Para falar da Regra da Substituição, precisamos antes definir os diferenciais dx e dy como entes independentes.

Diferenciais

A partir da definição de derivada, podemos definir os diferenciais dx e dy como se segue:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Assim, faz sentido definir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = dy \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx \tag{1}$$

Onde o Valor médio da função no intervalo é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \overline{f(x)} \tag{2}$$

De modo que,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \overline{f(x)} = f'(x) \tag{3}$$

De (2) , segue que,

$$\Delta y = \overline{f(x)} \cdot \Delta x$$

Tomando o limite da equação acima, temos,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\overline{f(x)} \cdot \Delta x \right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

De (1) e (3) , temos que:

$$dy = f'(x)dx$$

Resumindo,

$$y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad dy = f'(x)dx \tag{4}$$

Regra da Substituição

Seja u(x) uma função de x. De (4), temos que

$$\frac{du}{dx} = u' \implies du = u'dx$$

Assim,

$$\int f(u) \cdot u'dx = \int f(u)du = F(u) + c,$$

onde $F'(x) = f(x)$.

Esse método de resolver integrais é chamado de Regra da Substituição, pois se substitui alguma função g(x) por 'u'. Ela pode ser vista como o processo inverso da Regra da Cadeia, que pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u'$$

Exemplo:

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{1/2}\, du$$

Para $u(x) = 1 + x^2$,

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$

EXEMPLO 2 Calcule $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$

EXEMPLO 3 Encontre $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

EXEMPLO 5 Encontre $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx = \frac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$

EXEMPLO 6 Calcule $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

Uma vez que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, o resultado do Exemplo 6 também pode ser escrito como

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}$

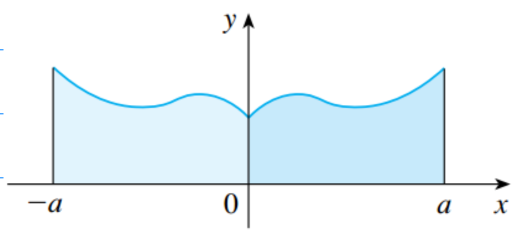
EXEMPLO 9 Calcule $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\, dx = \dfrac{1}{2}$

Simetria

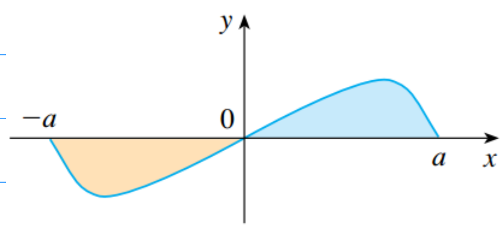
7 **Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f seja contínua em $[-a, a]$.

(a) Se f é par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.

(b) Se f é ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\text{tg } x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{tg } x}{1 + x^2 + x^4}\, dx = 0$$