INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Algoritmos para Grafos

- Grafos Direcionados e Relações Binárias; o Algoritmo de Warshall
- Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano
- Caminho Mínimo e Árvore Geradora Mínima
- Algoritmos de Percurso

O Problema do Caminho mínimo

Admita que temos um grafo simples, ponderado e conexo, onde os pesos são todos positivos.
Então existe pelo um caminho entre quaisquer dois vértices x e y. De fato, pode haver vários desses caminhos.
Pergunta : Como encontrar um caminho com o menor peso?

O Problema do Caminho Mínimo

Principais Algoritmos de Solução:

- Dijkstra – Obtém o caminho mínimo entre dois nós (não aceita arestas negativas).
- Ford-Bellman – Obtém o caminho mínimo entre um nó e todos os outro (Admite a existência de arestas negativas).
- Floyd-Warshall – Obtém o caminho mínimo entre todos os pares de nós (Admite a existência de arestas negativas).
- Yen – encontra os *K* caminhos mínimos entre todos os pares de nós.

O Problema do Caminho mínimo

Algoritmo de Dijkstra:
I – Inicialmente, selecione o vértice de partida e adicione caminhos com vértices adjacentes;

II – Atualize o caminho de menor comprimento e descarta o caminho que foi atualizado.Repita este passo até que o caminho de comprimento mais curto entre os nós de partida e chegada seja encontrado;

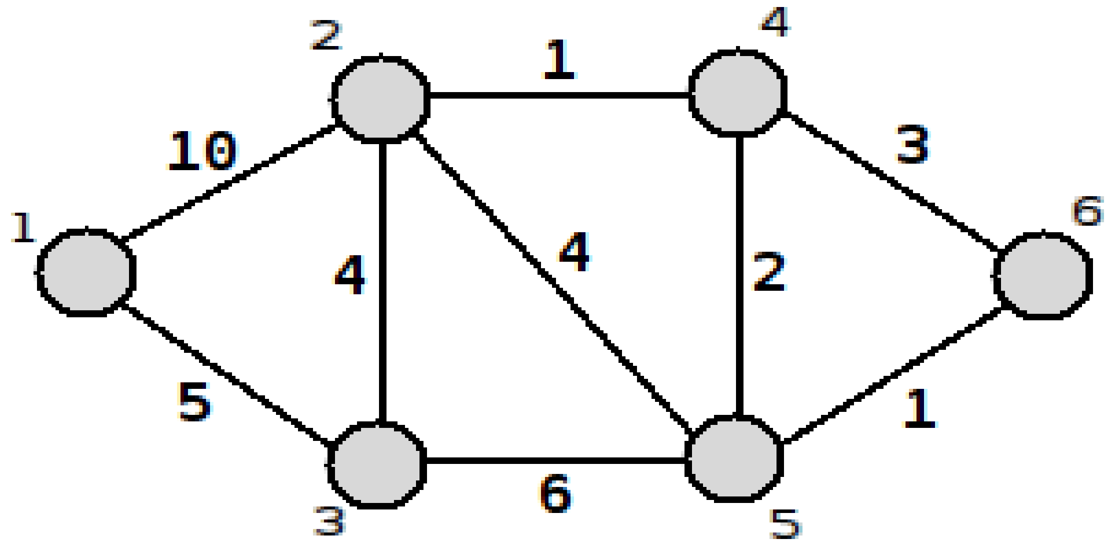
O Problema do Caminho mínimo

Algoritmo de Dijkstra:

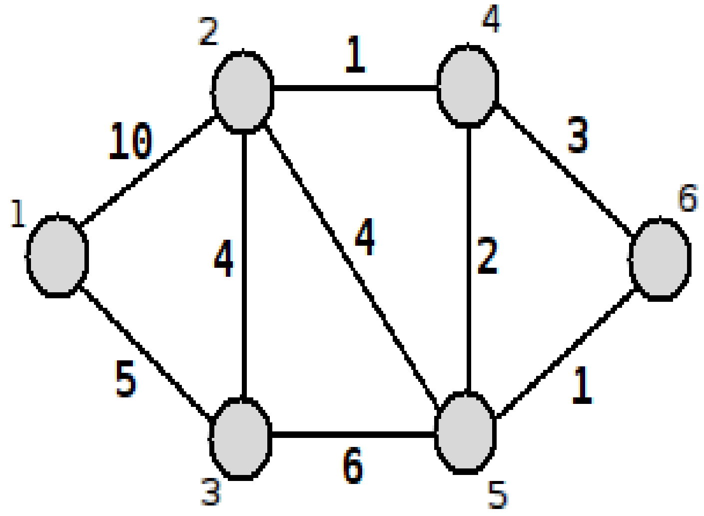
III – Caso dois caminhos tenham o mesmo vértice final, descarte o de maior custo.

O Problema do Caminho mínimo

Encontre o caminho mínimo do nó 1 ao nó 6, no grafo a seguir:



Solução: Encontrar menor caminho entre os nós 1 e 6 (Alg. De Dijkstra)



- Passos : Escolha de rotas
- 1) 1-2 = 10 (cancela 3)
- 2) 1-3 = 5;   At(1)
- 3) 1-3-2 = 9 At(2)
- 4) 1-3-5 = 11 At(4)
- 5) 1-3-2-4= 10 At(3)
- 6) 1-3-2-5= 13 (Cancela 4)
- 7) 1-3-2-4 -5=12 (Cancela 4)
- 8) 1-3-2-4 -6=13
- 9) 1-3-5-6 = 12 (Cancela 9)

Encontre o caminho mínimo do nó 1 ao nó 6 (Exemplo anterior)								
	1	2	3	4	5	6	Nó Rot.	Custo
0	0	10	5	Inf.	Inf.	Inf.	1	0
1	0	10	5	Inf.	Inf.	Inf.	3	5
2	0	9	5	Inf.	11	Inf.	2	9
3	0	9	5	10	11	Inf.	4	10
4	0	9	5	10	11	12	5	11
5	0	9	5	10	11	12	6	12

$OBS\colon \quad Inf. = \infty$

Encontrando a rota a partir da tabela anterior

De trás para frente (Nós que chegam ao nó 6).
Se o custo (coluna 3) = Diferença (coluna 2) , esta será a rota escolhida

Rotas dos nós adjacentes ao nó 6	**Diferença da última linha da tabela**	**Custo**
4 - 6	2	3
5 – 6	1	1

Rota escolhida 5- 6

Encontrando a rota a partir da tabela anterior

De trás para frente (Nós que chegam ao nó 6). Se o custo (coluna 3) = Diferença (coluna 2) , esta será a rota escolhida

Rotas dos nós adjacentes ao nó 5	**Diferença da última linha da tabela**	**Custo**
5 - 2	2	4
5 – 3	6	6
5 – 4	1	2

Rota escolhida 5 - 3

Encontrando a rota a partir da tabela anterior

De trás para frente (Nós que chegam ao nó 6). Se o custo (coluna 3) = Diferença (coluna 2) , esta será a rota escolhida

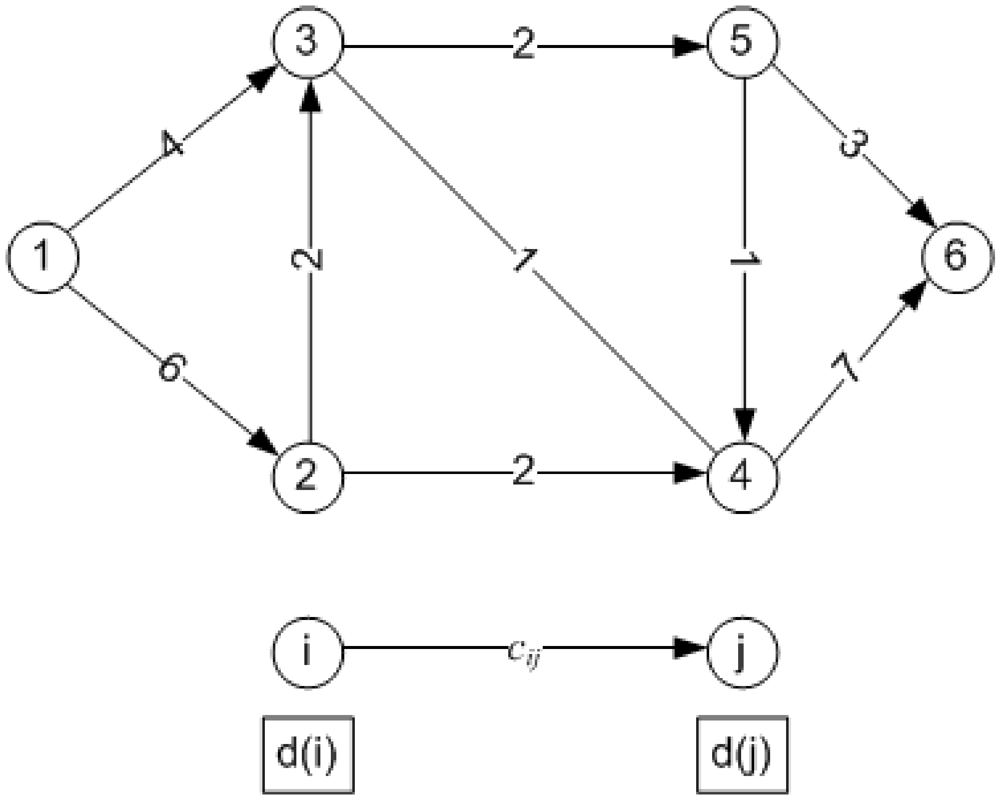
Rotas dos nós adjacentes ao nó 5	**Diferença da última linha da tabela**	**Custo**
3 - 1	5	5
3 – 2	-4	4

Rota escolhida 3 - 1 .

Caminho mínimo : 1 – 3 – 5 – 6

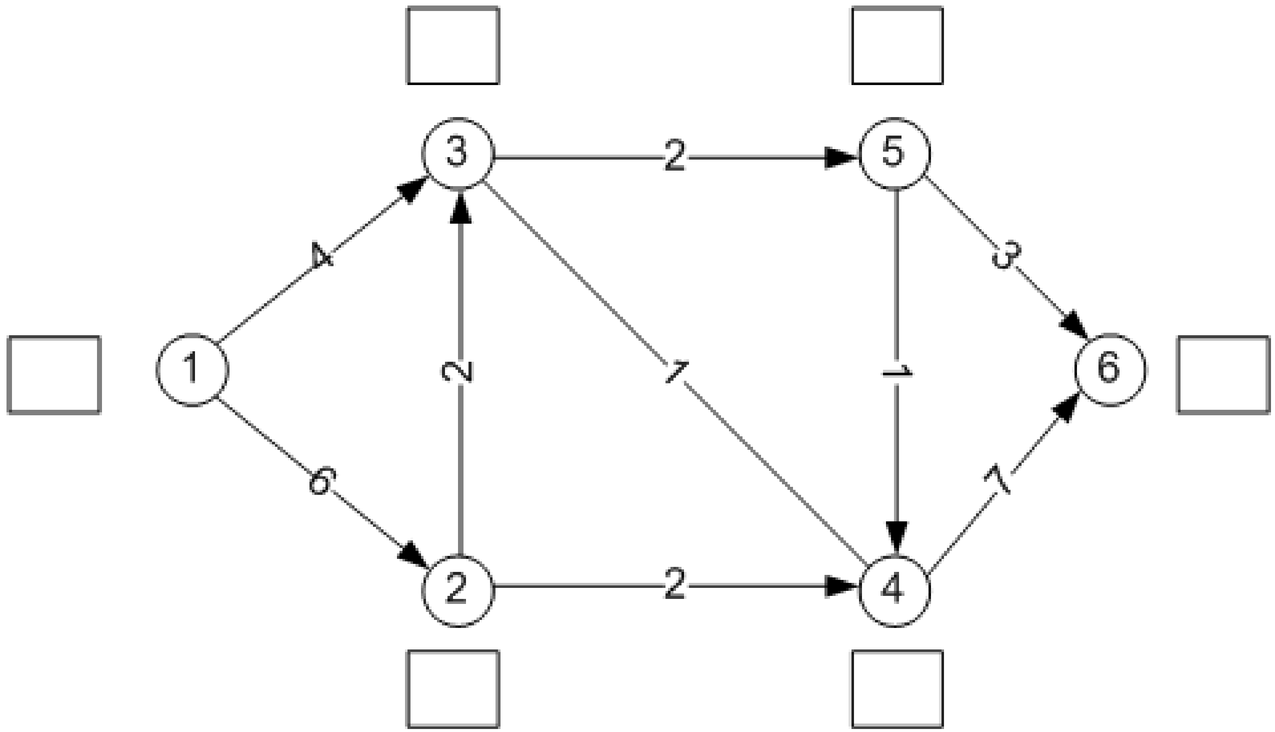
Algoritmo de Dijkstra

Exemplo:



Algoritmo de Dijkstra

Exercício:



Algoritmo de Dijkstra

1. Ler $G = (N,A)$, c_{ij} *(não negativo)* é a "distância" entre os nós e nó de origem s.
2. **Iniciar variáveis** $S := \emptyset$; $R := N$;
3. $d(i) := \infty \ \forall i \in N$; $d(s) := 0$ e $pred(s) := 0$;
4. **Enquanto** $|S| < n$ **fazer**
5. Seja $i \in N$ tal que $d(i) = \min\{d(j) : j \in R\}$;
6. $S := S \cup \{i\}$; $R := R - \{i\}$;
7. **Para** $j \in N$ com $(i,j) \in A$ **fazer**
8. **se** $d(j) > d(i) + c_{ij}$ **então** $d(j) = d(i) + c_{ij}$;
9. $pred(j) := i$;
10. Fim_Para
11. Fim_Enquanto

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Algoritmo de Dijkstra

Por que funciona?

Note o seguinte trecho do código.

4. Enquanto $|S| < n$ fazer
5. Seja $i \in R$ tal que $d(i) = min\{d(j): j \in R\}$;
6. $S:=S \cup \{i\}; R:=R - \{i\}$;
7. Para $j \in N$ com $(i,j) \in A$ fazer
8. Se $d(j) > d(i)+c_{ij}$ então $d(j) = d(i)+c_{ij}$;
9. $pred(j):=i$;
10. Fim_Para
11. Fim_Enquanto

Resposta: A partir de um nó o algoritmo percorre, através dos caminhos mínimos, todas da redes buscando o nó de destino.

Lista Mínima de Exercícios

Seção 6.3: Veja lista de exercícios