INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Leandro Colombi Resendo

Grafos e Árvores

- Grafos e Suas Representações
- Árvores e suas Representações
- Árvores de Decisão
- Códigos de Huffman

Grafos e Suas Representações

Objetivo:

Deseja-se indexar todas as combinações de uma letra do conjunto {A, B, C, D, E} com todos os números formados por 8 algarismos.

Ex: A01263857

Quantas combinações possíveis existem?

Considerando que essa informação usará o sistema de códigos ASCII (8 bits por caractere), quantos bytes são necessários para o armazenamento?

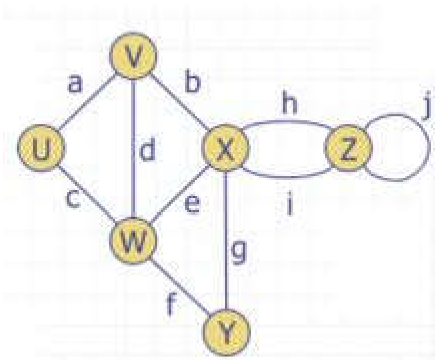
SERÁ POSSÍVEL ARMAZENAR A MESMA INFORMAÇÃO COM UMA QUANTIDADE MENOR DE MEMÓRIA?

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Grafos e Suas Representações

Definição: Um grafo é um conjunto não-vazio de nós(vértices) e um conjunto de arcos(arestas) tais que cada arco conecta dois nós.

Normalmente representado por G{N,A}, onde G e a relação entre os conjuntos de nós N e arestas A.



INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Grafos e Suas Representações

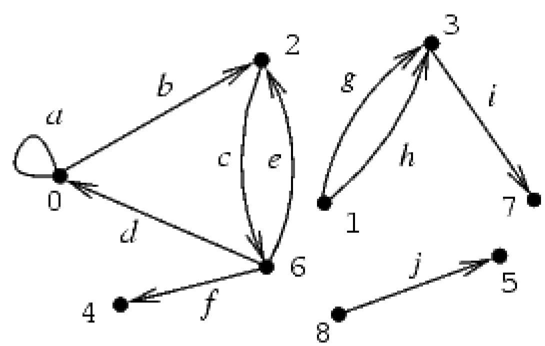
Ex: Esboce um grafo com N = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {a,b,c,d,e,f} onde a relação G é dada por:

G(a) = 1-2
G(b) = 1-3
G(c) = 3-4
G(d) = 3-4
G(e) = 4-5
G(f) = 5-5

Grafos e Suas Representações

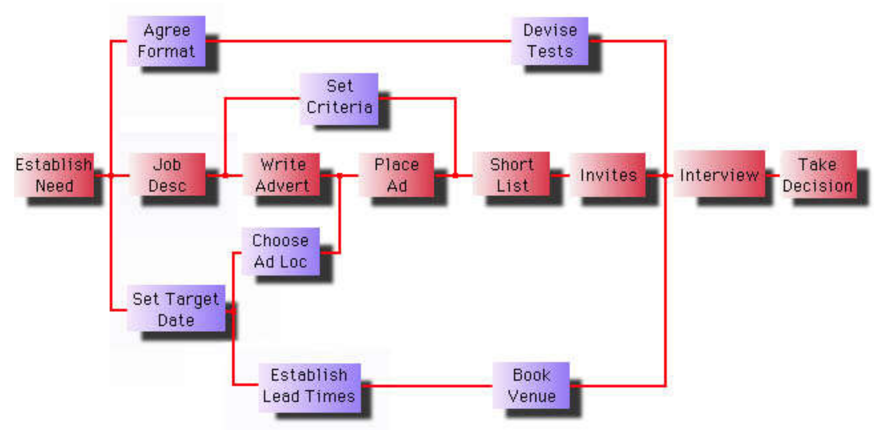
Definição: Um grafo direcionado é um conjunto não-vazio de nós(vértices) e um conjunto de arcos(arestas) onde a relação entre nós e arestas é ordenada.

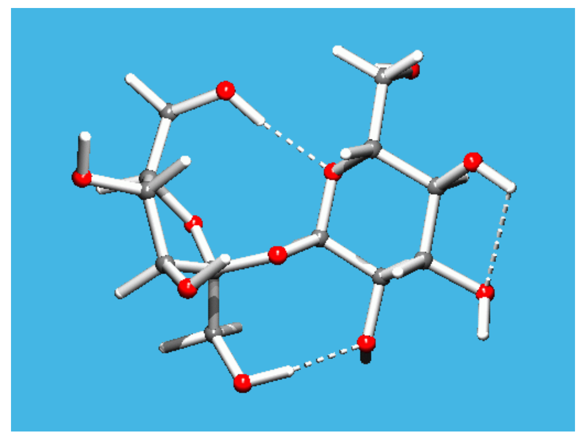
Ex: Escreva a relação G do grafo abaixo.



Grafos e Suas Representações

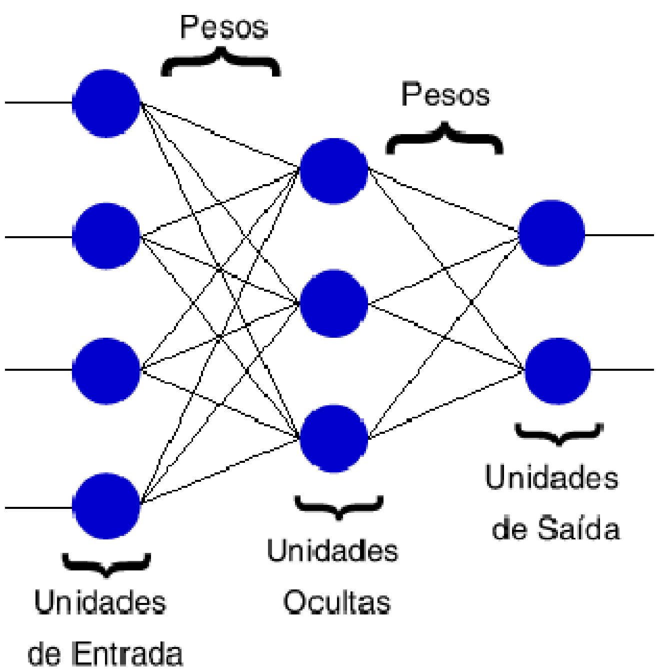
Aplicações:

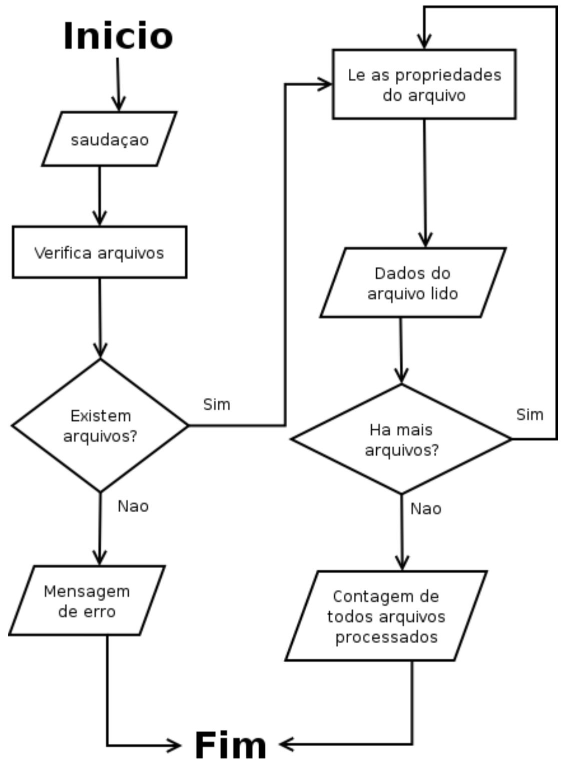




Grafos e Suas Representações

Aplicações:





INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Grafos e Suas Representações

Terminologia:

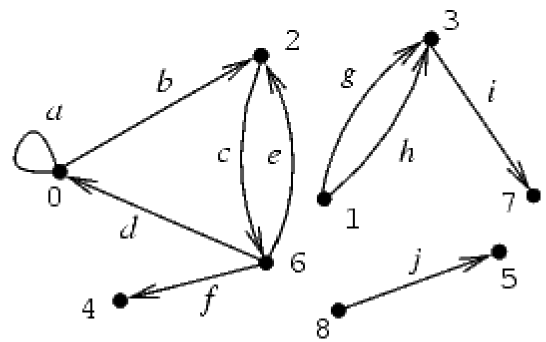
- Nós adjacentes
- Laço
- Arcos paralelos
- Grafo simples: grafo sem laço nem arcos paralelos
- Nó isolado
- Grau do nós
- Grafo completo
- Subgrafo
- Caminho (do nó *s* para o nó *d*)
- Comprimento de um caminho
- Grafo conexo
- Ciclo
- Grafo a acíclico

Grafos e Suas Representações

Ex: apresente:

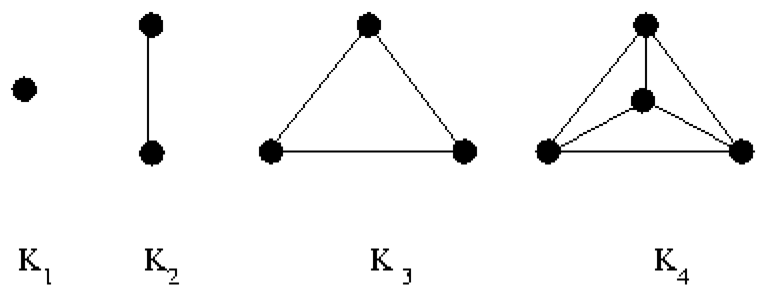
- Dois nós adjacentes
- Um laço
- Arcos paralelos
- Um ciclo

O subgrafo {1,3,7} é conexo?



Grafos e Suas Representações

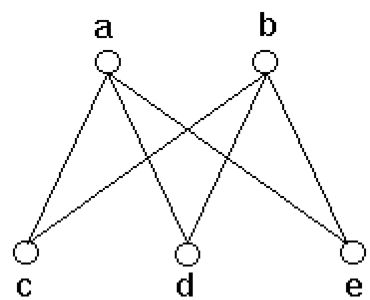
Ex: Grafo simples completo (K_n).



Desenhe K_5.

Grafos e Suas Representações

Definição: Grafo bipartido completo: Se os nós podem ser divididos em dois conjuntos N_1 e N_2, tal que cada nó de N_1 e adjacente à todos os nós de N_2 e vice-versa(denotado por $K_{2,3}$).



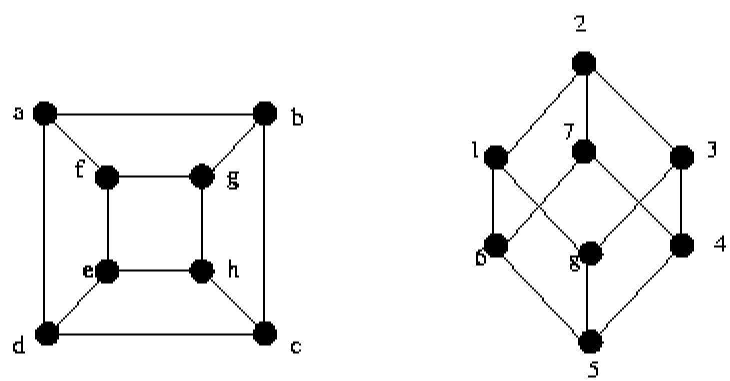
$k_{2,3}$

Ex: Desenhe $K_{3,3}$

Ex: Prove que um grafo acíclico é simples.
Dica: demonstração por contraposição

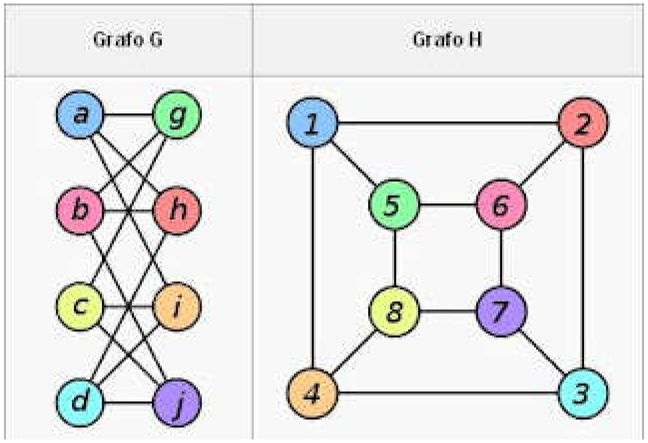
Grafos e Suas Representações

Grafos Isomorfos: Se existe uma bijeção *f* relacionando dois grafos G(N,A) e G'(N',A'), tal que para cada par de nós x e y adjacentes em N temos que *f*(x) e *f*(y) pertencem à N' e são adjacentes.



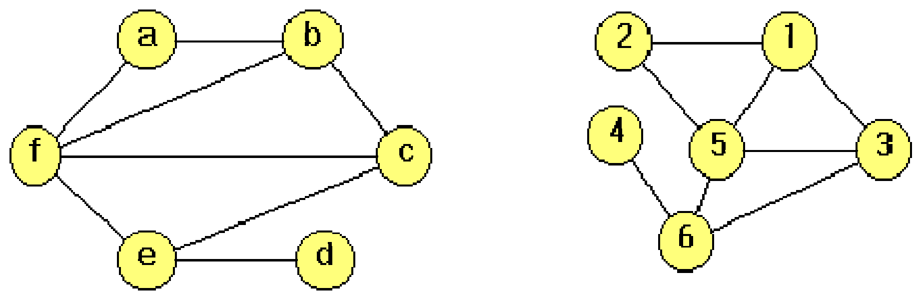
Grafos e Suas Representações

Grafos Isomorfos: Se existe uma bijeção f relacionando dois grafos G(N,A) e G'(N',A'), tal que para cada par de nós x e y adjacentes em N temos que *f*(x) e *f*(y) pertencem à N' e são adjacentes.

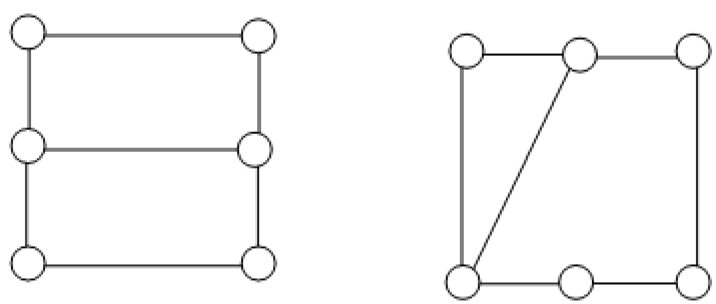


Grafos e Suas Representações

Ex: Encontre a relação de isomorfismo entre os grafos.



Ex: Esse grafos são isomorfos?



Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: um grafo planar é um grafo que pode ser representado no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem.

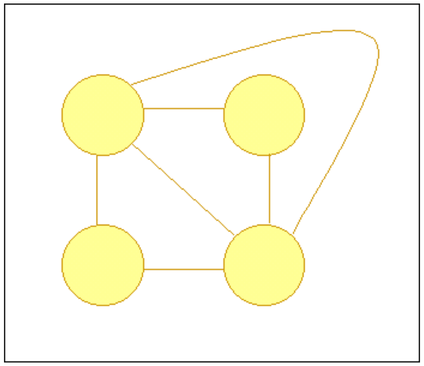
Ex: Provar que K_4 é planar.

Ex: K_5 é planar?

Ex: $K_{3,3}$ é planar?

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar simples e conexo, então:
Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$
n = número de nós
a = número de arcos
r = número de regiões



Grafos e Suas Representações

Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$

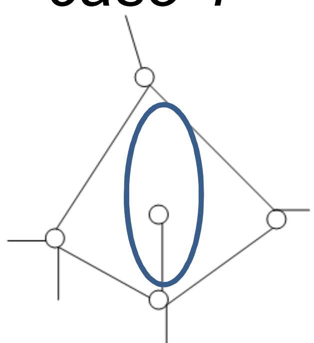
Provar por indução (nº de arestas)

Caso base: a = 0 → n = 1 e r = 1

Supor a = k → $n - k + r = 2$

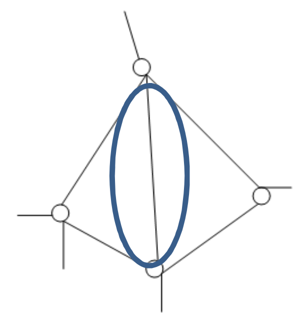
Considere a adição de uma aresta:

caso 1



$(n + 1) - (k + 1) + r = 2$

caso2



$n - (k + 1) + (r + 1) = 2$

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar simples e conexo, então Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$; com $n >= 3$.

Outro resultado:

Contando o número *a* arcos por regiões temos que um grafo com *a* arcos terá, *2a* arcos por região.

E, como o grafo é planar simples, temos no mínimo 3 arcos por região. Ou seja, o número total de arcos por região é 3r.

Logo, $2a >= 3r$.

Substituindo, $2a >= 3(2 - n + 2)$

$$a <= 3n - 6$$

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar simples e conexo, então:

Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$; com n >= 3.

Considere que não exista ciclos de comprimento 3. Então cada região terá pelo menos 4 arestas, isto é, 2a >= 2r.

Que fica, $a \le 2n - 4$

Grafos e Suas Representações

Resumo: Em um grafo planar simples e conexo

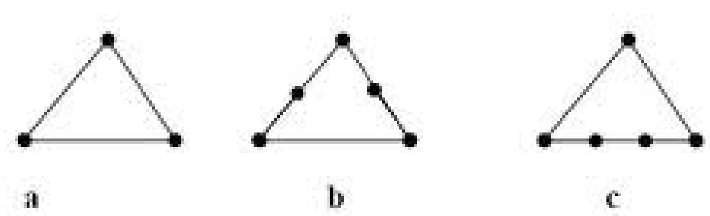
1) $n - a + r = 2$;

2) *Se* n >= 3, então $a \le 3n - 6$

3) Se não existem ciclos de comprimento 3, então
$a \le 2n - 4$

Grafos e Suas Representações

Definição: Dois grafos G, H são homeomorfos se uma subdivisão de G for isomorfa a uma subdivisão de H.



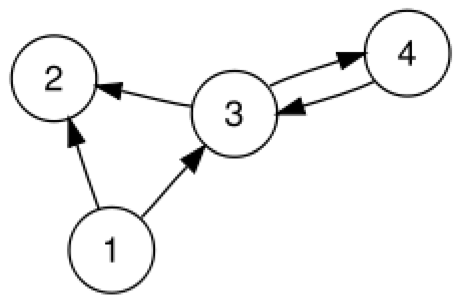
Grafos e Suas Representações

Teorema de Kuratowski: Um grafo não é planar se e só se contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$

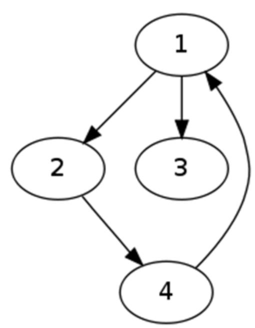
Grafos e Suas Representações

Representação Computacional:

Matriz de Adjacências



Lista de Adjacências



INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Lista Mínima de Exercícios

Seção 5.1: 6, 7, 8, 9, 13, 14, 22, 23, 28, 31, 33, 35, 39, 43, 54, 56, 62, 63, 66, 68, 69, 71, 73.