Substituição Trigonométrica consiste de eliminar radicais usando alguma relação trigonométrica. Por exemplo, do teorema fundamental da trigonometria, temos que,

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Numa integral como $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, a ideia é fazer $x = \operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$$

Mas, note que, o domínio para essa função é $1 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 1$ $\Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1.$ Assim, ao se fazer a substituição $x = \operatorname{sen}\theta$, é necessário definir um domínio para θ que seja capaz de produzir todos os valores de 'x'. Como $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, para $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, este domínio é suficiente.

Além disso, para $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $\cos x \geq 0$. Logo, $\sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$. E como $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

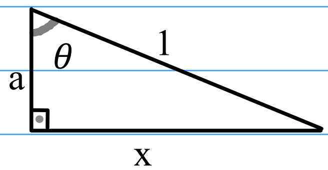
$$\Rightarrow \quad dx = \cos\theta\, d\theta$$

Assim, a integral fica

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos\theta \cdot \cos\theta \;\, d\theta = \int \cos^2\theta \;\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int 1 + \cos 2\theta \;\, d\theta \;\; = \tfrac{1}{2}(\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\operatorname{sen} 2\theta) + c$$

Agora, como a integral é indefinida, é necessário retornar para x. Mas, para isso, $x = \operatorname{sen}\theta$ deve ser injetiva. O que de fato ocorre para $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Assim, associando o triâmgulo retângulo



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{1} \qquad a^2 + x^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{1} = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1} x$$

Assim, a integral fica

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\theta+\tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}\,2\theta)+c = \tfrac{1}{2}(\theta+\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta)+c$$
$$= \tfrac{1}{2}(\text{sen}^{-1}x + x\cdot\sqrt{1-x^2})+c$$

Tabela de Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	$1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\text{tg}\,\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \dfrac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta$

No livro está errado!

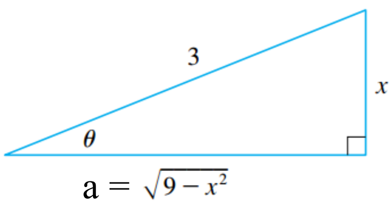
EXEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

Seja $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, onde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Então $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\,|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \text{cotg}^2\theta\,d\theta$$
$$= \int (\text{cossec}^2\theta - 1)\,d\theta$$
$$= -\text{cotg}\,\theta - \theta + C$$

Para retornar para x, se $x = 3\cdot\text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$ e $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$



$$a^2 + x^2 = 3^2 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{9-x^2}$$

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Cateto oposto}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

Se $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Então $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\mathrm{tg}^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\,\mathrm{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\,d\theta$$

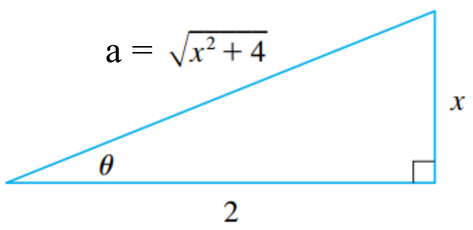
Para calcularmos essa integral trigonométrica, colocamos tudo em termos de sen θ e cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição $u = \mathrm{sen}\,\theta$, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,\theta} + C$$

Para $x = 2\cdot\mathrm{tg}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{x}{2}$



$$a^2 = x^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x^2+4}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Assim,
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

Nem sempre é útil utilizar substituição trigonométrica, mesmo que possível. Em alguns casos, como este, uma simples substituição já resolve. Mas o contrário também ocorre, claro. As vezes é possível uma substituição simples, mas uma substituição trigonomética pode resultar em menos trabalho, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6 Encontre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

$x = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta$, que resulta em $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\operatorname{tg}^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Quando $x = 0$, $\operatorname{tg}\theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$, logo $\theta = \pi/3$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\left(\cancel{\tfrac{3}{2}}\cdot \operatorname{tg}\theta\right)^3}{(\cancel{3}\cdot\sec\theta)^{\cancel{3}}} \cdot \left(\tfrac{3}{2}\cdot \cancel{\sec^2\theta}\right)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Agora substituímos $u = \cos\theta$, de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du$$

$$= \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du = \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2}$$

$$= \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \frac{3}{32}$$

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

Completando quadrado no numerador

$$3-2x-x^2 = 3-[x^2+2x] = 3-[(x+1)^2-1] = 4-(x+1)^2$$

Logo, fazemos a seguinte substituição trigionométrica $x+1 = 2\cdot\operatorname{sen}\theta$.

Assim,

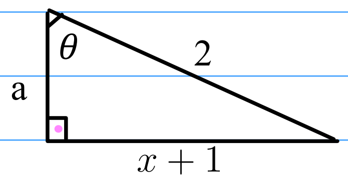
$$\sqrt{3-2x-x^2} = \sqrt{4-(x+1)^2} = \sqrt{4-(2\cdot\operatorname{sen}\theta)^2} = 2\cdot\cos\theta,$$

e $x = 2\cdot\operatorname{sen}\theta - 1 \quad\Rightarrow\quad dx = 2\cdot\cos\theta\,d\theta.$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{2\operatorname{sen}\theta - 1}{\cancel{2\cos\theta}}\,\cancel{2\cos\theta}\,d\theta\\ &= \int (2\operatorname{sen}\theta - 1)\,d\theta\\ &= -2\cos\theta - \theta + C\end{aligned}$$

Para $x+1 = 2\cdot\operatorname{sen}\theta \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x+1}{2}$ e $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$



$$a^2 + (x+1)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow\quad a = \sqrt{4-(x+1)^2} = \sqrt{3-2x-x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= -2\cos\theta - \theta + C\\ &= -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$