Uma função que consiste na divisão entre dois polinômios é chamada de função racional. O interesse desse tipo de função para a integração é que a integral de uma função racional sempre pode ser reduzida a uma soma de funções simples, fáceis de ser integradas. Dada uma função

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)},$$

onde o grau de D(x) é maior que o grau de N(x), a função f(x) sempre pode ser escrita como a soma de frações mais simples, chamadas Frações Parciais, da forma

$$\text{I}\ \frac{1}{(x+a)^n}, \quad \text{II}\ \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \quad \text{ou} \quad \text{III}\ \frac{1}{(x^2+a^2)^n}.$$

I Se $n = 1$,

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(x+a) + c$$

Se $n \neq 1$,

$$u = x + a \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^n}\,du = \frac{(x+a)^{1-n}}{1-n} + c$$

II $u = x^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad 1/2\,du = x\,dx$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^n}\,du = \frac{(x+a)^{1-n}}{1-n} + c$$

III Se $n = 1$,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{a}\cdot \mathrm{tg}^{-1}(x/a) + c$$

Se $n \neq 1$, usa-se substituição trigonométrica, caso a caso.

Se o grau de D(x) (denominador) é menor que o grau de N(x) (numerador), então podemos dividir os polinômios usando a chamada "divisão longa"

$$\text{Numerador} \longrightarrow N(x) \;\big|\; \underline{D(x)} \longleftarrow \text{Divisor}$$

$$\text{Resto} \longrightarrow R(x) \quad Q(x) \longleftarrow \text{Quociente}$$

$$\begin{array}{l|l} 7 & \underline{2} \\ 1 & 3 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

Exemplo de divisão longa:

$$\frac{x^5+x^4-x^3}{x^3+1}$$

O grau do numerador é maior do que o denominador, logo podemos simplificá-lo com divisão longa.

O processo consiste de duas etapas. Primeiro, some ao quociente um termo que, multiplicado ao termo lider do divisor (denominador), fique igual ao termo lider resto atual. Sendo que, inicialmente, o resto é o dividendo (numerador).

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5}+x^4-x^3 & x^3+1 \\ \cline{2-2}
-(\cancel{x^5}+x^2) & x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
\cancel{x^4}-x^3-x^2 & \\
-(\cancel{x^4}+x) & \\ \cline{1-1}
\cancel{-x^3}-x^2-x & \\
-(\cancel{-x^3}-1) & \\ \cline{1-1}
1-x^2-x &
\end{array}$$

$x^2 \cdot x^3 = x^5$

Depois, multiplique este termo pelo divisor e diminua o resultado do resto.

$x^2 \cdot (x^3+1) = x^5 + x^2$

Então, repita até que o grau do divisor seja maior que o do resto.

$x \cdot x^3 = x^4$

$x \cdot (x^3+1) = x^4 + x$

O grau do resto ainda não é menor que o grau do divisor.

$-1 \cdot x^3 = -x^3$

$-1 \cdot (x^3+1) = -x^3 - 1$

Agora, o resto tem grau menor que o divisor, logo, a divisão está concluída e

$$\begin{array}{l|l}
x^5+x^4-x^3 & x^3+1 \\ \cline{2-2}
1-x^2-x & x^2+x-1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
7 & 2 \\ \cline{2-2}
1 & 3
\end{array}$$

$$\frac{x^5+x^4-x^3}{x^3+1} = x^2+x-1 + \frac{1-x^2-x}{x^3+1} \qquad\qquad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

E a função racional restante pode ser separada em frações parciais.

$$\frac{1-x^2-x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - 2\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]$$

Assim, $\dfrac{x^5+x^4-x^3}{x^3+1} = x^2+x-1+\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{x+1} - 2\cdot\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right]$

$$\int \frac{x^5+x^4-x^3}{x^3+1}\,dx = \int (x^2+x-1)\,dx \;+\frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\cdot\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx\right]$$

$$u = x^2-x+1$$
$$\Rightarrow du = (2x-1)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\tfrac{1}{3}[\ln(x+1) - 2\int \frac{1}{u}\,du]$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\tfrac{1}{3}[\ln(x+1) - 2\ln(x^2-x+1)] + c$$

Portanto,

$$\int \frac{x^5+x^4-x^3}{x^3+1}\,dx \;= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x^2-x+1)^2}}+c$$

Resposta do Symbolab:

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + \frac{2}{3}\ln|x+1| -$$
$$\frac{1}{6}\ln\left|4x^2-4x+4\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) +$$
$$\frac{1}{6}\left(-\ln\left|\frac{4x^2-4x}{3}+\frac{4}{3}\right| + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) +$$
$$\frac{1}{3}+C$$

A forma como a função racional se divide em frações parciais depende da fatoração do denominador. Um polinômio poder ser ser fatorado em fatores lineares ou quadráticos irredutíveis (que não podem ser fatorados em lineares). Cada fator linear está associado a uma fração parcial do tipo I, e cada fator quadrático está associado a um par de frações parciais da forma II e III. Mas, se o fator (linear ou quadrático) tiver uma potência 'n', então serão 'n' frações parciais para este fator, ou 'n' pares para um fator quadrático. Cada um com uma potência variando de 1 a 'n'.

$$\mathrm{I}\ \frac{1}{(x+a)^n} \quad \text{ou} \quad \mathrm{II}\ \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \quad \text{e} \quad \mathrm{III}\ \frac{1}{(x^2+a^2)^n}.$$

Então, sabendo a forma fatorada do denominador, sabemos em quantas e quais frações parciais a função racional se escreve. Por exemplo, para

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2}$$

serão 3 frações parciais para o fator linear e mais dois pares para o fator quadrático. A função racional será a soma das frações parciais, multiplicadas por alguma constante. O numerador da função racional só influencia na determinação dessas constantes.

Por exemplo, para $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2}$, teremos:

$$\frac{x^2-x+4}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$
$$+\frac{Dx}{(x^2+1)^1} + \frac{E}{(x^2+1)^1} + \frac{Fx}{(x^2+1)^2} + \frac{G}{(x^2+1)^2}$$

Isso equivale a

$$x^2-x+4 = A(x-1)^2(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 + C(x^2+1)^2$$
$$+(Dx+E)(x-1)^3(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^3$$

Para determinar essas constantes é necessário resolver um sistema a partir da comparação dos polinômios de cada lado. Mas antes, podemos simplificar um pouco.

Para x = 1, fica $4 = C(1^2+1)^2 \Rightarrow 4 = 4C \Rightarrow C = 1$. Logo,

$$x^2-x+4 = \cdots 1(x^2+1)^2 \cdots = \cdots x^4+2x^2+1 \cdots$$
$$\Rightarrow -x^4-x^2-x+3 = A(x-1)^2(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2$$
$$+(Dx+E)(x-1)^3(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^3$$

Além disso, os únicos termos de grau 6 acima são $0 = Ax^6 + Dx^6 \Rightarrow D = -A$.

Agora, só resta multiplicar todos os fatores a direita e botar em evidência as potências de x, comparando com o polinômio a esquerda, ignorando os termos x^6.

$$-x^4-x^2-x+3 = A(-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1)$$
$$+B(x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1)$$
$$+(-Ax+E)(x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1)$$
$$+(Fx+G)(x^3-3x^2+3x-1)$$

$$
\begin{aligned}
-x^4 - x^2 - x + 3 = \;& A(-2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) \\
& +B(1x^5 - 1x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1x - 1) \\
& +A(3x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1x + 0) \\
& +E(1x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1) \\
& +F(1x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 1x + 0) \\
& +G(1x^3 - 3x^2 + 3x - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x^4 - x^2 - x + 3 = \;& A(1x^5 - 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 1x + 1) \\
& +B(1x^5 - 1x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1x - 1) \\
& +E(1x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1) \\
& +F(1x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 1x + 0) \\
& +G(1x^3 - 3x^2 + 3x - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x^5 \to 0 &= 1A + 1B + 1E + 0F + 0G \\
x^4 \to -1 &= -1A - 1B - 3E + 1F + 0G \\
x^3 \to 0 &= 0A + 2B + 4E - 3F + 1G \\
x^2 \to -1 &= 0A - 2B - 4E + 3F - 3G \\
x \to -1 &= -1A + 1B + 3E - 1F + 3G \\
3 &= 1A - 1B - 1E + 0F - 1G
\end{aligned}
\right.
\Rightarrow
\begin{aligned}
A &= 7/4 \\
B &= -7/4 \\
C &= 1 \\
D &= -7/4 \\
E &= 0 \\
F &= -1 \\
G &= 1/2
\end{aligned}
$$

Sistema: https://bit.ly/3Q9Tcy6

$$
\frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^3 \cdot (x^2+1)^2} = \frac{7}{4(x-1)} - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{7x}{4(x^2+1)} - \frac{2x-1}{2(x^2+1)^2}
$$