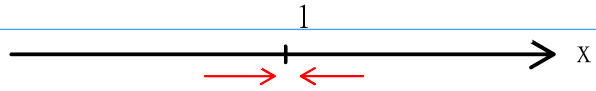
EXEMPLO 1

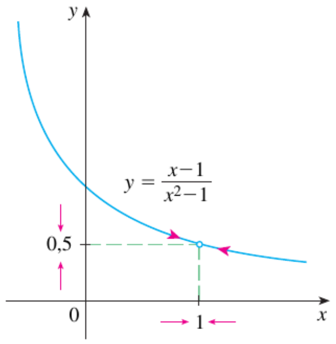
O que acontece com esta função quando $x \to 1$?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$ → x tem de ser diferente de 1 e -1



$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975



Note que,

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+1}$$

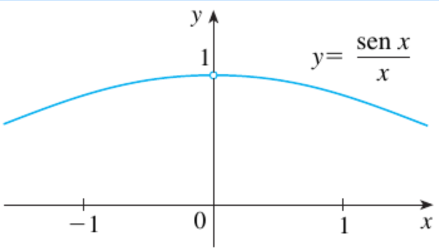
Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Dizemos que é uma descontinuidade removível, quando conseguimos reescrever a função de uma forma que não haja a restrição ao domínio.

EXEMPLO 3

Mas isso não é sempre possível, veja, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$?



Veremos mais adiante que esse limite existe em 0, mas não é uma descontinuidade removível por uma manipulação algébrica.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esse limite é conhecido como "Limite Fundamental da Trigonometria"

Quais as possíveis respostas de um limite?

Se a função não é contínua no ponto, e o limite não pode ser calculado diretamente substituindo valores, dizemos que temos uma inderteminação.

ISSO SIGNIFICA QUE O LIMITE AINDA NÃO FOI RESOLVIDO!!!

Ao resolvê-lo, os possíveis resultados são:

(1) O limite existe e é um número.

(2) O limite não existe.

Neste segundo caso, pode haver dois comportamentos:

(a) Cresce indefinidamente indo para ∞,

ou decresce indefinidamente indo para $-\infty$

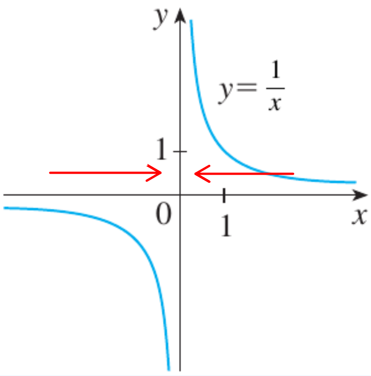
(b) Varia indefinidamente dentro de um intervalo [a,b]

Exemplo:

(1) $\lim_{x\to 1} 2x^2 + 1 = 3$ O limite existe e é três.
A função é contínua no ponto.
Resolve por substituição direta.

(2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ O limite existe e é 1/2
descontinuidade removida

(3)



$\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$ O limite não existe.

$\nexists$

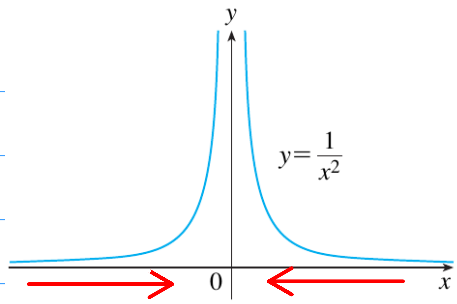
A função cresce indefinidamente quando x tende a zero pela direita

$\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ O limite não existe.

$\nexists$

A função decresce indefinidamente quando x tende a zero pela esquerda

(4)



$$\lim_{x\to 0^+} 1/x^2 = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} 1/x^2 = \infty$$

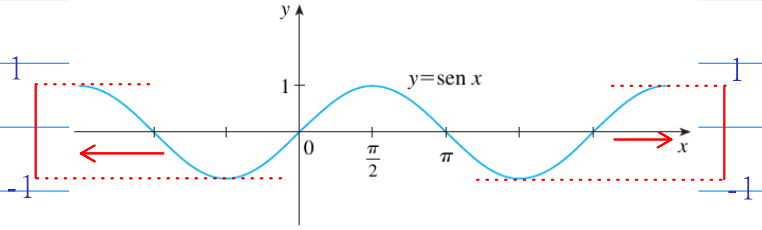
$\longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$

O limite não existe.

$\nexists$

A função cresce indefinidamente quando x tende a zero.

(5)



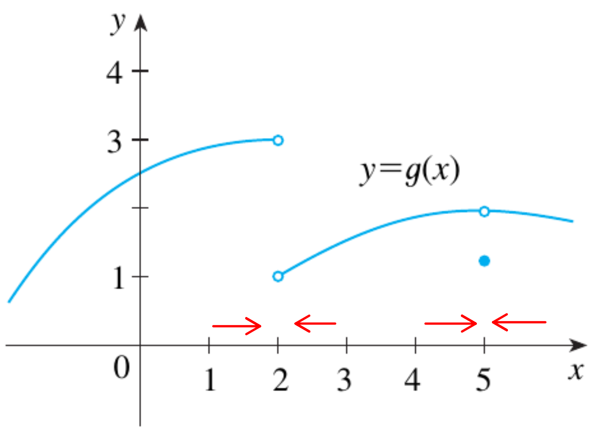
$$\lim_{x\to\infty} \text{sen}\, x = [-1, 1] \quad \nexists$$
$$\lim_{x\to-\infty} \text{sen}\, x = [-1, 1] \quad \nexists$$

Nos dois casos, o limite não existe. E a função fica limitada entre [-1, 1].

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$ (b) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$ (c) $\lim_{x\to 2} g(x)$ $\nexists$

(d) $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2$ (e) $\lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$ (f) $\lim_{x\to 5} g(x) = 2$



$\boxed{6}$ **Definição** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO 4 $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0$ $\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$

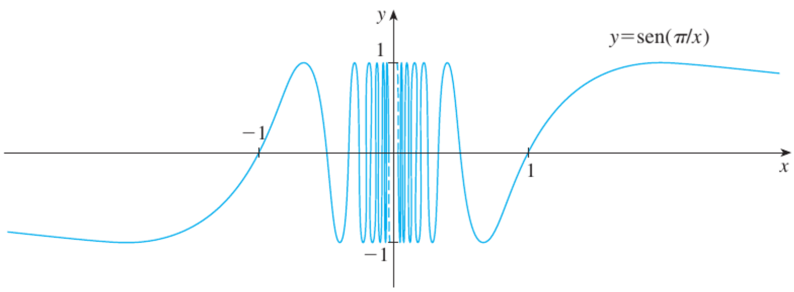
$f(0{,}1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0$ $\quad f(0{,}01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$

Tomando valores próximos de zero o limite parece estar indo para zero

Mas... isso só ocorre para

$f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$

com n interiro.



Como resolve então?

Propriedade das compostas de funções contínuas

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.
Em outras palavras,

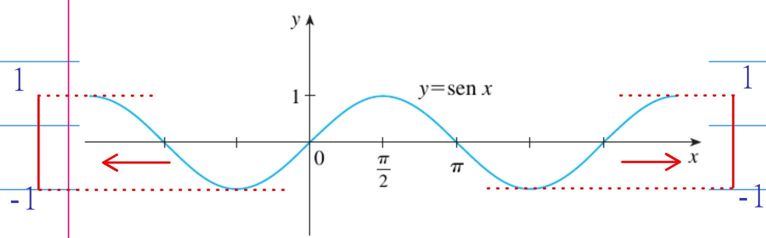
$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

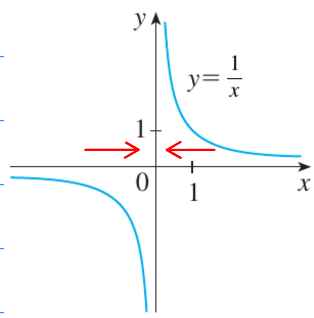
Mas zero não é descontinuidade?

Sim, mas o limite é calculado "em torno de zero", não "em zero"

No entorno de zero a função é contínua e vale:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to 0} \frac{\pi}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\right)$$





$$\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty \implies \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi}{x}\right) = [-1, 1]$$

O limite não existe.

$$\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty \implies \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{\pi}{x}\right) = [-1, 1]$$

A função varia entre [-1,1]

indefinidamente quando x tende a zero.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = [-1, 1] \qquad \nexists$$