A Regra da Cadeia é uma técnica para a derivação de funções compostas.

Dadas duas funções $f(x)$ e $u(x)$, a derivada da função composta $F(x) = f(u(x))$ é dada por

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Note que a função $u(x)$ dentro da $f(x)$ não foi derivada. Ao invés disso, multiplíca-se do lado de fora pela derivada de $u(x)$.

Mnemônico:
"deriva a de fora repetindo a dentro, e multiplica pela derivada da de dentro"

EXEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ e (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

(a) $y = F(x) = \operatorname{sen}(x^2) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $u(x) = x^2$

função de fora — função de dentro

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

derivada da de fora — repete a de dentro — derivada da de dentro

(b) $y = F(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2$ e $u(x) = \operatorname{sen}(x)$

função de fora — função de dentro

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}^2 x = f'(u(x)) \cdot u'(x) = 2\operatorname{sen}(x) \cdot \cos x$$

derivada da de fora — repete a de dentro — derivada da de dentro

Há situações em que a função composta é mais complexa, ou há a necessidade de alguma manipulação algébrica antes de se aplicar a Regra da Cadeia. Nestes casos, é mais conveniente utilizar a regra da cadeia aplicando a notação de Leibniz.

Regra da Cadeia em notação de Leibniz:

Se $F(x) = f(u(x))$,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{du}f(u) \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

EXEMPLO 1 Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$F(x) = f(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ e } u(x) = x^2 + 1$$

escreve a função de fora em termos de 'u'

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}u^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

$$= \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) = \frac{x}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4 **A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia** Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

EXEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

Para $u = x^3 - 1$,

$$\frac{d}{dx}u^{100} = \frac{d}{du}u^{100} \cdot \frac{d}{du}(x^3 - 1)$$

$$= 100u^{99} \cdot (3x^2)$$

$$= 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

EXEMPLO 4 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

Para $u = x^2 + x + 1$,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{u}} = \frac{d}{dx}u^{-\frac{1}{3}} = \frac{d}{du}u^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{d}{du}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x + 1)$$

$$= -\frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^4}}$$

EXEMPLO 5 Encontre a derivada da função

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2\cancel{t} + 1) \cdot 1 - 2(\cancel{t} - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EXEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

Fazendo $u = (2x + 1)$ e $v = (x^3 - x + 1)$, temos que, $y = u^5 \cdot v^4$. Assim,

$$y' = \left[\frac{d}{dx}u^5\right] \cdot v^4 + u^5 \cdot \left[\frac{d}{dx}v^4\right]$$

$$= \left[\frac{d}{du}u^5 \cdot \frac{d}{dx}u\right] \cdot v^4 + u^5 \cdot \left[\frac{d}{dv}v^4 \cdot \frac{d}{dx}v\right]$$

$$= [5u^4 \cdot u'] \cdot v^4 + u^5 \cdot [4v^3 \cdot v'] = u^4v^3 \cdot [5vu' + 4uv']$$

$$= u^4v^3 \cdot [5v(2) + 4u(3x^2 - 1)] = 2u^4v^3 \cdot [5v + 2u(3x^2 - 1)]$$
$$= 2u^4v^3 \cdot [5(x^3 - x + 1) + 2(2x + 1)(3x^2 - 1)]$$
$$= 2u^4v^3 \cdot [17x^3 + 6x^2 - 9x + 3]$$
$$= 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

Com a Regra da Cadeia podemos deduzir a regra de derivação para funções exponênciais de base 'a' qualquer, pois $a = e^{\ln a}$. Assim,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Logo, $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = \frac{d}{dx}e^u = \frac{d}{du}e^u \cdot \frac{d}{dx}x \ln a$

$$= e^u \cdot \ln a$$

$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

EXEMPLO 8 Se $f(x) = \text{sen}(\cos(\text{tg}\, x))$, então

Para $u = \text{tg}\, x$ e $v = \cos u$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen}\, v = \frac{d}{dv}\text{sen}\, v \cdot \frac{d}{dx}v = \cos v \cdot \left[\frac{d}{dx}\cos u\right]$$

$$= \cos v \cdot \left[\frac{d}{du}\cos u \cdot \frac{d}{dx}u\right] = -\cos v \cdot \text{sen}\, u \left[\frac{d}{dx}\text{tg}\, x\right]$$

$$= -\cos(\cos(\text{sen}\, x)) \cdot \text{sen}\,(\text{tg}\, x) \cdot \sec^2 x$$