1) Základní pojmy teorie grafů

Def. **Graf** = uspořádaná dvojice (V,E) kde:

V = konečná neprázdná množina vrcholů

$E \subseteq \binom{V}{2}$ = množina hran

↳ podmnožina všech neuspořádaných dvojic nad V

orientovaný graf → $E \subseteq V \times V$ → uspořádané dvojice

Def. G a H jsou **izomorfní**, pokud mezi nimi $\exists$ bijekce

$G \cong H \equiv \exists f: V(G) \to V(H)$ t.ž.

$\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$

Def. H je **podgraf** grafu G

$H \subseteq G \equiv V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$

indukovaný podgraf: $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$

Def. **Okolí vrcholu** v = $\{u \in V : \{u,v\} \in E\}$

Stupeň vrcholu v = $|\{u \in V : \{u,v\} \in E\}|$ = $\deg(v)$

Def. **Doplněk** grafu $\overline{G} = (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$

Def. **Bipartitní graf**

$V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$

$E \subseteq \{\{u_i, v_j\}, i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m\}$

2) Základní příklady grafů

úplný graf (K_n) : $V = \{1, \dots, n\}$
$E = \binom{V}{2}$

úplný bipartitní graf ($K_{n,m}$) : $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$
$E = \{\{u_i, v_j\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$

cesta (P_n) : $V = \{0, \dots, n\}$
$E = \{\{i-1, i\}, i = 1, \dots, n\}$

kružnice (C_n) : $V = \{1, \dots, n\}$
$E = \{1, n\} \cup \{\{i-1, i\}, i = 2, \dots, n\}$

3) Souvislost grafů, komponenty souvislosti, vzdálenost v grafu

Def. G je **souvislý** $\equiv \forall u,v \in V\ \exists$ cesta v G

→ cesta v grafu = podgraf $\cong P_k$

Def. **Komponenta souvislosti** = maximální souvislý pograf vzhledem k inkluzi

Def. **Vzdálenost** mezi $u,v \in V$:

min k t.ž. v G $\exists$ cesta délky k v G $(\cong P_k)$

4) Stromy

Def. **Strom** je souvislý acyklický graf

Les je acyklický graf

→ $\forall$ komponenta souvislosti je strom

List je vrchol stromu stupně 1

Tvrzení: Strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy

dk. uvažme nejdelší cestu

→ krajní vrcholy jsou listy

a) pokud z kraje vede hrana někam do cesty

→ cyklus ↯

b) pokud z kraje vede hrana jinam

→ není nejdelší

Věta: (charakterizace stromů)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) G je strom (souvislý a acyklický)

2) $\forall u, v \in V$ $\exists!$ cesta v G mezi u a v

(jednoznačnost cesty)

3) G je souvislý a $\forall e \in E$: $G - e$ není souvislý

(minimální souvislost)

4) G je acyklický a $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E$: $G + e$ obsahuje cyklus

(maximální acykličnost)

5) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$

(Eulerova formule)

5) Rovinné grafy

def. **Bod** je prvek $\mathbb{R}^2$

Křivka je prostá a spojitá množina bodů

Oblouk (jednoduchá křivka) je $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ spojitá a prostá

(kružnice → jednoduchá uzavřená křivka → prostá až na $f(0)=f(1)$)

def. **Rovinné nakreslení** grafu $G=(V,E)$ je

$\nu: V \to \mathbb{R}^2$ a $\{C_e \mid e \in E\}$ t.ž.

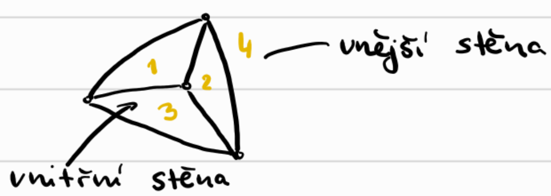
↳ přiřazení bodů ↳ množina oblouků

- $\forall$ bodu z V přiřadí bod z roviny
  → prosté zobrazení
- $\forall$ hranu $e = \{u,v\} \in E$:
  $\nu(u), \nu(v)$ jsou koncové vrcholy C_e
- $\forall e,f \in E: C_e \cap C_f = \nu(v)$ pro nějaké $v \in V$
- $\forall v \in V: \forall e \in E: \nu(v) \in C_e \Rightarrow e = \{u,v\}$ pro nějaké u

def. Graf je **rovinný**, pokud existuje nějaké jeho rovinné nakreslení

def. **Stěna nakreslení** je komponenta obloukové souvislosti.

$\mathbb{R}^2 \setminus (\bigcup_{e \in E} C_e)$



Eulerova formule

G je souvislý graf nakreslený do roviny

$$\boxed{v + f = e + 2}$$

$v = |V|$, $e = |E|$, $f = \#$ stěn rovinného nakreslení dk. indukcí podle # hran

i) G je strom

→ 1 strana (vnější)

→ $v = e + 1$

$\Rightarrow \quad v + f = v + 1 = e + 1 + 1 = e + 2$ ✓

ii) $G \to G - e$

1) e není na kružnici

→ graf by nebyl spojitý

2) e je na kružnici

$f \to f - 1$ odebrání hrany

$v + f - \cancel{1} = e - \cancel{1} + 2$ ✓

→ maximálně rovinný graf s $v \geq 3$ obsahuje pouze trojúhelníkové stěny

→ $e = \frac{3}{2} f$

(# hrana patří do 2 stěn,
stěna má 3 hrany)

Pro ∀ rovinný graf : $e \leq 3v - 6$

pro max : $v + \frac{2}{3}e = e + 2$

$v = \frac{1}{3}e + 2$

$3v = e + 6$

$e = 3v - 6$

6) Barevnost grafů

def. **obarvení grafu** k barvami je zobrazení

$$b: V \to \{1, \dots, k\}$$

t.ž. $\forall \{u, v\} \in E : b(u) \neq b(v)$

def. **barevnost grafu** (chromatické číslo)

$$\chi(G) = \min\{k \mid \exists \text{ obarvení } G \text{ } k \text{ barvami}\}$$

def. **klikovost grafu**

$$\omega(G) = \max\{k \mid G \text{ obsahuje } K_k \text{ jako podgraf}\}$$

$$\boxed{\chi(G) \geq \omega(G)}$$

$\forall$ rovinný graf je obarvitelný 5 barvami
(i 4 barvami)

7) Hranová a vrcholová souvislost grafů

Def. **Hranový řez** v grafu G

$F \subseteq E$ t.ž. $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý

Vrcholový řez v grafu G

$A \subseteq V$ t.ž. $G' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý

hranová souvislost $k_e(G) = \min \{ |F| \mid F \text{ je hranový řez} \}$

vrcholová souvislost $k_v(G) = \begin{cases} n-1 & \text{pro } G \cong K_n \\ \min \{ |A| \mid A \text{ je vrcholový řez} \} & \text{jinak} \end{cases}$

G je vrcholově/hranově **k-souvislý**, pokud $k_{v/e}(G) \geq k$

Mengerovy věty:

$$\boxed{k_e(G) = t \iff \forall u, v \in V \ \exists \geq t \text{ hranově disjunktních cest}}$$

$$\boxed{k_v(G) = t \iff \forall u, v \in V \ \exists \geq t \text{ vrcholově disjunktních cest}}$$

8) Orientované grafy, silná a slabá souvislost

def. **Orientovaný graf** je (V, E) kde $E \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$ ← diagonála

def. **Podkladový graf** → odstraníme orientaci hran

def. **Slabá souvislost** orientovaného grafu G:
podkladový graf G je souvislý

Silná souvislost orientovaného grafu G:
$\forall u, v \in V$ $\exists$ cesta z u do v

9) Toky v sítích

def. **síť** je čtveřice (G, z, s, c)

G = orientovaný graf

z = zdroj, s = stok, $z, s \in V(G)$

$c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (kapacity hran)

def. **tok v síti** je $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.ž.

1. $\forall e \in E(G) : \quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. $\forall v \in V(G),\ v \neq z, s : \quad \sum f(x, v) = \sum f(v, y)$

def. **velikost toku** $\quad w(f) = \sum f(z, x) - \sum f(x, z)$

V: Existuje maximální tok

(dk. množina toků je kompaktní a tedy obsahuje maximum)

def. **rezerva hrany**

$$r(uv) := \underbrace{c(uv) - f(uv)}_{\text{po směru}} + \underbrace{f(vu)}_{\text{proti směru}}$$

Fordův - Fulkersonův algoritmus

vstup: síť (G, z, s, c)

1. $f \leftarrow 0$
2. Dokud $\exists P$ nenasycená cesta z, s $\quad (\forall e : r(e) > 0$
3. $\quad \varepsilon \leftarrow \min_{e \in P} r(e)$
4. $\quad$ Pro $\forall uv \in P$:
5. $\quad\quad \delta \leftarrow \min(\varepsilon, f(vu))$
6. $\quad\quad f(vu) \leftarrow f(vu) - \delta$
7. $\quad\quad f(uv) \leftarrow f(uv) + \varepsilon - \delta$

výstup: maximální tok f