Lógica de Predicados

Assim como na lógica proposicional, é possível provar a validade de um argumento na lógica de predicados. Para isso, novas regras de inferências são necessárias para tratar os quantificadores existencial e universal. Além disso, todas as regras de inferência da lógica proposicional continuam válidas.

Quando há quantificadores em um argumento, as regras de dedução devem levar em conta a estrutura interna das sentenças. Assim, para provarmos a validade de um argumento contendo sentenças quantificadas, em geral, retiramos os quantificadores, manipulamos as proposições sem eles e depois os colocamos de volta.

Existem quatro regras de inferência que nos fornecem mecanismos para retirada e inserção de quantificadores (uma de retirada para cada quantificador e uma de inserção também para cada quantificador).

Em princípio, as novas regras consideram os seguintes tipos de argumentos:

1. Tudo é belo.
   Logo, Miau é belo.

2. Miau é um gato.
   Logo, algo é gato.

3. Algo é gato.
   Logo, Miau é gato.

4. Miau é gato.
   Logo, todos são gatos.

A seguir, veremos as regras de inferência que nos possibilitarão provar a validade dos argumentos acima.

1.0 Instanciação Universal – I.U.

Se todos os objetos de um dado universo possuem uma dada propriedade, então um objeto particular desse universo também possui essa propriedade (Oliveira, 1995). Simbolicamente:

Seja **P(x)** um predicado e **a** uma constate:

$\forall x\ P(x)$

———————

$P(a)$

Exemplo:

Todos os estudantes são inteligentes. Pedro é estudante
Logo, Pedro é inteligente.

Representando simbolicamente:
1. $\forall x(\text{estudante}(x) \rightarrow \text{inteligente}(x))$
2. estudante(Pedro)

———————

inteligente(Pedro)

3. homem(Pedro) → inteligente(Pedro) 1, I.U.
4. inteligente(Pedro) 2, 3, M.P.

2.0 Generalização Existencial – G.E.

O que é verdadeiro para um dado objeto, é verdadeiro para algum objeto (Oliveira, 1995). Simbolicamente:

Seja **P(x)** um predicado e **a** uma constate:

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

Exemplo:

João é feliz e famoso. Todos que são famosos ou elegantes são renomados. Portanto, existe alguém feliz e renomado.

Simbolicamente:

1.Feliz(João) ^ Famoso(João)
2.∀x(Famoso(x) v elegante(x) → renomado(x))
___
∃x (Feliz(x) ^ renomado(x))

3. (Famoso(João) v elegante(João) → renomado(João) 2, IU (obs.: se vale para todos, vale para João)

4. Famoso(João) 1, SIMP.
5. Famoso(João) v elegante(João) 4, AD
6. renomado(João) 3,5, MP
7. Feliz(João) 1, simp
8. Feliz(João) ^ renomado(João) 6, 7, CONJ
9. ∃x (Feliz(x) ^ renomado(x)) 8, G.E.

3.0 Generalização Universal – G.U.

Se um objeto, arbitrariamente escolhido dentre um universo, tiver uma certa propriedade, todos os objetos desse universo terão essa propriedade (Oliveira, 1995). Simbolicamente:

Seja **P(x)** um predicado e **a** uma constate:

$$\frac{P(a)}{\forall x P(x)}$$

> Mas qual é o significado dessa regra e como podemos garantir que todos os elementos de um universo possuem dada propriedade? A resposta está na expressão arbitrariamente escolhido. Suponha que um matemático queira provar certa propriedade a respeito dos triângulos; digamos que ele inicia pela frase “seja um triângulo ABC” e prove a propriedade para o triângulo ABC. Se ele não tiver feito nenhuma outra suposição sobre ABC, então ABC foi *arbitrariamente escolhido*, e pode

ser qualquer triângulo. Assim, se a propriedade vale para qualquer triângulo, então vale para todos os triângulos. (Pinho,1999)

Para a aplicação desta regra devemos, portanto, respeitar às seguintes restrições:

- R1: Não se deve aplicar a G.U. a constantes que ocorram nas premissas, pois tais constantes se referem a objetos particulares do domínio.

- R2: Não se deve aplicar a G. U. a constantes introduzidas pela regra I.E., pois estas também se referem a objetos particulares.

Exemplo:

Todo estudante é feliz. Todos os que são felizes são sorridentes. Logo, todo estudante é sorridente.

Simbolicamente:

1.$\forall x(\text{estudante}(x) \rightarrow \text{feliz}(x))$
2.$\forall x(\text{feliz}(x) \rightarrow \text{sorridente}(x))$
____
$\forall x(\text{estudante}(x) \rightarrow \text{sorridente}(x))$

3. $\text{estudante}(a) \rightarrow \text{feliz}(a)$ 1, IU
4. $\text{feliz}(a) \rightarrow \text{sorridente}(a)$ 2, IU
5. $\text{estudante}(a) \rightarrow \text{sorridente}(a)$ 3, 4, S.H.
6. $\forall x(\text{estudante}(x) \rightarrow \text{sorridente}(x))$ 5, G.U. (**a** não fere as regras 1 e 2)

4.0 Instanciação Existencial –I.E.

O que é verdadeiro para algum objeto, é verdadeiro para um dado objeto, desde que esse objeto não tenha sido utilizado anteriormente na dedução (Oliveira, 1995). Simbolicamente:

Seja **P(x)** um predicado e **a** uma constate:

$\exists x P(x)$
____
$P(a)$

Esta regra não pode ser utilizada sem restrições, pois do fato de existir um objeto em certo domínio que satisfaz P, não significa que estamos em condições de apontar um objeto particular **a** como sendo aquele objeto que satisfaça à propriedade. A plicação desta regra, portanto, deverá respeitar às seguintes restrições:

R1: O termo **a** não deve ocorrer nas premissas do argumento. Isto quer dizer que o termo a só deve aparecer no argumento por força da aplicação da I.E.

R2: Uma constante que tenha sido introduzida em um argumento por aplicação da regra IE não pode aparecer nesse argumento, por uma nova aplicação de I.E. Isto quer dizer que se tem de usar uma outra letra.

Exemplo:

Todos os felinos são noturnos.
Alguns animais são felinos.
Logo, alguns animais são noturnos.

Simbolicamente:

1.$\forall x$ (Felino(x) $\rightarrow$ Noturno(x))
2.$\exists x$ (Animal(x) $\wedge$ Felino(x))
____
$\exists x$ (Animal(x) $\wedge$ Noturno(x))

3. Animal(a) $\wedge$ Felino(a)	2, I.E. (a não fere nenha das regras citadas)
4. Felino(a) $\rightarrow$ Noturno(a)	1, I.U. (se vale para todos vale para a)
5. Felino(a)	3, SIMP.
6. Noturno(a)	4, 5, M.P.
7. Animal(a)	3, SIMP.
8. Animal(a) ^ Noturno(a)	6, 7, CONJ.
9. $\exists x$ (Animal(x) $\wedge$ Noturno(x))	9, G.E.

Referências:

Oliveira, R. Apostila de Lógica – Departamento de Informática - Ufes, 1995.
Pinho, A. A. Apostila de Lógica – Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: http://ifgjatai.webcindario.com/logica.pdf acesso em 26/10/16.
Mortari C. A. Introdução à lógica. Editora Unesp, 2000.