<u>Resolução do Trabalho 2 de Cálculo I</u>

Sistemas de Informação
Instituto Federal do Espírito Santo
Campus Serra

Cálculo I
Prof. Dr. Fábio Lima

Anderson A. Fraga (20222BSI0482)
`aafrg@tuta.io`

<u>Cap. 6.4 - Aplicações de integração: Trabalho</u>

Questão 14 - pág. 407) Uma corrente é estentdida no chão tem $10m$ de comprimento e sua massa é $80kg$. Qual a quantidade de trabalho necessária para levantar uma extremidade da corrente a uma altura de $6m$?

A situação descrita na questão acima pode ser representada como na Figura 1:

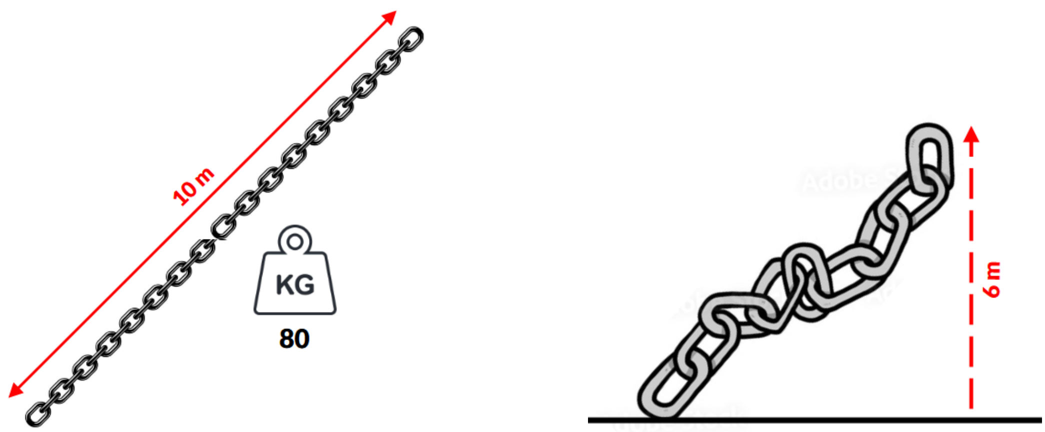

Figure 1: Comprimento, massa e altura de içamento da corrente.

Com base na definição 4 tratada no Capítulo 6.4 da referência, onde define que **trabalho é o movimento feito de um objeto de *a* para *b***, temos que:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Entretanto, para o caso do levantamento da corrente, podemos reescrever a expressão relacionando inicialmente Força e, consequentemente, as variáveis disponíveis de massa, gravidade e altura de deslocamento da corrente, nas equações seguintes:

$$W = \int_a^b F dx \tag{2}$$

E para F, Força aplicada para içar a extremidade da corrente de acordo com a altura exigida. Decompondo Força, temos que é o resultado do produto entre a massa, m, e a gravidade, g, como representado pela equação abaixo:

$$F = mg \tag{3}$$

E, finalmente, podemos determinar que a massa da corrente levantada a uma altura, considerando a densidade da corrente uniforme, pode ser expressa como:

$$m = \frac{M}{L}x \tag{4}$$

Desta forma, substituindo massa na Equação 3 pela Equação 4 e sabendo que deslocaremos a corrente em $6m$, saindo do ponto $a = 0$ até $b = 6$, pode-se utilizar a Equação 2 para determinar o trabalho exigido para levantar uma das extremidades da corrente em $x = 6m$, integrando as variáveis constantes e demais incógnitas:

$$\begin{aligned}
W &= \int_a^b F dx \qquad (5)\\
W &= \int_0^6 \left(\frac{Mg}{L}\right) x dx\\
W &= \left(\frac{Mg}{L}\right) \int_0^6 x dx\\
W &= \left(\frac{Mg}{L}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^6\\
W &= \frac{80 \times 9,8}{10} \times \frac{36}{2}\\
W &= 78.4 \times 18\\
W &= 1.411,2 \text{ J}
\end{aligned}$$

Assim, vemos que o trabalho necessário será de **1.411,2 joules** para içar uma das extremidades da corrente a 6 metros de altura.

Cap. 7.4 - Frações parciais

Questão 26 - pág. 445) Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (*como no Exemplo 7*). *Não determine o valor numérico dos coeficientes.*

$$\int \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 + 1)} dx \tag{1}$$

Como descrito na página 438 da referência, o grau do denominador é maior do que o numerador, permitindo, assim, a fatoração do mesmo. Entretanto, o denominador não é um termo fatorável, obrigando a repetição dos termos para o passo seguinte. Junto a fatoração, pode-se, também, expressar a soma das frações parciais resultantes da decomposição da integral inicial. Desta forma, temos:

$$\frac{(x^2+x+1)}{(x^2+1)}dx \implies \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \tag{2}$$

Relacionando as frações, temos que:

$$\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Expandindo os termos, chegamos a seguinte expressão:

$$\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Rearranjando a expressão, podemos comparar com a integral inicial, onde:

$$\int \frac{(x^2+x+1)}{(x^2+1)}dx \implies \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D}{(x^2+1)^2} \tag{3}$$

Assim, ao compararmos os termos rearranjados na Equação 3 com os termos do numerador da integral inicial, na Equação 1, percebe-se, a partir desta comparação, que a incógnita A *tem que ser igual a 0* para que a equação do numerador seja válida. Da mesma forma, percebe-se que *B = 1, C = 1 e D necessariamente será igual a 0.*

Substituem-se os termos da Equação 2 utilizando os valores encontrados a partir da conclusão da Equação 3, reescrevendo a integral inicial como a soma de duas integrais resultantes da soma de frações parciais. Assim, temos que:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx \tag{4}$$

Seguindo com a integração da Equação 4, observa-se que a primeira integral tem resultado conhecido, $arcotgx$, enquanto a segunda exige integração por substituição para determinar seu resultado. Desta forma, podemos definir inicialmente que para a segunda integral:

$$\begin{aligned} u &= x^2+1 \qquad (6) \\ du &= 2xdx \\ \frac{1}{2}du &= xdx \end{aligned}$$

Finalmente, temos que:

$$
\begin{aligned}
&= \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du \qquad (7)\\
&= \arctan x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + C \therefore \arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C
\end{aligned}
$$

Complementarmente, podemos visualizar a curva da integral (*Eq. 1*) por meio do gráfico abaixo: