gramatiky typu 0 $\xleftrightarrow{\mathcal{L}_0}$ Turingovy stroje

kontextové gramatiky $\xleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ lineárně omezené automaty

bezkontextové gramatiky $\xleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ zásobníkové automaty

regulární gramatiky $\xleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$ konečné automaty

def. **Slovo** w = posloupnost symbolů abecedy Σ

Jazyk L = množina slov nad Σ $(L \subseteq \Sigma^*)$

Σ^* = mn. všech posloupností symbolů nad Σ

α = prázdné slovo = ε

$\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$

Jazyk přijímaný automatem A:

rozšířená přechodová fce

$$L(A) := \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta^*(q_0, w) \in F \}$$

Slovo přijímané automatem A = w t.ž. $w \in L(A)$

1) Regulární jazyky

def. **Regulární jazyky** je třída jazyků, které jsou rozpoznatelné konečnými automaty
(tzn. $\exists A$ t.ž. $L = L(A)$)

Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky:

L regulární jazyk, pak $\exists n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) t.ž.
$\forall w \in L, |w| \geq n$ lze rozdělit $w = xyz$ t.ž.

1) $y \neq \lambda$
2) $|xy| \leq n$
3) $\forall k \in \mathbb{N}_0 \; xy^kz \in L$

def. Σ konečná abeceda, relace ekvivalence $\sim$ na Σ^*

$\sim$ je **pravá kongruence**, jestliže
$\forall u, v, w \in \Sigma^*: \; u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$

$\sim$ je **konečného indexu**, jestliže
rozklad $\Sigma^*/\sim$ má konečný # tříd

třída kongruence obsahující $u \in \Sigma^*$: $[u]_\sim$, $[u]$

Myhill-Nerodova věta

L jazyk nad konečnou abecedou Σ, pak jsou ekvivalentní:

1) L je rozpoznatelný konečným automatem
2) existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* t.ž. L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$

def. gramatika je **regulární** (pravá lineární), pokud obsahuje pouze pravidla typu
$A \to wB, \quad A \to w \qquad A, B \in V, w \in T^*$

def. **deterministický konečný automat** (DFA)

je pětice $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q = stavový prostor (konečná mn. stavů)

Σ = abeceda (konečná neprázdná množina symbolů)

δ = přechodová funkce $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$q_0 \in Q$ = počáteční stav

$F \subseteq Q$ = množina koncových stavů (neprázdná)

def. **nedeterministický konečný automat** (NFA)

je pětice $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$

Q = stavový prostor (konečná mn. stavů)

Σ = abeceda (konečná množina symbolů)

δ = přechodová funkce $\delta : Q \times \Sigma \to P(Q) \subseteq Q$

$S_0 \subseteq Q$ = množina počátečních stavů

$F \subseteq Q$ = množina koncových stavů (neprázdná)

def. **λ-NFA** je pětice $E = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$,

kde $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to P(Q)$

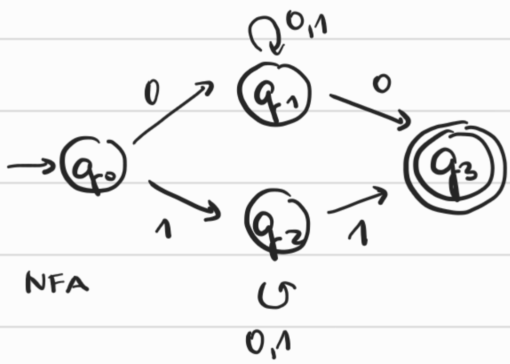
jinak vše jako pro NFA

def. Regulární výrazy nad konečnou neprázdnou $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\alpha, \beta \in RegE(\Sigma)$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ def. induktivně:

i)	λ	prázdný řetězec	$L(\lambda) = \{\lambda\}$
	$\emptyset$	prázdný výraz	$L(\emptyset) = \{\} = \emptyset$
	a	$a \in \Sigma$	$L(a) = \{a\}$

ii)	$\alpha + \beta$	$L(\alpha+\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$	
	$\alpha\beta$	$L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$	
	α^*	$L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$	
	(α)	$L((\alpha)) = L(\alpha)$	závorky nemění hodnotu

př. $L = \{xwx : x \in \{0,1\},\ w \in \{0,1\}^*\}$



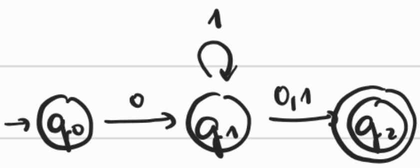
$S \to 0A \mid 1B$

$A \to 0 \mid 0A \mid 1A$

$B \to 1 \mid 0B \mid 1B$

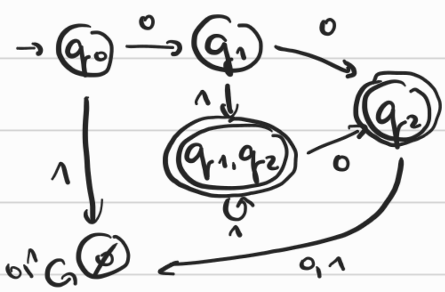
př. $01^*(0+1)$

NFA



		0	1
$\to$	q_0	q_1	$\emptyset$
	q_1	q_2	q_1, q_2
$*$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

DFA



$\to$	q_0	q_1	$\emptyset$
	q_1	q_2	$\{q_1, q_2\}$
$*$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	q_2	$\{q_1, q_2\}$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

2) Bezkontextové jazyky

def. gramatika $G = (V, T, P, S)$ je bezkontextová, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru

$$A \to \omega \quad \text{pro} \quad A \in V$$
$$\omega \in (V \cup T)^*$$

V = konečná mn. neterminálů

T = neprázdná konečná mn. terminálů

S = počáteční symbol

P = konečná mn. pravidel

def. gramatika v Chomského normálním tvaru je bezkontextová gramatika bez zbytečných symbolů, kde je $\forall$ pravidlo ve tvaru

$$A \to a \quad \text{nebo} \quad A \to BC$$
$$A, B, C \in V, \quad a \in T$$

def. zásobníkový automat (PDA)

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

Q = konečná množina stavů

Σ = konečná neprázdná mn. vstupních symbolů

Γ = neprázdná konečná zásobníková abeceda

δ = přechodová fce

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_{F/N}(Q \times \Gamma^*)$$

tzn. $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$

q = nový stav

γ nahradí X nahoře na zásobníku

$q_0 \in Q$ = počáteční stav

$Z_0 \in \Gamma$ = počáteční zásobníkový symbol

F = množina koncových stavů

Situace zásobníkového automatu = (q, w, γ)

q = stav

w = zbývající vstup

γ = obsah zásobníku

$I \vdash^* J$ situace I vede na situaci J

$I \vdash J$ situace I bezprostředně vede na situaci J

- jazyk přijímaný koncovým stavem

$L(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \alpha) \}$ $q \in F$

- jazyk přijímaný prázdným zásobníkem

$N(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda) \}$ $q \in Q$

L je bezkontextový (generovaný CFG)

$\Updownarrow$

L je L(P) pro nějaký PDA P

$\Updownarrow$

L je N(P) pro nějaký PDA P

př. $L = \{ ww^R \mid w \in (0+1)^* \}$

gramatika:

$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \lambda$

push

1. $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$

$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$

2. $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$

$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$

$\vdots$ 1,0
1,1

pop

4. $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \lambda)\}$

$\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$

5. $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

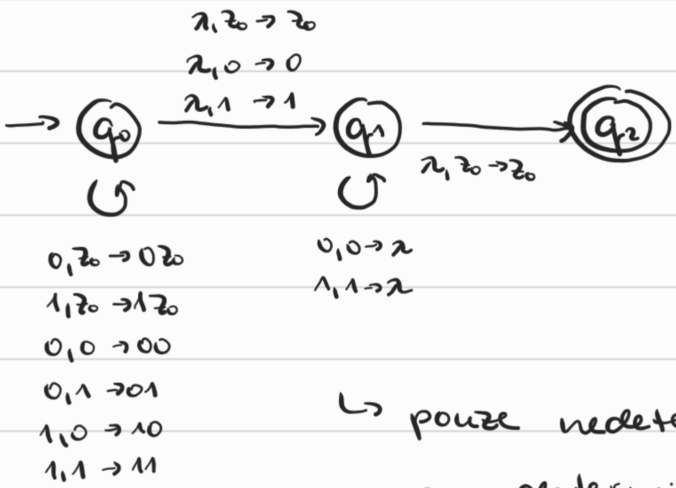
↳ přijímací stav

3. $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$

$(q_0, \lambda, 0) = \{(q_1, 0)\}$

$\vdots$ λ,1

graf :



↳ pouze nedeterministický

pro deterministický potřebuji určit střed

$L = \{wcw^R\}$

přijímání prázdným zásobníkem ?

3) Rekurzivně spočetné jazyky

def. **Turingův stroj** $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

Q = konečná množina stavů

Σ = konečná neprázdná množina vstupních symbolů

Γ = konečná množina všech symbolů pro pásku

δ = přechodová fce

$\delta: (Q-F) \times \Gamma \to (Q \times \Gamma \times \{L, R\})$

q_0 = počáteční stav

$B \in \Gamma - \Sigma$ = symbol pro prázdné buňky

$F \subseteq Q$ = množina koncových stavů

jeho **konfigurace** je řetězec $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_{i+1} \dots X_n$

q = stav stroje

čtecí hlava je vlevo od i-tého symbolu

$X_1 \dots X_n$ je část pásky mezi B symboly

pokud je hlava na kraji, ukládám B navíc

krok Turingova stroje

pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$:

$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_{i+1} \dots X_n \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_n$

pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$

$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_{i+1} \dots X_n \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_n$

jazyk přijímaný Turingovým strojem = **rekurzivně spočetný jazyk**

→ jazyk typu 0

gramatika typu 0 : pravidla $\alpha \to \beta$ $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$

α obsahuje neterminál

↓

obecná forma

TM rozhoduje jazyk pokud $\forall w$ se zastaví

→ rekurzivní jazyk

jazyk přijímaný TM:

$L(TM) = \{ w \mid q_0 w \vdash^* \alpha p \beta,\ p \in F,\ \alpha, \beta \in \Gamma^* \}$

def. problém P je algoritmicky rozhodnutelný, pokud $\exists$ TM t.ž. pro $\forall$ vstup $w \in P$ zastaví

a přijme $\Leftrightarrow P(w) =$ ano

jinak je algoritmicky nerozhodnutelný

Nerozhodnutelné problémy

- problém zastavení
  - pro M a $w \in \{0,1\}^*$ hledám algoritmus Halt(M, w), který vydá 1 $\Leftrightarrow$ stroj M zastaví na vstupu w
- Postův korespondenční problém
  - 2 seznamy slov nad Σ: $A = w_1, \dots, w_k$, $B = x_1, \dots, x_k$ stejné délky k
  - $\forall i$: (w_i, x_i) = odpovídající dvojice
  - řešení: $i_1, \dots, i_m$ t.ž. $w_{i_1}, \dots, w_{i_m} = x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$
- zda je bezkontextová gramatika víceznačná

př. $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 1\}$

$$\begin{array}{cccccccc} & x & x & y & y & z & z & \\ B & \cancel{a} & \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{b} & \cancel{c} & \cancel{c} & B \end{array}$$

iterace $\cancel{a}aa \quad \cancel{b}bb \quad \cancel{c}cc$

$x\cancel{a}a \quad y\cancel{b}b \quad z\cancel{c}c$

$\vdots$

$xxx\ yyy\ zzz$

$\downarrow$

accept

$q_0 \to q_1 \to q_1 \to q_2 \to q_2$

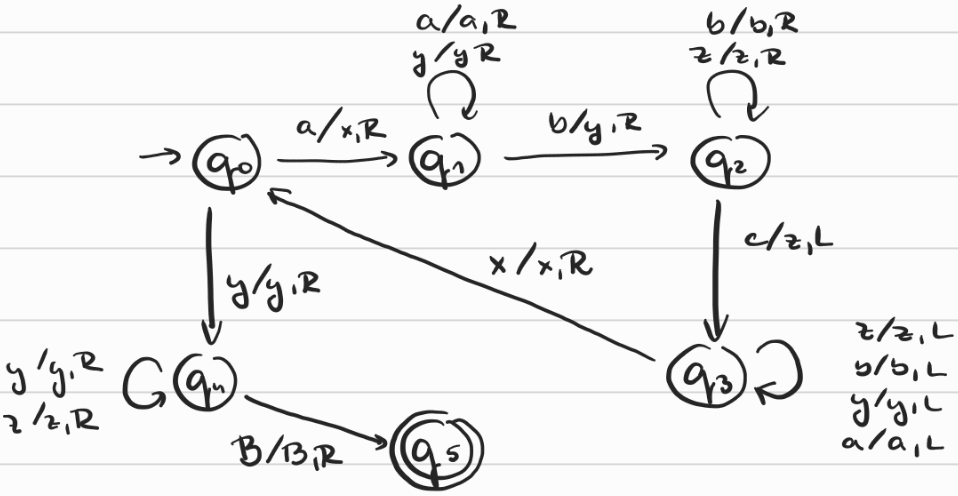
$q_3 \leftarrow q_3 \leftarrow q_3 \leftarrow q_3$

$\to q_0 \to q_1 \to q_1 \to q_2 \to q_2$

$q_3 \leftarrow q_3 \leftarrow q_3 \leftarrow q_3$

$\to q_0 \to q_4 \to q_4 \to q_4 \to q_4 \to q_5$

accept



4) Chomského hierarchie

Zařazení:

- sestrojení automatu /gramatiky
  - \+ ukázat, že lépe to nejde