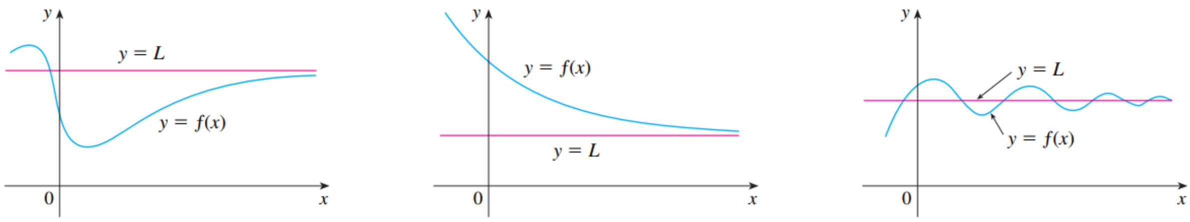
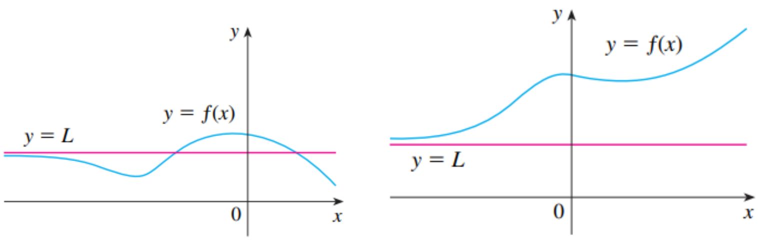
3 Definição A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

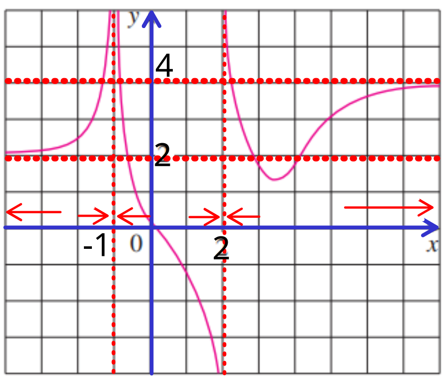
Para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, temos assíntotas da forma



Para $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, temos assíntotas da forma



EXEMPLO 1 Encontre os limites infinitos, limites no infinito e assíntotas para a função f cujo gráfico está na Figura:



Quando $x \to -1$, $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

Quando $x \to 2^-$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Quando $x \to 2^+$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

Quando $x \to \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 4$ Quando $x \to -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

5 Teorema Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EXEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Técnica comum para limites no infinito de quocientes de polinômios:

Divida em cima e em baixo por x elevado ao grau do polinômio de menor grau.

Neste exemplo ambos polinômios tem grau 2, então, façamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 1/x - 2/x^2}{5 + 4/x + 1/x^2} = \frac{3}{5}$$

$$\overset{\text{X}}{=} \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - 1/x - 2/x^2}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5 + 4/x + 1/x^2}$$

$$\overset{\text{X}}{=} \frac{\overbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3}^{3} - \overbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 1/x}^{0} - \overbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2/x^2}^{0}}{\underbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5}_{5} + \underbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 4/x}_{0} + \underbrace{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 1/x^2}_{0}} = \frac{3}{5}$$

EXEMPLO 4 Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

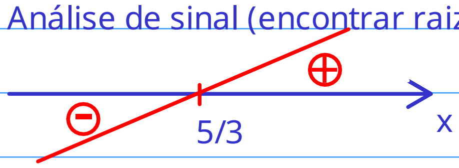
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

As assíntotas verticais ocorren em torno das descontinuidades, então, para encontrá-las, basta checar as restrições ao domínio e calcular os limites laterais em torno delas. E sempre será útil também fazer a análise de sinal dos fatores da função.

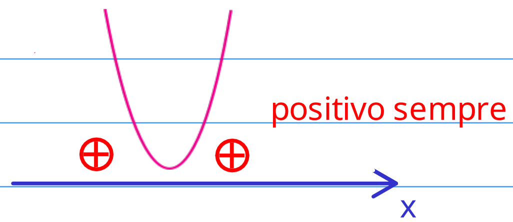
Restrições ao Domínio:

$3x - 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{5}{3}$ e $2x^2 + 1 \geq 0$ Não tem raiz real!

Análise de sinal (encontrar raizes): $2x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1/2$



$x = 5/3$ é a raiz da função $y = 3x - 5$



Então, a única possibilidade de ocorrência de uma assíntota vertical é em torno de x=5/3.

Assim, devemos calcular os limites laterais de f(x) em torno de x = 5/3 para indentificar se há uma assíntota vertical.

$$\lim_{x \to (\frac{5}{3})^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Das análises de sinal, sabemos que o numerador é sempre um número positivo que, quando $x \to (\frac{5}{3})^-$, tende a algum valor contante c, positivo.

E também que $(3x-5) \to 0^-$. Assim,

$$\lim_{x \to (\frac{5}{3})^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \to \frac{c}{0^-} \to -\infty$$

De modo similar, com as informações das análise de sinal, temos que

$$\lim_{x \to (\frac{5}{3})^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \to \frac{c}{0^+} \to \infty$$

Logo, $x = 5/3$ é assíntota vertical da função. Agora devemos investigar as assíntotas horizontais. Estas, ocorrem quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Neste caso, não temos exatamente um queciente de polinômios, pois um dos polinômios está dentro de um radical.

Mas a estratégia segue parecida. Basta considerar um grau "líquido" para o polinômio que está dentro do radical. Grau 2/2=1

Grau 1

Então, o menor grau é 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \cdot \frac{1/x}{1/x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x-5}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{3-5/x}$$

Como "passar" o x para dentro do radical? Se no lugar do x tivéssimos $\sqrt{x^2}$ poderíamos fazer $\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}} = \sqrt{2+1/x^2}$

Mas, $x = \sqrt{x^2}$? Não? NÃO!!!

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo:

Se $x = -2$, $\sqrt{x^2} = 2$

Ou seja, $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$.

No limite que queremos calcular, quando $x \to \infty$, x é um número positivo.

Assim, $x = \sqrt{x^2}$ e podemos dizer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{3-5/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{3-5/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\cancel{1/x^2}}}{3-\cancel{5/x}}$$

0

0

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Mas, quando $x \to -\infty$, x é negativo. Logo, $x = -\sqrt{x^2}$, e segue que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{3-5/x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{3-5/x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{2+\cancel{1/x^2}}}{3-\cancel{5/x}}$$

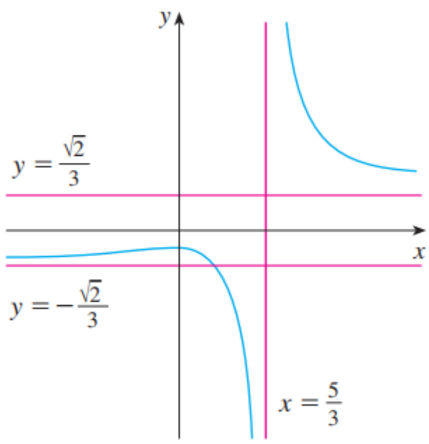
0

0

Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, além da assíntota vertical em $x = 5/3$, a função $f(x)$ também tem assíntotas horizontais em $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$.



EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

$$\infty \quad - \quad \infty$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \quad \infty$$

$$\to \frac{1}{\infty} \quad \to \quad 0$$

Assim, $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$$

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

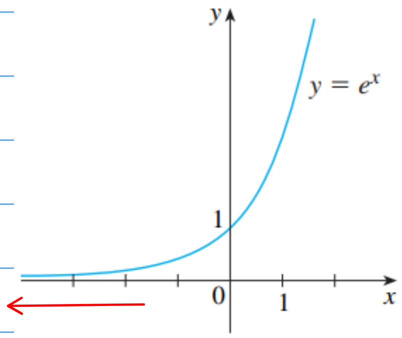
Para o exemplo 7, vamos usar exemplificar outra estratégia para se resolver limites, que consiste em fazer uma mudança de variáveis.

Quando $x\to 0^-$, temos que $1/x\to-\infty$. Se fizermos $t=1/x$, temos que, dizer que $x\to 0^-$ equivale a dizer que $t\to-\infty$. Assim, o limite acima pode ser escrito como

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}=\lim_{t\to-\infty} e^{t}$$

E o limite da direita pode ser resolvido levando em conta apenas o comporamento da função exponencial.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}=\lim_{t\to-\infty} e^{t}=-\infty$$



EXEMPLO 10 Encontre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

$\infty - \infty$?

O limite, para mais ou menos infinito, de um polinômio, é sempre dominado pelo sinal do termo de maior grau.

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 + bx + c = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 + ax^2 + bx + c = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + ax^2 + bx + c = -\infty$$

EXEMPLO 12 Esboce o gráfico de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ achando suas intersecções com os eixos e seus limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

É um polinômio já fatorado e, portanto, suas raizes estão expostas.

Raizes: $x = -1, \quad x = 1, \quad x = 2$

Qual o grau e qual o sinal do coeficiente de maior grau?

Note que o x=2 é raíz índice par, ou seja, a função não troca se sinal em torno dela

$$x^4 \cdot x^3 \cdot x = x^8$$

Logo,

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \infty$$