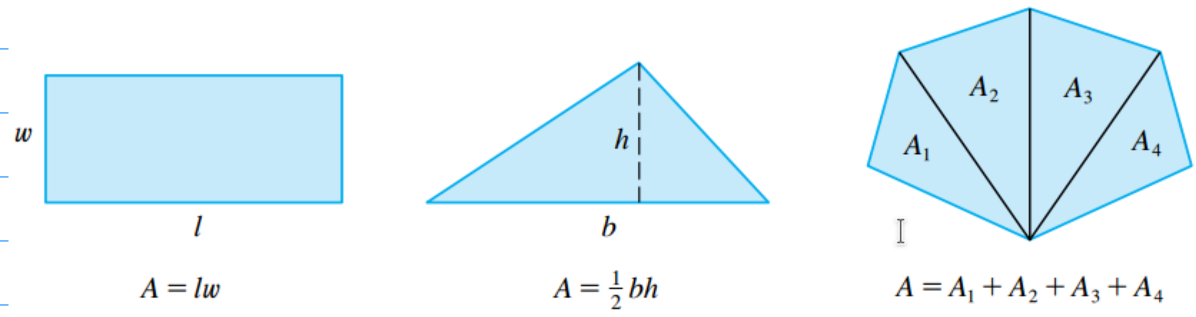
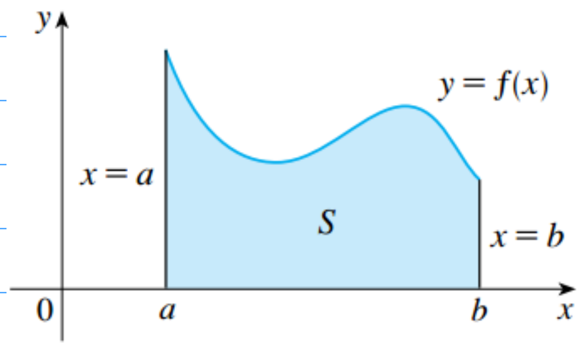
5.1 - O Problema da Área

Até aqui só sabemos calcular áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, além de regiões que podem ser subdivididas em partes destes tipos.

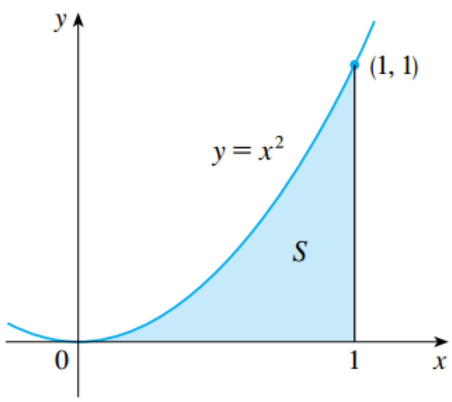


Basicamente estamos limitados a figuras cujos lados são linhas retas ou partes de círculos. Mas e se um dos lados tiver um formato dado por uma curva qualquer?

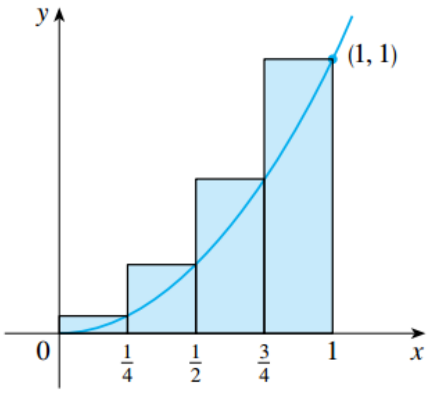
Considere a região S abaixo, onde um dos lados é parte do gráfico de uma função f(x), e os demais são linhas retas. Como calcular essa área?



Podemos obter uma aproximação dessa área cobrindo-a com figuras cuja área sabemos calcular. Por exemplo, se $y = x^2$, no intervalo [0,1]:



podemos obter uma aproximação desta área cobrindo-a com retêngulos.



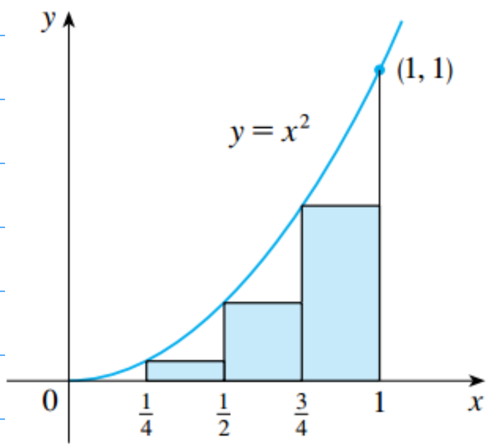
Dividindo o intervalo [0,1] em padaços de tamanho 1/4, conseguimos calcular a área dos retângulos, pois sabemos suas alturas, que são dadas pela função y = x².

Assim, a área dada por 4 "retângulos de aproximação" é dada por:

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

Certamente esse não é o valor real da área, pois há um excesso. Logo, a área real é é menor que esse valor.

$$A < 0{,}46875$$

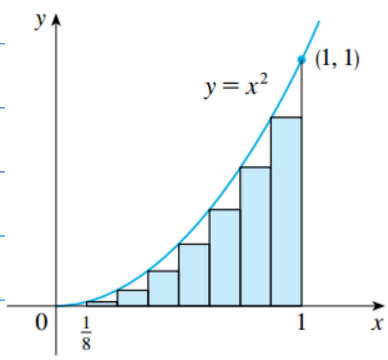


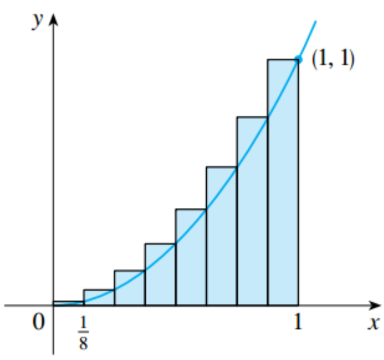
Poderíamos tembém ter feito a aproximação com retângulos que ficassem sempre abaixo do gráfico, de modo a obter uma aproximação abaixo do valor real.

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0{,}21875$$

Logo, $0{,}21875 < A < 0{,}46875$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de retângulos, melhorando as aproximações.



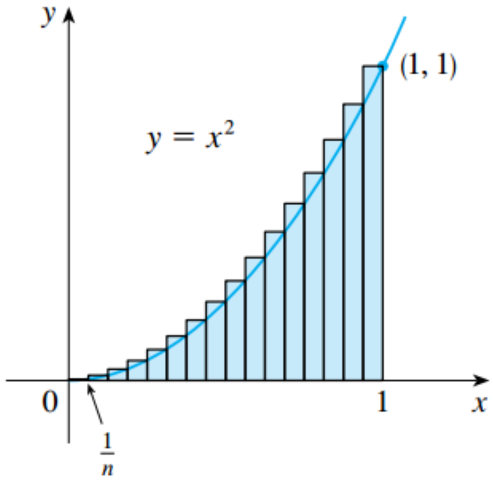


$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Aumentando ainda mais o número de retângulos, as aproximações parecem estar convergindo para um mesmo valor.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Para 'n' retângulos, cada um de base 1/n e (1/n)²



podemos escrever a aproximação por retângulos acima da área em função do número de retângulos:

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

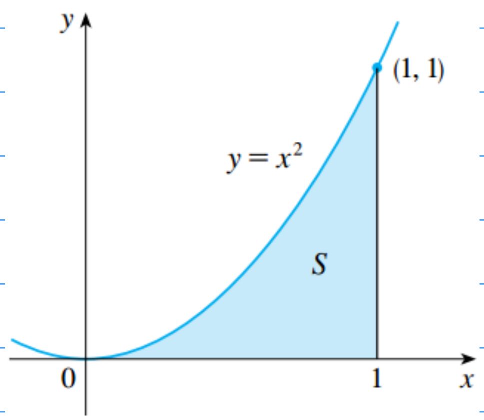
Aplicando um limite, com n → ∞, pode ser demostrado que, de fato,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

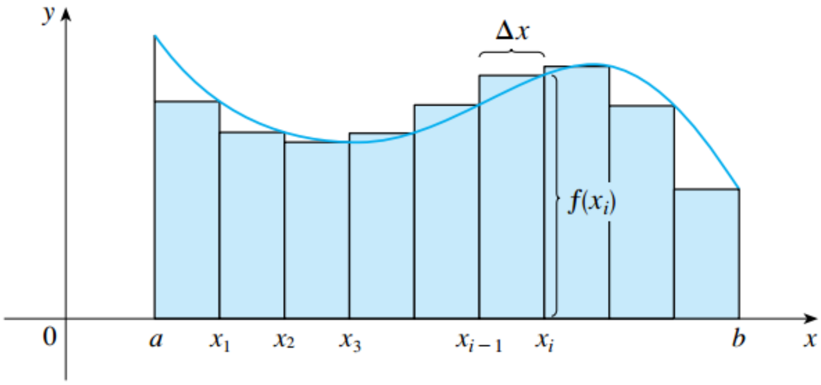
Além disso, também pode ser demostrado o mesmo para as aproximações inferiores.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Assim, é razoável definir que a área S é 1/3, pois



$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$



Podemos generalizar esse processo para qualquer região abaixo do gráfico de uma função f(x), positiva, em um intervalo [a,b]. Subdividindo o intervalo em 'n' partes, chamando o comprimento de cada parte de Δx, e tomando como altura dos retângulos, por exemplo, o lado direito dos intervalos:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Usando a notação de somatório, podemos escrever isso de forma mais compacta:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Assim, se f(x) é uma função positiva no intervalo [a,b] (ou seja, seu gráfico está acima do eixo X), a área abaixo do gráfico, acima do intervalo [a,b] pode ser definida como:

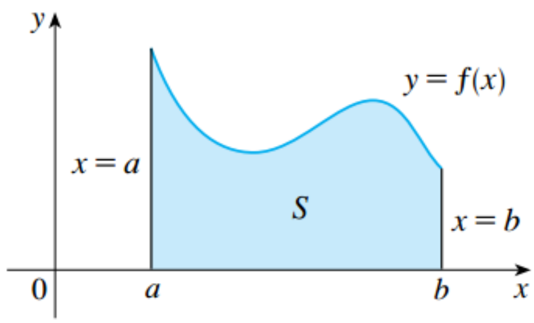
Isso nos diz para parar quando i = n.

Isso nos diz para somar.

$$\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Isso nos diz para começar com i = m.

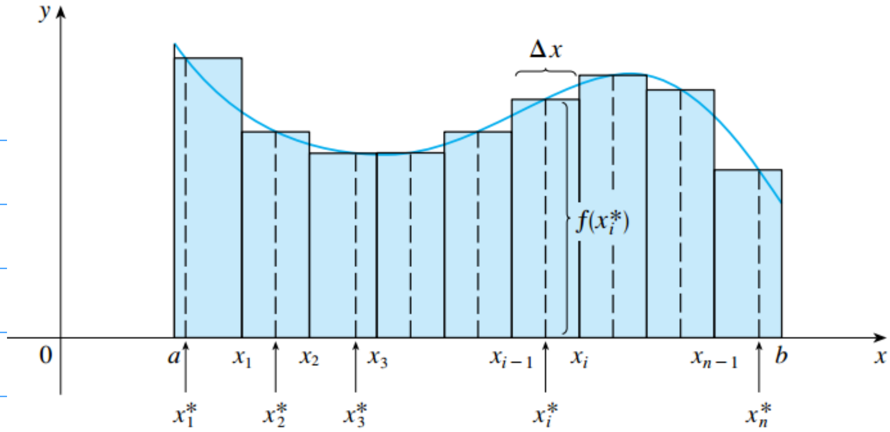
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$



Ao invés de usar o lado direito de cada parte do intervalo como altura do retângulo de aproximação, poderíamos também ter usado o lado esquerdo. Dai teríamos

Mas, não faz diferença?

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$



Não faz diferença, dentro de cada sub-intervalo, qual ponto você escolhe para tomar a altura do retângulo de aproximação. Pode ser qualquer ponto em cada sub-intervalo.

Qualquer aproximação por retângulos que você definir irá necessariamente convergir para o mesmo valor de área. Basta para isso que a função seja contínua em [a,b].

Assim, de modo geral, defini-se a área como o limite de uma aproximação por por retângulos qualquer:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

onde x_i^* é qualquer ponto em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Alias, a aproximação nem precisa ser por retângulos para convergir para o mesmo valor de área. Basta que seja uma aproximação, que melhore conforme 'n' aumenta. Um aproximação simples, e que converge mais rapidamente que qualquer aproximação por retângulos, é a aproximação por trapésios. Muito usada em aplicações numéricas.

Esse mesmo tipo de limite, usado para definir área, ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando não é necessariamente uma função positiva. Por exemplo, eles surgem no processo de encontrar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massas, forças por causa da pressão da água e trabalho, assim como outras quantidades. Daremos, portanto, a esse tipo de limite um nome e notação especiais.

2 Definição de Integral Definida Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\ (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

OBSERVAÇÃO 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**. Por enquanto, o símbolo dx não tem significado sozinho; $\int_a^b f(x)\,dx$ é apenas um símbolo. O dx simplesmente indica que a variável dependente é x. O procedimento de calcular a integral é chamado **integração**.

OBSERVAÇÃO 2 A integral definitiva $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número; ela não depende de x. Na verdade, podemos usar qualquer letra para substituir x sem alterar o valor da integral:

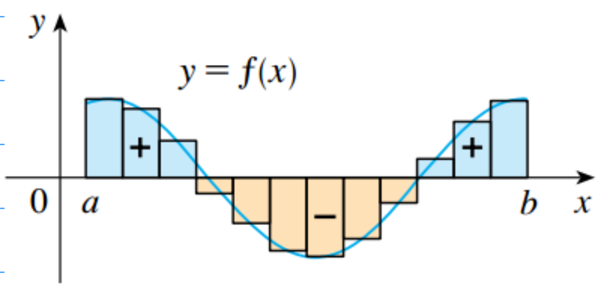
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

OBSERVAÇÃO 3 A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Assim, a Definição 2 diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Se a função for positiva no domínio de integração, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes. Mas e se a função não é sempre positiva em [a,b]?



As áreas dos retângulos virão com um sinal negativo. Assim, a integral no intervalo inteiro será subitração das regiões negativas das positivas.

Propriedades da Integral Definida

Pelo fato da integral ser definida como um limite de somatório, as propriedades destas duas ferramentas matemáticas se estendem à integral.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

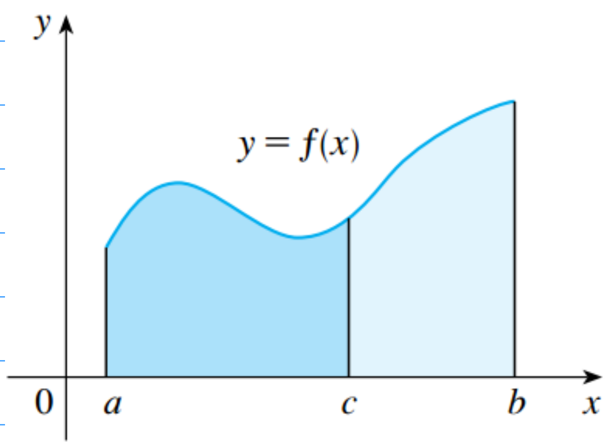
Δx mudará de $(b - a)/n$ para $(a - b)/n$.

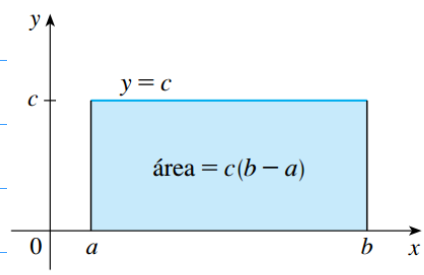
Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, de modo que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$





$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$