5.5 A Regra da Substituição

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas. Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

SP Para encontrarmos essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra*. Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u. Suponha que façamos u igual à quantidade sob o sinal de raiz em $\boxed{1}$, $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2x\,dx$. Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em $\boxed{1}$; portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

Diferenciais foram definidas na Seção 3.10. Se $u = f(x)$, então

$$du = f'(x)\,dx.$$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$. Observe que se $F' = f$, então

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Assim, demonstramos a regra a seguir.

$\boxed{4}$ **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação. Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em $\boxed{4}$ como diferenciais.

Assim, a Regra de Substituição diz que: **é permitido operar com dx e du após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

SOLUÇÃO Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\,dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + C\end{aligned}$$

Verifique a resposta derivando-a.

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

A ideia por trás da Regra da Substituição é substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Isso é obtido mudando-se da variável original x para uma nova variável u que é uma função de x. Dessa forma, no Exemplo 1 substituímos a integral $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$ pela mais simples $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

O desafio principal no uso da Regra da Substituição é descobrir uma substituição apropriada. Você deve tentar escolher u como uma função no integrando cuja diferencial também ocorra (exceto por um fator constante). Foi isso que aconteceu no Exemplo 1. Se isso não for possível, tente escolher u como alguma parte complicada do integrando (talvez a função interna em uma função composta). Achar a substituição correta tem algo de artístico. É normal errar na escolha da substituição; se sua primeira tentativa não funcionar, tente outra substituição.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUÇÃO 1 Seja $u = 2x + 1$. Então, $du = 2\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}\,du$. Nesse caso, a Regra da Substituição nos dá

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Outra substituição possível é $u = \sqrt{2x+1}$. Então

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}, \qquad \text{logo} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du.$$

(Ou observe que $u^2 = 2x + 1$, de modo que $2u\,du = 2\,dx$.) Portanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = 1 - 4x^2$. Então $du = -8x\,dx$, de modo que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C\end{aligned}$$

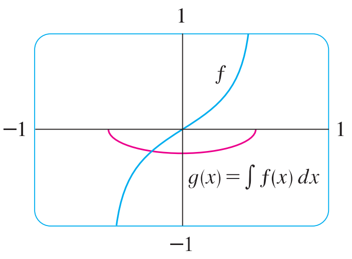


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

A resposta do Exemplo 3 pode ser verificada por derivação, mas em vez disso vamos verificá-la graficamente. Na Figura 1 usamos um computador para fazer o gráfico do integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ e de sua integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (escolhemos o caso

$C = 0$). Observe que $g(x)$ decresce quando $f(x)$ é negativa, cresce quando $f(x)$ é positiva e tem seu valor mínimo quando $f(x) = 0$. Portanto, parece razoável, pela evidência gráfica, que g seja uma primitiva de f.

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUÇÃO Se fizermos $u = 5x$, então $du = 5\,dx$, portanto $dx = \frac{1}{5}\,du$. Assim,

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^{u}\,du = \tfrac{1}{5}e^{u} + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

OBSERVAÇÃO Com mais experiência, você será capaz de avaliar integrais como aquelas nos Exemplos 1–4 sem precisar fazer uma substituição explícita. Ao reconhecermos o padrão na Equação 3, onde o integrando no lado esquerdo é o produto da derivada de uma função externa pela derivada de uma função interna, podemos trabalhar com o Exemplo 1 como segue:

$$\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos(x^4 + 2)\cdot x^3\,dx = \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2)\cdot(4x^3)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2)\cdot\frac{d}{dx}(x^4 + 2)\,dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$$

Similarmente, a solução no Exemplo 4 pode ser escrita como:

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int \frac{d}{dx}(e^{5x})\,dx = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

O exemplo a seguir, entretanto, é mais complicado e, portanto, uma substituição explícita é recomendada.

EXEMPLO 5 Encontre $\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx$.

SOLUÇÃO Uma substituição apropriada fica mais evidente se fatorarmos x^5 como $x^4\cdot x$. Seja $u = 1 + x^2$. Então $du = 2x\,dx$, de modo que $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Também temos $x^2 = u - 1$, portanto $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,x^4\cdot x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2\cdot\tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

EXEMPLO 6 Calcule $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos escrever primeiro a tangente em termos de seno e cosseno:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

Isso sugere que devemos substituir $u = \cos x$, visto que $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, e, portanto, $\operatorname{sen} x\,dx = -du$:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Uma vez que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, o resultado do Exemplo 6 também pode ser escrito como

$$\boxed{5} \qquad \boxed{\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C}$$

Integrais Definidas

Existem dois métodos para calcular uma integral *definida*, por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo, usando o resultado do Exemplo 2, temos

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2}$$
$$= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

Essa regra diz que quando usamos uma substituição em uma integral definida, devemos colocar tudo em termos da nova variável u, não somente x e dx, mas também os limites de integração. Os novos limites da integração são os valores de u que correspondem a $x = a$ e $x = b$.

$\boxed{6}$ **Regra da Substituição para as Integrais Definidas** Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMONSTRAÇÃO Seja F uma primitiva de f. Então, por $\boxed{3}$, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))\,g'(x)$, logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Mas, aplicando uma segunda vez o TFC2, também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando $\boxed{6}$.

SOLUÇÃO Usando a substituição da Solução 1 do Exemplo 2, temos $u = 2x + 1$ e $dx = \frac{1}{2}\,du$. Para encontrarmos os novos limites de integração, observamos que

$$\text{quando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{quando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

Portanto,
$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que quando usamos $\boxed{6}$ *não* retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u.

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

A integral no Exemplo 8 é uma abreviação para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx.$$

SOLUÇÃO Seja $u = 3 - 5x$. Então $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Quando $x = 1$, $u = -2$, e quando $x = 2$, $u = -7$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}\\ &= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7}\\ &= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}\end{aligned}$$

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Uma vez que a função $f(x) = (\ln x)/x$ no Exemplo 9 é positiva para $x > 1$, a integral representa a área da região sombreada na Figura 2.

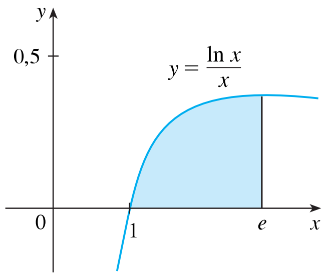


FIGURA 2

SOLUÇÃO Vamos fazer $u = \ln x$, pois sua diferencial $du = dx/x$ ocorre na integral. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Logo,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Simetria

O próximo teorema usa a Regra da Substituição para Integrais Definidas $\boxed{6}$ para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam propriedades de simetria.

$\boxed{7}$ **Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f seja contínua em $[-a, a]$.

(a) Se f é par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Se f é ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dividimos a integral em duas:

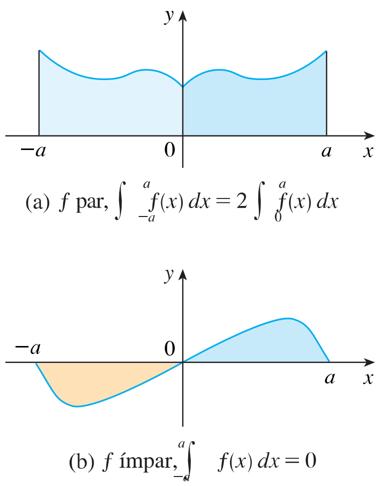
$$\boxed{8} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Na primeira integral da última igualdade fazemos a substituição $u = -x$. Então, $du = -dx$ e quando $x = -a$, $u = a$. Portanto

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

e, assim, a Equação 8 fica

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$



(a) f par, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(b) f ímpar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$, logo, da Equação 9 segue que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$
$$= 2\Big[\tfrac{1}{7}x^7 + x\Big]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Exercícios

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$
5. $\int \cos^3\theta\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta, \ \theta = \cos\theta$
6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7–48 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}dx$
9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$
10. $\int (3t + 2)^{2,4}\,dt$
11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$
12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$
13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$
14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$
15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$
16. $\int e^x\operatorname{sen}(e^x)\,dx$
17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$
18. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$
20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$
21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \cos^4\theta\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta$
23. $\int \sec^2\theta\ \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$
24. $\int \sqrt{x}\ \operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$
25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$
26. $\int \frac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$
27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\,dx$
28. $\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$
29. $\int 5^t\operatorname{sen}(5^t)\,dt$
30. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$
31. $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$
32. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$
33. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$
35. $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\ \operatorname{cossec}^2 x\,dx$
36. $\int \frac{2^t}{2^t + 3}\,dt$
37. $\int \operatorname{senh}^2 x\cosh x\,dx$
38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \operatorname{tg} t}}$
39. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$
40. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,dx$
41. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$
42. $\int \operatorname{sen} t\ \sec^2(\cos t)\,dt$
43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\ \operatorname{sen}^{-1}x}$
44. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$
45. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$
46. $\int x^2\sqrt{2 + x}\,dx$
47. $\int x(2x + 5)^8\,dx$
48. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

49–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3\,dx$
50. $\int \operatorname{tg}^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$
51. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$
52. $\int \operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\displaystyle\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{5x + 1}$

57. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \, \operatorname{cotg} \pi t\, dt$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \operatorname{tg} x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \, \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

75–76 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que está sob a curva dada. Encontre a seguir a área exata.

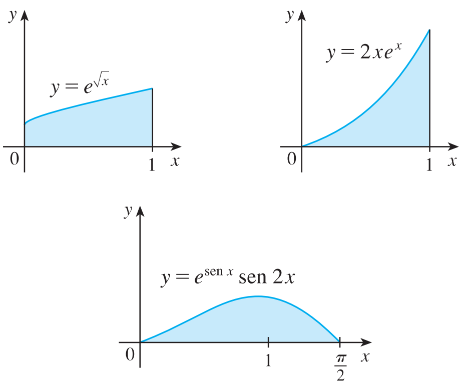
75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

79. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



80. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18 \cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, em um período de 24 horas?

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

85. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

86. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^3 x f(x^2)\, dx$.

87. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

88. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

89. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a (1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b (1 - x)^a\, dx.$$

90. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

91. Use o Exercício 90 para calcular a integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

92. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

5 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
(c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
(b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
(c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
(b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
(a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação "derivação e integração são processos inversos".

8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

3. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Se f for contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$, então
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Se f' for contínua em $[1, 3]$, então
$$\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1).$$

7. Se f e g forem contínuas em $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Se f e g forem deriváveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0.$

10. $\displaystyle\int_{-5}^5 (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx.$

11. Todas as funções contínuas têm derivadas.

12. Todas as funções contínuas têm primitivas.

13. $\displaystyle\int_0^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^5 e^{x^2}\,dx + \int_5^3 e^{x^2}\,dx.$

14. Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, então $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

15. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x).$$

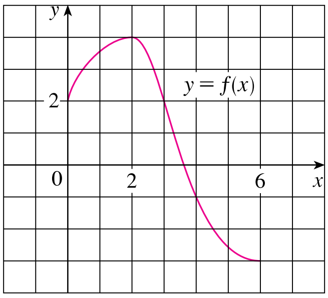
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.

17. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

18. Se f tem uma descontinuidade em 0, então $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ não existe.

Exercícios

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) as extremidades esquerdas e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.



2. (a) Calcule a soma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

(b) Use a definição de integral definida (com as extremidades direitas) para calcular o valor da integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx.$$

(c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).

(d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

3. Calcule

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \,\Delta x$$

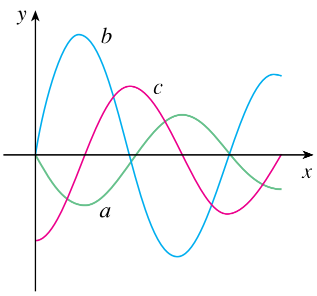
como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

5. Se $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encontre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

6. (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como um limite das somas de Riemann, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Use um SCA para calcular a soma e o limite.

(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.



8. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule a integral.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \operatorname{tg} t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \pi t \,\cos \pi t\,dt$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\ln(\cos x)\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta \,\operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre a seguir a área exata.

42. Faça o gráfico da $f(x) = \cos^2 x \,\operatorname{sen} x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Encontre a derivada da função.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

43. $F(x)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

44. $F(x)=\int_x^1 \sqrt{t+\operatorname{sen} t}\,dt$

45. $g(x)=\int_0^{x^4}\cos(t^2)\,dt$

46. $g(x)=\int_1^{\operatorname{sen} x}\frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt$

47. $y=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt$

48. $y=\int_{2x}^{3x+1}\operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x+1}\,dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\int_0^1 x^2\cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x\cos x\,dx \leqslant e-1$

54. $\int_0^1 x\operatorname{sen}^{-1}x\,dx \leqslant \pi/4$

55. Use a Regra do Ponto Médio com $n=6$ para aproximar $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

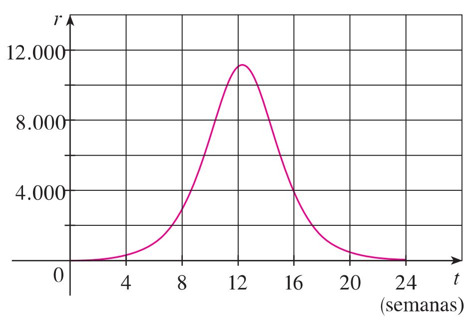
56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t)=t^2-t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa do consumo mundial de petróleo, em que t é medido em anos começando em $t=0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 r(t)\,dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana e o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.



60. Considere

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } -3\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{1-x^2} & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

Calcule $\int_{-3}^1 f(x)\,dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Se f for contínua e $\int_0^2 f(x)\,dx=6$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} f(2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta.$$

62. A função de Fresnel $S(x)=\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right)dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.

(a) Em quais intervalos C é crescente?

(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right)dt=0{,}7$$

SCA (d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y=\operatorname{senh} cx$ entre $x=0$ e $x=1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x|\leqslant a$ e 0 se $|x|>a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x,t)=\frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}}\int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\,du.$$

Para acharmos a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos calcular

$$\lim_{a\to 0} T(x,t).$$

Use a Regra de l'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_1^x f(t)\,dt=(x-1)e^{2x}+\int_1^x e^{-t}f(t)\,dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1)=-2$, $h'(1)=2$, $h''(1)=3$, $h(2)=6$, $h'(2)=5$, $h''(2)=13$ e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\,du$.

67. Se f' for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx=[f(b)]^2-[f(a)]^2$$

68. Encontre $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{1+t^3}\,dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, demonstre que

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(1-x)\,dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9+\left(\frac{2}{n}\right)^9+\left(\frac{3}{n}\right)^9+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

71. Suponha que f seja contínua, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(x)>0$ e $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$.