INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Algoritmos para Grafos

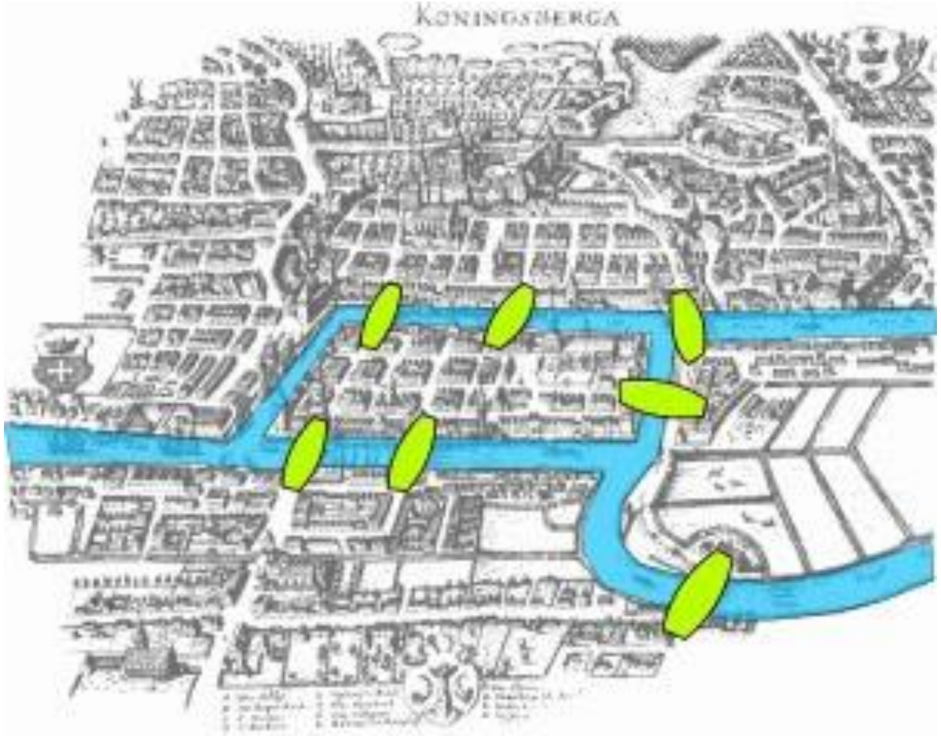
- Grafos Direcionados e Relações Binárias; o Algoritmo de Warshall
- Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano
- Caminho Mínimo e Árvore Geradora Mínima
- Algoritmos de Percurso

O Problema do Caminho de Euler

(“Problema de Inspeção de Rodovias”)

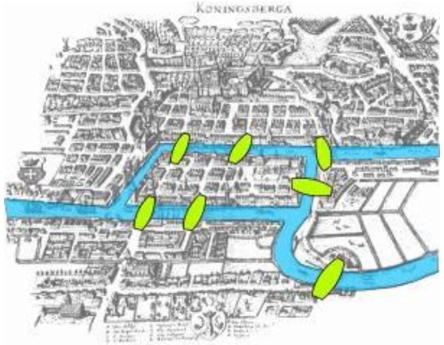
História: Leonhard Euler e as Pontes de Königsberg

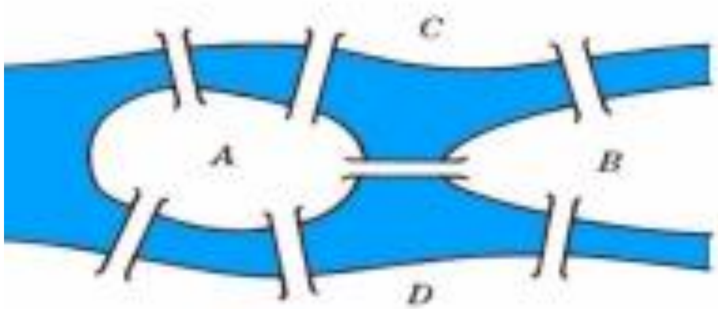
É possível cruzar cada ponte uma única vez e voltar ao ponto de partida?



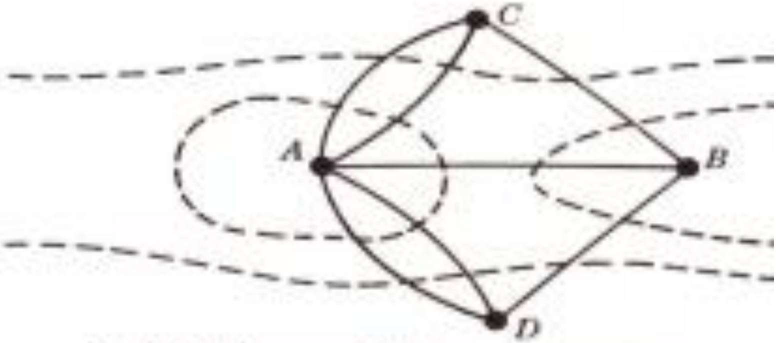
História

Modelo de teoria de grafo





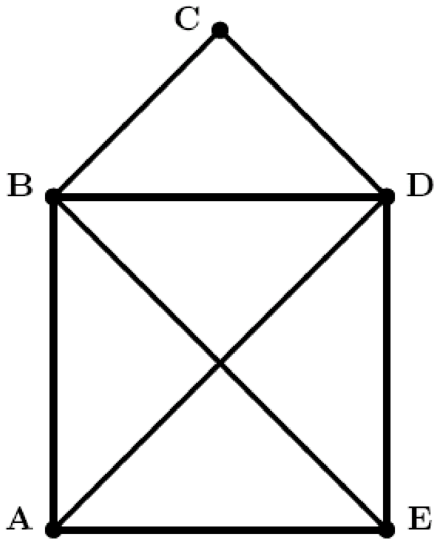
(a) Königsberg in 1736

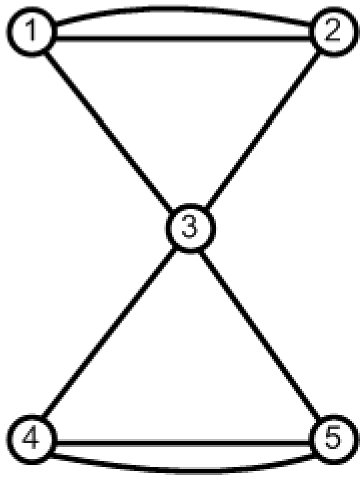


(b) Euler's graphical representation

1º Teorema da Teoria dos Grafos: Euler estabeleceu um teorema que diz em que condições é possível percorrer cada linha exatamente uma vez e voltar ao ponto inicial

Você é capaz de desenhar essa figura sem tirar o lápis do papel?





Teoria de Grafos

- **Problemas Clássicos**

- **Ciclos e Circuito, Euleriano e Hamiltoniano:**

Ciclo (Circuito) : Um ciclo de Euler é um cadeia fechada, ou seja, que inicia e termina em um mesmo nó. Onde cada aresta é visitada um única vez.

Circuito (ciclo) : Um ciclo Hamiltoniano, circuito Hamiltoniano, passeio em vértices ou grafo ciclo é um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez (exceto o vértice que é tanto o início quanto o fim, e portanto é visitado duas vezes).

Teoria de Grafos

Definição: **Caminho de Euler**

Um caminho de Euler em um grafo G é um caminho que utiliza cada ***aresta*** do grafo um única vez.

Definição: **Caminho Hamiltoniano**

Um caminho de Hamilton em um grafo G é um caminho que utiliza cada ***vértice*** do grafo unica vez.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

O problema do Circuito Hamiltoniano

Problemas Clássicos:

Problema do Caixeiro Viajante: Um caixeiro viajante tem de visitar **n** cidades diferentes, iniciando e encerrando sua viagem na primeira cidade. Suponha, também, que não importa a ordem com que as cidades são visitadas e que de cada uma delas pode-se ir diretamente a qualquer outra.
O problema do caixeiro viajante consiste em descobrir a rota que torna mínima a viagem total.

- **Problema de otimização combinatória**

Observação

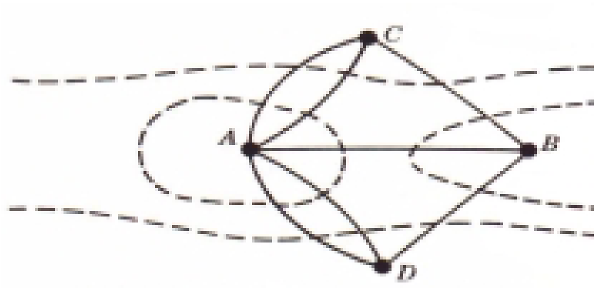
Teorema: “Todo grafo tem um número par de nós ímpares!!”

Demonstração:

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Teorema sobre Caminhos de Euler: "Existe um caminho de Euler em um grafo conexo se, e somente se, não existem nós ímpares ou existem exatamente dois nós ímpares. No caso em que não existe nós ímpares, o caminho pode começar em qualquer nó e terminar aí; no caso de dois nós ímpares, caminho precisa começar em um delas e terminar no outro."

Ex:

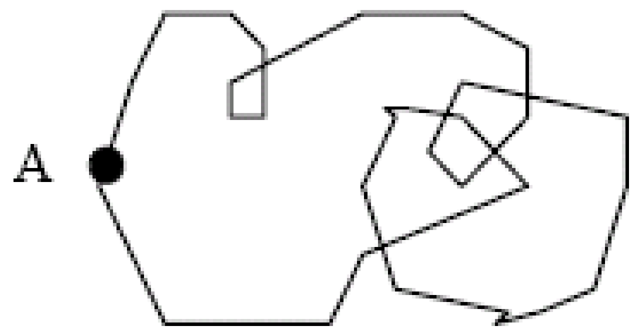


Problemas Clássicos

Ciclos e Circuito, Euleriano e Hamiltoniano

Resultado de Euler (Teorema): G tem uma CÍRCULO EULERIANO precisamente quando todos os nós de G têm grau par.

Ideia:



INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

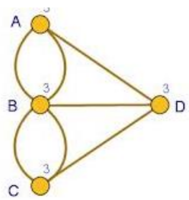
```
total = 0
i = 1
enquanto total <= 2 e i <= n faça
  grau = 0
  para j = 1 até n faça
    grau = grau + A[i, j]     //encontra o grau do nó i(*)
  fim do para
  se ímpar(grau) então
    total = total + 1     //encontrou um outro nó ímpar
  fim do se
  i = i + 1
fim do enquanto
se total > 2 então
  escreva ("Não existe um caminho de Euler")
senão
  escreva ("Existe um caminho de Euler")
fim do se
fim de CaminhoDeEuler
```

Observação

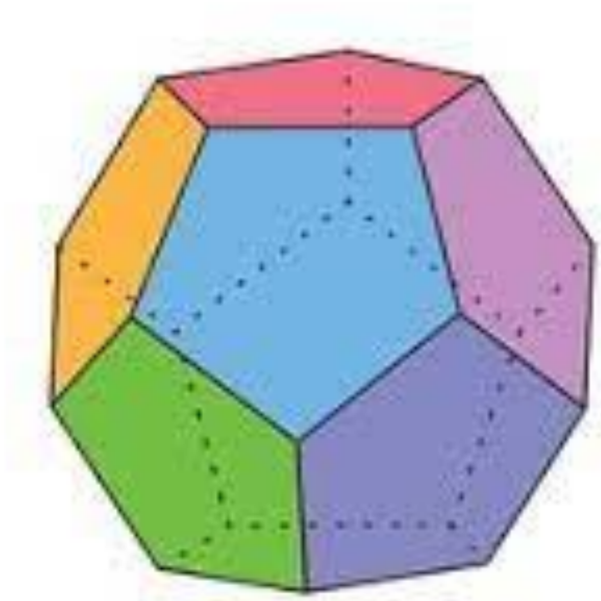
Ex: Sem desenhar, diga se existe um caminho de Euler no grafo representado pela seguinte matriz de adjacências.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

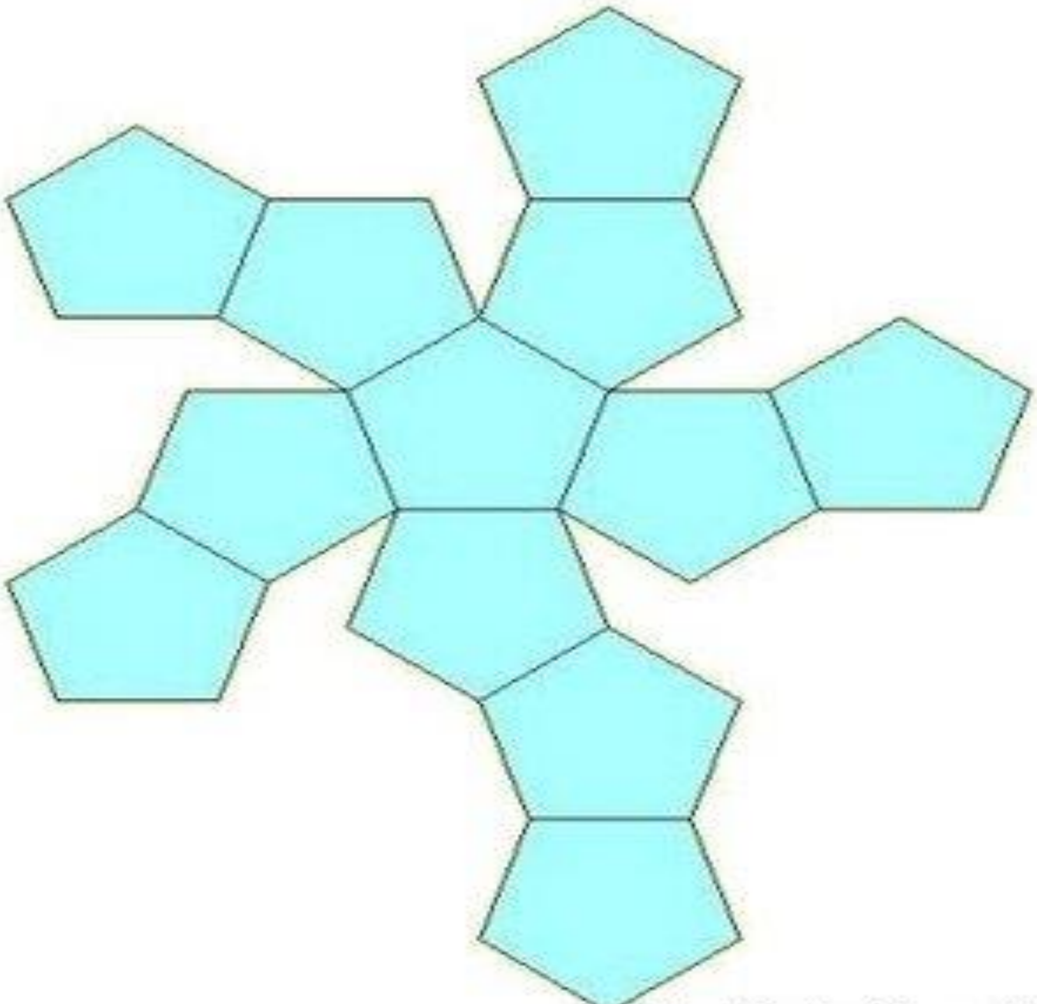
Ex: escreva a matriz de adjacência para o problema do passeio em Konigsberg e execute meu procedimento que você desenvolveu anteriormente.



Dedocaedro: é constituído por:
12 pentágonos;
30 arestas
20 vértices ;
12 faces pentagonais.



Dedocaedro – Planificado



Fonte: http://matimage.blogspot.com

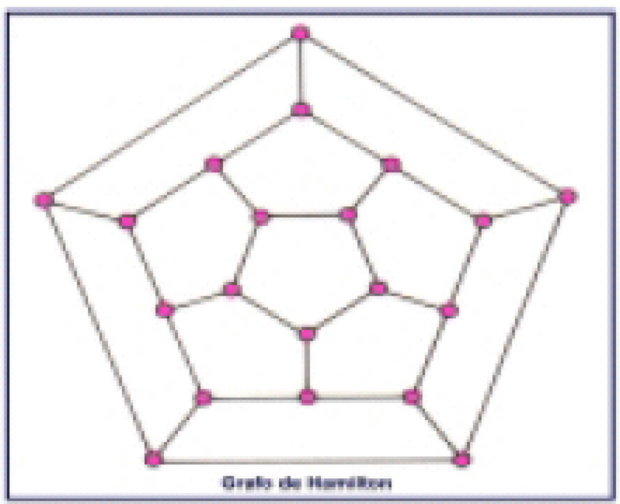
INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

O problema do Circuito Hamiltoniano

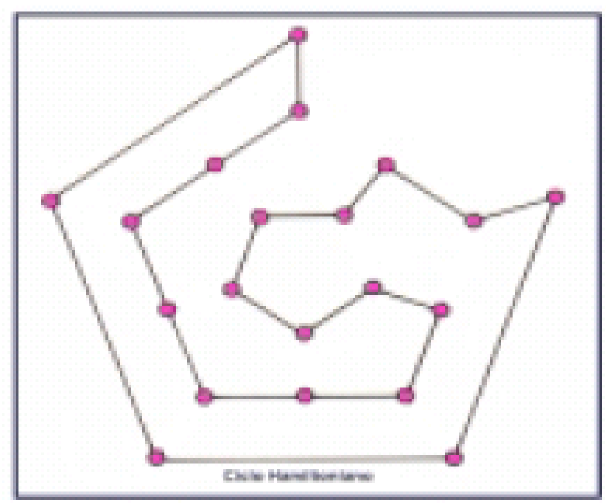
Problemas Clássicos

Problema do Caixeiro Viajante: Consiste em visitar todos os nós do grafo e voltar ao ponto de origem (percurso Hamiltoniano).

- Problema proposto por Willian Rowan Hamilton.



Grafo de Hamilton

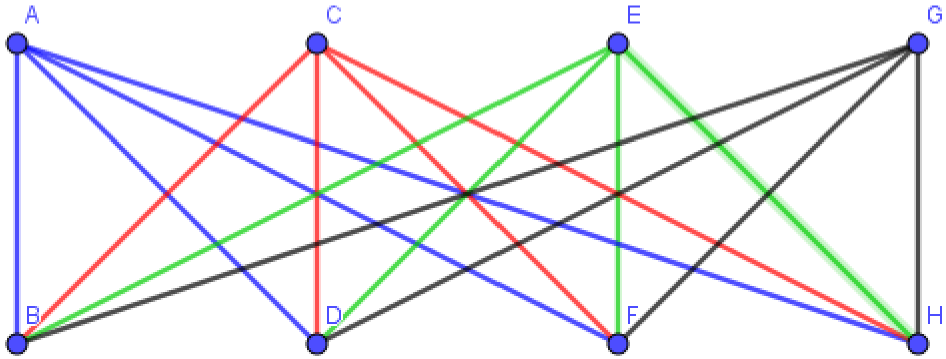


Ciclo Hamiltoniano

EXISTÊNCIA DE CICLOS HAMILTONIANOS

TEOREMA 1: Se G é um grafo simples com n vértices , $n \geq 3$,tais que o grau de todos os vértices em G é pelo menos $\frac{n}{2}$, então G tem um circuito de Hamilton

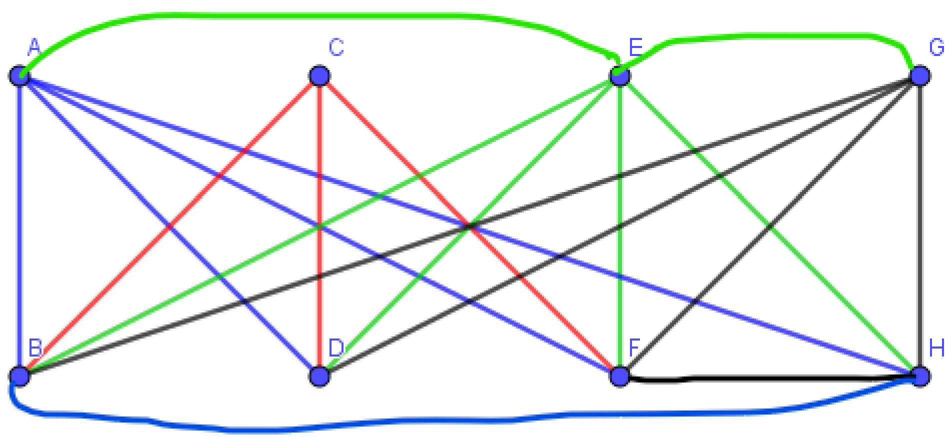
Exemplo:



EXISTÊNCIA DE CICLOS HAMILTONIANOS

TEOREMA 2: Se G é um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$,tais que a soma dos graus de dois vértices não adjacentes seja ≥ n $(\deg(U) + \deg(V) \geq n\,;\, para\ U,V\ vértices\ não\ adjacentes)$ então G é um grafo Hamiltoniano

Exemplo:



INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Lista Mínima de Exercícios

Seção 6.2: 2, 7, 9, 14, 15, 24, 26, 29, 30.