Para se integrar produtos e potências de funções triginométricas, geralmente é possível se valer apenas da Regra da Substituição, mais o auxílio de algumas relações trigonométricas.

Do Teorema Fundamental da Trigonometria, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos que, $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ e que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Além disso, temos as chamadas "fórmulas de arco duplo":

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

São derivadas das fórmulas de "arco soma", com os dois ângulos iguas a 'x'. Serão necessárias para se resolver as integrais nesta seção.

Para se integrar produtos de potências de senos e cossenos, a estratégia se divide em dois casos. Um caso é quando um deles, o seno ou o cosseno, tem uma potência impar. E o outro caso é quando ambos tem potência par.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x \, dx$.

Aqui temos um cosseno de potência impar. A estratégia é separar um cosseno e converter os demais (agora,de potência par) em senos, usando o teorema fundamental.

$$\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

Então, faça $u = \operatorname{sen} x$, e o cosseno que foi separado será usado para trocar dx por du.

$u = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx.$ Assim, a integral fica

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos x \, dx = \int (1 - u^2) \, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

EXEMPLO 2 Encontre $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Aqui o seno tem potência impar e a estratégia é similar. Reserve um seno e converta os demais (agora, de potência par) em cossenos, e faça $u = \cos x$, transformando o integrando em um polinômio.

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x$$

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen}\, x \, dx$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx \\
&= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\
&= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx$.

Agora temos apenas um seno de potência par. Nestes casos, onde não há um seno ou cosseno de potência impar, não dá pra seguir a estratégia anterior. Neste caso, usamos as fórmulas de arco duplo, reduzindo as potências.

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x \, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2\pi}\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 0}\right) = \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

Aqui novamente não temos seno ou cosseno de grau impar, logo, usamos as fórmulas de arco duplo.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \tfrac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx\end{aligned}$$

Neste ponto, podemos integrar cada parcela, mas, para integrar o cosseno ao quadrado, será necessário aplicar novamente uma fórmula de arco duplo.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \tfrac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \\ &= \tfrac{1}{4} \int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C\end{aligned}$$