Valores extremos de uma função:

1 Definição Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

ou global

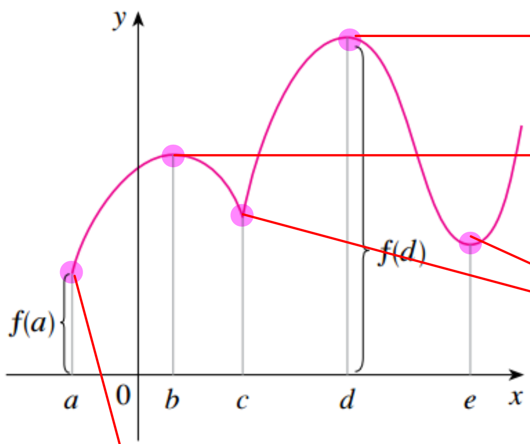
- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

2 Definição O número $f(c)$ é um

Em algum intervalo aberto contendo 'c'

- valor **máximo local** de f se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x está próximo de c.

3 O Teorema do Valor Extremo Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.



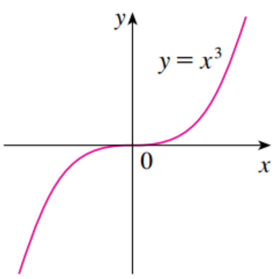
Máximo Local e Máximo Absoluto

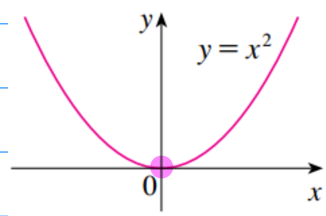
Outro Máximo Local

Mínimos Locais

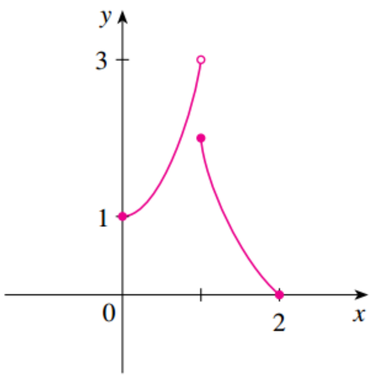
Mínimo Absoluto, mas não é mínimo local

Se a função não for limitada, ela pode não ter valores extremos.

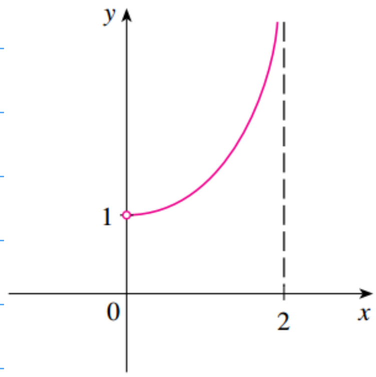




Veja que o Teorema do Valor Extremo exige um intervalo fechado e que a função seja contínua nesse intervalo. Se uma das duas coisas não ocorre, a função pode não ter extemos.

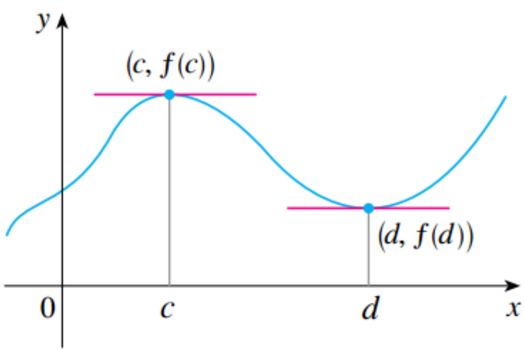


Neste caso, há uma descontinuidade, e a função tem mínimo global mas não um máximo global.



Neste outro caso, o intervalo não é fechado, e a função não tem valores extremos.

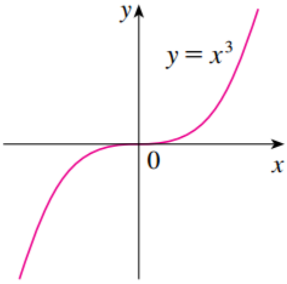
Uma propriedade importante dos máximos e mínimos locais é que a reta tangente* nesses pontos é horizontal, ou seja, a derivada da função é nula.



4 **Teorema de Fermat** Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

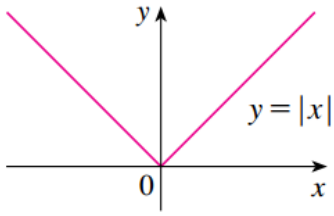
6 **Definição** Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Mas veja que, não é necessário que a derivada exista para que um ponto seja mínimo local. Bem como uma derivada nula não é sinônimo de máximo ou ou mínimo local.



Neste exemplo, há uma derivada nula em x = 0, mas não máximo ou mínimo local.

Neste outro caso, a derivada não existe em x = 0, mas há ali um mínimo local. Que também é um mínimo global.



Como vimos, os valores extremos de uma função só podem ocorrer em máximos ou mínimos locais, ou nas bordas do domínio, onde forem fechadas. Assim, para se procurar por valores extremos, devemos olhar apenas nesses pontos.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 8 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

Como queremos os valores extremos, devemos olhar na borda e nos pontos críticos. Na borda, temos

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Resta agora buscar os pontos críticos, ou seja, encontrar os valores de x onde a a derivada da função não existe, e os que satisfazem a equação $f'(x) = 0$

Primeiro devemos encontrar a derivada.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Com não há restrições ao domínio, a derivada existe para todo x, e os pontos críticos são apenas aqueles que anulam a derivada. Ou seja, os valores de x que satisfazem

$$f'(x) = 0$$

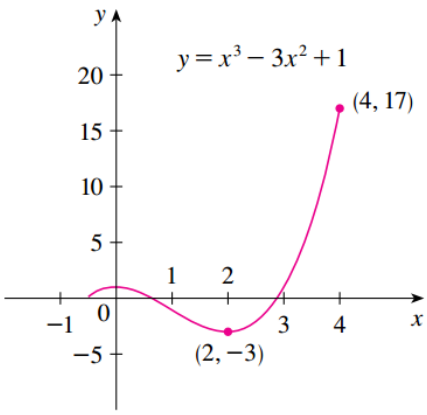
$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

Ou seja, x =0 ou x = 2. Junto com os dois valores na borda, esses são os candidatos a valor extremo. Nestes dois valores temos

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Assim, o máximo global ocorre na borda onde temos f(4) = 17, e o mínimo global ocorre em um ponto crítico, onde f(2) = -3.



Exercícios para a seção 4.1: do 3 ao 14.