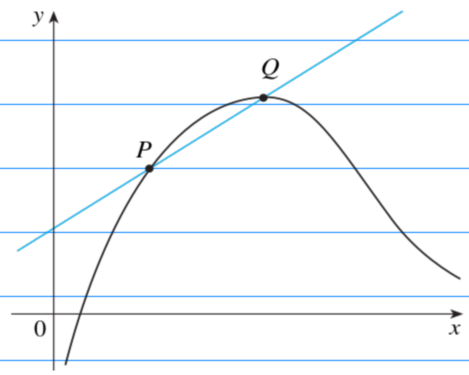
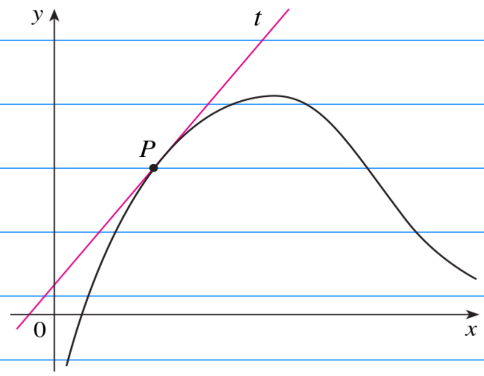
Retas Secantes e Retas Tangentes:

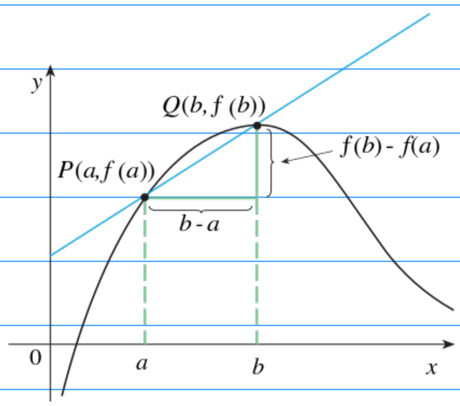
Uma reta secante a um gráfico, o intercepta em dois pontos



Uma reta tangente, intercepta o gráfico em um único ponto

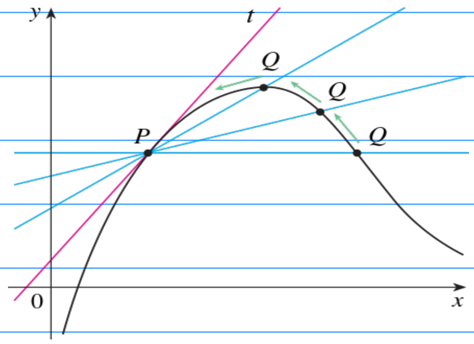


Como se calcula a inclinação de uma reta secante?

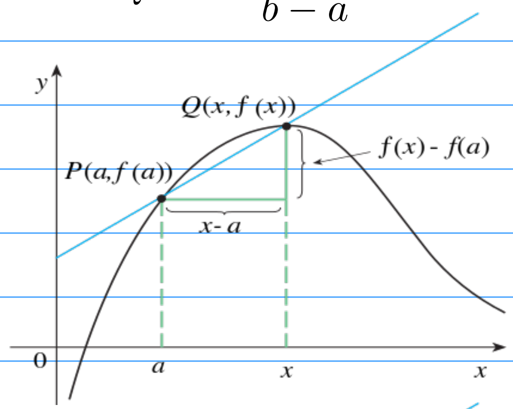


$$m_{PQ} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

E qual seria a inclinação da tangente no ponto P?



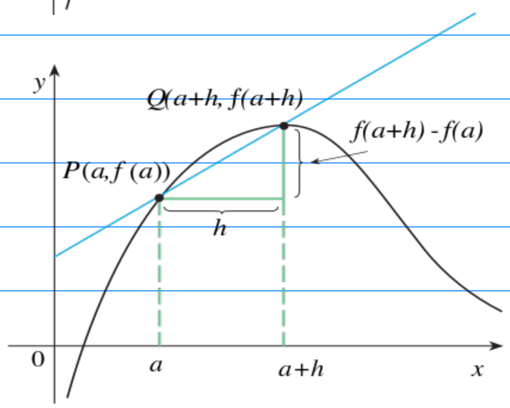
Se, ao invés de 'b' considerásimos um ponto 'x', genérico, e fazemos $x \to a$



Assim, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto P é dado por:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ou, outra forma de expressar isso seria:



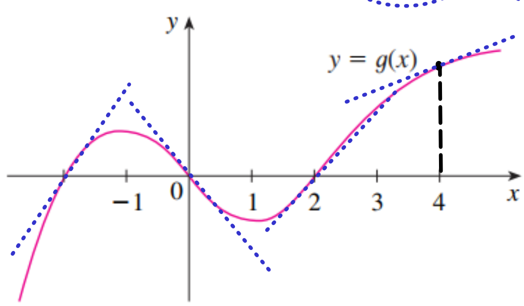
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A inclinação da reta tangente a uma função em um ponto (a,f(a)) é chamada de Derivada da função em 'a', e se escreve

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemplo: Para a função g(x) cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



$$g'(0) < 0 < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$$

Observe que, na segunda definição para derivada,
poderiamos colocar um 'x' qualquer no lugar de 'a':

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definindo assim a devivada de f(x) em um ponto 'x' qualquer.

Deste modo, temos na verdade uma nova função, chamada de função derivada de f(x), que fornece o valor da inclinação da tangente ao gráfico de f(x), para qualquer valor

Então resolvemos o limite em função de 'x' para obter e função derivada?

NÃO!!!

Do mesmo modo que resolvemos limites, através de suas propriedades, as devivadas são obtidas a partir de suas propriedades, que veremos a seguir.

Mas antes, duas observações. Primeira, existem outras notações para as derivadas:

Se y=f(x),

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

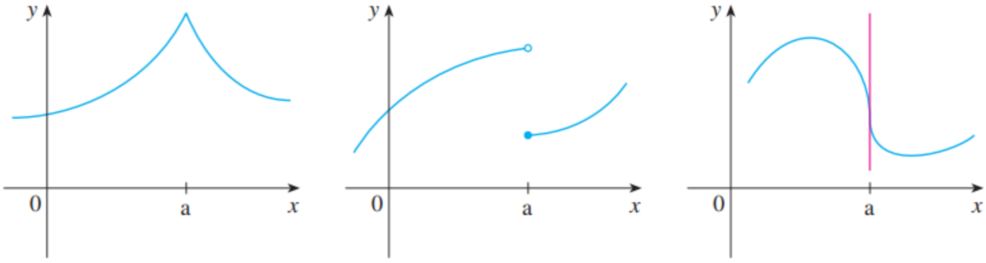
Notação de Leibniz para derivadas, será útil mais a frente. Explicita a variável utilizada para se obter a derivada. E existem também as derivadas de ordem superior, que é quando deriva-se uma função que já é a derivada de alguém:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(f'(x))$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df'(x)}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}(f''(x))$$

E a segunda obsevação é: como uma função pode não ser derivável em um ponto?

São três as situações onde a derivada não vai existir em um ponto:

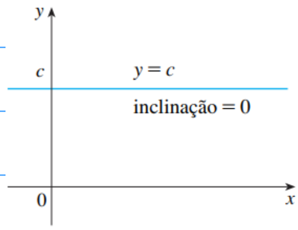


(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

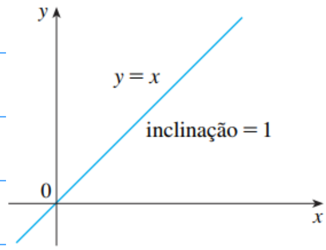
A função derivada f'(x) será descontínua nesses pontos.

3.1 Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$



$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$



A Regra da Potência Se n for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Exemplos:

Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

A Regra da Multiplicação por Constante Se c for uma constante e f, uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

A Regra da Soma Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$
$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$
$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, encontre f' e f''.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

3.2 As Regras de Produto e Quociente

A Regra do Produto

A derivada do produto de duas funções é dada por:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Mnemônico:
"deriva a primeira e repete a segunda, mais, repete a primeira e deriva a segunda"

EXEMPLO 1 Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = \left[\frac{d(x)}{dx}\right] \cdot e^x + x \cdot \left[\frac{d(e^x)}{dx}\right] = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$$

A Regra do Quociente

A derivada da divisão de duas funções é dada por:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Mnemônico:
"derivada a de cima e repete a baixo, menos, repete a de cima e deriva a de baixo, tudo, dividido pela de baixo ao quadrado"

OBSERVAÇÃO: Não use a Regra do Quociente toda vez que você vir um quociente. Algumas vezes é mais fácil reescrever o quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar.

Por exemplo, embora seja possível usar a Regra do Quociente para derivar a função

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

É muito mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

E agora é mais fácil derivá-la, aplocando apenas a regra da potência.

EXEMPLO 5 Encontre a derivada de $y = e^x/(1+x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{dx}(e^x)\right] \cdot (1+x^2) - e^x \cdot \left[\frac{d}{dx}(1+x^2)\right]}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1+x^2) - e^x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-1)^2}{(1+x^2)^2} = e^x\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$$

Tabela de Fórmulas de Derivação

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(cf) = cf' \qquad \frac{d}{dx}(f+g) = f' + g'$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg' \qquad \frac{d}{dx}(f/g) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

3.3 Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\right] \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \left[\frac{d}{dx}(\cos x)\right]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

EXEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \text{tg } x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem reta tangente horizontal?

$$f'(x) = \frac{\sec x\,(\text{tg } x - 1)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$