É sempre possível escrever uma função qualquer f(x), que não tenha simetria par ou impar, como a soma de uma função par com uma função impar. Da seguinte forma:

$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad \text{é função impar,}$$

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{é função par, e}$$

$$f(x) = f_i(x) + f_p(x).$$

De fato, $f_i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2}$

$$= \frac{-(f(x) - f(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x)$$

Do mesmo modo, $f_p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x)$

E por fim, $f(x) = f_i(x) + f_p(x).$

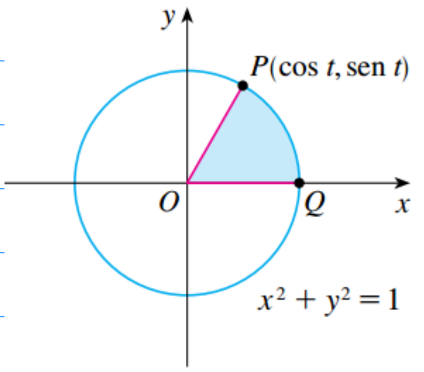
$$= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

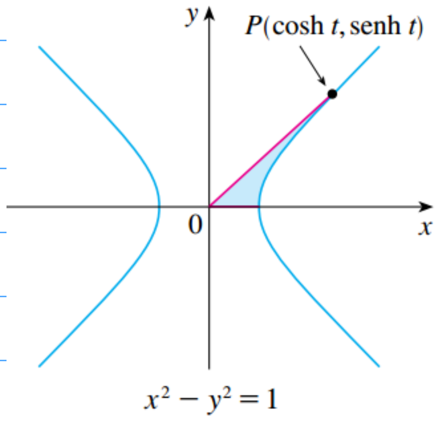
$$= \frac{f(x) + \cancel{f(-x)} + f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

Esse é um reultado geral, mas que, aplicado à função $y = e^x$, fornece duas funções que aparecem frequentemente na matemática e em todo tipo de aplicações. Essas funções, a parte par e a parte impar da expenencial de base 'e', tem muitas proprieades similares com as funções trigono métricas. A começar com as paridades, seno é uma função impar e o cosseno é uma função par. Mas também suas derivadas, e as derivadas de suas funções inversas, são muito similares. Elas são chamadas de funções hiperbólicas devido ao seu relacionamento com a hipérbole, enquanto que as funções trigonométricas são relacionadas ao círculo.

A parte par de e^x é chamada de cosseno hiperbólico e a parte impar de seno hiperbólico:

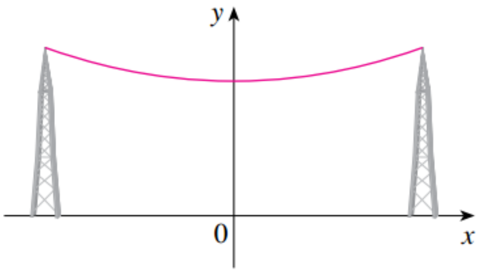
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$





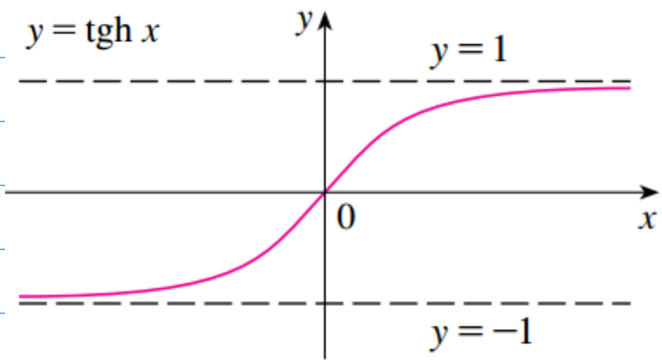
$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \qquad \cosh^2 - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado. Se um cabo flexível estiver suspenso entre dois pontos na mesma altura, então ele assume a forma de uma curva chamada catenária, ou arco catenário.



Uma catenária $y = c + a \cosh(x/a)$

Uma força aplicada em um ponto qualquer da curva é distribuída igualmente por todo material, proporcionando maior estabilidade à estrutura. Por isso é amplamente utilizada na construção de arcos arquitetônicos, domos de catedrais e até iglus.



O Gateway Arch em St. Louis foi projetado usando-se uma catenária.

As aplicações na ciência e engenharia ocorrem sempre que uma grandeza é gradualmente absorvida ou extinguida, pois o decaimento pode ser representado por uma tangente hiperbólica.

Identidades Hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$\boxed{1}$ Derivadas de Funções Hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cossech}^2 x$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$$

Funções Hiperbólicas Inversas

Com as funções hiperbólicas são definidas a partir de exponências, é natural que suas inverças sejam logaritmos:

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\operatorname{tgh}^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

Mas principal interesse não é nas hiperbólicas inversas em si, mas sim nas suas derivadas, pois, são funções algébricas e supreendentemente similares ás derivadas das funções trigonompetricas inversas.

6 Derivadas de Funções Hiperbólicas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$