

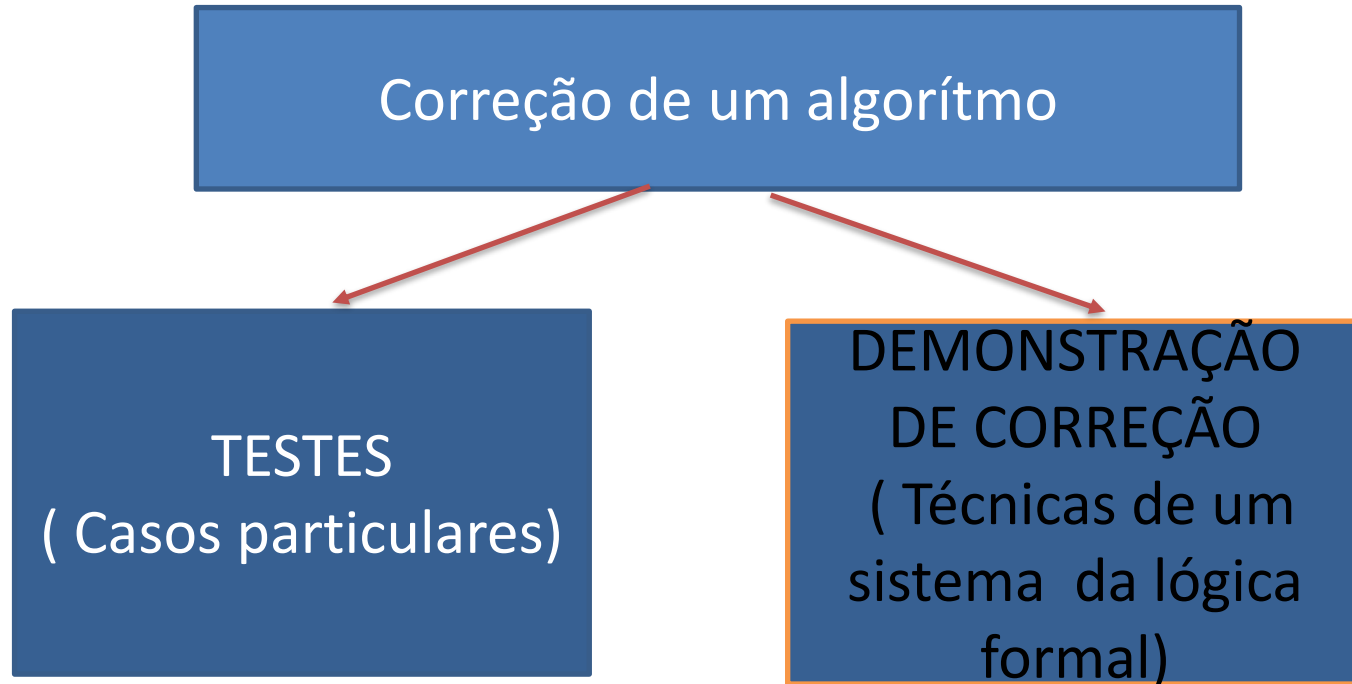
Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Demonstrações, Recorrências e Análise de Algoritmos

- Técnicas de Demonstração
- Indução
- Demonstração de Correção
- Recursividade e relações de Recorrência
- Análise de Algoritmo

Correção de um algoritmo



Asserções

X: Valores de entrada;

P: Programa que transformam X em Y, $Y=P(X)$;

Q: Predicado que as variáveis de entrada devem obedecer;

R: Predicado que as variáveis de saída devem obedecer;

OBS: Muitas vezes R tem que obedecer as condições de entrada também, logo R tem a forma $R(X,Y)$

Asserções

O programa P está correto se o condicional
 $(\forall X)(Q(X) \rightarrow R(X, Y))$ *for válido*

Em outras palavras: Sempre que Q for verdadeiro para os valores de entrada, então R é verdadeiro com os valores de entrada e saída.

Exemplo:

Exemplo1: O programa P deve encontrar a raiz quadrada de um número não-negativo.

$$y = \sqrt{x} \rightarrow (y^2 = x)$$

Solução:

$$y = P(x) = \sqrt{x} \rightarrow (y^2 = x) \text{ PROGRAMA}$$

$$Q(x): x \geq 0 \text{ (PRÉ-CONDIÇÃO)}$$

$$R(x, y): (y^2 = x) \wedge (y \geq 0) \text{ (PÓS-CONDIÇÃO)}$$

Exemplo:

CONTINUAÇÃO:

Como fica a nossa fórmula.

$$(\forall X)(Q(X) \rightarrow R(X, P(X)))$$

$$(\forall x)(x \geq 0 \rightarrow (y^2 = x) \wedge (y \geq 0)) \text{ (fbf padrão)}$$

TRIPLA DE HOARE

NOTAÇÃO USADA PARA CORREÇÃO DE PROGRAMAS

$\{Q\}P\{R\}$

$Q(x)$: PRÉ-CONDIÇÃO

P : PROGRAMA

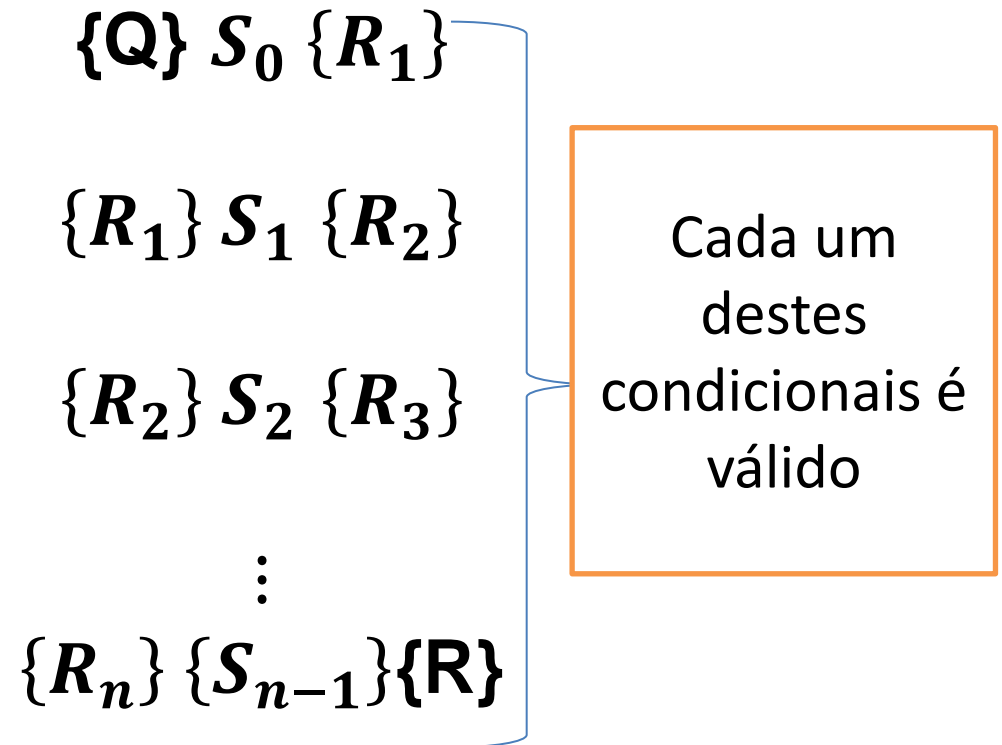
$R(x, y)$: PÓS-CONDIÇÃO

Programa ou segmento de programa

$$\begin{array}{c} \{Q\} \\ S_0 \\ \{R_1\} \\ S_1 \\ \{R_2\} \\ \vdots \\ \{S_{n-1}\} \\ \{R\} \end{array}$$

Onde: S_i Proposição individual

P é demonstrável correto se cada um dos condicionais é válido se :



Formas de verificação da demonstração de correção

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO;

REGRA DO CONDICIONAL;

REGRA DO LAÇO;

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO

Escrever uma tripla de Hoare;

Inicia-se pela Pós condição;

Verifica a atribuição que foi feita(comando) e chega na Pré-Condição;

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO

Exemplo:

$Q: x > 1$ (PRÉ-CONDIÇÃO)

$P: x = x - 1$

$R: x > 0$

Tripla de Hoare:

$\{x > 1\} x = x - 1 \{x > 0\}$

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO

Exemplo 2: Programa que troca os valores de (x,y)

temp = *x*

x = *y*

y = *temp*

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO

Solução:

$Q: (a,b)$ (PRÉ-CONDIÇÃO)

$P:$

$temp = x$

$x = y$

$y = temp$

$R: (b,a)$ (PÓS-CONDIÇÃO)

AXIOMA DE ATRIBUIÇÃO

Vamos começar de baixo para cima

$$\begin{array}{l} \{ \\ S_0 (temp = x) \\ \{ \\ S_1(x = y) \\ \{ \\ S_2(y = temp) \\ \{ x = b; y = a \end{array} \}$$

A REGRA CONDICIONAL

Uma **proposição** ou **declaração condicional** em um programa é uma proposição da forma:

if condição B *then*

P_1

else

P_2

end if

Neste caso, tem-se 2 triplas de HOARE

Tripla 1 : $\{Q \wedge B\} P_1 \{R\}$

Tripla 2 : $\{Q \wedge \sim B\} P_2 \{R\}$

A REGRA CONDICIONAL- Exemplo

Exemplo1 : Dado o programa P:

$\{y = 0\}$

if $y < 5$ ***then***

$y = y + 1$

else

$y = 5$

end if

$\{y = 1\}$

A REGRA CONDICIONAL- Exemplo

As triplas de Hoare neste caso são:

Tripla 1 : $\{y = 0 \wedge y < 5\} \ y = y + 1 \{y = 1\}$

Tripla 2: $\{y = 0 \wedge y \geq 5\} \ y = 5 \{y = 1\}$

OBS1: A que a pré-condição é falsa não precisa verificar pois é válida pelo condicional;

OBS2: A tripla 1 deve ser verificada se é válida;

Lista Mínima de Exercícios

Seção 1.6: 2, 4, 8, 9, 10