Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Algoritmos para Grafos

- Grafos Direcionados e Relações Binárias; o Algoritmo de Warshall
- Caminho de Euler e Circuito Hamiltoniano
- Caminho Mínimo (Algoritmo de Dijkstra)
- Árvore Geradora Mínima
- Algoritmos de Percurso

Árvores

Definição: **Árvore geradora**

Uma **árvore geradora** de um grafo **G = (V, E)** é um subgrafo que:

- Contém **todos os vértices** de **G**.
- É **conexo** (não há vértices isolados).
- É **uma árvore** (não contém ciclos).
- Possui **|V| - 1** arestas.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Árvores

Árvore geradora minima.

Definição: Uma árvore geradora mínima de um grafo conexo com pesos é uma árvore que acessa todos os nós e possui a menor soma possível dos pesos

Árvores

Problema clássico: **Árvore geradora minima**.

Considere uma rede não-direcionada (grafo) e associado a cada arco um custo (distância, tempo, etc) não-negativo. O objetivo é encontrar o caminho mais curto de tal maneira que os arcos formem um caminho entre todos os pares de nós

Exemplos de aplicações:

• Projeto de redes de telecomunicações (redes de computadores, redes de fibra-óptica, telefonia, televisão a cabo, etc).

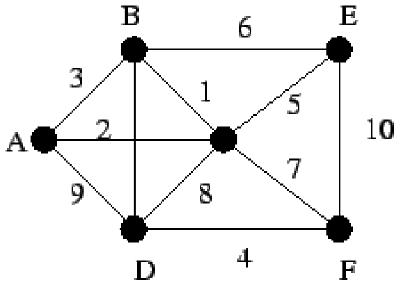
• Projeto de rodovias, ferrovias, etc.

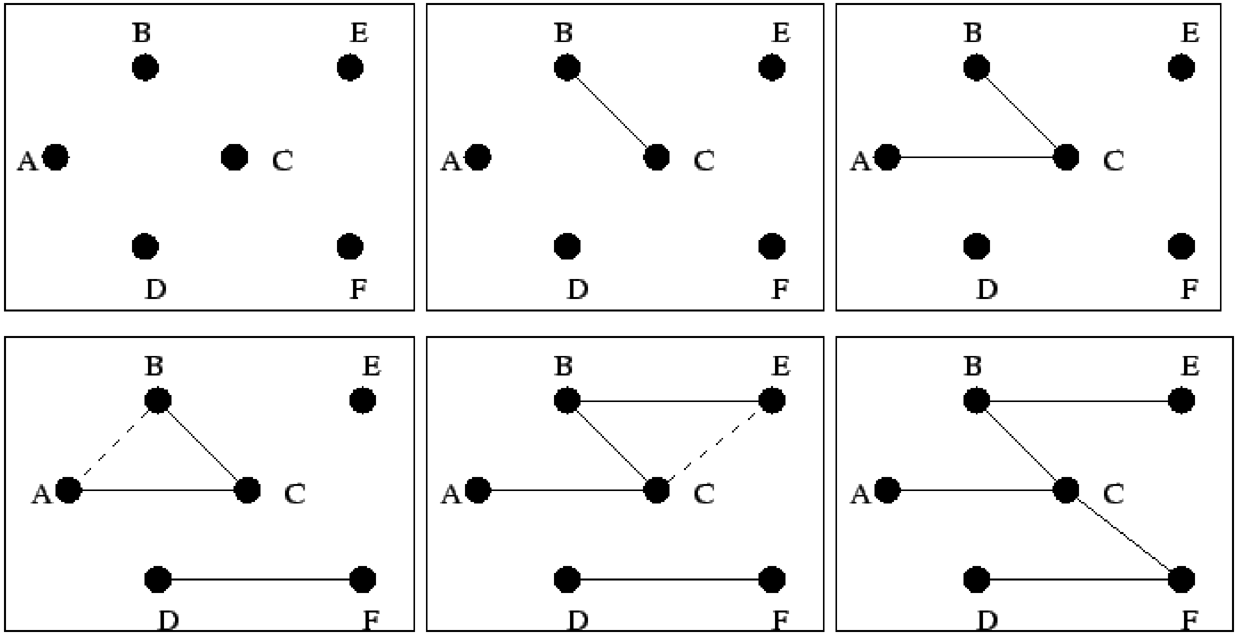
•Redes de transmissão de energia.

•Design de circuitos eletrônicos.

Árvores

Exemplo:





Árvores Geradora Mínima

Principais Algoritmos de Solução:

- Prim : monta a árvore mínima até inserir todos os nós.
- Complexidade $O(n^3)$.

- Kruskal : seleciona as arestas em ordem crescente até obter uma árvore com todos os nós.
- Complexidade $O(mlogm)$.

Árvores Geradora Mínima

Principais Algoritmos de Solução:

- Kruskal : seleciona as arestas em ordem crescente até obter uma árvore com todos os nós.
- Complexidade $O(mlogm)$.

- Prim : monta a árvore mínima até inserir todos os nós.
- Complexidade $O(n^3)$.

ALGORITMO DE KRUSKAL

Ideia: Escolher sempre a menor aresta possível, sem formar ciclos.

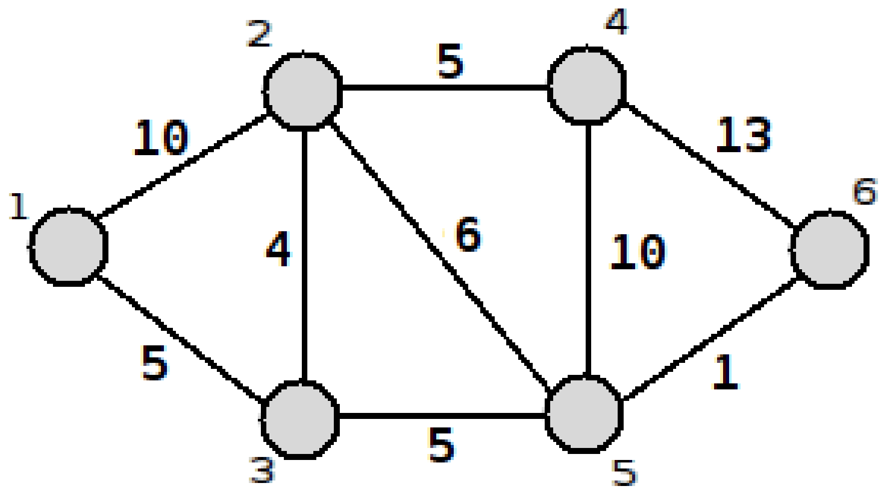
Passos:

1. Ordenar as arestas pelo peso.
2. Inicializar um conjunto de componentes desconectados (um para cada vértice).
3. Percorrer a lista de arestas ordenadas e adicionar a menor possível que **não forme ciclo**.
4. Repetir até obter **|V| - 1** arestas.

Kruskal

Exemplo:

1. **Ler** $G = (N,A)$, d_{ij} é a "distância" entre os nós vizinhos.
2. Ordene os enlaces em ordem não-decrescente de distância (d_{ij}) no vertor $H = (h_i)$.
3. **Iniciar variáveis** $T \leftarrow h_1$; i $\leftarrow 2$;
4. **Enquanto** $|T| < n$ **Tome** $h_i \in H$ **fazer**
5. Se $T + h_i$ é um grafo acíclico (árvore) então
6. $T \leftarrow T + h_i$
7. $i \leftarrow i+1$
8. *Caso Contrário*
9. $i \leftarrow i+1$
10. **Fim_Enquanto**
11. **Escrever** T (arestas da árvore geradora mínima)



Complexidade

Kruskal

2. **Ordene** os enlaces em ordem não-crescente de distância (d_{ij}) no vertor $H = (h_i)$.

3. Iniciar variáveis $T \leftarrow h_1$; $i \leftarrow 2$;

4. **Enquanto** $|T| < n$ Tome $h_i \in H$ fazer

A "ordenação" das arestas pode ser feita em *O(mlogm)*, adicionando o *O(m)* no enquanto a complexidade se mantem *O(mlogm)*.

ALGORITMO DE PRIM

Ideia: Construir a árvore gradualmente a partir de um único vértice.

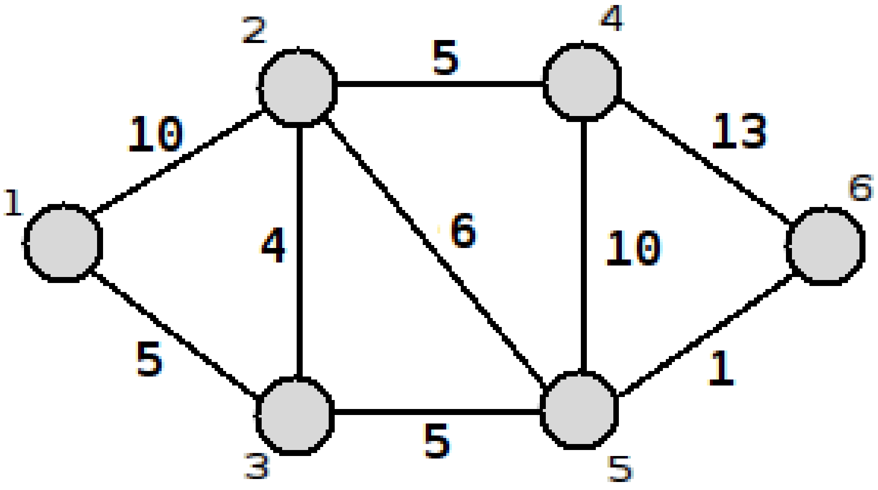
Passos:

1. Escolher um vértice inicial arbitrário.
2. Adicionar a menor aresta que conecta um vértice dentro da árvore a um vértice fora dela.
3. Repetir até incluir todos os vértices.

Prim

Exemplo:

1. **Ler** $G = (N,A)$, d_{ij} é a "distância" entre os nós vizinhos.
2. Escolha qualquer vértice i.
3. **Iniciar variáveis** $T \leftarrow i; V \leftarrow N - \{i\};$
4. **Enquanto** $T \neq N$ **Para todo** $i \in T$ **fazer**
5. **Encontrar a menor aresta** $(i,k) \in A$ com $i \in T$ e $k \in V$.
6. $T \leftarrow T + \{k\}$
7. $V \leftarrow V - \{k\}$
8. $S \leftarrow S + \{(i,k)\}$
9. **Fim_Enquanto**
10. **Escrever** S (arestas da árvore geradora mínima)



Complexidade

Prim:

4. **Enquanto $T \neq N$ Para todo $i \in T$ fazer**

5. **Encontrar** a menor aresta $(i,k) \in A$ com $i \in T$ e $k \in V$.

6. $T \leftarrow T + \{k\}$

Como "**Encontrar** a menor aresta" tem tempo $O(m)$ e m é $O(n^2)$, repetindo N vezes do "Enquanto", temos um complexidade $O(n^3)$.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Lista Mínima de Exercícios

Seção 6.3: 1, 5, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 21, 27.