1) Syntaxe

$\mathbb{P} = \{p, p_1, p_2, \dots, q, q_1, \dots\}$ = množina prvovýroků

- jazyk výrokové logiky nad $\mathbb{P}$ obsahuje :
  - výrokové proměnné z $\mathbb{P}$
  - logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - závorky

def. literál = prvovýrok nebo jeho negace

klauzule = disjunkce literálů $\vee$

(prázdná klauzule = $\perp \rightarrow 0$, $\nexists$ pozitivní literál)

elementární konjunkce = konjunkce literálů $\wedge$

(prázdná konjunkce = $\top \rightarrow 1$, $\nexists$ negativní literál)

def. Hornova klauzule je klauzule obsahující nejvýše 1 pozitivní literál

Hornův výrok je konjunkcí Hornových klauzulí

def. výrok je v konjunktivně normálním tvaru (CNF), je-li konjunkcí klauzulí

výrok je v disjunktivně normálním tvaru (DNF), je-li disjunkcí elementárních konjunkcí

- jazyk logiky 1. řádu obsahuje: (predikátové logiky)
  - proměnné
  - funkční symboly
  - predikátové symboly
  - symboly pro logické spojky
  - symboly pro kvantifikátory

def. **term** = fce aplikovaná na termy

i) $\forall$ proměnná nebo konstantní symbol je term

ii) f = fční symbol s aritou $n>0$

$t_0, \dots, t_{n-1}$ termy

$\rightarrow$ $f(t_0, \dots, t_{n-1})$ je term

↳ $\forall$ term vznikne konečným užitím i) a ii)

atomická formule = relace aplikovaná na termy

↳ $R(t_0, \dots, t_{n-1})$

formule :

i) $\forall$ atomická formule je formule

ii) φ, ψ formule $\rightarrow$ $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ taky

iii) φ formule, x proměnná $\rightarrow$ $((\forall x)\varphi), ((\exists x)\varphi)$ formule

def. proměnná x v φ je

vázaná $\equiv$ je-li součástí nějaké podformule ψ začínající kvantifikátorem

volná $\equiv$ je-li součástí nějaké podformule ψ nezačínající kvantifikátorem

↳ může být zároveň volná i vázaná

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ $\rightarrow$ $x_1, \dots, x_n$ všechny volné proměnné φ

otevřená formule = neobsahuje kvantifikátor

uzavřená formule = nemá žádnou volnou proměnnou (sentence)

def. term t je **substituovatelný** za proměnnou x, pokud nahrazením volných výskytů x za t nevznikne v φ vázaný výskyt proměnné z t

↳ vzniklá formule $\varphi(x/t)$ je **instance formule** φ vzniklá substitucí t za x do φ

def. formule je v **prenexním (normální) tvaru** (PNF), má-li tvar $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n)\, \varphi'$

$Q_i = \exists$ nebo $\forall$

φ = otevřená formule

pro $\forall Q_i = \forall \Rightarrow$ **univerzální formule**

Převody na normální tvary:

$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \Leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$

$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

Q = kvantifikátor, $\bar{Q}$ = opačný kvantifikátor

$\neg(Qx)\varphi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} ((Qx)(\varphi \wedge \psi)) \sim (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\ ((Qx)(\varphi \vee \psi)) \sim (Qx)(\varphi \vee \psi) \\ (Qx)\varphi \to \psi \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi) \\ \psi \to (Qx)\varphi \sim (Qx)(\psi \to \varphi) \end{array}\right\} x \text{ není volná v } \psi$$

CNF → SAT, CNF

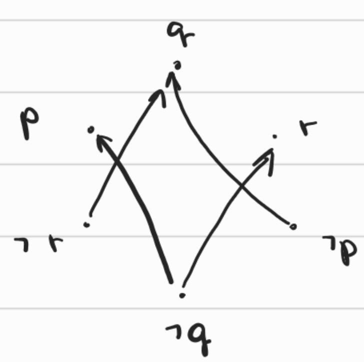
2-SAT → ohodnocení 2-CNF formule

→ implikační graf

$(p \wedge q) \vee (q \vee r)$

$E = \{\neg p \to q, \neg q \to p, \neg q \to r, \neg r \to q\}$

př. $\neg q = 1 \Rightarrow p, r = 1$



Rezoluce

→ zamítací metoda

$$((p \lor r) \land (q \lor \neg r) \land (\neg q) \land (\neg p \lor t) \land (\neg s) \land (s \lor \neg t)$$

$\{s, \underline{\neg t}\}$ $\quad$ $\{\neg p, \underline{t}\}$

rezolventa → $\{s, \neg p\}$ $\quad$ $\{\neg s\}$

$\{\neg p\}$ $\quad$ $\{p, r\}$

$\{r\}$ $\quad$ $\{q, \neg r\}$

$\{q\}$ $\quad$ $\{\neg q\}$ → nemůže platit zároveň

$\square$

2) Sémantika

def. teorie T nad jazykem P je množina výrokových formulí nad P

axiomy teorie = výroky z T

def. model teorie je ohodnocení proměnných t.ž. platí všechny axiomy z teorie

třída modelů $M^P(T) = \{ v \in M(P) \mid v \models \varphi \ \forall \varphi \in T \}$

↪ množina všech modelů teorie

def. výrok φ je v teorii T:

pravdivý ≡ platí v $\forall$ modelu T ($T \models \varphi$)

lživý / sporný ≡ neplatí v žádném modelu T

splnitelný ≡ pokud $\exists$ model T, ve kterém platí

nezávislý ≡ pokud je splnitelný $\wedge$ není pravdivý

výroky jsou T-ekvivalentní, pokud $\forall$ model T:

je modelem (φ) $\Leftrightarrow$ je modelem (ψ)

def. tautologie = výrok platící pro $\forall$ ohodnocení

např. $(x \vee \neg x)$

def. důsledek teorie T je množina $\forall$ výroků pravdivých v T

$\Theta^P(T) = \{ \varphi \in VF_P \mid T \models \varphi \}$

def. teorie je kompletní pokud má jediný model

Analýza teorií nad konečně mnoha prvovýroky

T je bezesporná

$n \in \mathbb{N}^+ := \#$ proměnných $(|\mathbb{P}|)$

$m := |M^{\mathbb{P}}(T)| = \#$ modelů T

pak:

$\#$ navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P} = 2^{2^n}$

$\#$ –||– pravdivých / lživých v $T = 2^{2^n - m}$

$\#$ –||– nezávislých v $T = 2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - m}$

$\#$ navz. neekvivalentních jednoduchých extenzí $T = 2^m$

(z toho 1 sporná)

$\rightarrow$ kompletních jednoduchých extenzí $= m$

$\#$ T-neekvivalentních výroků $= 2^m$

–||– pravdivých / lživých v $T = 1$

–||– nezávislých v $T = 2^m - 2$

3) Extenze teorií

def. T je extenze teorie T', jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$
a $\Theta^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \Theta^{\mathbb{P}}(T)$ (tedy $M^{\mathbb{P}}(T) \subseteq M^{\mathbb{P}}(T')$)
→ čím větší je Θ tím více výroků musí platit současně
tedy tím menší je model
jednoduchá extenze : $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$
konzervativní : rozšiřuji pouze proměnnými, které
nepatří do původního jazyka

Skolemova varianta

→ odstranění $\exists$
buď φ sentence L v PNF,
$y_1, \dots, y_n$ existenčně kvantifikované proměnné v φ
(v tomto pořadí)
$\forall i: x_1, \dots, x_{n_i} :=$ univerzálně kvantifikované
proměnné před y_i
$L' :=$ rozšíření L o n_i-ární symboly f_i $\forall i$

φ_S = formule L', která vznikne z φ odstraněním $(\exists y_i)$
z prefixu a nahrazením $\forall$ výskytu y_i
za term $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$
pak φ_S = Skolemova varianta formule φ

4) Dokazatelnost

def. důkaz je konečný objekt, který může vycházet z axiomů dané teorie

→ pokud důkaz dané formule existuje, lze ho algoritmicky najít

$T \vdash \varphi$: φ je dokazatelná z T

formální dokazovací systém má být:

korektní : $\vdash \Rightarrow \models$

úplný : $\models \Rightarrow \vdash$

zamítnutí = důkaz sporu

Tablo metoda

- větev je sporná obsahuje-li zároveň $T\varphi$ a $F\varphi$
- tablo je sporné, pokud je $\forall$ jeho větev sporná
- tablo důkaz = sporné tablo s $F\varphi$ v kořeni

  zamítnutí tablem = sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni

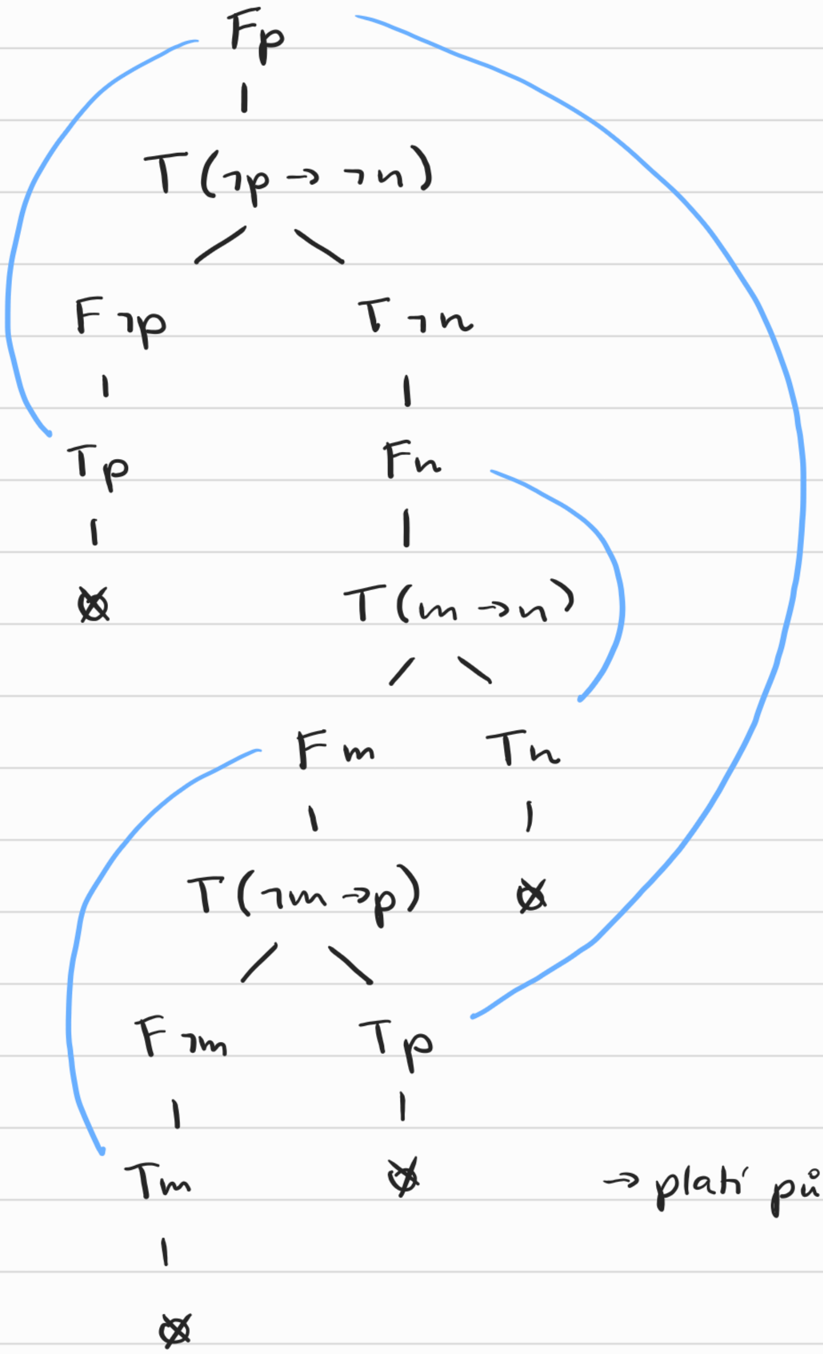
$$\begin{array}{c} T(\varphi \vee \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad T\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ | \\ F\varphi \\ | \\ F\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ | \\ T\varphi \\ | \\ T\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} F(\varphi \wedge \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad F\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F(\varphi \rightarrow \psi) \\ | \\ T\varphi \\ | \\ F\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} T(\varphi \rightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad T\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} T(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ | \quad\quad | \\ T\psi \quad F\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} F(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ | \quad\quad | \\ F\psi \quad T\psi \end{array}$$

př. $\neg p \to \neg n$

$m \to n \quad \vDash \quad p \quad$ → sporem

$\neg m \to p$



→ platí původní

predikátová logika:

$T\,(\forall x)\varphi(x)$	$F(\exists x)\,\varphi(x)$	$F\,(\forall x)\,\varphi(x)$	$T(\exists x)\,\varphi(x)$
|	|	|	|
$T\,\varphi(x/t)$	$F\,\varphi(x/t$	$F\,\varphi(x/c)$	$T\,\varphi(x/c)$

c = nová konstanta

t = libovolný term (z té větve)

$$F[(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x))]$$

$$F(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \qquad\qquad T(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$$

$$T((\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)) \qquad\qquad F((\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x))$$

$$T(\exists x)\varphi(x) \qquad T(\exists x)\psi(x) \qquad\qquad T(\varphi(c_0) \vee \psi(c_0))$$

$$T\varphi(c_1) \qquad T\psi(c_2) \qquad\qquad F((\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x))$$

$$F(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \qquad F(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \qquad\qquad F(\exists x)\varphi(x)$$

$$F(\varphi(c_1) \vee \psi(c_1)) \qquad F(\varphi(c_2) \vee \psi(c_2)) \qquad\qquad F(\exists x)\psi(x)$$

$$F\varphi(c_1) \qquad F\psi(c_2) \qquad\qquad F\varphi(c_0)$$

$$\emptyset \qquad \emptyset \qquad\qquad F\psi(c_0)$$

$$T(c_0) \qquad T\psi(c_0)$$

$$\emptyset \qquad \emptyset$$

5) Věty o kompaktnosti a úplnosti výrokové a predikátové logiky

V: Teorie má model, právě když $\forall$ její konečná část má model

aplikace: dokazování rezolucí

→ spor → část teorie nemá model (je sporná)

→ tedy celá teorie je sporná

př. spočetně nekonečný graf je k-obarvitelný, pokud $\forall$ jeho konečný podgraf je k-obarvitelný

V: Pro $\forall$ teorii T a formuli / sentenci φ:

$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

(pokud je pravdivá, pak je dokazatelná)

V: Je-li konečná S nesplnitelná, pak je rezolucí zamítnutelná

$(S \vdash_R \square)$

6) Rozhodnutelnost

def. teorie je kompletní, jestliže není sporná
a ∀ výrok je v ní pravdivý nebo lživý (žádný nezávislý)
→ má právě 1 model

def. věta teorie T je φ dokazatelná v T
množina vět = $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in VF_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}$

def. T je částečně rozhodnutelná, pokud ∃ algoritmus,
který pro ∀ vstupní formuli φ skončí $\Leftrightarrow$ $\varphi \in \mathrm{Thm}(T)$
T je rozhodnutelná, pokud ∃ algoritmus,
který pro ∀ vstupní φ skončí a řekne zda $\varphi \in \mathrm{Thm}(T)$

T: Pro ∀ rekurzivně axiomatizovanou T:
i) T je částečně rozhodnutelná
ii) pokud je kompletní, je rozhodnutelná

Rozhodnutelné teorie:

- teorie čisté rovnosti bez axiomů v jazyce $L = \langle\rangle$ s rovností
- teorie unárního predikátu bez axiomů v jazyce $L = \langle U \rangle$ s rovností, U = unární relační symbol
- teorie hustých lineárních uspořádání DeLO
- teorie komutativních grup
- teorie algebraicky uzavřených těles
- teorie Booleových algeber

Nerozhodnutelné teorie

- existence celočíselného řešení dané Diofantické rovnice s celočíselnými koeficienty