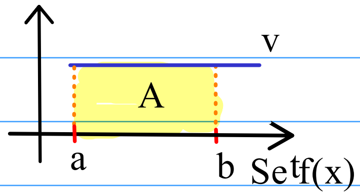
5.3 - O Teorema Fundamental do Cálculo

Lembre da física do ensino médio que, a área abaixo do gráfico da velocidade é o espeço percorrido, ou a variação da função de posição.



$A = (b-a)\cdot v$, onde $v = \Delta s/\Delta t$ e $\Delta t = (b-a)$. Logo,

$$A = \Delta s = s(b) - s(a)$$

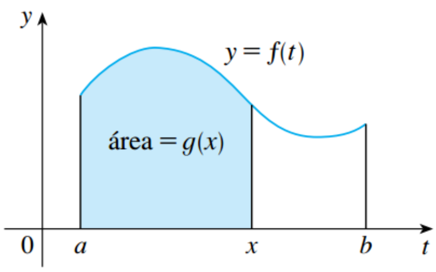
Mas a função velocidade é a derivada da função de posição, sua taxa de variação. Se v(t) é uma função qualquer, esse resultado se mantém, e a área abaixo de seu gráfico é a variação da função primitiva, no caso, a velocidade.

Na física, esse resultado é conhecido como o Teorema da Variação Total, mas isso é válido para qualquer função contínua. Ou seja, a integral da taxa de variação é a variação da função primitiva. Se F(x) é a primitiva de uma função f(x), então, F'(x) = f(x). Ou seja, f(x) é a taxa de variação de F(x). Temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x). \quad \text{Ou, } \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse é um resultado muito importante, chamado de Teorema Fundamental do Cálculo.

EXEMPLO 2 Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.



Seja $F(t)$ uma primitiva de $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, então

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dx = F(x) - F(0)$$

Assim, $g'(x) = \dfrac{d}{dx}g(x) = \dfrac{d}{dx}[F(x) - F(0)]$

$$= \frac{d}{dx}F(x) - \cancel{\frac{d}{dx}F(0)}^{\,0} = F'(x) = f(x)$$

Ou seja, $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$ De modo geral, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

EXEMPLO 3 Embora uma fórmula da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos dessas funções. Por exemplo, a **função de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$$

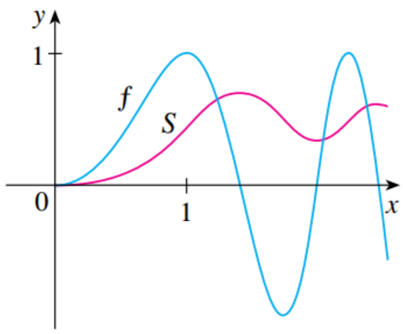
é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus estudos em óptica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de autoestradas.

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, temos que,

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Isso significa que podemos aplicar todos os métodos do cálculo diferencial para analisar S

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ e da função de Fresnel



EXEMPLO 4 Encontre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt = \sec(x^4)\cdot 4x^3$

EXEMPLO 5 Calcule a integral $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$

Frequentemente usamos a notação

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Assim, a equação do TFC pode ser escrita como

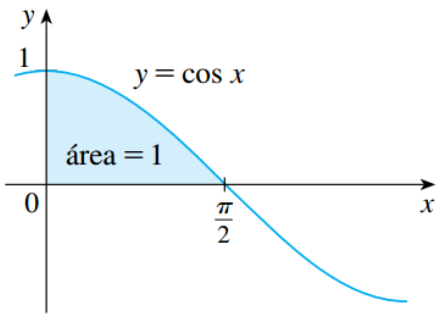
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{onde} \qquad F' = f$$

Ao aplicarmos o Teorema Fundamental, usamos uma primitiva específica F(x). Não é necessário usar a primitiva mais geral, com o "+ C", pois a possível constante somando é sempre eliminada ao fazer a variação de F(x).

EXEMPLO 6 Encontre a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

EXEMPLO 7 Calcule $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

EXEMPLO 8 Encontre a área sob a curva cosseno de 0 até b, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.



EXEMPLO 9 O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{não existe}$$

5.4 - Integrais Indefinidas

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação é tradicionalmente usada para a primitiva de f(x) é chamada integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x).$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$.

EXEMPLO 1 Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx = 2x^5 - 2\,\mathrm{tg}\, x + C$$

Lembre-se, você pode verificar sua resposta derivando-a!!!

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt = 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$