

Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Mais Sobre Demonstração de Correção

Demonstração de Correção Algoritmo

$$\{Q\}s_i\{R\},$$

onde **Q** e **R** são estados antes de depois, respectivamente, a um conjunto de operações **s_i**.

REGRA DO LAÇO

Suponha s_i uma proposição com um laço da forma:

enquanto condição B faça

P

fim do enquanto

OBS: note que P é um segmento de programa

REGRA DO LAÇO

1. *Temos duas triplas aqui.*

$\{Q \wedge B\} P \{Q\}$ (B está na Pré-Condição)
 $\{Q\} S_i \{Q \wedge \sim B\}$ ($\sim B$ está na Pós-Condição)

OBS1: Q representa uma relação entre as variáveis envolvidas no programa que deve ser verdadeira antes do início do laço e verdadeira a cada iteração do mesmo.

OBS2: O laço terminará com $\{Q\} S_i \{Q \wedge \sim B\}$, onde $\sim B$ é a negação da condição do laço.

REGRA DO LAÇO

OBS3: Q é chamada de **invariante do laço**.

OBS4: Quando não sabemos quando o laço vai terminar, e que essa asserção deve permanecer verdadeira a cada iteração devemos utilizar o princípio da indução matemática para demonstrar isso.

Como fazer isto?

- 1- Determinar quem é a invariante do laço Q;
- 2- Fazer a demonstração;
- 3 – Verificar a dedução da tripla:

$\{Q\} S_i \{Q \wedge \sim B\} - (Pós\ Condición)$

EXEMPLO: REGRA DO LAÇO

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna $x \cdot y$.

Produto (x, y)

Inteiros i, j

$i = 0$

$j = 0$

enquanto $i \neq x$ **faça**

$j = j + y$

$i = i + 1$

fim do enquanto

retorne j

fim da função Produto

EXEMPLO: REGRA DO LAÇO

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna $x*y$.

Produto (x, y)

Inteiros i, j

$i = 0$

$j = 0$

Conjectura sobre a invariante:

$$j = i * y$$

enquanto $i \neq x$ **faça**

$j = j + y$

$i = i + 1$

fim do enquanto

retorne j

fim da função Produto

EXEMPLO: REGRA DO LAÇO

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna $x+y$.

Soma (x,y)

Inteiros i,j

$i = 0$

$j = x$

enquanto $i \neq y$ **faça**

$j = j + 1$

$i = i + 1$

fim do enquanto

retorne j

fim da função Produto

Mostre que a invariante do laço é $j = x + i$ e
que o programa termina retornando $x + y$

Mais Sobre Demonstração de Correção

OBS: note que em uma prova de correção de algoritmo não basta mostrar que a invariante do laço é verdadeira à cada iteração. É necessário prova que o algoritmo termina.

EXEMPLO: REGRA DO LAÇO

O Algoritmo de Euclides para o máximo divisor comum.

Ex: Encontrar o $\text{mdc}(420, 66)$.

Mais Sobre Demonstração de Correção

MDC (a, b) /*supor $a \geq b$ */

inteiros i, j

$i = a$

$j = b$

enquanto $j \neq 0$ **faça**

 calcule q e r , tal que $i = qj + r$, $0 \leq r < j$

$i = j$

$j = r$

fim do enquanto

retorne i

fim da função MDC

Mais Sobre Demonstração de Correção

Note que o algoritmo de Euclides assume que:

(para todo a, b, q, r inteiros) $[(a = bq + r) \rightarrow (\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r))]$

Para prova que o *Algoritmo de Euclides* funciona é necessário mostrar que essa afirmação é verdadeira.

Prove que o Algoritmo de Euclides está correto.

Provar a invariante $\text{mdc}(i, j) = \text{mdc}(a, b)$ e que termina.

Caso base ...

Suponha $\text{mdc}(i_k, j_k) = \text{mdc}(a, b)$...

Lista Mínima de Exercícios

Seção 2.3: 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 13