A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial*, pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa.

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

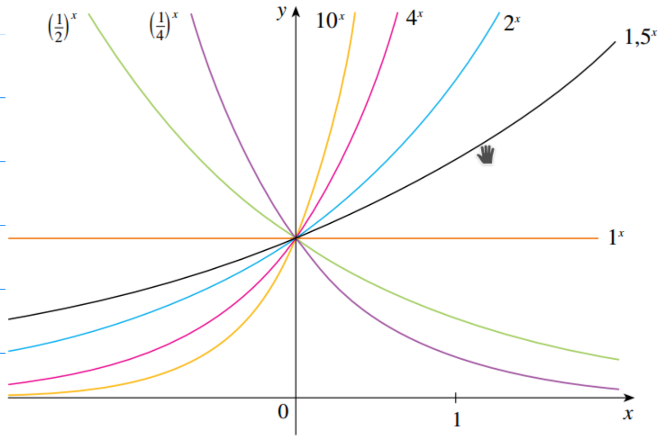
Mas qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Usando aproximações para $\sqrt{3}$, e tomando 2^x nelas, podemos estimar um valor para $2^{\sqrt{3}}$:

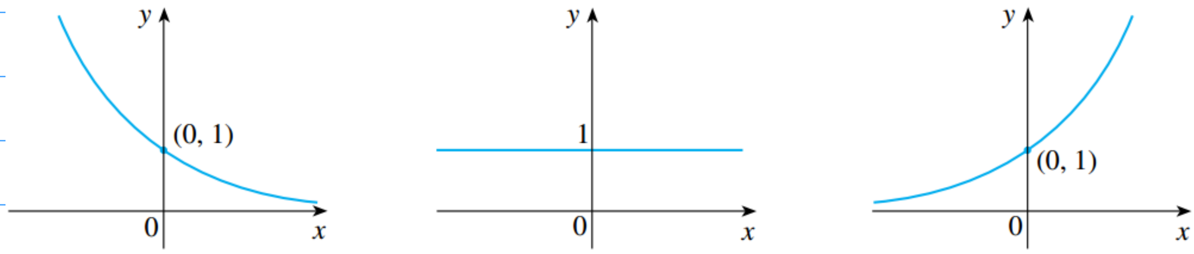
$$\begin{aligned}
1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 &\quad\Rightarrow\quad 2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}\\
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 &\quad\Rightarrow\quad 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74}\\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 &\quad\Rightarrow\quad 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733}\\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 &\quad\Rightarrow\quad 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321}\\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 &\quad\Rightarrow\quad 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206}
\end{aligned}$$

Ou seja, para cara $x \in \mathbb{R}$, podemos obter $2^{\sqrt{3}}$, com qualquer precisão desejada.

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a. Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).



Existem basicamente 3 situações:



(a) $y=a^x$, $0<a<1$ (b) $y=1^x$ (c) $y=a^x$, $a>1$

Observe que, se $a > 1$ e $y = a^x$, então

$$y(-x) = a^{-x} = (a^{-1})^x = (1/a)^x$$

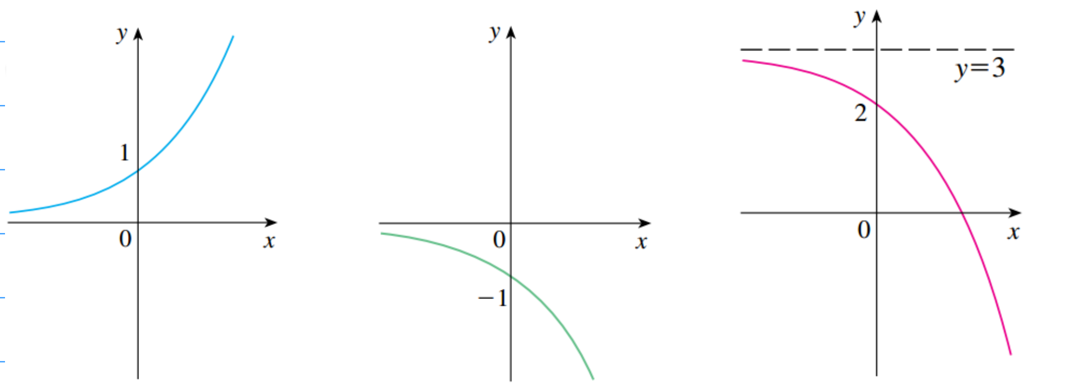
Ou seja, y(-x), uma reflação em torno do eixo Y, é exatamente a exponencial associada a 1/a.

Um fato importante sobre as funções exponeciais é que elas herdam todas as propriedades algébricas das potências:

Propriedades dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.



(a) $y=2^x$ (b) $y=-2^x$ (c) $y=3-2^x$

Aplicações de Funções Exponenciais

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

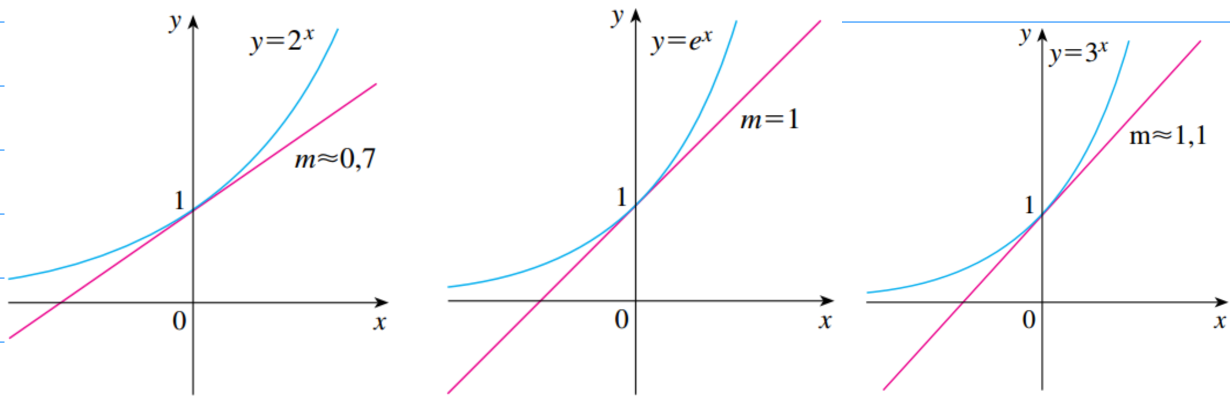
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1000)2^t$$

O Número *e*

Uma forma de se definir o número 'e' é como aquele cuja exponencial tenha tangente de inclinação 1 no ponto (0,1).



Isso resultará em propriedades muito importantes para o cálculo.

Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**.