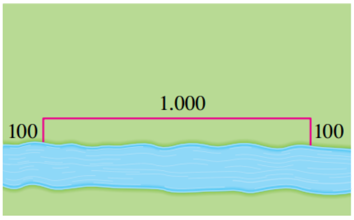
4.7 - Problemas de Otimização

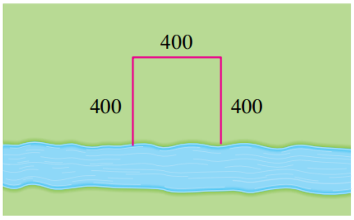
Passos na Resolução dos Problemas de Otimização

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.
5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f é um intervalo fechado, então o Método de Intervalo Fechado da Seção 1.4 pode ser usado.

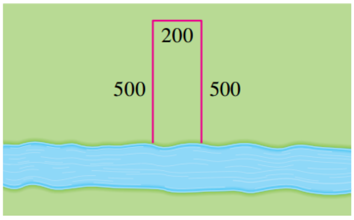
EXEMPLO 1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?



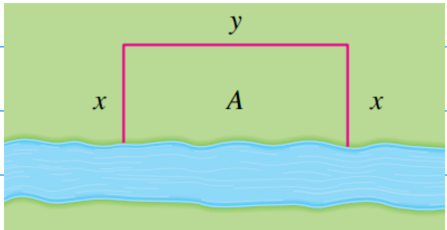
Área = 100 · 1 000 = 100 000 m²



Área = 400 · 400 = 160 000 m²



Área = 500 · 200 = 100 000 m²



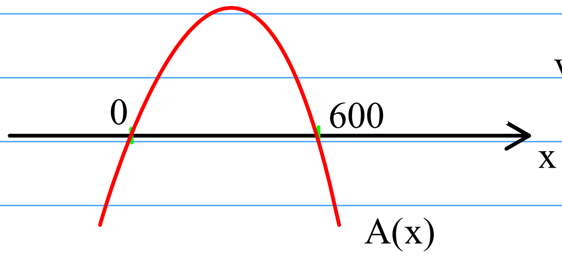
$$A = xy$$

$$2x + y = 1\,200$$

$$y = 1.200 - 2x$$

$$A = x(1\,200 - 2x) = 1\,200x - 2x^2$$

Deste modo, a área é dada por uma parábola, de concavidade para baixo, cujas raizes são $2x \cdot (600 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ou $x = 600$



Logo, como x é uma medida, ele só pode variar entre 0 e 600. E como queremos maximar a área A(x), o valor de x que desejamos é o máximo local, e também absoluto, de A(x).

Como é uma parábola, e o que desejamos é o seu vértice, sabemos que seu valor é 300, ponto médio entre as raízes. Mas, se fosse uma função mais complexa, e desejássemos apenas encontrar um máximo local, bastaria o teste da 1a derivada.

Igualando a derivada de A(x) à zero, temos:

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1200 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 300 - x = 0$$
$$x = 300$$

Identificado o valor de x que maximiza a área, basta colocar esse valor na equação do perímetro e calcular a medida de y que maximiza a área.

$$2x + y = 1\,200 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 300 + y = 1200 \quad \Rightarrow \quad y = 1200 - 600 = 600$$

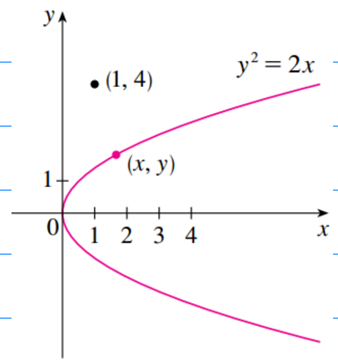
EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de (1, 4).

$$x = \tfrac{1}{2}y^2$$

A distância entre os pontos (1, 4) e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

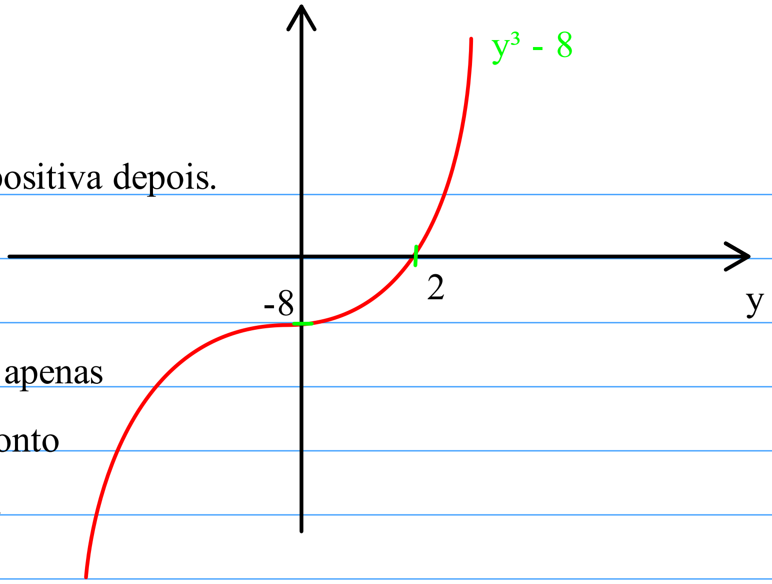
$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$



Ao invés de minimizar d, podemos minimizar d², para evitar o radical

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$
$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8$$
$$f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

f '(y) é negativa antes do 2 e positiva depois.



Também se podia deduzir isso apenas do fato de y = 2 ser o único ponto crítico, f '(0) = -8 ser negativo.

Ou seja, a função f(y) é decescente até o 2, e depois é sempre crescente. Sendo este então seu ponto de mínimo. Para y = 2 na relação $x = \frac{1}{2}y^2$, temos que, x = 2.

Portanto, o ponto sobre a parábola, mais próximo de (1, 4), é o ponto (2, 2).