passo 3	Prove P(k+1)

Indução

Ex: Prove que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

Ex: Prove que, para qualquer inteiro positivo n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ex: Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$.

Ex: Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

Note que: $2^{2n}-1 = 3k$ ou $2^{2n} = 3k + 1$

Indução

Ex: Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

Passo 1: P(4) OK!

Passo 2: Suponha que $k^2 > 3k$ e mostre que $(k+1)^2 > 3(k+1)$

Passo 3: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ (por hipótese)

$> 3k + 2k + 1$ (como $k \geq 4$)

$\geq 3k + 8 + 1$ ...

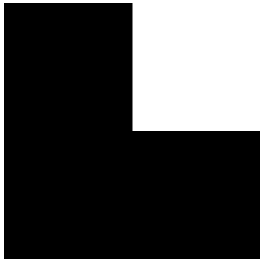
INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

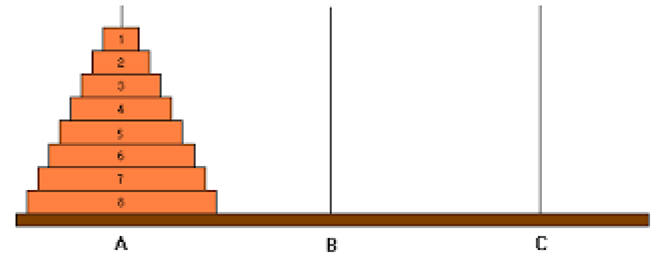
Indução

Prova geométrica

Ex: Mostrar que, para qualquer inteiro positivo n, se removermos um quadrado de um tabuleiro originalmente com 2^n x 2^n quadrados, ele pode ser ladrilhado com "ângulos de ferro".

ângulo de ferro:





Indução

Ex: (**Torre de Hanói**) “Consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação”[1]. Prove:

a) É possível mover todos os anéis para um dos pinos vazios;
b) É possível fazer isso com $2^n - 1$ movimentos.

[1] fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanói

Indução

Para lembrar:

Primeiro Princípio de indução Matemática

Dada uma propriedade P:

1. *P(1) é verdade*
2. *($\forall$k)[P(k) verdade → P(k+1) verdade]*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Segundo Princípio de indução Matemática

3. *P(1) é verdade*
4. *($\forall$k)[P(r) verdade para todo r, $1 \leq r \leq k$ → P(k+1) verdade]*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Indução

Para lembrar:

Primeiro Princípio de indução Matemática

Dada uma propriedade P:

1. *P(1) é verdade*
2. *(∀k)[P(k) verdade → P(k+1) verdade]*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Segundo Princípio de indução Matemática

3. *P(1) é verdade*
4. *(∀ k)[P(r) verdade para todo r, 1 ≤ r ≤ k → P(k+1) verdade]*

Então P(n) é verdade para todo inteiro positivo n.

Indução

Ex: Prove que, para todo $n \geq 2$, n é um primo ou é produto de primos.

Indução

Ex: Prove que qualquer quantia, para franquia postal, maior ou igual a 8 centavos pode ser conseguida usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos.

Lista Mínima de Exercícios

Seção 2.2: 3, 5, 9, 13, 15, 22, 23, 28, 31, 33, 38, 42, 45, 49, 55, 61, 67 e 69.