INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Serra

Ministério da Educação

Bacharel em Sistemas de Informações
Matemática Discreta
Prova 1 – Provas antigas

Observações:
- O entendimento da questão é parte integrante da mesma.
- Todas as considerações, e possíveis reclamações, sobre a prova devem ser feitas por escrito na mesma prova.
- Será permitido o uso de calculadora científica não programável.
- A organização da prova é parte integrante da avaliação.
- Todas as respostas devem ser justificadas. Caso contrário a mesma não será considerada.

1) Prove por **indução** as seguintes propriedades:

a) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a-ar^n}{1-r}$, ($n \geq 1$)

b) Suponha que temos selos de 4 e 7 centavos. Prove que é possível ter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando somente esses selos.

2) Dado o algoritmo abaixo, prove que o mesmo está correto. Para isso enuncie a invariante do laço, prove por indução que a invariante está correta e apresente o que acontece com a invariante no término do algoritmo.

Cálculo(inteiro *x*, inteiro não-negativo *n*)

variáveis
inteiros i, j
$i = 1$
$j = x$
Enquanto $i \neq n$ **faça**
    $j = j * (i + 1)$
    $i = i + 1$
Fim Enquanto
retorne j // $j = x*n!$

(Sugestão: para obter a invariante do laço pode ser usado o valor de *j* após o término do algoritmo.

3) Resolva as seguintes relações de recorrência.

a)
$T(1) = 1$
$T(n) = 2T(n - 1) + 1$, para $n \geq 2$.

b)
$T(1) = 1$
$T(n) = 2T(n/2) + n$, para $n \geq 2$.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Serra

Ministério
da Educação

4) Considere o programa, escrito na linguagem C, a seguir.

```c
int Cal(int n){
	if (n < 2) return 1;
	else return Cal(n – 1) + Cal(n – 2);
}

int main(){
	int T = 6;
	printf("%d\n", Cal(T));
	return 0;
}
```

Quantas chamadas da função Cal ocorrem na execução desse programa.

(a) 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 5
(b) 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8
(c) 2×6
(d) 6^2

Justifique a resposta.
OBS: A resposta só será aceita se a justificativa estiver correta

5) Considere as funções recursivas abaixo.

I)

```c
void Proc( int n ) {
	if ( n == 0)
		return 1;
	else
		return Proc(n-1) + Proc(n-1);
}
```

II)

```c
/* n é uma potencia de 2 */
void Sort (int A[n],int i, int j){
	if ( i < j ){
		m = (i + j - 1)/2;
		Sort(A,i,m); /* custo = T(N/2) */
		Sort(A,m+1,j); /* custo = T(N/2) */
		Merge(A,i,m,j); /* custo = n - 1 comparacoes no pior caso */
		/* Merge intercala A[i..m] e A[m+1..j] em A[i..j] */
	}
}
```

a) (4,0 pontos) Escreva a função recursiva que representa o número de operações para cada função.
b) (4,0 pontos) Resolva as resursividades encontradas.
c) (1,0 ponto) Diga, em relação à função computacional, o que significa resolver a função recursiva.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Serra

Ministério
da Educação

6) Seja $F(n)$ a Sequência de Fibonacci. **Prove usando a definição da Sequência de Fibonacci que:**

$$F(n+6) = 4\,F(n+3) + F(n)$$

7) Considere a seguência abaixo definida recursivamente:

$F(1) = 1$
$F(2) = 2$
$F(n) = 2 * F(n-1) + 3 * F(n-2)$.

a) Escreva os 10 primeiro elemento dessa sequência.
b) Escreva uma função computacional, **usando recursividade**, para gerar a sequência dada

8) Classifique as recorrências quanto ao tipo, 1ª ordem, dividir para conquistar ou nenhum dos dois, e resolva as seguintes relações de recorrência.
a) $S(1) = 1$
$S(n) = S(n-1) + 2n$, para $n \geq 2$.

b) $T(1) = 1$
$T(n) = nT(n-1) + 1$, para $n \geq 2$.

c) $A(1) = 1$
$A(n) = 2A(\frac{n}{2}) + 1$, para $n \geq 2$.

9) Usando indução prove:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n} = \dfrac{n-1}{n}$, para $n \geq 1$

b) $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9, para $n \geq 1$.

c) $3^n - 2$ é ímpar, para $n \geq 1$.

d) $n! > n^2$, para $n \geq 4$.

10) Uma sequência é definida por recorrência
$S(0) = 1$
$S(1) = 1$
$S(n) = 2S(n-1) + S(n-2)$, para $n \geq 2$
Prove que $S(n)$ é um número ímpar para $n \geq 0$.

11) Resolva as seguintes relações de recorrência

a) $S(1) = 1$
$S(n) = S(n - 1) + n$, para $n \geq 2$.

b) $T(1) = 1$
$T(n) = nT(n - 1)$, para $n \geq 2$.

Note que não é possível aplicar as formulas que conhecemos para recorrências. Explique o motivo? Resolva essa recorrencia usando a técnica de expandi, conjecturas e provar.

c) $A(1) = 1$
$A(n) = 2A(\frac{n}{2}) + n$, para $n \geq 2$.

12) Considere o famoso algoritmo de ordenação conhecido por Bubblesort.

```
1. Bubblesort(lista A,inteiro positivo n)
2. Para i =1 .. (n – 1)
3.     Para j =1 .. (n – 1)
4.         Se A[j] > A[j+1]
5.             Troca A[j] <-> A[j+1]
```

a) Apresente, justificando sua resposta, o número de execuções da operação “Troca” no melhor caso e no pior caso para uma lista de n elementos.

b) Explique como esse método de ordenação funciona.

c) Enuncie a invariante do loop na linha 2. Isto é, o que se pode garantir sobre a lista A ao final da cada iteração desse loop.

d) Prove a correção desse algoritmo usando a invariante do loop.

13) Usando indução prove:

a) $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

b) $2^n \geq n^2$, para $n \geq 5$.

c) $2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3.

14) Prove que o segmento de programa está correto, enunciando e demonstrando o invariante do laço (Q) apropriado e calculando Q depois do laço terminar.

```
Calc (inteiro positivo x); x > 1
    variáveis i, j
    i = 1
    j = 4
    enquanto i ≠ n faça
        j = j + 2i + 3
        i = i + 1
    fim do enquanto
retorne j.
```