λ-исчисление

Лаптов Дмитрий

18.03.2021

1 Базовые определения

Определение 1.1. *λ-термы - это:*

1. *$x_1, x_2, \ldots$ - λ-термы. (переменные)*
2. *$c_1, c_2, \ldots$ - λ-термы. (константы)*
3. *если u, v - λ-термы, то (uv) - λ-терм.*
4. *если $u - \lambda$-терм, а x - переменная, то $(\lambda x.u)$ - тоже λ-терм.*

Множество λ-термов - это наименьшее множество, удовлетворяющее данному набору условий.

Пример 1. *$\lambda x.x$ - тождественная функция.*

Пример 2. *$B = \lambda f.\lambda g.\lambda x.f(gx)$ - композиция функций.*

Примечание. $(Bfg)x \equiv f(gx)$

Определение 1.2. *α-конверсия:*

$$\lambda x.u \underset{\alpha}{\to} \lambda y.u[x := y]$$

Примечание. Переименовывать мы имеем право только свободные вхождения переменной.

Пример 3. $\lambda x.(\lambda x.x) \underset{\alpha}{\to} \lambda y.(\lambda x.x)$

α-конверсия используется для предотвращения конфликта имен переменны х. λ-термы мы рассматриваем все с точностью до α-конверсии.

Определение 1.3. *β-редукция - это:*

$$(\lambda x.u)v \underset{\beta}{\to} u[x := v] \text{ (если подстановка допустима)}$$

Для того, чтобы подставка была допустимой, должны быть выполнены некоторые условия.

Антипример 1. $(\lambda x.\underbrace{\lambda z.(xz)}_{u})\underbrace{z}_{v} \underset{?}{\to} \lambda z.(zz)$

Разгадка. В выражении $(\lambda x.u)z$ внешний z в терме u свободен, и при разных значения х v получались потенциально разные значения терма u. При этом при подста новке z стал связанным, поэтому это не является корректной β-реду кцией.

Пример 4. $(\lambda x.\lambda z.(xz))z \underset{\alpha}{\to} (\lambda x.\lambda y.(xy))z \underset{\beta}{\to} (\lambda y.zy)$

То есть, переменные, которые были свободны в v, не должны оказаться связа нными λ-операторами, которые были в u. В таком случае подставка называется *свободной* или *допустимой*. Если она недопустима, то это решается применением α-конверсии. Таким образом, если в u нет λ-операторов, или в v нет свободных переменных, подставнока всегд а будет допустимой.

Другой подход заключается в том, что можно завести 2 алфавита свободных переменных и связанных, и связанные переменные всегда берутся из другого набор а. Проблема заключается в том, что при применении λ-оператора по переменной x, придется переменовывать все её свободные вхождения в данном терме.

Примечание. β-редукцию можно применять к подтермам бо́льшего терма:

$$\frac{\ldots \quad (\lambda x.u)v \quad \ldots}{}$$

$$\downarrow \beta$$

$$\frac{\ldots \quad u[x := v] \quad \ldots}{}$$

Определение 1.4. *Замкнутый λ-терм - λ-терм без свободных переменных.*

Определение 1.5. Редекс - *выражение, к которому можно применить β-редукцию.*

Процесс редукции не детерминированный. Мы можем выбрать любой редекс и применить к нему β-редукцию.

Определение 1.6. *λ-терм в нормальной форме - λ-терм, не имеющий редексов.*

β-редукция не обязательно приводится к упрощению терма. К тому же, существуют λ-термы, не имеющие нормальной формы.

Пример 5. $\Omega = (\lambda x.(xx))\underbrace{(\lambda x.(xx))}_{\omega} \underset{\beta}{\to} (\omega\omega) = \Omega$

Последовательности β-редукций можно представлять в виде графа.

Определение 1.7 (SN)**.** *Сильно нормализуемый λ-терм - λ-терм, т.ч. любая последоват ельность β-редукций приводит к нормальной форме.*

Определение 1.8 (WN)**.** *Слабо нормализуемый λ-терм - λ-терм, для которого существует последовательность β-редукций, приводящая к нормальной форме.*

Существует λ-термы с бесконечным графом редукции.

Пример 6.

$$\xi = (\lambda x.(xx)x))$$
$$(\xi\xi) \underset{\beta}{\to} (\xi\xi)\xi \underset{\beta}{\to} ((\xi\xi)\xi)\xi \underset{\beta}{\to} \dots$$

Пример 7 (WN, но не SN)**.**

$$\begin{array}{ll}
(\lambda x.\lambda y.y)\Omega \underset{\beta}{\to} (\lambda y.y) & \\
\downarrow \beta \qquad\quad \nearrow \beta & \\
(\lambda x.\lambda y.y)\Omega & \\
\downarrow & \\
\vdots &
\end{array}$$

Тем не менее, для всех λ-термов верно свойство Чёрча-Россера.

Теорема 1.1 (CR)**.** *Если λ-терм E, под действием некоторых последовательностей β- редукций, средуцировался до λ-термов E_1 и E_2, то существует λ-терм N, к которому они оба редуцируются.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ E_1 \arrow[dr] & & E_2 \arrow[dl] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Рис. 1: свойство Чёрча-Россера

Следствие 1.1.1. *Если нормальная форма есть, то она единственна. Действительно, если E_1 и E_2 - некоторые нормальные формы, то по св-ву Чёрча-Россера существует λ-терм N, к которому они оба редуцируются. Но т.к. они уже являются нормальными формами, эта последовательность редукций не может быть нетривиальной. Следо вательно, $E_1 \overset{\alpha}{\equiv} E_2$.*

Следствие 1.1.2. *Если нормальная форма есть, то с любой вершины графа можно добраться до нормальной формы.*

Определение 1.9.

$$\mathbb{T} = \lambda x.\lambda y.x$$
$$\mathbb{F} = \lambda x.\lambda y.y$$
$$[u, v] = \lambda z.((zu)v)$$

С помощью чистого λ-исчисления можно закодировать натуральные числа.

Определение 1.10 (Нумералы)**.**

$$d_0 = \lambda x.x$$
$$\dots$$
$$d_{n+1} = [\mathbb{F}, d_n]$$

В дальнейшем, на заданных таким образом нумералах можно задать все привычные арифметические операции, и, в итоге, выразить все вычислимые функции.

Теорема 1.2. *$f\colon \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$ вычислима $\iff$ f λ-представима, т.е. существует λ-терм F, т.ч. если $f(n_1, \dots, n_k) = m$, то $(Fd_{n_1})d_{n_2} \dots d_{n_k} \underset{\beta}{\to} d_m$*

2 Вычислимые функции

Определение 2.1. *Примитивно-рекурсивные функции - это:*

- *Базисные ПРФ:*

  1. $i_k^n(x_1, \dots, x_n) = x \quad \leftrightarrow \quad (\lambda x_1 \dots x_n . x_k)$
  2. $z(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad (\lambda x . d_0)$
  3. $s(x) = x + 1 \quad \leftrightarrow \quad (\lambda x . [\mathbb{F}, x])$

- *Композиция:*

$$g\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N} - \text{ПРФ}$$
$$f_1, \dots, f_m\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} - \text{ПРФ}$$
$$h(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\vec{x}}) = g(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

- *Примитивная рекурсия: $g, h \rightsquigarrow f$*

$$\begin{cases} f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) \\ f(n+1, \vec{x}) = h(f(n, \vec{x}), n, \vec{x}) \end{cases}$$

Все примитивно-рекурсивные функции вычислимы и всюду определены. Но их класс много уже, чем класс всех вычислимых функций.

Примечание. $[u, v]\,\mathbb{F} = v, [u, v]\,\mathbb{T} = u$.

Утверждение 2.1. *Композиция ПРФ, выраженная λ-термом:*

$$H = \lambda x_1, \dots, x_m .\, G(F_1\, x_1 \dots x_n) \dots (F_m\, x_1 \dots x_n).$$

Теорема 2.1 (о неподвижной точке). *$\forall$ λ-терма F $\exists$ λ-терм U, т.ч. $U \underset{\beta}{\to} F\,U$*

Доказательство.

$$U = (\lambda x.\ F\ (x\ x))\,(\lambda x.\ F\ (x\ x)) \underset{\beta}{\to} F\,U.$$

□

Определение 2.2. *Комбинатор - это λ-терм без свободных переменных.*

Определение 2.3. *Комбинатор неподвижной точки:*

$$\mathbb{Y} = \lambda f.\ (\lambda x.\ F\ (x\ x))\,(\lambda x.\ F\ (x\ x)) = \lambda f.\ U.$$

Результатом работы данного комбинатора является:

$$U = \mathbb{Y}\ F \underset{\beta}{\to} F\ (\mathbb{Y}\ F).$$

Откуда следует *равномерная теорема о неподвижной точке.*

Теорема 2.2. *$\exists\ \mathbb{Y}\ \forall\ F\ :\ \mathbb{Y}\ F \overset{\beta}{=} F\ (\mathbb{Y}\ F)$.*

$\mathbb{Y}$ существует далеко не единственный, придумать их можно великое множество.

Пример 8 (Тьюринг)**.**

$$A = \lambda xy.\ y\,(x\ x\ y)$$
$$\theta = A\ A$$

Определение 2.4. *β - равенство - это ...*

Пример 9. $\mathbb{Y}\ F \underset{\beta}{\to} U \underset{\beta}{\to} F\ U \underset{\beta}{\leftarrow} F\ (\mathbb{Y}\ F)$

Примечание. Если один из элементов равенства - нормальная форма, то β-равенство э квивалентно β-редукции к данному λ-терму.

Теорема 2.3 (о рекурсии)**.** *$\forall\ M\ \exists\ F$: $F \overset{\beta}{=} M[f := F]$*

Доказательство. $F = \mathbb{Y}\,(\lambda f.\ M)$ □