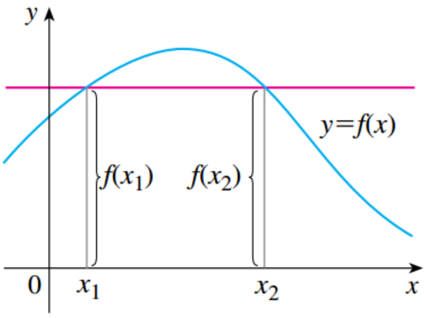
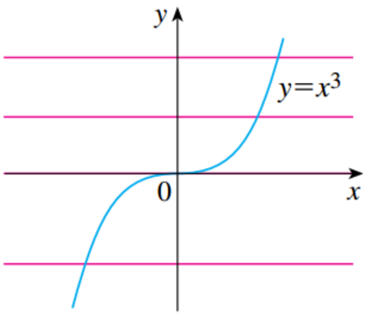
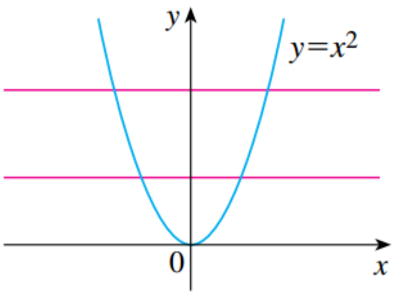
1 Definição Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Teste da Reta Horizontal Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.



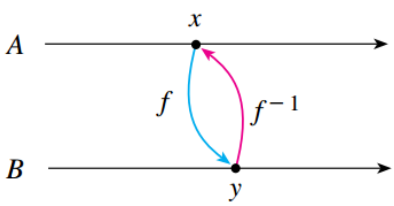




2 Definição Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.



domínio de f^{-1} = imagem de f

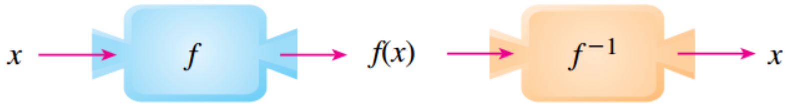
imagem de f^{-1} = domínio de f

ATENÇÃO Não confunda o -1 em f^{-1} com um expoente. Assim,

$$f^{-1}(x) \quad \text{não significa que} \quad \frac{1}{f(x)}$$

Equações de cancelamento:

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}\big(f(x)\big) &= x \quad \text{para todo } x \text{ em } A \\ f\big(f^{-1}(x)\big) &= x \quad \text{para todo } x \text{ em } B \end{aligned}}$$



Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ as equações de cancelamento ficam

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f\big(f^{-1}(x)\big) = (x^{1/3})^3 = x$$

5 Como Achar a Função Inversa de uma Função f Injetora

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.
Passo 2 Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível).
Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 4 Encontre a função inversa $f(x) = x^3 + 2$.

$$y = x^3 + 2$$
$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

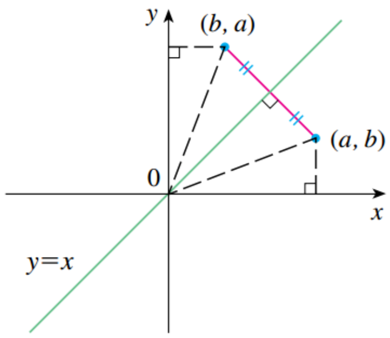
Finalmente, trocando x por y:

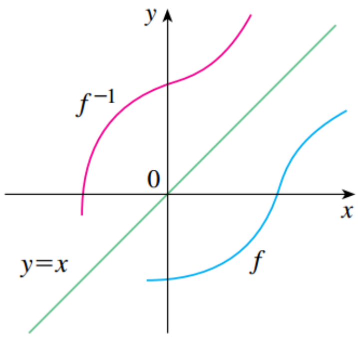
$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Para cada ponto (a,b) no gráfico de f(x), então há o ponto (b,a) no gráfico de sua inversa. De fato,

$$\text{se } y(a) = b, \text{ então } y^{-1}(b) = a.$$





O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

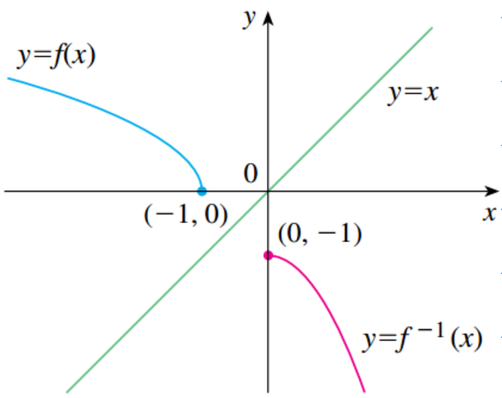
EXEMPLO 5 Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

$$f(x) = \sqrt{-1 - x} = \sqrt{-(x+1)}$$

Primeiro reflete em relação ao eixo Y

Depois desloca 1 para a esquerda

A transformação mais "perto" do 'x' é a realizada por último!

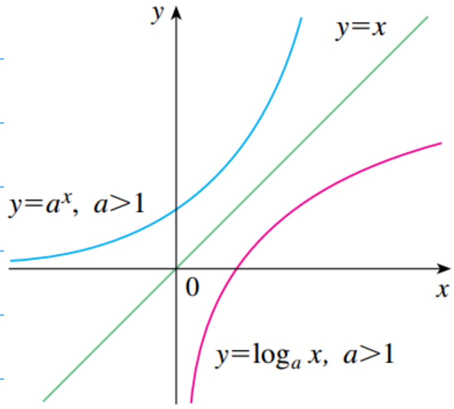


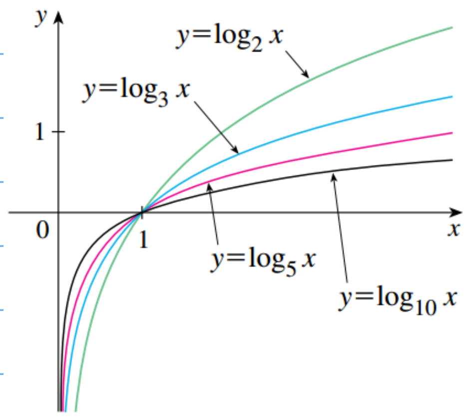
Existem funções cujo gráfico tem o mesmo formato do da sua inversa. São chamadas de Involuções. O exemplo mais simples é a função recíproca y=1/x.

Observe que toda função exponencial passa no teste da reta horizontal, logo, possui uma função inversa. A inversa de uma exponencial de base 'a' é a função Logaritmo, também de base 'a'.

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo } x > 0$$





Propriedades de Logaritmos Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (onde r é qualquer número real)

Outras propriedades:

4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a = 1$

Mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\log_e x = \ln x \longrightarrow$ Logaritmo Natural ou Neperiano

$\log_2 x = \lg x \longrightarrow$ Comum em livros de computação

$\log x = \log_{10} x$ ou $\log_2 x$ ou $\log_e x$

A depender do livro ou linguagem programação.

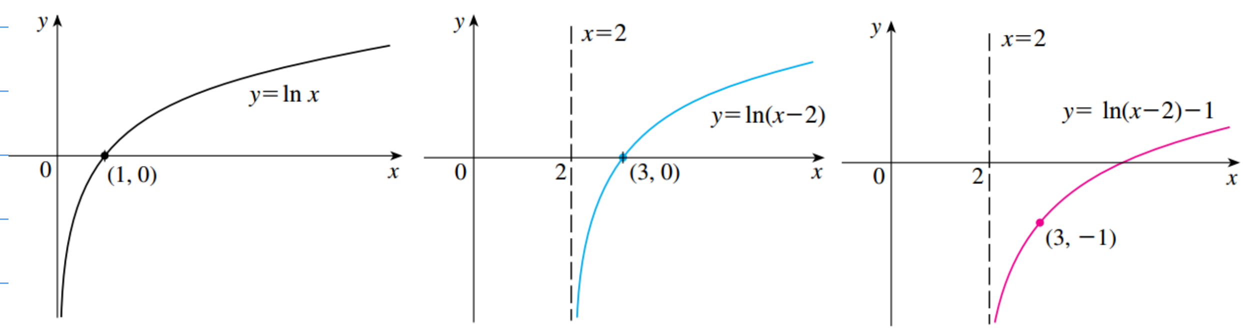
EXEMPLO 8 Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$
$$5 - 3x = \ln 10$$
$$3x = 5 - \ln 10$$
$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

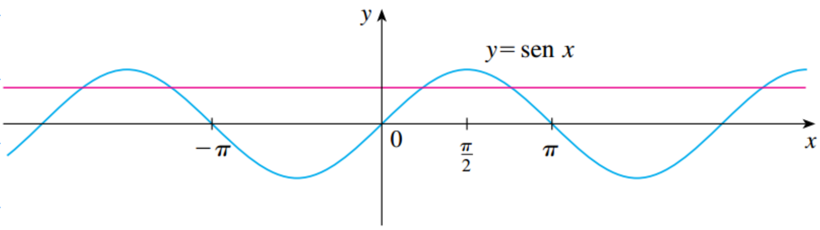
EXEMPLO 9 Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo.

$$\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$
$$= \ln a + \ln\sqrt{b}$$
$$= \ln\left(a\sqrt{b}\right)$$

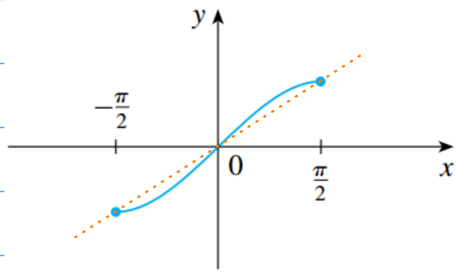
EXEMPLO 11 Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

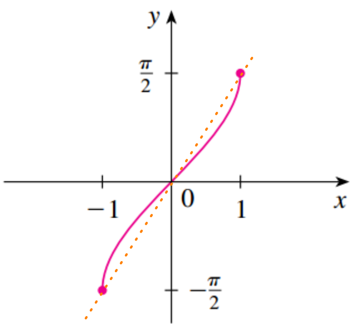


A função seno claramente não passa no teste da reta horizontal. Mas, sempre é possível restringir o domínio de uma função, de modo que a obter uma região onde a função é injetora.



$y = \text{sen}\, x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$





Função Seno Inversa ou Função Arco-seno:

$$\text{sen}^{-1}x = y \iff \text{sen}\, y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}^{-1}x \neq \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

EXEMPLO 12 Calcule (a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ e (b) $\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\frac{1}{3}\right)$.

(a)

$$\text{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

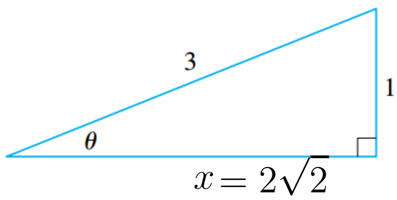
(b)

$$\tan\left(\sin^{-1}\tfrac{1}{3}\right) = \text{tg}\left(\text{sen}^{-1}\tfrac{1}{3}\right)$$

tg x? sen x?

Seja $\theta = \text{arcsen}\,\frac{1}{3}$, logo $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$.

$$x^2 + 1^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

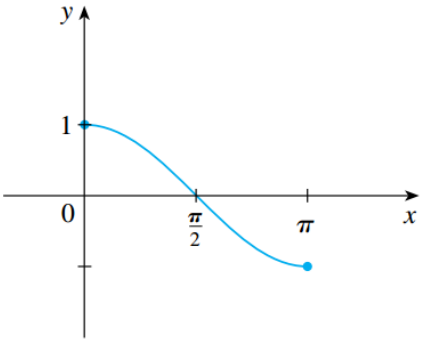


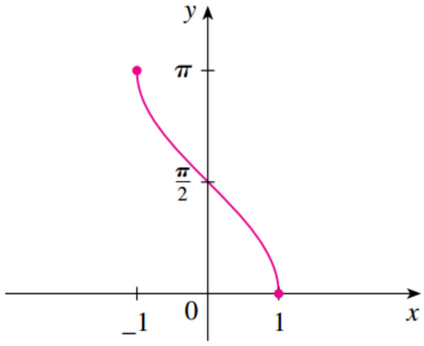
Logo,

$$\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\tfrac{1}{3}\right) = \text{tg}\,\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

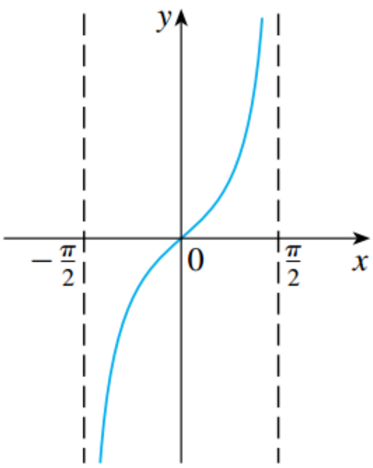
De forma similar, podem ser definidas funções inverças para as demais funções trigonométricas:

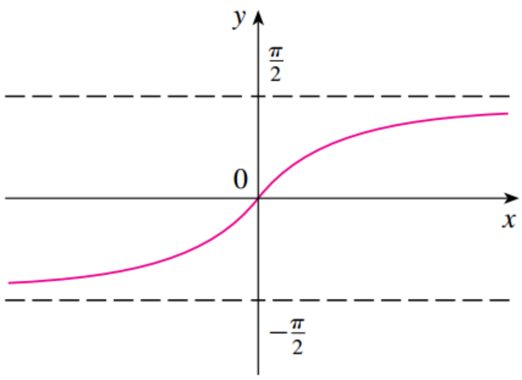
$$\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$





$$\operatorname{tg}^{-1}x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$





EXEMPLO 13 Simplifique a expressão $\cos(\operatorname{tg}^{-1}x)$.

Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$,

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$