INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

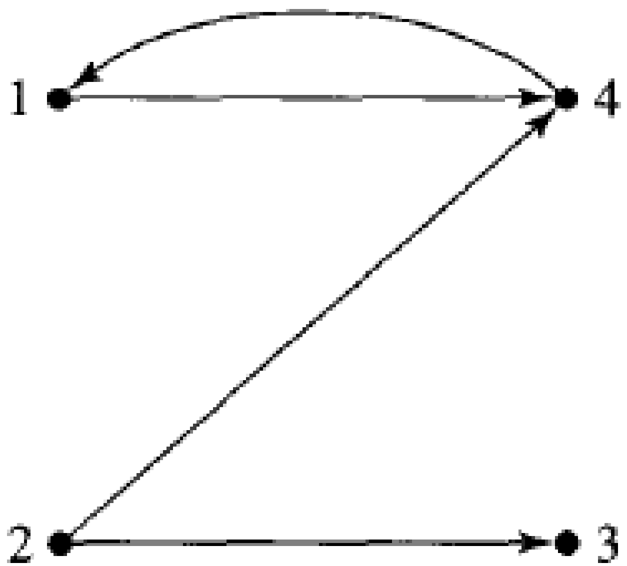
Adriana Padua Lovatte

Algoritmos para Grafos

- Grafos Direcionados e Relações Binárias; o Algoritmo de Warshall
- Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano
- Caminho Mínimo e Árvore Geradora Mínima
- Algoritmos de Percurso

Grafos Direcionados

- Definição: Em um grafo direcionado, o nó n_j é **acessível** no nó n_i se existe um caminho de n_i para n_j.
- Por exemplo: No grafo a seguir o nó 4 é acessível do nó 1, o nó 1 é acessível do nó 2 pelo caminho 2-4-1. O nó 3 não é acessível do nó 4.



Algoritmos para Grafos

- Em um sistema modelado por um grafo direcionado com um nó inicial, qualquer nó que não é acessível do nó inicial nunca pode afetar o sistema e portanto pode ser eliminado.

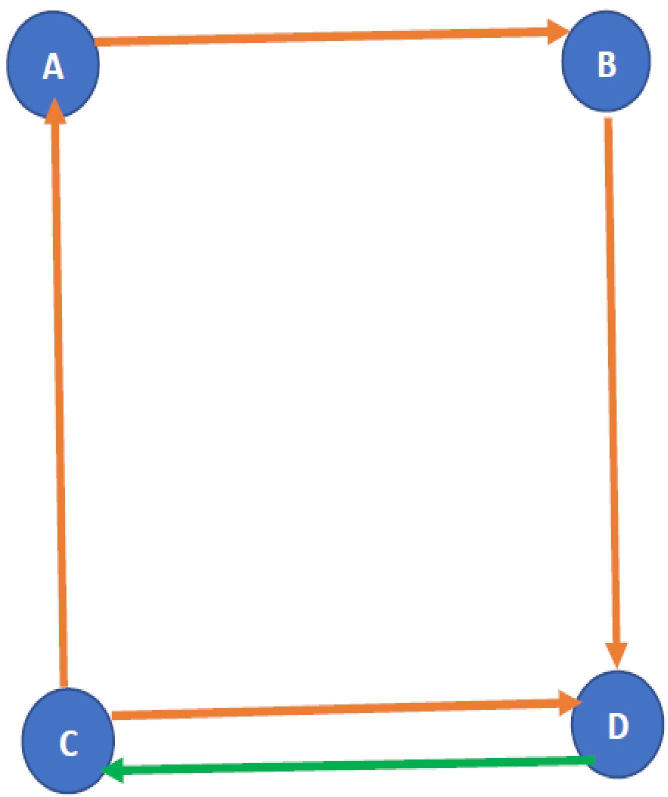
- Por exemplo: Rotas aéreas; Caminho de comunicação em uma rede de computadores.

Matriz de Adjacência de um grafo direcionado

- A matriz de adjacência A de um grafo direcionado G com n nós e sem arcos paralelos vai ter 1 na posição $a_{i,j}$ se existe um arco de n_i para n_j
-

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

Dado o grafo a seguir

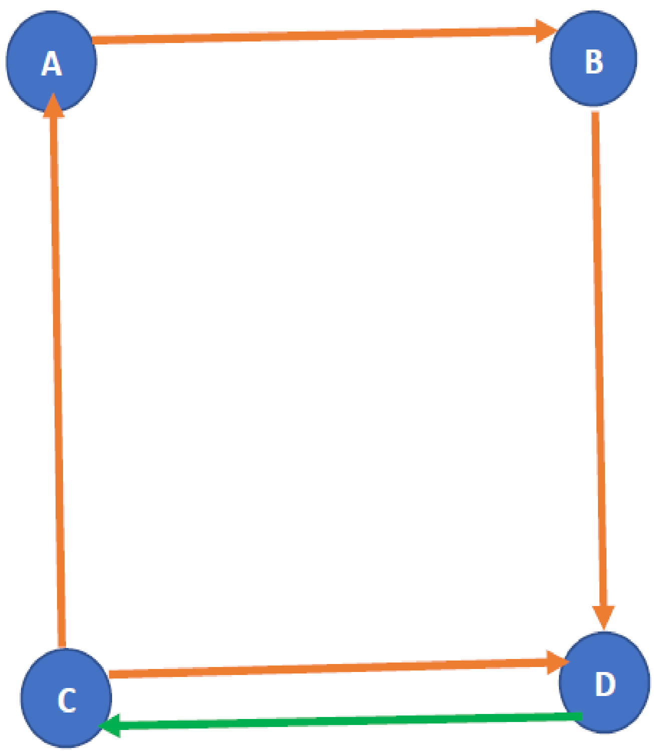


Matriz de Adjacência (Forma limitada de acessibilidade) – Matriz Booleana

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

Dado o grafo a seguir



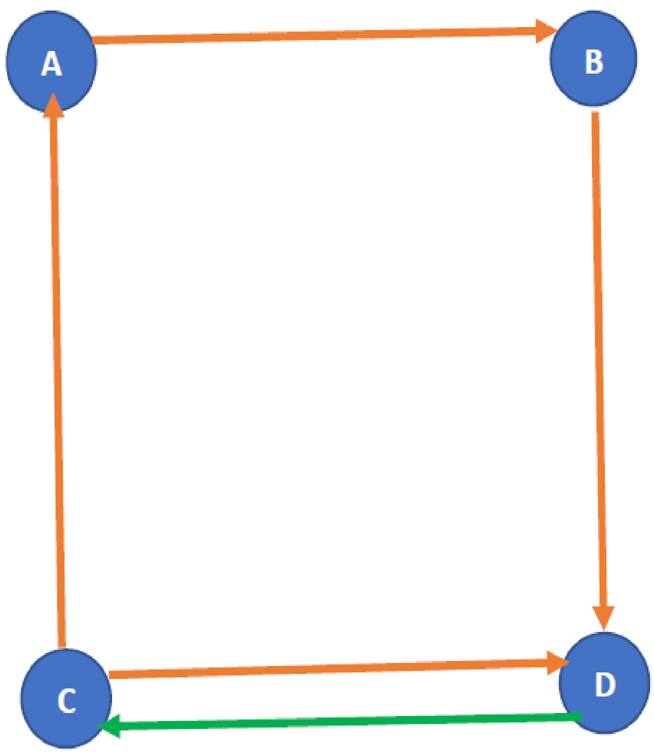
Matriz de acessibilidade de caminho de tamanho 2

$$A^{(2)} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

Dado o grafo a seguir



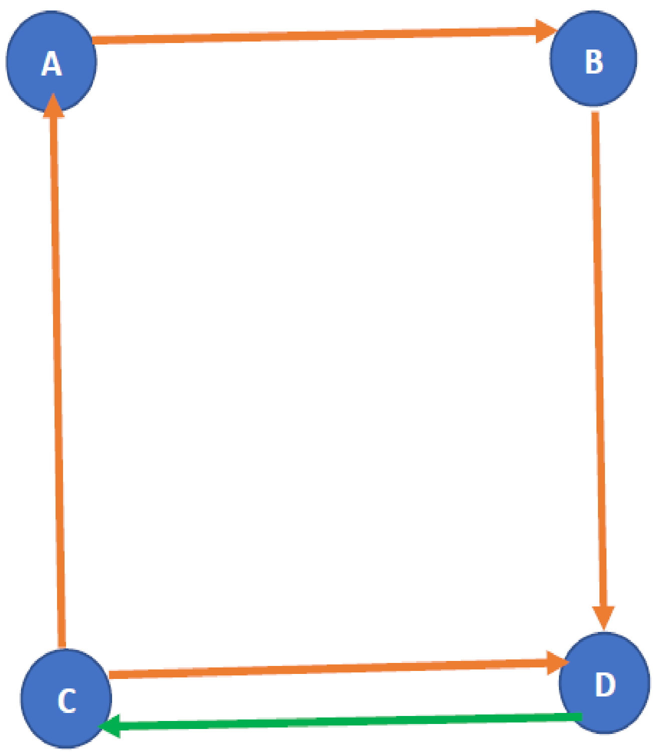
Matriz de acessibilidade de caminho de tamanho 3

$$A^{(3)} = A^{(2)} \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ A^{(3)} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

Dado o grafo a seguir



Matriz de acessibilidade de caminho de tamanho 4

$$A^{(4)} = A^{(2)} \otimes A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Grafos Direcionados

Teorema sobre Matrizes Booleanas de Adjacência e Acessibilidade: Se A é a matriz booleana de adjacência de um grafo direcionado G com n nós e sem arcos paralelos, então $A^{(m)}[i,j] = 1$ se, e somente se, existe um caminho de comprimento m do nó n_i. para o nó n_j.

Teorema: Qualquer caminho de comprimento $n+1$ em um grafo com n vértices repete pelo menos 1 vértice.

Teorema: Se um vértice v_i. é acessível ao vértice v_j *em um grafo com n vértices então existe um caminho entre estes vértices com comprimento menor ou igual a n.*

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

Matriz de Acessibilidade: Se *G* é um grafo direcionado com n nós e sem arestas paralelas , a matriz de acessibilidade será dada por:

$$R = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)}$$

MATRIZ DE ACESSIBILIDADE

No exemplo anterior:

$$R = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafos Direcionados

Algoritmo de Warshall: Calcula uma sequência de $n + 1$ matrizes $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Para cada k em $\{0, \ldots, n\}$, $M_k[i,j] = 1$ se, e somente se, existe um caminho em G de n_i para n_j cujos nós interiores do caminho pertencem apenas ao conjunto de nós $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Grafos Direcionados

Algoritmo de Warshall:

Warshall(matriz booleana M_{nxn})
//***M*** = matriz de adjacência de um grafo sem arcos paralelos
para *k = 0* **até** *n – 1* **faça**
    para *i = 1* **até** *n* **faça**
        para *j = 1* **até** *n* **faça**
            $M[i,j] = M[i,j] \vee (M[i,k+1] \wedge M[k+1,j])$
        fim do para
    fim do para
fim do para
// ***M*** = matriz de acessibilidade de G
fim de Marshall

Grafos Direcionados

Algoritmo de Warshall:
Outra opção apresentação

1. Considere a coluna $k + 1$ na matriz M_k.
2. Para cada linha com um elemento 0 nessa coluna, copie essa linha em M_{k+1}
3. Para cada linha com um elemento 1 nessa coluna, execute a operação booleana **ou** dessa linha com a linha $k+1$ e escreva a linha resultante em M_{k+1}

Lista Mínima de Exercícios

Seção 6.1: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 19, 23, 29