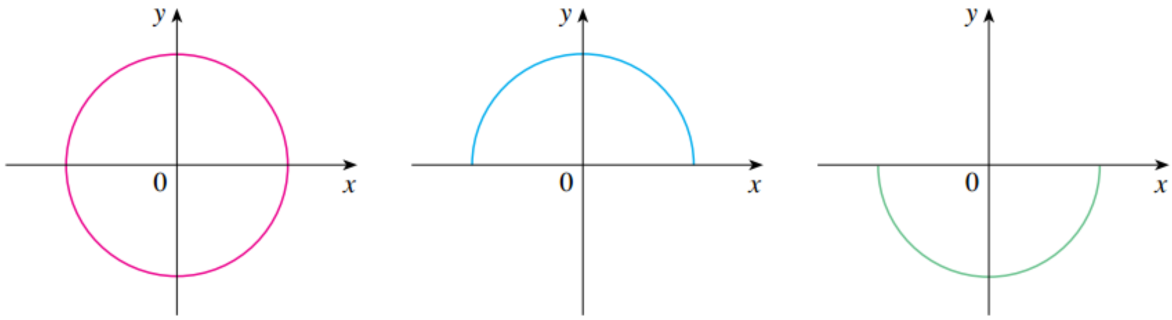
3.5 - Derivação Implícita

Derivação implícita é quando usamos a derivação para uma função que não está explícitada. Por exemplo:



(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Na 1a equação o 'y' não está explícito como função de 'x'. Esta equação, implicitamente, representa as duas funções necessárias para se formar o gráfico do círculo a partir de gráfico de funções (explícitas).

EXEMPLO 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

OBSERVAÇÃO 1 A expressão $dy/dx = -x/y$ na Solução 1 fornece a derivada em termos de x e y. É correta, não importando qual função for determinada pela equação dada. Por exemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{25 - x^2} = \frac{d}{dx}(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

Enquanto para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}\sqrt{25 - x^2} = -\frac{d}{dx}(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

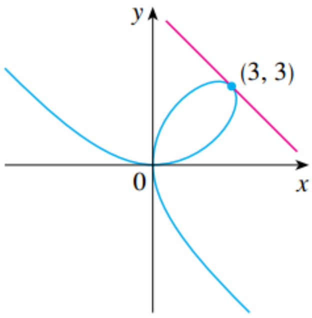
$$= \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$

EXEMPLO 2

(a) Encontre y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Encontre a reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto (3, 3).

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \qquad\qquad x + y = 6$$



EXEMPLO 3 Encontre y' se $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

EXEMPLO 4 Encontre y'' se $x^4 + y^4 = 16$.

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi definida por:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x, obtemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du}\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \quad \cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y}$$

Agora, $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, então

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Logo,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira análoga. Se $y = \mathrm{tg}^{-1}x$, então $\mathrm{tg}\, y = x$. Derivando essa última equação implicitamente em relação a x, temos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Ocorrem com frequência,
é necessário saber.

Menos frequentes, mas só muda o sinal.

Aparecem pouco.