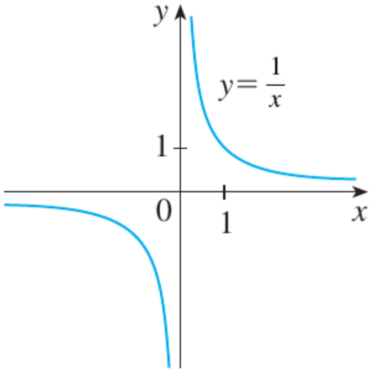
Como escrever a resolução de um limite?



$$\lim_{x\to 0^+} 1/x \;\to\; \frac{1}{0^+} \;\to\; \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1/x \;\to\; \frac{1}{0^-} \;\to\; -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} 1/x \;\to\; \frac{1}{\infty} \;\to\; 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} 1/x \;\to\; \frac{1}{-\infty} \;\to\; 0$$

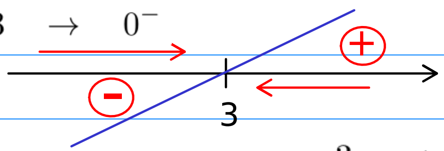
EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} \;\to\; \frac{6}{0^+} \;\to\; \infty$$

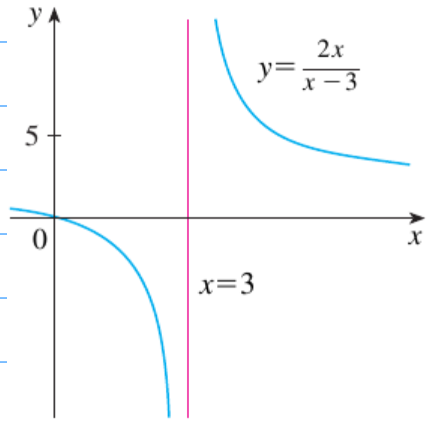
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} \;\to\; \frac{6}{0^-} \;\to\; -\infty$$

Análise de sinal de y=x-3

$x-3 \;\to\; 0^-$



$x-3 \;\to\; 0^+$



EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Assíntotas verticais só podem ocorrer em torno de decontinuidades.

No caso da tangente, só pode ocorrer quando o cosseno for zero.

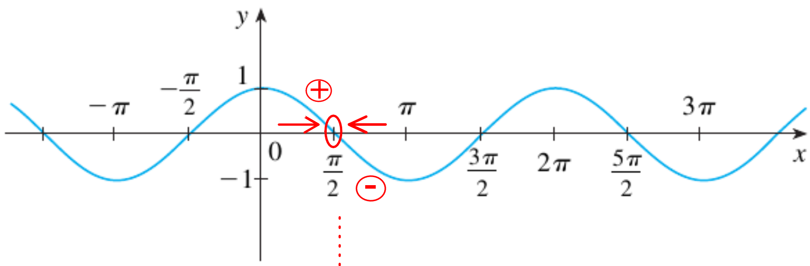
Quando o cosseno é zero?

quando $x \to (\pi/2)^-$

$\cos x \to 0^+$

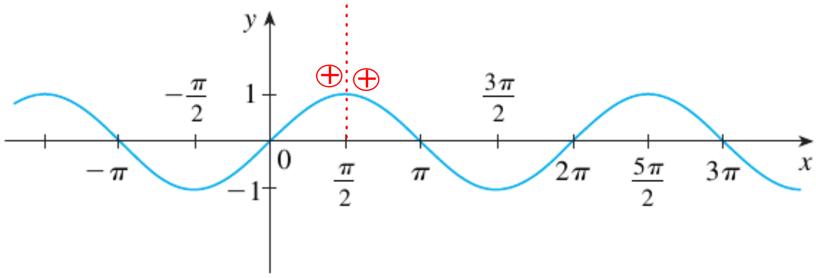
quando $x \to (\pi/2)^+$

$\cos x \to 0^-$



$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\to\; \frac{1}{0^+} \;\to\; \infty$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\to\; \frac{1}{0^-} \;\to\; -\infty$$



Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

O mais importante sobre essas propriedades é que elas dependem que os limites individuais de f(x) e g(x) tenham sido chacados antes.

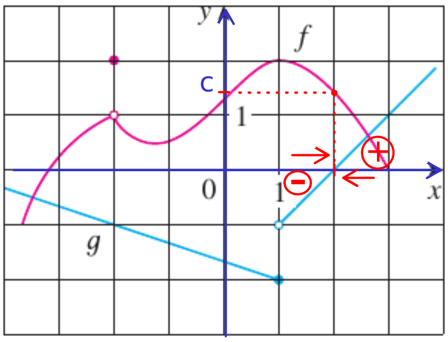
Enquanto você não fez isso, não se sabe se as igualdades são válidas.

Se, depois de ter usado a propriedade, um destes limites não existir você não poderia ter usada a propriedade.

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$

$$= \lim_{x \to 2} f(x) + 5 \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = 1 + 5 \cdot (-1) = -4$$



(b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$

g(x) tem limites laterais diferentes em 1

$\nexists$

Mas os limites laterais existem

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \cdot g(x) = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) \cdot g(x) = 2 \cdot (-1) = -2$$

(c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f(x) tende a um valor constante, mas g(x) tende a zero.

Logo, não se pode aplicar a propriedade 5 neste limite.

Mas, é possível obter os limites laterais.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{c}{0^-} \to -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{c}{0^+} \to \infty$$

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo
(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

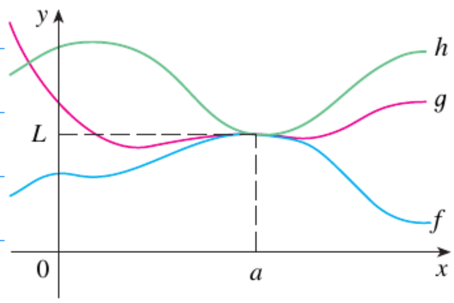
$\boxed{2}$ **Teorema** Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

$\boxed{3}$ **Teorema do Confronto** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

$\lim_{x \to 0} x^2 \rightarrow 0$ e $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \rightarrow [-1, 1]$

Uma certeza que temos sobre o seno é que:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

Independente da função que estiver dentro do seno!

Multiplicando a desigualdade por x², fica

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

Tomando o limite em cada menbro da desigualdade (Teorema 2):

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leqslant \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant \lim_{x\to 0} x^2$$

Segue que, $$0 = \lim_{x\to 0} -x^2 \leqslant \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Assim, pelo Teorema do confronto, temos que $$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$