INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Leandro Colombi Resendo

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Mais Sobre Demonstração de Correção

Definição: Um definição onde o item sendo definido aparece como parte da definição é chamada de uma **definição recorrente.**

Definição por recorrência.

1) Condição básica
2) Passo de indução

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex:

$S(1) = 2$

$S(n) = 2S(n - 1), n > 1$

Ex:

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n - 1) + 3, n > 1$

Ex: Sequência de Fibonacci

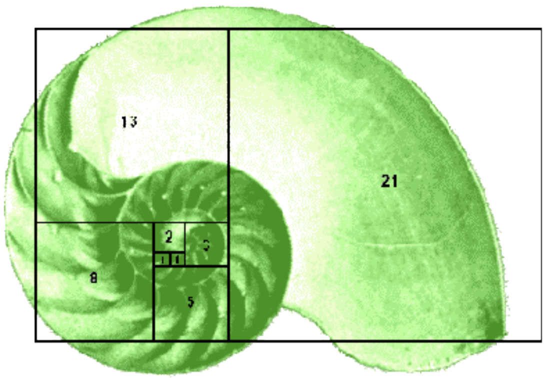
$F(1) = 1$

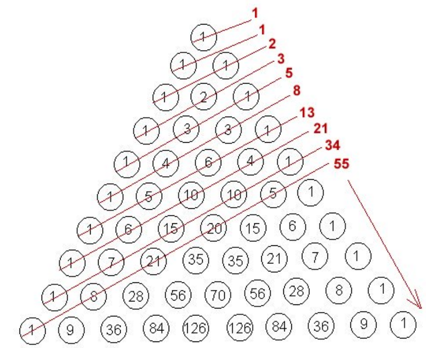
$F(2) = 1$

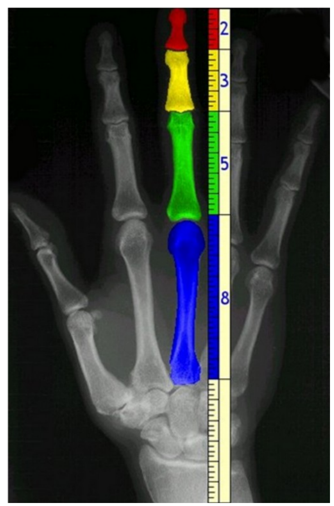
$F(n) = F(n - 2) + F(n - 1), n > 2$

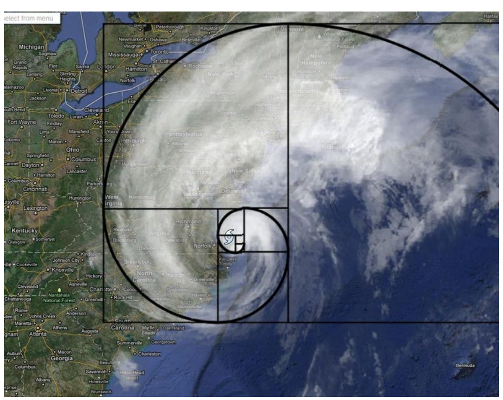
Recursividade e Relações de Recorrência

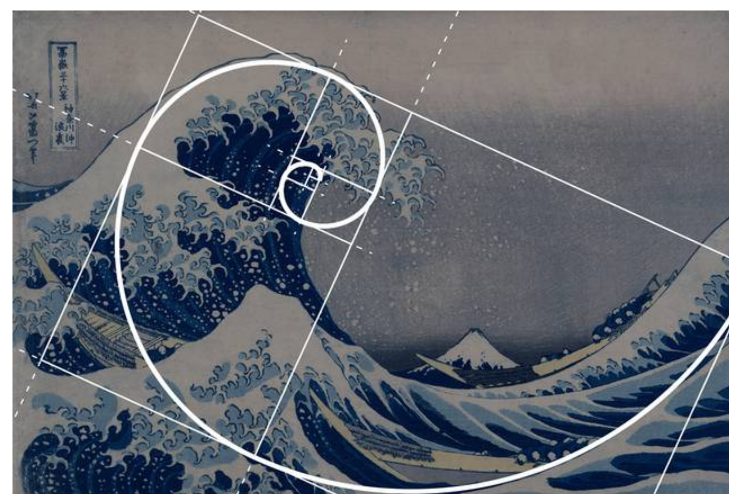
Ex: Sequência de Fibonacci











Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: Sequência de Fibonacci

$F(1) = 1$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n-2) + F(n-1),\ n > 2$

Ex:Prove que na sequência de Fibonacci

$F(n+4) = 3F(n+2) - F(n)$, para $n \geq 1$.

Por indução Por demonstração direta

Recursividade e Relações de Recorrência

Operações definidas por recorrência

Ex:

$a^0 = 1$

$a^n = a^{(n-1)}a$; para $n \geq 1$

$m(1) = 1$

$m(n) = m(n-1) + m$; para $n \geq 2$

Defina recursivamente $n!$

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: **Iterativamente**

```
S(n)
Inteiro i
ValorCorrente
se n=1 então
        retorne 2
senão
       i=2
       ValorCorrente = 2
       enquanto i <= n faça
               ValorCorrente = 2* ValorCorrente
               i = i + 1
        fim do enquanto
        retorna ValorCorrente
fim do senão
fim de S
```

Usando Recorrência

```
S(n)
se n=1 então
        retorne 2
senão
       retorne 2*S(n-1)
fim do senão
fim de S
```

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: Escreva uma função recorrente para a seguinte sequência.

$T(1) = 1$
$T(n) = T(n - 1) + 3, n > 1$

Ex: Escreva uma função recorrente para a seguinte operação.

$m(1) = m$
$m(n) = m(n\text{-}1) + n$; para $n \geq 2$

Ex: Escreva uma função recorrente para a sequência de Fibonacci.

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: Escreva uma função recorrente para a seguinte sequência.

$T(1) = 1$
$T(n) = T(n - 1) + 3,\ n > 1$

Ex: Escreva uma função recorrente para a seguinte operação.

$m(1) = m$
$m(n) = m(n\text{-}1) + m$; para $n \geq 2$

Produto(m,n)
se $n = 1$ **então**
    retorne m
senão
    retorne Produto (m,n-1) + m
fim do senão
fim da função Produto

OBS: Note que deve haver uma redução do problema a ser tratado

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: **Ordenação de dados**

OrdenaçãoPorSeleção(lista L, int n)
se $n = 1$ **então**
    a ordenação está completa, escrever a lista
senão
    encontre o índice i do maior item em lista entre 1 e n
    permute $L[i]$ e $L[n]$
    OrdenaçãoPorSeleção(L, $n - 1$)
fim do senão
fim da função OrdenaçãoPorSeleção

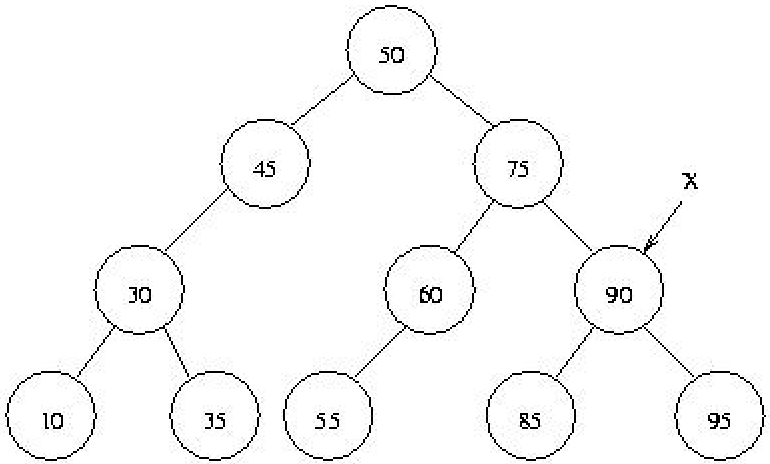
http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Selection-Sort-Animation.gif

Recursividade e Relações de Recorrência

Ex: **Busca de dados**

BuscaBinária(lista L, int i, int j, item x)
se $i > j$ **então**
  não encontrado
senão
  encontre o índice k do item do meio na lista *(i + j)/2*
  se x = item do meio **então**
    encontrado
  senão
    se x < item do meio **então**
      BuscaBinária($L, i, k\text{-}1, x$)
    senão
      BuscaBinária($L, k+1, j, x$)
    fim do senão
  fim do senão
fim do senão
fim da função BuscaBinária

Ilustração



Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Ex: Dada a recorrência

$S(1) = 2$

$S(n) = 2S(n - 1), n > 1.$

Encontre uma **forma fechada** para $S(n)$.

Dicas:

1) Aplique a recorrência para $n, n\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}3$
2) Note que a recorrência termina com ...

Após a conjectura a verificação pode ser feita por indução

Ex:

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n - 1) + 3, n > 1.$

Encontre uma **formula fechada** para $T(n)$.

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Tipo de Recorrências

Primeira ordem: ocorre quando o n-ésimo termo depende apenas do termo $n - 1$.

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

OBS: Se $g(n) = 0$ a recorrência é dita **homogênea**

Tarefa: Encontre a forma fechada para uma recorrência de primeira ordem não homogênea.

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Tipo de Recorrências

Primeira ordem: ocorre quando o n-ésimo termo depende apenas do termo $n - 1$.

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

OBS: Se $g(n) = 0$ a recorrência é dita **homogênea**

Tarefa: Encontre a forma fechada para uma recorrência de primeira ordem não homogênea.

Solução:

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

<u>Tipo de Recorrências</u>

Primeira ordem: ocorre quando o n-ésimo termo depende apenas do termo $n - 1$.

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

OBS: Se $g(n) = 0$ a recorrência é dita **homogênea**

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$

Ex:

$S(1) = 2$

$S(n) = 2S(n - 1), n > 1.$

→ $S(n) = 2^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i} * 0 = 2^n$

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Resumo

Método	Passos
Expandir, Conjectural, verificar	1. Use a relação de recorrência repetidamente até poder adivinhar o padrão. 2. Decida qual será o padrão quando $n - k = 1$. 3. Verifique a fórmula resultante por indução.
Fórmula da Solução	1. Coloque sua relação de recorrência da forma $S(n) = cS(n-1) + g(n)$ para encontrar c e $g(n)$. 2. Use c, $g(n)$ e $S(1)$ na Formula. $$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$ 3. Calcule o somatória para obter a expressão final.

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Ex: Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência
$S(1) = 4$
$S(n) = 2S(n-1) + 3$, para $n \geq 2$

1ª opção: Usando a formula temos $c = 2$, $g(n) = 2$ e $S(1) = 4$, logo

$$S(n) = 2^{n-1}(4) + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i}(3)$$

Resolver o somatório.
Note que para isso será NECESSÁRIO estudar a Sessão 2.2

2ª opção: Expandir, Conjecturar, verificar

Recursividade e Relações de Recorrência

Resolvendo Relações de Recorrência

Ex: Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência
$T(1) = 2$
$T(n) = T(n-1) + (n+1)$, para $n \geq 2$

Usando a formula temos $c = 1$, $g(n) = n+1$ e $S(1) = 2$, logo

$$S(n) = 1^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^{n} 1^{n-i}(i+1)$$

Lista Mínima de Exercícios

Seção 2.4: 1, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 20, 21, 25, 29, 33, 34, 38, 50, 51, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 72, 73, 76, 78, 80, 88 e 89.