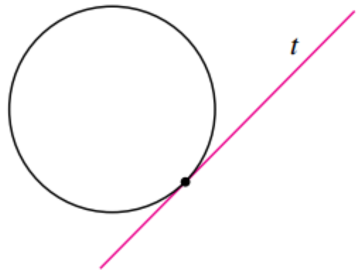
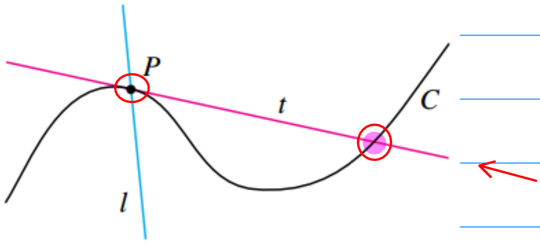
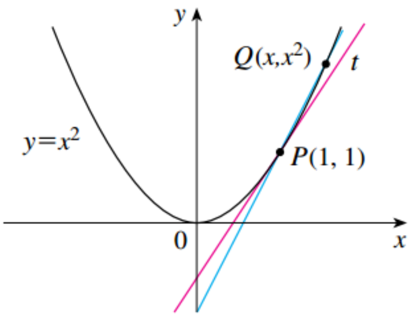




A palavra tangente vem do latim tangens, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Uma reta secante, do latim secans, significando corte, é uma linha que corta a curva (atravessa).

Veja que uma reta pode ser tangente a secante ao mesmo tempo. Então, quando falamos de tangente estamos de tangente em um ponto.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.



$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

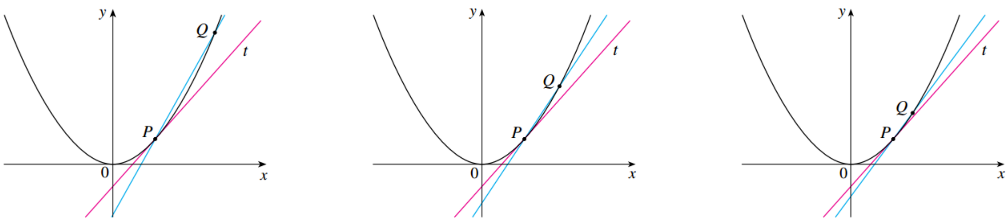
Por exemplo, para o ponto $Q(1{,}5;\ 2{,}25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

Fazer $Q(x,x^2)$ se aproximar de $P(1,1)$ equivale a fazer x se aproximar de 1.

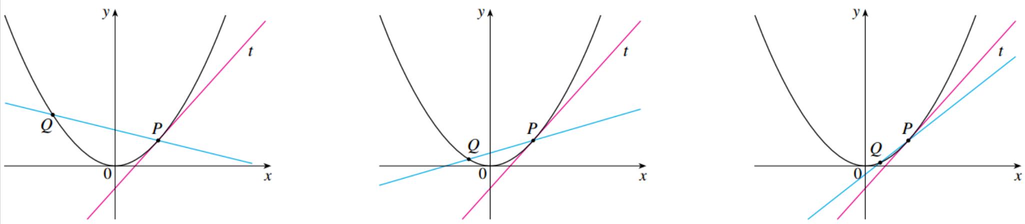
Fazendo Q se aproximar de P pela direita:

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001



Fazendo Q se aproximar de P pela esquerda:

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999



https://www.geogebra.org/graphing/avchfumb

Pelas aproximações, quando 'x' se aproxima de 1, 'm' parece se aproximar de 2.

Se isso de fato ocorre, ou seja, a inclinação da tangente é exatamente 2, dizemos quando 'x' tende a 1 o limite de 'm' é 2. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to 1} m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

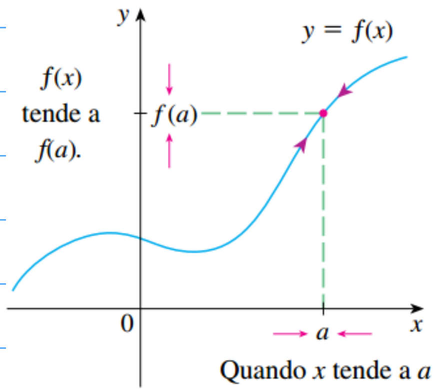
Mas como saber se o limite é este mesmo?

Há duas formas de se fazer isso. Uma delas é uma demostração formal com as técnicas mostradas na seção 2.4. Mas essa é uma aborgem complexa e de aplicabilidade limitada. A outra forma é deduzir o limite a partir de suas propriedades e por analogia com limites conhecidos.

A mais importante propriedade dos limites se refere aos pontos no domínio da função.

Para as funções simples, sempre que um ponto 'a' pertence ao domínio de uma função f(x), temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



'simples' $\neq$ 'composta'

Essa propriedade é tão importante que recebe uma nomenclatura própria:

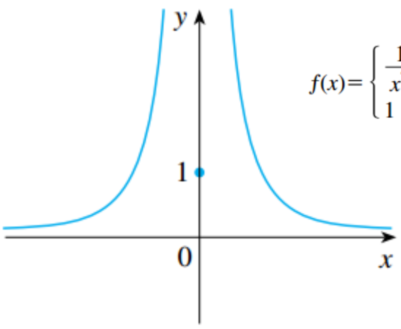
1 **Definição** Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

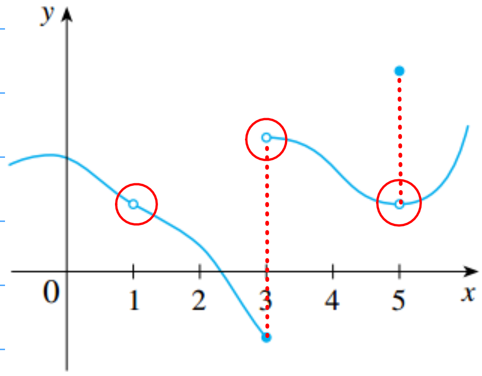
3 **Definição** Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

O que não pode ter no gráfico de uma função contínua?

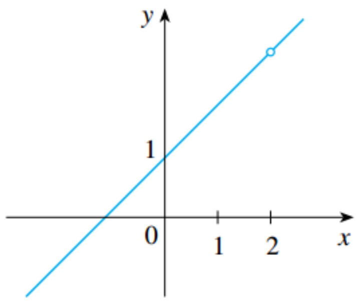
Buracos, saltos e assíntotas verticais



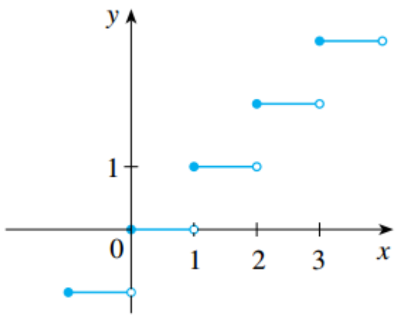
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Intuitivamente, a função é contínua se, ao desenhar seu gráfico, a caneta não sai do papel nenhuma vez.

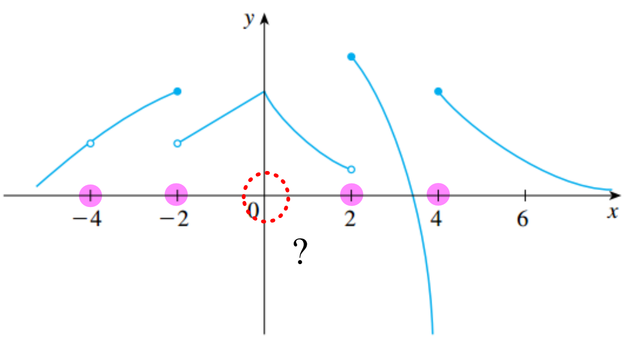


$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$



Os pontos onde a função não é contínua são chamados de descontinuidades.

Onde a função a seguir é descontínua?



7 Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

9 Teorema Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$