Matemática Discreta

Leandro Colombi Resendo

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Mais Sobre Demonstração de Correção

Demonstração de Correção Algoritmo

$$\{Q\}s_i\{R\},$$

onde **Q** e **R** são estados antes de depois, respectivamente, a um conjunto de operações $\mathbf{s}_i$.

Mais Sobre Demonstração de Correção

Regra do laço

Suponha s_i uma proposição com um laço da forma

enquanto condição B **faça**
P
fim do enquanto

OBS: note que P é um segmento de programa

Note que a Q é uma proposição que deve ser verdadeira antes do início do laço e verdadeira a cada iteração do mesmo.

Assim, o laço terminará com $\mathbf{\{Q\}s_i\{Q \wedge B'\}}$, onde B' e a negação da condição do laço.

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

Produto (x,y)

 Inteiros i,j

 i = 0

 j = 0

 enquanto i ≠ x **faça**

  j = j + y

  i = i + 1

 fim do enquanto

 retorne j

fim da função Produto

Mais Sobre Demonstração de Correção

$$\{Q\}s_i\{Q \wedge B'\}$$

Note que Q representa uma relação entre as variáveis envolvidas no programa, onde tal relação é verdadeira antes do início do laço e se mantém verdadeira a cada iteração.

Essa relação é chamada de **invariante do laço**.

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

```
Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x faça
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto
```

Conjectura sobre a invariante:

j = i*y

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x+y.

Soma (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = x
    enquanto i ≠ y **faça**
        j = j + 1
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

Mostre que a invariante do laço é ***j = x + i*** e que o programa termina retornando x + y

Mais Sobre Demonstração de Correção

OBS: note que em uma prova de correção de algoritmo não basta mostrar que a invariante do laço é verdadeira à cada iteração. É necessário prova que o algoritmo termina.

Mais Sobre Demonstração de Correção

O **Algoritmo de Euclides** para o **máximo divisor comum**.

Ex: Encontrar o mdc(420,66).

Mais Sobre Demonstração de Correção

MDC (a, b) /*supor $a \geq b$*/
inteiros i,j
    $i = a$
    $j = b$
    enquanto $j \neq 0$ **faça**
        calcule q e r, tal que $i = qj + r$, $0 \leq r < j$
        $i = j$
        $j = r$
    fim do enquanto
    retorne i
fim da função MDC

Mais Sobre Demonstração de Correção

Note que o algoritmo de Euclides assume que:
(para todo a,b,q,r inteiros)[(a=bq+r) $\rightarrow$ *(mdc(a,b)=mdc(b,r))]*

Para prova que o *Algoritmo de Euclides* funciona é necessário mostrar que essa afirmação é verdadeira.

Prove que o Algoritmo de Euclides está correto.

Provar a invariante mdc(i,j)=mdc(a,b) e que termina.
Caso base ...
Suponha $mdc(i_k,j_k)=mdc(a,b)$ ...

Lista Mínima de Exercícios

Seção 2.3: 2, 3, 4, 6, 9, 10, 13, 14