INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Técnicas de Demonstração

Por que Provar (demonstrar)?

Conjectura $P \rightarrow Q$.
Demonstrar a hipótese ou obter contra-exemplo.

Exemplo1: Verificar $n! <= n^2$ (provar ou obter contra-exemplo)

Técnicas de Demonstração

- Demonstração Exaustiva;
- Demonstração direta;
- Demonstração por contraposição;
- Demonstração por Absurdo.

Exemplo 1- Demonstração exaustiva

- "Se um inteiro $1 \leq n \leq 20$ é divisível por 6, então ele também é divisível por 3"
- Hipótese: x é divisível por 6

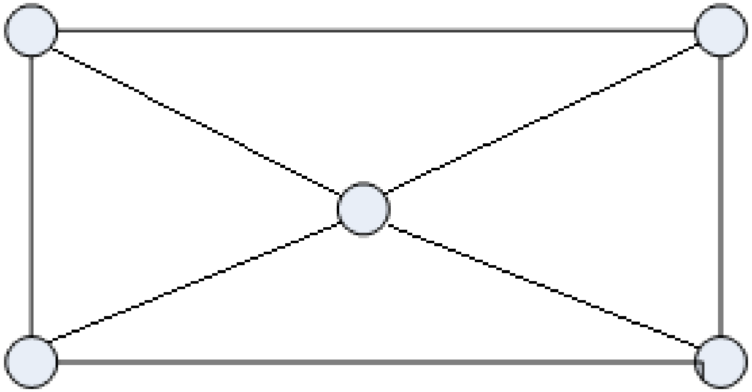
Números divisíveis por 6 entre 1 e 20	Números divisíveis por 6 entre 1 e 20 e também divisíveis por 3
6	6 = 2.3
12	12 = 4.3
18	18 = 6.3

- Conclusão: x é divisível por 3 (definição de divisibilidade)

Demonstração Exaustiva

- Exemplo Prático:

É possível traçar todas as retas da figura sem levantar o lápis e sem redesenhar nenhuma reta?



Demonstração Direta

Supor hipótese P e deduzir a conclusão Q.

Exemplo1:

"Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3"

Hipótese: x é divisível por 6

- x = k .6 para algum inteiro k (definição de divisibilidade)
- 6 = 2.3 (fato numérico)
- x = k(2 . 3) (substituição)
- x = (k . 2)3 (associatividade do produto)
- k . 2 é um inteiro (fato conhecido dos inteiros)

Conclusão: x é divisível por 3 (definição de divisibilidade)

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Demonstração Direta

Supor hipótese P e deduzir a conclusão Q.

Exemplo2:
$(\forall x)(\forall y)$(x é um inteiro par $\wedge$ y é um inteiro par $\rightarrow$ o produto xy é um inteiro par)

Exemplo 3:
Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse número é divisível por 4.

Contraposição

Q' → P' conclui-se que P → Q

Lembrar da tautologia.

(Q' → P') → (P → Q)

Exemplo 1:

Prove que se o quadrado de um inteiro é ímpar, então esse inteiro é ímpar.

Exemplo 2:

Se n + 1 senhas diferentes forem distribuídas para n alunos, então algum aluno receberá duas ou mais senhas.

Recíproca:

Exemplo :

Prove que o produto xy é impar se, e somente se, ambos x e y são inteiros ímpares.

Dica: “←” – prova direta e “→” – prova por contraposição

Por Absurdo (ou indireta)

P∧Q’→$\boldsymbol{Falso}$ conclui-se que P → Q

Utilizamos isto, pois (P∧Q’→$\boldsymbol{Falso}$) → **(**P → Q) é uma tautologia

Exemplo 1:

“se um número somado a ele mesmo é igual a ele, então esse número é 0.”

Exemplo 2:

“Mostre que $\sqrt{2}$ não é um número racional”

Resumo:

Técnica de Demonstração	**Abordagem para Provar P → Q**
Exaustão	Verificar para todo os casos
Direta	Suponha P, deduza Q.
Contraposição	Suponha Q’, deduza P’
Por Absurdo	Suponha P $\wedge$ Q’, deduza uma contradição

Provas “Engenhosas”

Exemplo 1:

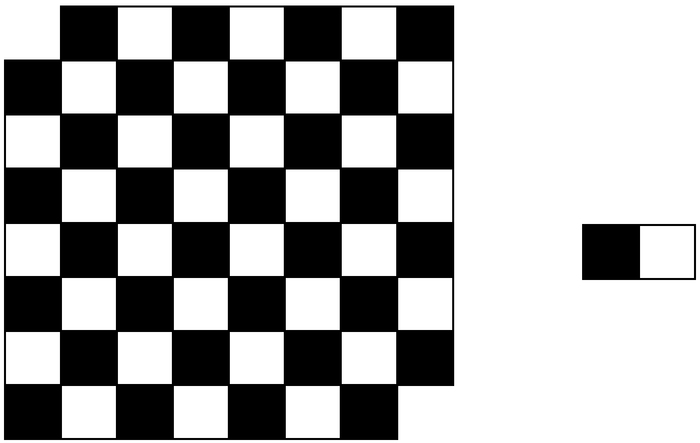
Em um torneio de tênis tem 342 jogadores. A cada partida, o ganhador irá para próxima fase e o perdedor será eliminado. Quantas partidas haverá nesse torneio?

Exemplo 2:

Um tabuleiro padrão de 64 quadrados tem esses quadrados distribuídos em 8 fileiras de 8 quadrados cada, quadrados adjacentes têm cores alternadas, branco e preto. Um conjunto de 32 ladrilhos 1x2, cada um, cobrindo 2 quadrados, cobrem o tabuleiro completamente. Prove que, se os quadrados nos cantos diagonalmente opostos do tabuleiro forem removidos, o que resta do tabuleiro não pode ser coberto por 31 ladrilhos.

Solução:

Verifique as cores dos quadrados que estão faltando.



Lista mínima de exercícios

Seção 2.1: 5, 6, 9, 10, 11, 14, 18, 20, 31, 34, 37, 40, 42, 45, 46, 47, 49, 52 e 53.