1) Algebraické struktury

def. Buď $\circ : G^2 \to G$ binární operace na množině G
pak **grupa** je dvojice $(G, \circ)$ t.ž.
1) $\forall a,b,c \in G: \ a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$ (asociativní)
2) $\exists e \in G \ \forall a \in G: \ a\circ e = e\circ a = a$ ($\exists$ neutrální prvek)
3) $\forall a \in G \ \exists b \in G: \ a\circ b = b\circ a = e$ ($\exists$ inverzní prvek)

$(G,+)$: $e=0$, inverze $-a$
$(G,\cdot)$: $e=1$, inverze a^{-1}

def. **komutativní grupa** = grupa, která navíc splňuje:
$\forall a,b \in G: \ a\circ b = b\circ a$

základní vlastnosti v grupě:
1) $a\circ c = b\circ c \Rightarrow a = b$
2) e je určen jednoznačně
3) $\forall a \in G$ je inverzní prvek jednoznačný
4) $\forall a,b \in G$ má rovnice $a\circ x = b$!1 řešení
5) $(a^{-1})^{-1} = a$
6) $(a\circ b)^{-1} = b^{-1}\circ a^{-1}$

- číselné obory$^{+,\cdot}$: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ ... → komutativní
  → $(\mathbb{N},+)$ není grupa → existence inverzního prvku
- $(\mathbb{R}^{m\times n},+)$ komutativní e = nulová matice, inv. $-A$
  (regulární matice řádu n, $\cdot$) $e = I_n$ (jednotková matice)
  ↳ není komutativní
- $(\mathbb{Z}_n,+)$ $\mathbb{Z}_n = \{0,\dots,n-1\}$ + mod n → komutativní
- množina reálných polynomů proměnné x, $+$ → komutativní
- zobrazení s operací skládání v $\mathbb{R}^n$ / permutace

def. **Podgrupa** grupy $(G,\circ)$ je grupa $(H,\diamond)$ t.ž.

$H \subseteq G$ a $\forall a,b \in H: a \circ b = a \diamond b \in H$

$e \in H$, $\forall a \in H: a^{-1} \in H$

↳ H je uzavřena na grupové operace

triviálně $(\{e\},\circ)$, $(G,\circ)$ triviální podgrupy $(G,\circ)$

↓

průnik podgrup je podgrupa,

sjednocení nemusí být

grupa $\mathbb{Z}_6 = (\{0,\dots,5\}, +_{\text{mod } 6})$, $e=0$, inverze $-a$

$\{0,2,4\}$, $\{0,1,5\}$, $\{0,3\}$
① ②

↳ sjednocení: $(\{0,2,3,4\},+)$

! není podgrupa: $2+3=5$

def. **Permutace** na konečné množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p: X \to X$

S_n = množina všech permutací na $\{1,\dots,n\}$

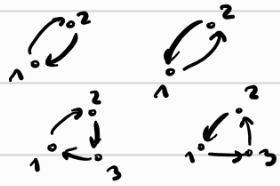
(beru $X = \{1,\dots,n\}$)

Inverzní permutace: $p^{-1}: X \to X$, $p^{-1}(i) = j \Leftrightarrow p(j) = i$

pro permutaci $p \in S_n$

př. $(i,j)^{-1} = (i,j)$

$(i,j,k)^{-1} = (k,j,i)$



Transpozice = permutace s 1 dvouprvkým cyklem (jinak smyčky)

$t = (i,j)$

Skládání permutací: $p,q \in S_n$: $p \circ q$: $(p \circ q)(i) = p(q(i))$

→ asociativní, ale komutativní obecně ne př. $p = (1,2)$ $q = (1,3,2)$

$p \circ q$:

n	1	2	3
q	3	1	2
p	3	2	1

$q \circ p$:

n	1	2	3
p	2	1	3
q	1	3	2

$p \circ q$ 3 2 1 $\rightarrow (1,3)$ $q \circ p$ 1 3 2 $\rightarrow (2,3)$

def. **Znaménko permutace** $p \in S_n$: $sgn(p) = (-1)^{n-k}$
kde $k = \#$ cyklů permutace
př. $sgn(id) = 1$, $sgn((i,j)) = -1$ ...

p je **sudá** $\equiv$ $sgn(p) = 1$
p je **lichá** $\equiv$ $sgn(p) = -1$

V: $p \in S_n$, $t = (i,j)$: $sgn(p) = -1 \cdot sgn(p \circ t) = -1 \cdot sgn(t \circ p)$
→ transpozice změní # cyklů o 1
(buď 2 spojí nebo 1 rozdělí)

V: $\forall p \in S_n$ lze rozložit na složení transpozic
$(u_1, \dots, u_r) = (u_1, u_2) \circ (u_2, u_3) \circ \dots \circ (u_{r-1}, u_r)$
↳ rozklad není jednoznačný ani na # transpozic, jenom parita zůstane stejná

D: $sgn(p) = (-1)^r$
$r = \#$ transpozic rozkladu p

D: $sgn(p \circ q) = sgn(p) \cdot sgn(q)$

D: $sgn(p^{-1}) = sgn(p)$

def. **Těleso** je množina T se 2 binárními operacemi $+, \cdot$:
1) $(T, +)$ je Abelova grupa, $e = 0$, $-a$
2) $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa, $e = 1$, a^{-1}
3) $\forall a,b,c \in T$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita)

základní vlastnosti v tělese:

1) $0 \cdot a = 0$

2) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

3) $-a = (-1) \cdot a$

nekonečná tělesa: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

! se $\mathbb{Z}$ nelze → neobsahuje inverzní prvky pro $\cdot$

L: buď n prvočíslo, $0 \neq a \in \mathbb{Z}_n$, pak:

$\{0, 1, \dots, n-1\} = \{0a, 1a, \dots, (n-1)a\}$

(nemusí být nutně ve stejném pořadí)

V: $\mathbb{Z}_n$ je těleso $\Leftrightarrow$ n je prvočíslo

def. Charakteristika tělesa = nejmenší n t.ž. $1^n = 0$

$(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = 0)$

→ pokud takové n neexistuje → 0

V: buď 0 nebo prvočíslo

Galoisovo těleso: $GF(p^n) = \{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \,;\, a_i \in \mathbb{Z}_p\}$

→ těleso o velikosti p^n, p = prvočíslo

Malá Fermatova věta: p, $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$: $a^{p-1} = 1$ v $\mathbb{Z}_p$

př. 2^{111} v $\mathbb{Z}_{11}$ $= (2^{10})^{10} \cdot 2^1 = 1^{10} \cdot 2 = 2$

↳ $2^{10} \equiv 1$ v $\mathbb{Z}_{11}$

2) Soustavy lineárních rovnic

def. Reálná **matice** typu $m \times n$ je obdélníkové schéma reálných čísel ↳ m řádků, n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} = prvek na pozici (i,j)

$\mathbb{R}^{m \times n}$ množina všech reálných matic typu $m \times n$

čtvercová matice: $m = n$

def. **Matice soustavy** pro soustavu rovnic

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

m rovnic
n neznámých

je matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

rozšířená matice soustavy $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Elementární řádkové úpravy

1) vynásobení i-tého řádku $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
2) přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3) prohození i-tého a j-tého řádku

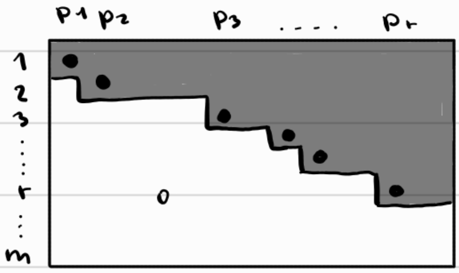
↳ elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy

def. **Odstupňovaný tvar matice** (REF)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v odstupňovaném tvaru, pokud $\exists r \in \{1, \dots, m\}$ t.ž.

1) řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové
2) řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové
3) $p_1 < p_2 \dots < p_r$, $p_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$
   ↪ **pivoty**

slouupce p_i = **bázické** (ostatní nebázické)



def. **Hodnost matice** $\operatorname{rank}(A) = r$

= # pivotů v odstupňovaném tvaru

= # nenulových řádků —‖—

Převod matice do REF pomocí elementárních řádkových úprav

vstup: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. $i \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$
2. if $a_{kl} = 0$ $\forall k > i$ $\forall l > j$: konec
3. $j \leftarrow \min\{l \mid l \geq j, a_{kl} \neq 0 \; k \geq i\}$
   (přeskočím nulové podsloupečky)
4. k t.ž. $a_{kj} \neq 0$, $k \geq i$ a vyměň řádky A_{i*} , A_{k*}
   (pivot na pozici a_{ij})
5. $\forall k > i$: $A_{k*} = A_{k*} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} A_{i*}$
6. $i \leftarrow i+1$, $j \leftarrow j+1$

$i \leq m$
$j \leq n$

Gaussova eliminace

soustava rovnic $(A \mid b)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $r = \operatorname{rank}(A \mid b)$

→ po převodu $(A \mid b)$ na REF $(A' \mid b')$:

a) soustava nemá řešení

posledni sloupec je bázický $(0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b'_r \neq 0)$

→ tedy $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A \mid b)$

b) soustava má řešení

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

i) jediné řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & & 0 & \end{array}\right)$$

$r = n$ (n = # proměnných)

řešení zpětnou substitucí:

$$x_k := \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}$$

postupně pro $k = n, n-1, \ldots, 1$

ii) nekonečně mnoho řešení

$r < n$

množinu řešení popíšeme parametricky

bázické proměnné $x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$

(odpovídající bázickým sloupcům)

(volné)
nebázické proměnné budou parametry

$$x_{p_k} := \frac{b'_k - \sum_{j=p_k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kp_k}}$$

pro $k = r, r-1, \ldots, 1$

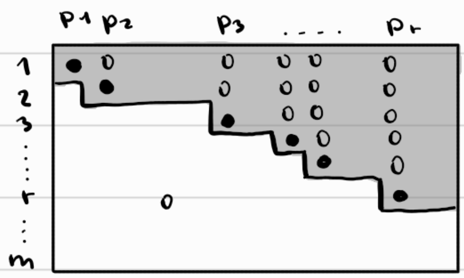
def. **Redukovaný odstupňovaný tvar** matice (RREF)

matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v RREF, pokud:

1) A je v REF

2) $a_{1p_1} = a_{2p_2} = \ldots = a_{rp_r} = 1$ → pivoty jsou 1

3) $\forall i = 1, \ldots, r$: $a_{1p_i} = a_{2p_i} = \ldots = a_{i-1\,p_i} = 0$ → nad pivoty 0



Převod do RREF:

1. $i \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$
2. if $a_{kl} = 0$ $\forall k \geq i$ $\forall l \geq j$: konec
3. $j \leftarrow \min \{ l \mid l \geq j, a_{kl} \neq 0 \; k \geq i \}$
4. k t.ž. $a_{kj} \neq 0$, $k \geq i$ a vyměň řádky A_{i*}, A_{k*}
5. $A_{i*} = \frac{1}{a_{ij}} A_{i*}$ $\rightarrow$ 1 na pozici pivota
6. $\forall k \neq i$: $A_{k*} = A_{k*} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} A_{i*}$

   (pro $\forall$ řádky, nejen následující)
7. $i \leftarrow i+1$, $j \leftarrow j+1$

Gaussova-Jordanova eliminace

$(A|b)$ převedu na RREF $(A'|b')$

1) soustava nemá řešení
2) soustava má jediné řešení

   $(x_1, \dots, x_n) = (b'_1, \dots, b'_n)$

   ↳ díky nulám všude kromě pivotů
3) nekonečně mnoho řešení

   nebázické proměnné = parametry

   $x_{p_k} := b'_k - \sum_{j=p_k+1}^{n} a'_{kj} x_j$

   pro $k = r, r-1, \dots, 1$

Frobeniova věta

$(A|b)$ má řešení $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$

3) Matice

def. **Rovnost** : $A = B \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Součet : $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow (A+B) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Násobek : $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$

$\alpha \in \mathbb{R}, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow (\alpha A) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

odčítání : $A - B := A + (-1)B$

vlastnosti součtu a násobku :

1) $A + B = B + A$
2) $(A+B) + C = A + (B+C)$
3) $A + 0 = A$, 0 = nulová matice $(\forall a_{ij} = 0)$
4) $A + (-1)A = 0$
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6) $1A = A$
7) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$$\left.\begin{array}{l} 7) \\ 8) \end{array}\right\} \text{distributivita}$$

def. **Součin** : $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad B \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$

př.

$$B = \begin{array}{c} \quad j \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

→ skalární součin i-tého řádku A a j-tého sloupce B

! obecně není komutativní

Vlastnosti součinu matic:

1) $(AB)C = A(BC)$ → asociativita
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $(A+B)C = AC + BC$ } distributivita
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5) $0A = A0 = 0$
6) $I_m A = A I_m = A$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

↳ I_m = jednotková matice $\in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\forall i = 1, \dots, m$: $a_{ii} = 1$, jinak 0
diagonála

def. **Transpozice**: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

↳ překlopení podle hlavní diagonály

vlastnosti transpozice:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

Symetrická matice: $A = A^T$ $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$

Diagonální matice: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.ž. $\forall i \neq j$: $a_{ij} = 0$

$$\mathrm{diag}(v) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

Horní trojúhelníková matice: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.ž.

(analogicky dolní) $\forall i > j$: $a_{ij} = 0$

př. $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

def. **Hodnost matice** $\text{rank}(A) = r$

$= \#$ pivotů v odstupňovaném tvaru

$= \#$ nenulových řádků — ıı —

T: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\text{rank}(A) = 1 \iff A = x \cdot y^T$ $x \in \mathbb{R}^m$ $y \in \mathbb{R}^n$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & & \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

→ řádky lineárně závislé $(x_i \cdot y^T)$

def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **regulární** pokud má soustava $Ax = 0$ jediné řešení $x = 0$

singulární matice je čtvercová matice, která není regulární

T: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jsou ekvivalentní:

1) A je regulární
2) $\text{RREF}(A) = I_n$
3) $\text{rank}(A) = n$

1) A je regulární
2) $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$ má jediné řešení
3) $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$ má jediné řešení

T: A, B regulární $\Rightarrow$ $A \cdot B$ regulární

T: A nebo B singulární $\Rightarrow$ $A \cdot B$ singulární

T: A je regulární $\Rightarrow$ A^T je regulární

def. pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je A^{-1} inverzní maticí, pokud
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

V: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A je regulární $\Rightarrow$ $\exists A^{-1}$ určená jednoznačně
existuje A^{-1} $\Rightarrow$ A je regulární

výpočet inverzní matice:
V: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nechť matice $(A | I_n)$ typu $n \times 2n$
má RREF $(I_n | B)$, pak $B = A^{-1}$
netvoří-li 1. část RREF I_n, pak je A singulární

vlastnosti inverzní matice:
1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, $\alpha \neq 0$
4) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

V: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $BA = I_n$ $\Rightarrow$ A, B regulární vzájemně inverzní

V: regulární $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $Ax = b \rightarrow x = A^{-1}b$

4) Vektorové prostory

def. těleso $(T, +, \cdot, 0, 1)$

vektorový prostor nad tělesem T

= množina V s operacemi $+ : V^2 \to V$ (sčítání vektorů)

$\cdot : T \times V \to V$ (násobení skalárem)

t.ž. $\forall \alpha, \beta \in T$ (skaláry) $\forall u, v \in V$ (vektory):

1) $(V, +)$ je abelova grupa s $e = o$ $(0, \dots, 0)$, $-v$
2) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (asociativita)
3) $1v = v$
4) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
5) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$\Big\}$ distributivita (4, 5)

základní vlastnosti vektorů:

prostor V nad T, $\forall \alpha \in T$ $\forall v \in V$:

1) $0v = 0$
2) $\alpha o = o$
3) $\alpha v = o \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = o$
4) $(-1)v = -v$

def. buď V vektorový prostor nad T $(U \in V)$

$U \subseteq V$ je podprostorem V $\equiv$

tvoří vektorový prostor nad T se stejně definovanými operacemi

T: buď U podmnožina vektorového prostoru V nad T

U je podprostorem $\equiv$

1) $o \in U$
2) $\forall u, v \in U: u+v \in U$
3) $\forall \alpha \in T$ $\forall u \in U: \alpha u \in U$

def. V vektorový prostor nad T, $W \subseteq V$

lineární obal W značený $\mathrm{span}(W)$ je průnik všech podprostorů V obsahujících W

$$\mathrm{span}(W) = \bigcap_{\substack{U \in V \\ W \subseteq U}} U$$

(průnik podprostorů je podprostor)

př. $\mathrm{span}\{(1,0)^T\} = \mathrm{span}\{(1,0)^T, (2,0)^T\} =$

$=$ přímka (osa x_1)

$\mathrm{span}\{(1,1)^T, (1,2)^T\} = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{span}\{\} = \{o\}$

def. V vektorový prostor nad T, $v_1, \dots, v_n \in V$

lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n =$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$$

V: V vektorový prostor nad T, $v_1, \dots, v_n \in V$

$$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \; ; \; \forall i \; \alpha_i \in T\}$$

↳ množina všech lin. kombinací

V nad T, $M \subseteq V$ $\mathrm{span}(M)$ je tvořen všemi lineárními kombinacemi $\forall$ konečné soustavy vektorů z M

def. W množina vektorů, $U = \mathrm{span}(W)$, U prostor, pak

W **generuje** prostor U,

prvky W jsou **generátory** prostoru U

U je **konečně generovaný**, pokud je generovaný nějakou konečnou množinou vektorů def. V vektorový prostor nad T, $v_1, \dots, v_n \in V$

vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, pokud

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i = o \quad \text{pouze pro} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}$$

v opačném případě jsou lineárně závislé

def. V vektorový prostor nad T, $M \subseteq V$ nekonečná množina,

M je lineárně nezávislá, pokud každá konečná podmnožina M je lineárně nezávislá

jinak je M lineárně závislá

př. prázdná množina je lineárně nezávislá

$(1,0)^T$, $(2,0)^T$ jsou lineárně závislé

$(1,0)^T$ je lineárně nezávislý

$(0,0)^T$ je lineárně závislý

$v_1, \dots, v_n \in V$ nad T jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists k \in \{1, \dots, n\}$: $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in T$

tzn $v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

$\Downarrow$

$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

def. V vektorový prostor nad T

báze je jakýkoliv lineárně nezávislý systém generátorů V

př. báze pro $\mathbb{R}^2$: $(1,0)^T = e_1$, $(0,1)^T = e_2$

$(7,5)^T$, $(2,3)^T$

$e_1, \dots, e_n$ = kanonická báze

def. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ báze prostoru V, $u \in V$: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ pak $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou souřadnice vektoru $u \in V$ vzhledem k bázi B

$[u]_B := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$

$$[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$$
$$[\alpha u]_B = \alpha [u]_B$$

V: Každý vektorový prostor má bázi

V: Všechny báze konečně generovaného prostoru V jsou stejně velké.

Lemma o výměně:

$y_1, \dots, y_n$ systém generátorů prostoru V, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

pro libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$ t.ž. $\alpha_k \neq 0$:

$y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$ generuje V

Steinitzova věta o výměně:

$x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V

$y_1, \dots, y_n$ systém generátorů V, pak:

1) $m \leq n$
2) $\exists$ navzájem různé $k_1, \dots, k_{n-m}$ t.ž.

$x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$ generuje V

$\forall$ lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi

def. **dimenze** konečně generovaného vektorového prostoru je velikost jeho báze ($\dim V$)
(pro prostory, které nejsou konečně generované $= \infty$)

př. $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \{o\} = 0$
$\dim \mathbb{R}^{m \times n} = m \cdot n$

V vektorový prostor:
1) $x_1, \dots, x_m \in V$ lineárně nezávislé, pak $m \leq \dim V$
pokud $m = \dim V$, pak $x_1, \dots, x_m$ je báze
2) $y_1, \dots, y_n \in V$ generátory V, pak $n \geq \dim V$
pokud $n = \dim V$, pak $y_1, \dots, y_n$ je báze

W je podprostor $V \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$
$\dim(W) = \dim(V) \Rightarrow W = V$

def. U, V podprostory vektorového prostoru W
spojení podprostorů: $U + V := \{u + v \,;\, u \in U, v \in V\}$
$\rightarrow U + V = \operatorname{span}\{U \cup V\}$

$$\boxed{\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V}$$

def. $A \in T^{m \times n}$, pak:
1) **sloupcový prostor** $\mathcal{S}(A) := \operatorname{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$
2) **řádkový prostor** $\mathcal{R}(A) := \operatorname{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\}$
3) **jádro** $\operatorname{Ker}(A) := \{x \in T^n \mid Ax = o\}$

jádro obsahuje o a je uzavřené na součty a násobky

$A \in T^{m \times n}$:

1) $S(A) = \{ Ax , x \in T^n \}$
2) $R(A) = \{ A^T y , y \in T^m \}$

$\hookrightarrow$ představuje lineární kombinaci kde $\alpha_i = x_i$ nebo $\alpha_i = y_i$

V: $A \in T^{m \times n}$, A^R RREF tvar A s pivoty na pozicích $(1, p_1), \dots, (r, p_r)$, $r = \operatorname{rank}(A)$, pak

1) nenulové řádky A^R $(A^R_{1*}, \dots, A^R_{r*})$ tvoří bázi $R(A)$
2) sloupce $A_{*p_1}, \dots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $S(A)$ (sloupcový prostor se mění elementárními úpravami)
3) $\dim R(A) = \dim S(A) = r$

důsledek : $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

V: $A \in T^{m \times n}$: $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$

5) Lineární zobrazení

def U, V vektorové prostory nad T

zobrazení $f: U \to V$ je lineární, pokud $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha \in T$:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

(homomorfismus)

Vlastnosti lineárních zobrazení

$f: U \to V$ lineární zobrazení, pak

1) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \quad \forall \alpha_i \in T, \forall x_i \in U$

   → obraz kombinace = kombinace obrazů

2) $f(o) = o$

   $\hookrightarrow \in U \quad \hookrightarrow \in V$

def. $f: U \to V$ lineární zobrazení

$B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ báze U nad T

$B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ báze V nad T

$f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, pak

matice $A \in T^{m \times n}$ s prvky a_{ij} je

matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_U, B_V

→ $_{B_V}[f]_{B_U}$

$$_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(x_1)]_{B_V} & \dots & [f(x_n)]_{B_V} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

→ j-tý sloupec = souřadnice obrazu x_i vzhledem k B_V

$_K[f]_K$ → vzhledem ke kanonické bázi → jednodušší

→ sloupce matice jsou obrazy jednotkových vektorů př. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \to {}_K[f]_K$

$B_U = \{(1,2)^T, (2,1)^T\}$, $B_V = \{(1,-1)^T, (0,1)^T\}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(5,-5)^T = 5 \cdot (1,-1)^T + 0 \cdot (0,1)^T \to (5,0)^T$

$(4,2)^T = 4\,(1,-1)^T + 6 \cdot (0,1)^T \to (4,6)^T$

$\hookrightarrow {}_{B_U}[f]_{B_V} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

V: $f: U \to V$ lineární zobrazení,

$B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$, $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ báze U, V nad T

$\forall x \in U$:

$$[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$$

$\downarrow$

$\forall$ lineární zobrazení $f: T^n \to T^m$ se dá vyjádřit jako

$f(x) = Ax$ pro nějakou matici $A \in T^{m \times n}$

$$f(x) = [f(x)]_K = {}_K[f]_K \cdot [x]_K = {}_K[f]_K\, x$$

$\hookrightarrow {}_K[f]_K = A$

def. V vektorový prostor, B_1, B_2 2 báze V

matice přechodu od B_1 k B_2 je ${}_{B_2}[id]_{B_1}$

$\to \forall x \in U$: $[x]_{B_2} = {}_{B_2}[id]_{B_1} \cdot [x]_{B_1}$

$\forall$ bázi B: ${}_B[id]_B = I_n$

matice složeného zobrazení:

$f: U \to V$, $g: V \to W$ lineární zobrazení, B_U, B_V, B_W báze

$${}_{B_W}[f \circ g]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$$

př. překlopení podle osy x $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

škálování $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → rozšíření

projekce na osu x $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

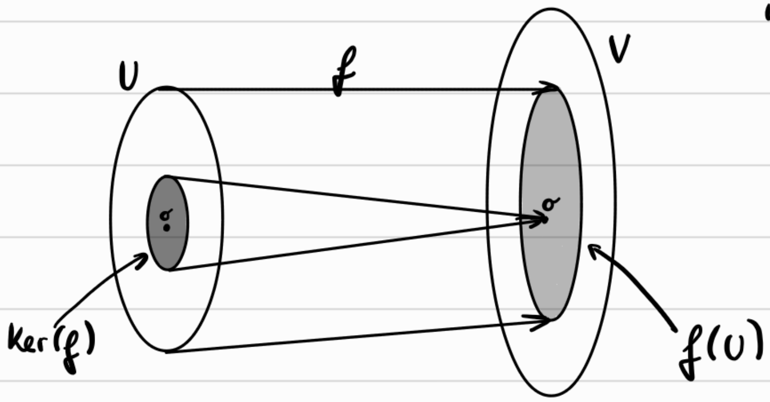
otočení $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

! posunutí není lineární zobrazení, $f(o) \neq o$

def. $f: U \to V$ lineární zobrazení, pak

obraz $f(U) := \{ f(x) \mid x \in U \}$ → množina ∀ obrazů

jádro $Ker(f) := \{ x \in U \mid f(x) = o \}$ → vektory, které se zobrazí na o



$f(U)$ je podprostorem V

$Ker(f)$ je podprostorem U

$\forall x_1, \dots, x_n \in U : f(\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) = \text{span}\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

$f(x) = Ax \quad \to \quad Ker(f) = Ker(A)$

$f(U) = S(A)$

def. **isomorfismus** mezi prostory U, V nad T je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $f: U \to V$

U, V jsou **isomorfní**, pokud mezi nimi ∃ isomorfismus

→ prosté a na

↪ $f(U) = V$, $Ker(f) = \{o\}$

př. škálování, překlápění, neisomorfismus = např. projekce vlastnosti isomorfismu:

1) $f: U \to V$ isomorfismus, pak $f^{-1}: V \to U$ existuje a je také isomorfismus
2) $f: U \to V$, $g: V \to W$ isomorfismy $\to$ $g \circ f: U \to W$ isomorfismus
3) $f: U \to V$ isomorfismus $\Leftrightarrow$ libovolná B_U se zobrazí na B_V
4) $f: U \to V$ isomorfismus $\to$ $\dim U = \dim V$

$f: U \to V$ isomorfismus, B_U, B_V báze, pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U}^{-1}$

lineární zobrazení $f: U \to V$ je isomorfismus $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ libovolná matice reprezentující f je regulární

6) Skalární součin

def. V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

skalární součin je zobrazení $\langle \cdot , \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$ t.ž.

$\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, rovnost pouze pro $x = 0$ (nezápornost)
2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (linearita)
3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (linearita $\to$ $\alpha = 0 \to 0$)
4) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symetrie)

def. **norma indukovaná skalárním součinem** $\to$ je norma

$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in V$

$\to$ v podstatě velikost vektoru, vzdálenost od o

def. vektory $x, y \in V$ jsou **kolmé** ($x \perp y$)

pokud $\langle x, y \rangle = 0$

def. V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

norma je zobrazení $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ t.ž.

1) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in V$, rovnost pouze pro $x = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall x \in V$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pythagorova věta

pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, tak $\| x+y \|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace)

dk. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle = \dots$ ✓

Cauchyho - Schwarzova nerovnost

$\forall x,y \in V: \ |\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

dk. $y = o \to$ triviálně

$y \neq o$: uvažme $f(t) = \langle x+ty, x+ty\rangle \ge 0$ reálná fce proměnné t

$f(t) = \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle$

$\to$ kvadratická fce, všude nezáporná $\to D \le 0$

$4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \le 0$

$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \to |\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ $\square$

Trojúhelníková nerovnost

$\forall x,y \in V: \ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (=, když je to 1 přímka)

dk.

lze, protože $\|x+y\| \ge 0$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle =$

$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \le$ $\quad z+\bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$

$\le \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle| \le$

$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

def. systém vektorů $z_1, \dots, z_n$ je **ortogonální**, pokud

$\langle z_i, z_j\rangle = 0$ pro $\forall i \neq j$

systém vektorů je **ortonormální**, pokud je ortogonální

$\wedge \ \forall i \ \|z_i\| = 1$

ortogonální systém lze zortonormalizovat

$\to \frac{1}{\|z_1\|} \cdot z_1, \dots, \frac{1}{\|z_n\|} \cdot z_n$

ortonormální systém vektorů je lineárně nezávislý

Fourierovy koeficienty

$z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze prostoru V

$\forall x \in V: \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \quad \rightarrow$ Fourierův rozvoj

$\langle x, z_i \rangle$ = Fourierovy koeficienty

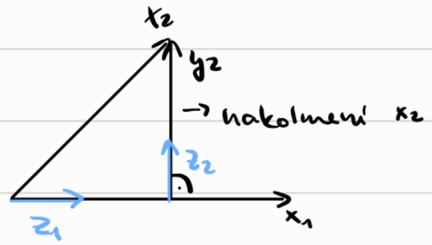
Gramova - Schmidtova ortogonalizace

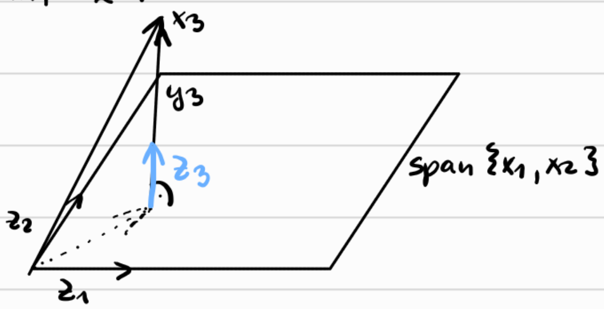
→ sestrojení ortonormální báze

→ začne s libovolnou bází a postupně nakolmuje vektory

→ nakolmování vektoru x_k

od x_k odečteme jeho projekci do prostoru generovaného $x_1, \dots, x_{k-1}$





vstup: lineárně nezávislé vektory $x_1, \dots, x_n \in V$

1. for $k := 1, \dots, n$:

2. $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$ (vypočítání kolmice)

3. $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ (normalizace)

výstup: $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze pro span $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall$ konečně generovaný prostor (se skalárním součinem) má ortonormální bázi

def. V vektorový prostor, $M \subseteq V$

ortogonální doplněk množiny M

$$M^\perp := \{ x \in V ; \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M \}$$

→ množina vektorů, které jsou kolmé na $\forall$ vektor $\in M$

☼ $\{o\}^\perp = V \quad , \quad V^\perp = \{o\}$

vlastnosti ortogonálního doplňku

V vektorový prostor, $M, N \subseteq V$, pak

1) $M^\perp$ je podprostor V
2) $M \subseteq N \Rightarrow M^\perp \supseteq N^\perp$
3) $M^\perp = \mathrm{span}(M)^\perp$

U podprostor V:

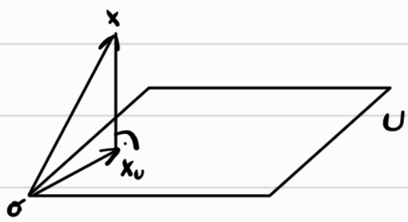
$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$
$$V = U + U^\perp$$
$$(U^\perp)^\perp = U$$
$$U \cap U^\perp = \{o\}$$

def. V vektorový prostor, $U \subseteq V$

projekce $x \in V$ do podprostoru U je vektor $x_U \in U$ t.ž.

$$\| x - x_U \| = \min_{y \in U} \| x - y \|$$

nejkratší vzdálenost



V: $U \subseteq V$, V vektorový prostor, pak $\forall x \in V \; \exists!$ projekce $x_U \in U$ do U

navíc pokud je $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U, pak

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i$$

pokud nějaké $y \in U$ splňuje $x - y \in U^T \Rightarrow y = x_U$

Gramova matice ?

projekce jako lineární zobrazení ?

def. matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **ortogonální** pokud $Q^T Q = I_n$
matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je **unitární** pokud $\overline{Q}^T Q = I_n$

charakterizace ortogonálních matic

pro $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ekvivalentní:

1) Q je ortogonální
2) Q je regulární a $Q^{-1} = Q^T$
3) $Q Q^T = I_n$
4) Q^T je ortogonální
5) Q^{-1} existuje a je ortogonální
6) sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$
7) řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$

vlastnosti ortogonálních matic:

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, pak:

1) $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2) $\|Qx\| = \|x\|$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$
3) $|Q_{ij}| \leq 1 \wedge |Q^{-1}_{ij}| \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$
4) $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}$ je ortogonální matice

7) Determinanty

def. determinant matice $A \in T^{n\times n}$ je číslo

$$\det(A) = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p)\cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$$

↳ značení $\det(A)$ nebo $|A|$

→ z A vybereme n prvků tak, že z $\forall$ sloupce a $\forall$ řádku máme je 1

determinant Δ matice : $a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}$
↳ diagonála ($p = id$)

T: $A \in T^{n\times n}$: $\det(A^T) = \det(A)$

V: $A \in T^{n\times n}$ je regulární $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$

V: $\forall A, B \in T^{n\times n}$: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

D: pro A regulární : $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ → λ_i vl. číslo A

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

$A \in T^{n\times n}$, $n \geq 2$

$\forall i = 1, \ldots, n$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$

A^{ij} = matice vzniklá z A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce

Cramerovo pravidlo

$A \in T^{n\times n}$ regulární, $b \in T^n$

řešení $Ax = b$: $x_i = \dfrac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

Objem rovnoběžnostěnu

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rovnoběžnostěn s hranami určenými řádky A

pak je jeho objem $S = \sqrt{\det(AA^T)}$

speciálně pro $m = n$ $S = |\det(A)|$

8) Vlastní čísla a vlastní vektory

def. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo** matice A

a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný **vlastní vektor**

pokud $Ax = \lambda x$, $x \neq o$

→ vlastní vektor není jednoznačný

→ i ∀ jeho nenulový násobek → normuje se

! elementární řádkové úpravy netriviálně mění vlastní čísla matice

geometrická interpretace

vlastní vektor:

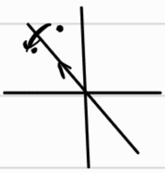
reprezentuje invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$

tzn. je-li v vlastní vektor, přímka span $\{v\}$ se zobrazí sama do sebe

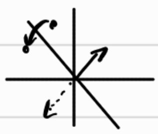
vlastní číslo:

představuje škálování

př. překlopení podle $y = -x$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



$\lambda = 1$, $x = (-1, 1)^T$



$\lambda = -1$, $x = (1, 1)^T$

charakterizace

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

1) λ je vl. číslo A $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ (singulární matice)
2) $x \in \mathbb{C}^n$ je vl. vektor k $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $o \neq x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$

def. charakteristický polynom $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vzhledem k proměnné λ

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 =$$

→ podle základní věty algebry n komplexních kořenů

($\leq n$ různých)

→ $p_A(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$

↳ vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou právě kořeny $p_A(\lambda)$ a je jich n včetně násobností

def. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

spektrum matice A je množina jejích vl. č. $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

spektrální poloměr $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$

def. $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

algebraická násobnost λ = násobnost λ jako kořene $p_A(\lambda)$

geometrická násobnost λ = $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$

↳ # lin. nezávislých vlastních vektorů odpovídajících λ

algebraická n. $\geq$ geometrická n.

Součin a součet vlastních čísel

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

1) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

2) $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

↳ stopa = součet diagonálních prvků

vlastnosti vlastních čísel

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$

1) A regulární $\Leftrightarrow$ 0 není její vl. číslo
2) A regulární $\Rightarrow$ A^{-1} má $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ a $x_1, \dots, x_n$
3) A^2 má $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a $x_1, \dots, x_n$
4) αA : $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a $x_1, \dots, x_n$
5) $A + \alpha I_n$: $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a $x_1, \dots, x_n$
6) A^T : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a vlastní vektory obecně jiné

def. matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou **podobné** pokud $\exists$ regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ t.ž. $A = SBS^{-1}$

→ podobnost nemění vlastní čísla

V: Podobné matice mají stejná vlastní čísla.
+ mají stejný # vlastních vektorů

def. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je **diagonalizovatelná**, pokud je podobná nějaké diagonální matici

tzn. $A = S \Lambda S^{-1}$, S regulární, Λ diagonální
tomuto tvaru se říká **spektrální rozklad**
(diagonála Λ = spektrum matice A)

charakterizace diagonalizovatelnosti:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů pokud má $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná

pokud je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalizovatelná, pak:

1) algebraická n. λ_i = geometrická n. λ_i $\forall \lambda_i$ vl.č. A
2) rank (A) = # nenulových λ_i

vlastní vektory navzájem různých λ_i jsou lineárně nezávislé

def. matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická pokud $A = A^T$

vlastní čísla symetrických matic

vlastní čísla reálných symetrických matic jsou reálná

spektrální rozklad symetrických matic

pro $\forall$ symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\exists$ ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.ž.

$$A = Q \Lambda Q^T$$

9) Positivně semidefinitní / definitní matice

def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická

A je positivně semidefinitní pokud $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A je positivně definitní pokud $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

PSD $\rightarrow$ nezáporná diagonála

PD $\rightarrow$ kladná diagonála

vlastnosti positivně definitních matic

1) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ PD $\Rightarrow$ $A + B$ PD (i pro PSD)
2) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ PD, $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ αA PD (i pro PSD, $\alpha \geq 0$)
3) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ PD $\Rightarrow$ A regulární $\wedge$ A^{-1} PD

charakterizace positivní definitnosti

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická, pak následující jsou ekvivalentní:

1) A je positivně definitní
2) vlastní čísla A jsou kladná
3) $\exists\, U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n t.ž. $A = U^T U$

charakterizace positivní semidefinitnosti

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická, pak následující jsou ekvivalentní:

1) A je positivně semidefinitní
2) vlastní čísla A jsou nezáporná
3) $\exists\, U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.ž. $A = U^T U$

V: operace $\langle x, y \rangle$ je skalárním součinem v $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ má tvar $\langle x, y \rangle = x^T A y$ pro nějakou positivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Choleského rozklad

pro $\forall$ PD matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\exists$ jediná dolní Δ matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou t.ž. $A = LL^T$

Algoritmus pro Choleského rozklad

vstup: symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $L := 0_n$ // v k-tém cyklu určíme hodnoty L_{*k}
2. for $k := 1, \dots, n$:
3. if $a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \leq 0$
   matice není PD
4. $l_{kk} := \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$
5. for $i := k+1, \dots, n$:
6. $l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}\right)$

výstup: matice L t.ž. $A = LL^T$
nebo matice není PD