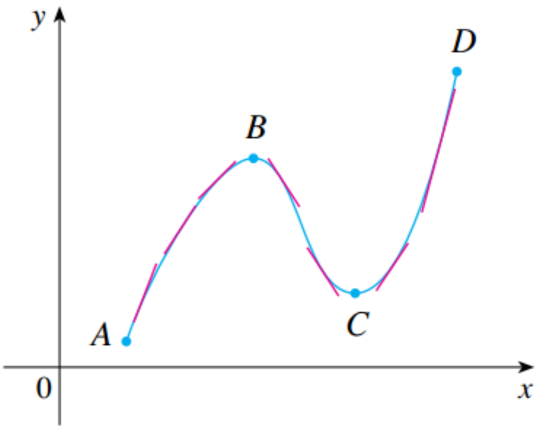
O que f' diz sobre f ?

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

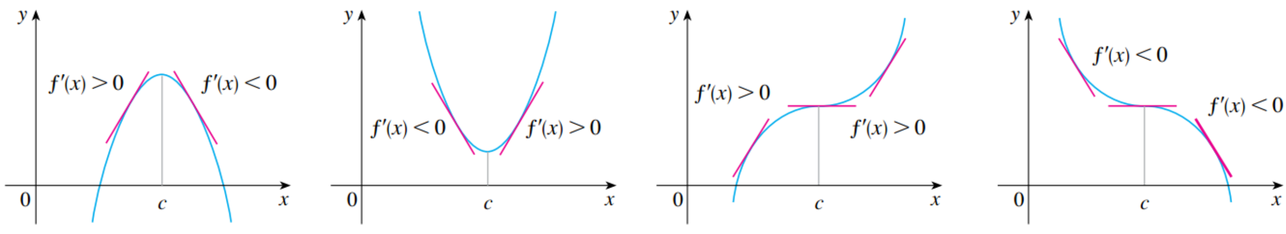


Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

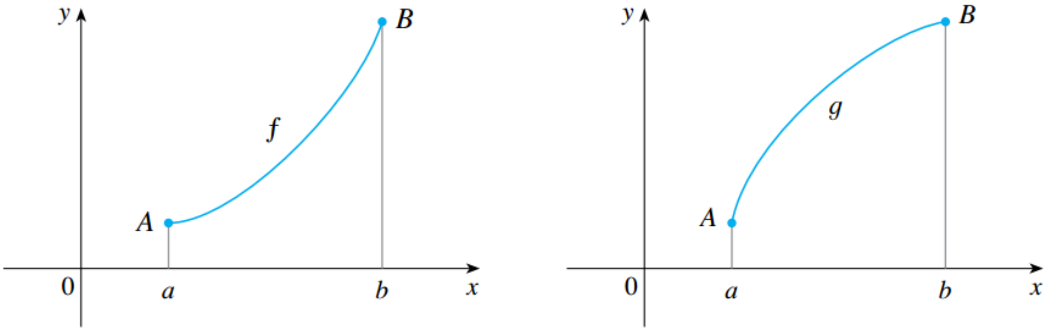
(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.



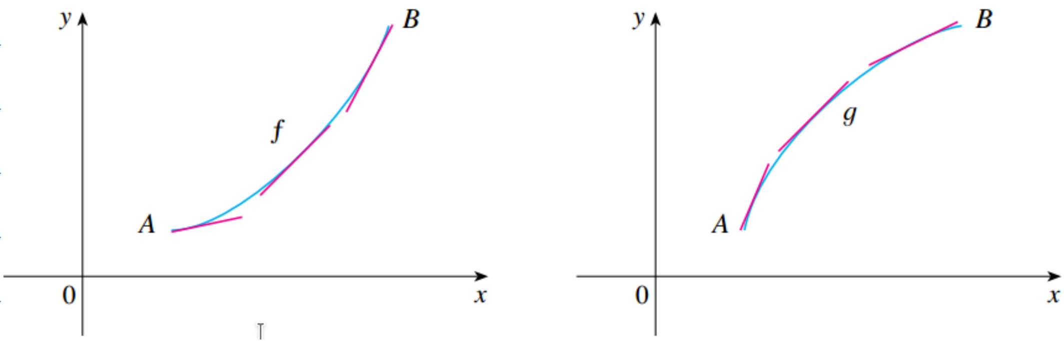
(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

O que f'' diz sobre f ?

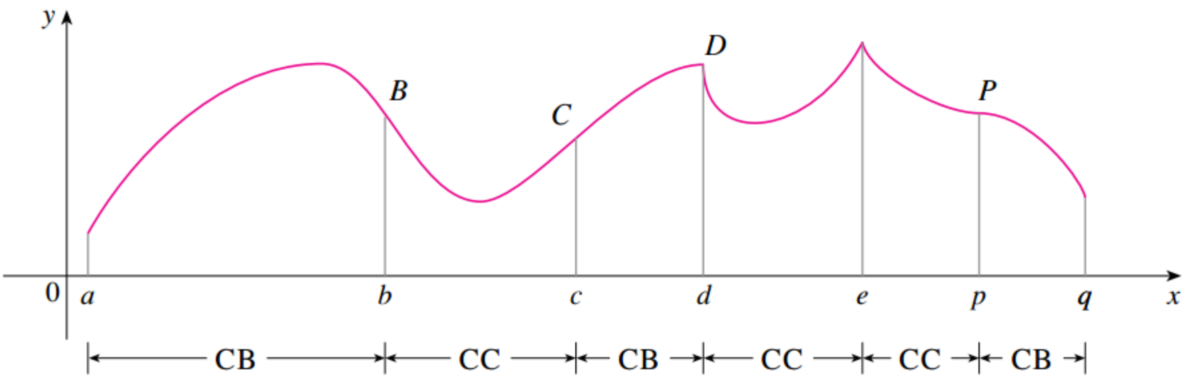
Qual a diferença entre esses dois gráficos?



Note as tangentes agora:



Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.



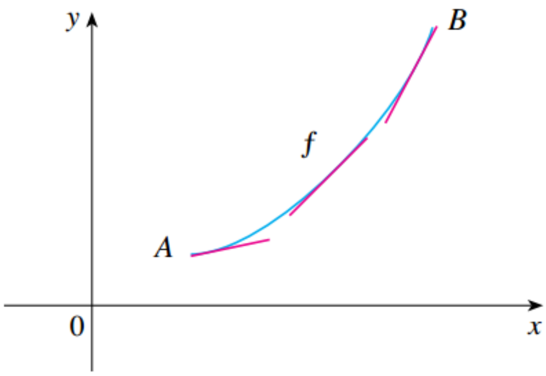
Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

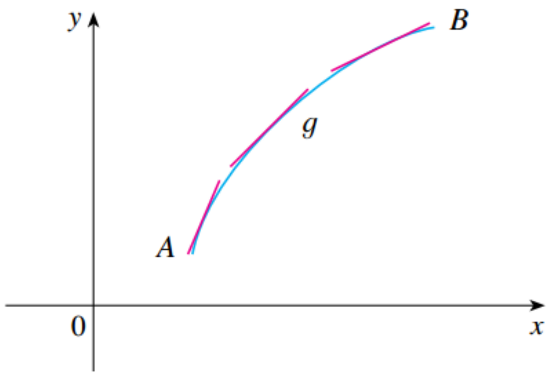
Mas como podemos deduzir a concavidade algebricamente, ou seja, sem precisar conhecer o gráfico?

Relembre que, o sinal de f'(x) indica onde f(x) é crescente ou decrescente.

Do mesmo modo, o sinal de f''(x) indica onde f'(x) é crescente ou decrescente.

Ok, é qual a vantagem disso?





Quando a concavidade é para cima, a inclinação das tangentes está aumentendo, ou seja, f'(x) é crescente quando a concavidade é para cima.

Quando a concavidade é para baixo, a inclinação das tangentes está diminuindo, ou seja, f'(x) é decrescente quando a concavidade é para baixo.

Portanto, o sinal de f''(x) indica a concavidade de f(x)

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

E isso nos fornece também um segundo critério para decidir se um ponto crítico é máximo ou mínimo local:

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Além disso, conhecendo as concavidades, podemos também indicar os pontos de inflexão.

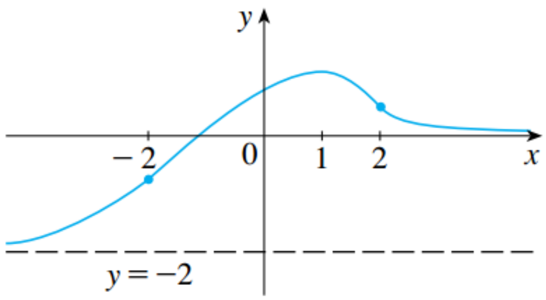
Então, o teste da derivada segunda é mais abrangente. Mas isso não significa que o teste da derivada primeira seja inútil. Ainda é necessário saber onde a função f(x) é crescente ou decrescente para se esboçar o gráfico. Além disso, o duplo critério facilita a identificar erros no processo.

EXEMPLO 5 Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

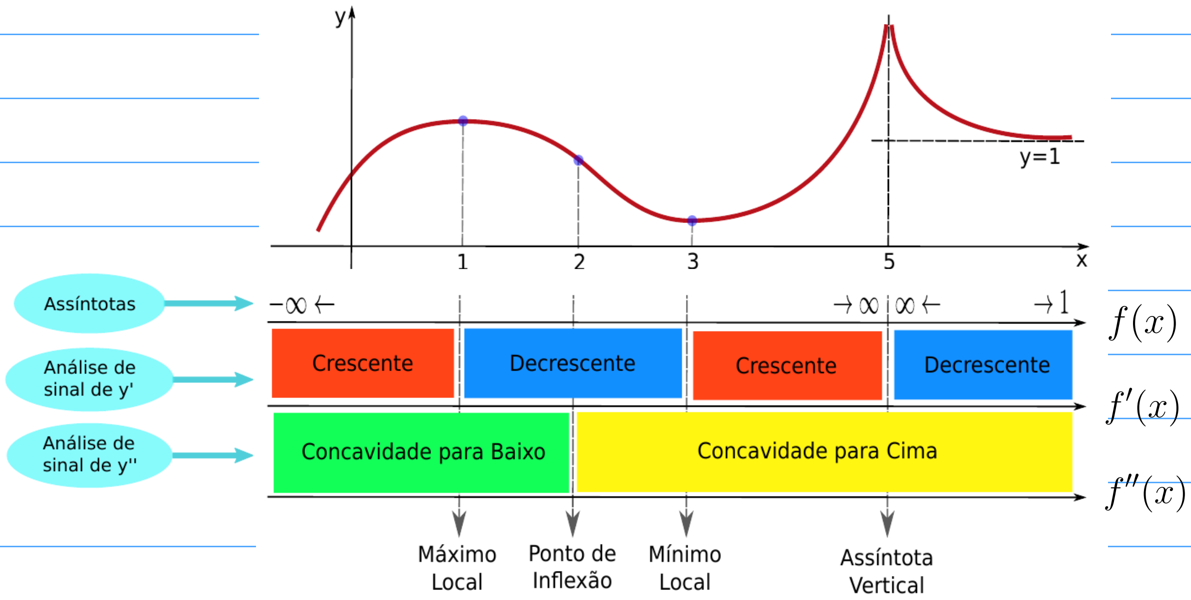
(i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$



Quais as informações são necessárias para se esboçar uma curva?



É necessário fazer a análise de sinal das duas primeiras derivadas, e verificar o comportamento nas possíveis assíntotas.

Análise de Sinal de y':

- $y' > 0$ para $x \in (3, 5)$ e $x < 1$
- $y' < 0$ para $x \in (1, 3)$ e $x > 5$

Análise de Sinal de y'':

- $y'' > 0$ para $x > 2$
- $y'' < 0$ para $x < 2$

Assíntotas:

- $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$
- $\lim_{x \to \infty} y = 1$
- $\lim_{x \to 5^-} y = \infty$
- $\lim_{x \to 5^+} y = \infty$

Além disso, é preciso checar o domínio. Não há gráfico onde a função não tem domínio. Por fim, para fazer um bom esboço, é necessário calcular o valor da função nos seus pontos críticos, onde houver domínio, e os interceptos com os eixos. Para se marcar esses pontos com posições relativas apropriadas. A escala, entretanto, não precisa ser uniforme. Visualizar bem o comportamento do gráfico é mais importante.

Para checar o domínio, basta garantir que não há divisão por zero ou raiz de número negativa. Além de casos especiais, como um logaritmo. Os interceptos com o eixo X ocorrem onde y = 0, são as raízes da função. E vice-e-versa, ou seja, o intercepto (no máximo um) com o eixo Y ocorre fazendo x = 0.

E por ser simples, sempre vale a pena checar a paridade da função.

Roteiro para esboço de curvas:

1 - Domínio:

Comece sempre verificando o domínio. Se houver intervalos que ficam de fora do domíno, eles devem ficar de fora de todas as análises a seguir, e implicam em uma região sem curva no gráfico. Além disso, ao checar o domínio, vc indentifica descontinuidades, que serão usadas na etapa seguinte.

Cheque também a paridade. Se a função for par, ou impar, vc deverá ver essa propriedade ao final, no gráfico. Caso contrário, algum erro foi cometido.

2 - Assíntotas:

Se foram indentificadas descontinuidades acima, deve-se checar então os limites em torno delas para saber o comportamento da função nesses pontos. Pois, são possíveis assíntotas verticais. O segundo tipo de assíntota, as horizontais, podem podem ocorrer quando 'x' tende a mais ou menos infinito, e esses limites devem ser sempre calculados, pois, vai indicar o comportamento da função nessas direções mesmo que não seja uma assíntota.

3 - Análise de sinal de y' e y'':

Obtida as duas derivadas, a análise de sinal de y' indicará os intervalos onde a função é crescente ou decescente, e a análise de sinal de y'' indicará as concavidades. Deixe para classificar os pontos críticos mais adiante.

4 - Pontos a seram marcados e paridade:

Calcule o valor da função nos pontos críticos, que houverem dentro do domíno, e também indentifique os interceptos, se ouverem.

5 - Diagrama e pontos críticos:

Reúna as informações dos passos 2 e 3 em um diagrama, como mostrado, e então classifique os pontos críticos. Neste momento podem surgir inconsistências que indicam erro no passo 3. Por exemplo, um mínimo local em um intervalo de concavidade para baixo. Volte e corrija, se for o caso. Posicione o diagrama na folha de modo a fazer o gráfico acima ou abaixo do diagrama.

6 - Faça o gráfico:

Alinhe o eixo X do gráfico com os eixos do diagrama. Marque os pontos obtidos no passo 4 e as assíntotas identificadas no passo 2. Lembre se, do passo 1, há alguma região sem domínio. Separe o gráfico em regiões verticais, delimitas pelos pontos críticos, descontinuidades, e pelas extremidades ($x \to \pm\infty$). Sugiro começar o gráfico por uma das extremidades e ir seguindo, da esquerda para a direita, ou o contrário.

Em cada região, verifique se a função é crescente ou decrescente, sua concavidade, e o comportamento nas bordas do intervalo. Então faça uma linha que atenda a estas condições, neste intervalo. E repita o processo, cheque as condições do intervalo e faça a linha.

Neste ponto podem aparecer inconsistências, que indicam erros nas etapas 2 e 3. Por exemplo, a função deve ser decrescente onde há um limite indo para infinito. Isso indica que ou a análise de sinal está errada, ou o limite está errado.

Ao final, depois de ter desenhando todas as regiões, verifique se tudo está batendo com o diagrama e se a função está passando nos pontos críticos como deveria. E, caso a função tenha paridade, veja se o gráfico a está seguindo. Qualquer inconsistência que ainda ocorra, volte e revise suas contas.

Na prova, se vc identificou uma inconsistência, mas não consegue achar o erro, escreva isso. Se vc não marcar o gráfico por conta disso, ou marcar algo em desacordo com as informação obtidas, vai perder pontos em dois lugares: no gráfico e onde errou conta.

Roteiro para esboço de curvas (resumo):

1 - Domínio: divisão por zero e raiz de número negativo (ou ln). Paridade.

2 - Assíntotas: entorno das descontinuidades e para $x \to \pm\infty$.

3 - Analises de sinal: y' e y''.

4 - Pontos: críticos e interseptos.

5 - Diagrama: classificar pontos críticos (lembre de deixar espaço pro gráfico).

6 - Gráfico: Alinhe com o diagrama, marque os pontos e assíntotas. Domínio.