INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Indução
- Mais Sobre Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Mais Sobre Demonstração de Correção

Demonstração de Correção Algoritmo

$$\{Q\}s_i\{R\},$$

onde **Q** e **R** são estados antes de depois, respectivamente, a um conjunto de operações $\mathbf{s_i}$.

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

```
Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x faça
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto
```

A propriedade que descreve o algoritmo (nesse caso, a relação entre as variáveis 'j' e 'i'), **após provada**, é chamada de Invariante do laço

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x **faça**
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

Teste de Mesa para obter uma Conjectura
Seja ***K*** o índice que marca a iteração
(NOTE: que K não existe. É apenas um recurso para Facilitar a Explicação)

K = 0 (iteração 0 – Antes de entrar no laço)
$i_0 = 0$
$j_0 = 0$

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x **faça**
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

K = 0 (iteração 0 – Antes de entrar no laço)
$i_0 = 0$
$j_0 = 0$

K = 1
$j_1 = j_0 + y = y$
$i_1 = i_0 + 1 = 1$

K = 2
$j_2 = j_1 + y = 2y$
$i_2 = i_1 + 1 = 2$

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x **faça**
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

K = 2
$j_2 = j_1 + y = 2y$
$i_2 = i_1 + 1 = 2$

K = 3
$j_3 = j_2 + y = 3y$
$i_3 = i_2 + 1 = 3$

K = 4
$j_4 = j_3 + y = 4y$
$i_4 = i_3 + 1 = 4$

Conjectura:
j = i*y

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

```
Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x faça
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto
```

Verificação por indução (Conjectura: j = i*y)

* Caso base

$I_0 = 0$	$j_0 = i_0 * y$	
$J_0 = 0$	$0 = 0 * y$	OK!

* Supor que $j_k = i_k * y$

* Mostrar que $j_{k+1} = i_{k+1} * y$

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x **faça**
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

* Mostrar que $j_{k+1} = i_{k+1} * y$

$j_{k+1} = j_k + y$	(b)	
$= i_k * y + y$	(a)	
$= (i_k + 1)y$		
$= i_{k+1} * y$	(c)	OK!

"Argumentos"
(a) $j_k = i_k * y$
(b) $J_{k+1} = j_k + y$
(c) $i_{k+1} = i_k + 1$

Assim, no término temos:
(j = i*y) e (i = x) ➔ j = x * y

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x*y.

```
Produto (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = 0
    enquanto i ≠ x faça
        j = j + y
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto
```

Para lembrar:

Como é o processo para prova de correção do algoritmo?

1) Encontrar uma conjectura (propriedade) para o funcionamento do algoritmo.
   - O Teste de Mesa é uma boa estratégia para isso.
2) Fazer a verificação da conjectura
   - Usar a indução matemática

→ Depois de verificada a conjectura é chamada de invariante.

3) Analisar o término do algoritmo
   - (invariante) e (negação do laço)

Mais Sobre Demonstração de Correção

Ex: Mostre que o pseudocódigo abaixo retorna x+y.

Soma (x,y)
    Inteiros i,j
    i = 0
    j = x
    enquanto i ≠ y **faça**
        j = j + 1
        i = i + 1
    fim do enquanto
    retorne j
fim da função Produto

Mostre que a invariante do laço é $\boldsymbol{j = x + i}$ e que o programa termina retornando x + y