Resolução do Trabalho 1 de Cálculo I

Sistemas de Informação
Instituto Federal do Espírito Santo
Campus Serra

Cálculo I
Prof. Dr. Fábio Lima

Anderson A. Fraga (20222BSI0482)
`aafrg@tuta.io`

Cap. 4.7 - Problemas de otimização

Questão 13) Um fazendeiro quer cercar uma área de 15.000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

Para determinar a melhor opção para a construção de uma cerca paralela a um dos lados do campo, representado na Figura 1, pode-se definir que:

(i) Dois dos lados do campo terão comprimentos iguais (a) e três outros também terão lados iguais, (b), já que é um campo retangular e que será dividido ao meio;

(ii) Que a área do campo é definida como $A_{campo} = a \times b$ e que necessariamente tem que ser igual a 15.000 m^2;

(iii) O custo da cerca será diretamente proporcional ao perímetro adotado; e que este perímetro pode ser definido por $P_{campo} = a + a + b + b + b \therefore P_{campo} = 2a + 3b$;

Assim, delimita-se geometricamente o campo como:

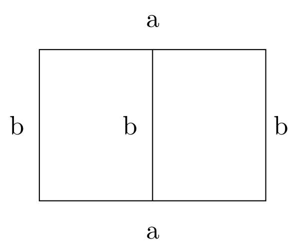


Figure 1: Exemplo geométrico do campo retangular

Ao desenvolver (i) utilizando (ii), isola-se uma das variáveis para simplficar a otimização. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} A_{campo} &= a \times b \\ 1500 &= a \times b \\ b &= \frac{15000}{a} \end{aligned} \tag{1}$$

Substituindo b de (ii) em (i), o perímetro P_{campo} resulta em:

$$\begin{aligned} P_{campo} &= 2a + 3b \\ &= 2a + 3 \times \frac{15000}{a} \\ &= 2a + 45000 * a^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

A otimização, neste caso, exige a descoberta dos pontos críticos que envolvem a dimensão do campo em questão. Desta forma, determina-se os pontos críticos em função da Equação 2, como demonstrado abaixo.

$$
\begin{aligned}
P_{campo} &= 2a + 45000 \times a^{-1} \\
P'_{campo} &= 2 + 45000 \times -1 \times a^{-2} \qquad (3) \\
&= 2 + 45000 \times -1 \times a^{-2} \\
2 &= \frac{45000}{a^2} \\
a^2 &= \frac{45000}{2} \\
a^2 &= 22500 \\
a &= \sqrt{22500} \\
a &= \pm 150
\end{aligned}
$$

Como não existe medida negativa, despreza-se o valor negativo encontrado na derivada de **a** na Equação 3. Retornando na Equação 1, calcula-se o valor de **b** substituindo **a**:

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{15000}{a} \\
b &= \frac{15000}{150} \\
b &= 100
\end{aligned}
$$

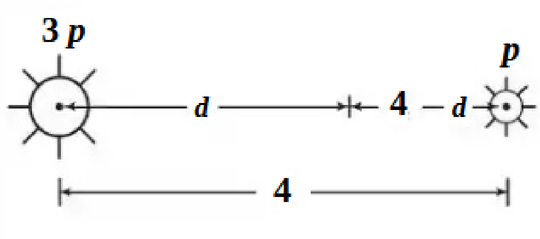
Assim, as dimensões ótimas para a construção da cerca em torno do campo dividido são $\mathbf{a = 150m}$ e $\mathbf{b = 100m}$.

Questão 51) A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

Admitindo que:

(i) Existem duas distâncias iniciais, d e $4-d$, entre a fonte de luz, l, e o objeto;

(ii) Esquematizando os itens apresentados no problema, as posições dos elementos podem ser interpretadas da sequinte forma:



(iii) Podemos classificar as duas fontes de luz segundo sua potência de iluminação, p, como:

- ➜ l_1, com potência igual a $3p$; e
- ➜ l_2 com potência igual a p.

(iv) Podemos, também, relacionar a iluminação do objeto, i, a potência da fonte de luz l_1 e as distâncias como representado abaixo na Equação 2.1:

$$i_1 = \frac{3p}{d^2} \tag{2.1}$$

(v) Como a relação complementar a esta proporção para l_2, onde:

$$i_2 = \frac{p}{(4-d)^2} \tag{2.2}$$

Assim, somando as relações apresentadas nas Equações 2.1 e 2.2 e considerando que $\mathbf{d}$ estará dentro de um intervalo $\mathbf{0 \leqslant d \leqslant 4}$, temos:

$$i_{total} = \frac{3p}{d^2} + \frac{p}{(4-d)^2} \tag{2.3}$$

Otimizando $\mathbf{i_{total}}$ por meio da derivação da Equação 2.3 a fim de encontrar o valor crítico para a distância entre as fontes luminosas, tem-se:

$$i'(d) = -\frac{6p}{d^3} + \frac{2p}{(4-d)^3} = 0 \tag{2.4}$$

$$6p(4-d)^3 = 2pd^3$$

$$3(4-d)^3 = d^3$$

Simplificando a Equação 2.4 e retirando a raiz cúbica:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{(4-d)^3} &= \sqrt[3]{d^3} \\
\sqrt[3]{3}(4-d)^3 &= d \\
4\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}d &= d \\
d + \sqrt[3]{3}d &= 4\sqrt[3]{3} \\
d(1+\sqrt[3]{3}) &= 4\sqrt[3]{3} \\
d &= \frac{4\sqrt[3]{3}}{(1+\sqrt[3]{3})} \\
d &\approx 2,36m
\end{aligned}$$

Ao final, temos que se d equivale a $2,36m$ para a fonte de maior iluminação, então $4 - 2,36 = 1,64m$, ou seja, a fonte de menor iluminação precisa estar a $1,64m$ de distância.