Задание 6

I способ

$y'' + y = \cos 2x, \ \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2.$

Мы решаем ЛНДУ (линейное неоднородное дифференциальное уравнение) второго порядка с неизвестной функцией y, зависящей от переменной x. Мы помним, чтобы решить ЛНДУ, вначале необходимо решить ЛОДУ, т.к.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ – общее решение неоднородного уравнения, $y_{оо}$ – общее решение однородного уравнения, $y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения. Поэтому найдем $y_{оо}$. Для этого составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0, \ D = 0 - 4 = 4, \ \lambda_{1,2} = \frac{0 \pm 2i}{2} = -i; i.$$

А значит общее решение ЛОДУ будет: $y_{оо} = e^0(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Напоминаю, что если Вы решаете ЛОДУ 2-го порядка, то возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения различные действительные числа
$$D > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}: \ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$
2) корни характеристического уравнения – действительные числа, которые совпадают (корень кратности два):
$$D = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2, \ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}: \ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x};$$
3) корни характеристического уравнения – комплексные числа:
$$D < 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \ \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ y_{оо} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Чтобы решить ЛНДУ, осталось найти $y_{чн}$. Мы найдем его методом подбора частных решений по специальной правой части. Вспомним необходимую теорию. Если правая часть ЛНДУ имеет вид

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

то тогда частное решение можно искать в виде

$$y_{чн}(x) = e^{ax}(\tilde{P}_s(x)\cos bx + \tilde{Q}_s(x)\sin bx) \cdot x^r,$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $s = \max(n, m)$; $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами, r – число повторений $a + bi$ среди корней характеристического уравнения. Для предотвращения ошибок распишем $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ для $s = 0, 1, 2, 3.$

$$\tilde{P}_0(x) = A, \ \tilde{P}_1(x) = Ax + B, \ \tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C, \ \tilde{P}_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

где A, B, C, D – неизвестные коэффициенты.

Возвращаемся к решению нашего уравнения. Правая часть имеет вид:

$$f(x) = \cos 2x = e^{0\cdot x}(1\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x) = e^{0\cdot x}(P_0(x)\cdot\cos 2x + Q_0(x)\cdot\sin 2x),$$

тогда $a = 0, b = 2, n = m = 0, s = \max(0,0) = 0;$ число $a + bi = 0 + 2i = 2i$ не встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -i; i,$ значит $r = 0.$ мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{0\cdot x}(\tilde{P}_0(x)\cos 2x + \tilde{Q}_0(x)\sin 2x)\cdot x^0 = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

помним, что для неизвестных коэффициентов $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ не должны использоваться одинаковые обозначения. Например, было бы **ошибкой** написать, что $y_{чн}(x) = A\cos 2x + A\sin 2x.$

Чтобы найти $A, B,$ подставим частное решение в исходное ЛНДУ:

$$y''_{чн} + y_{чн} = \cos 2x.$$

Найдем $y'_{чн}, y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = (A\cos 2x + B\sin 2x)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$y''_{чн} = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Найденную производную подставляем в уравнение:

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x.$$

В левой части соберем все коэффициенты перед $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \cos 2x.$$

Получаем, что

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ -3B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3}, \\ B = 0; \end{cases}$$

Таким образом

$$y(x) = y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1\cos x + C_2\sin x + A\cos 2x + B\sin 2x = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x.$$

Только теперь мы можем найти константы $C_1, C_2,$ используя начальные условия:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 2:\ y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 - \frac{1}{3}\cos(2\cdot 0) = C_1 - \frac{1}{3},$$

$$y'(0) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x)'\Big|_{x=0} = (-C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\sin 2x)\Big|_{x=0} =$$

$$= -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \frac{2}{3}\sin 2\cdot 0 = C_2;$$

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y'(0)=2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 - \frac{1}{3} = 0, \\ C_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{3}\cos x + 2\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x.$

II способ

$y'' + y = \cos 2x, \; y(0) = 0, y'(0) = 2.$

Используем преобразование Лапласа и перейдем от оригиналов к изображениям (в начале РГР есть таблица). Вспомним также, что:

$$\begin{aligned} y(x) &\doteqdot Y(p), \\ y'(x) &\doteqdot pY(p) - y(0), \\ y''(x) &\doteqdot p^2Y(p) - p\cdot y(0) - y'(0), \\ &\dots \\ y^{(n)}(x) &\doteqdot p^nY(p) - p^{n-1}\cdot y(0) - \dots - p\cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Для нашего уравнения:

$$\begin{aligned} y(x) &\doteqdot Y(p), \\ y''(x) &\doteqdot p^2Y(p) - p\cdot y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p\cdot 0 - 2 = p^2Y(p) - 2, \\ \cos 2x &\doteqdot \frac{p}{p^2+4}, \end{aligned}$$

Получаем, что исходное уравнение после преобразования имеет вид:

$$(p^2Y(p) - 2) + Y(p) = \frac{p}{p^2+4}.$$

Выразим $Y(p)$:

$$(p^2+1)Y(p) = \frac{p}{p^2+4} + 2, \; Y(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)} + \frac{2}{p^2+1} = \frac{2p^2+p+8}{(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Получившуюся дробь разобьем на простейшие дроби:

$$\frac{2p^2+p+8}{(p^2+4)(p^2+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2+1} = \frac{(Ap+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Приравняем числители дробей справа и слева:

$$2p^2+p+8=(Ap+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2+4),$$
$$2p^2+p+8=Ap^3+Ap+Bp^2+B+Cp^3+4Cp+Dp^2+4D,$$
$$2p^2+p+8=(A+C)p^3+(B+D)p^2+(A+4C)p+(B+4D).$$

Вспоминаем, что два многочлена равны, когда равны их коэффициенты перед одинаковыми степенями переменной:

$$\begin{cases}0=A+C,\\ 2=B+D,\\ 1=A+4C,\\ 8=B+4D;\end{cases} \quad \begin{cases}A=-C,\\ B=2-D,\\ A+4C=1,\\ B+4D=8;\end{cases} \quad \begin{cases}A=-C,\\ B=2-D,\\ A-4A=1,\\ (2-D)+4D=8;\end{cases} \quad \begin{cases}A=-C,\\ B=2-D,\\ -3A=1,\\ 3D=6;\end{cases} \quad \begin{cases}A=-C,\\ B=2-D,\\ A=-\dfrac{1}{3},\\ D=2;\end{cases} \quad \begin{cases}C=\dfrac{1}{3},\\ B=0,\\ A=-\dfrac{1}{3},\\ D=2;\end{cases}$$

$$\frac{2p^2+p+8}{(p^2+4)(p^2+1)}=-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{\frac{1}{3}p+2}{p^2+1}=-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Все, что осталось сделать – это перейти от изображений Y к оригиналу y соответственно, пользуясь таблицей в начале тетради для РГР.

$$-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}\doteqdot-\frac{1}{3}\cos 2x,\ \ \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}\doteqdot\frac{1}{3}\cos x,\ \ 2\frac{1}{p^2+1}\doteqdot 2\sin x.$$

Ответ: $y(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 2x+\dfrac{1}{3}\cos x+2\sin x.$ Ответы при решении уравнения различными способами **должны совпадать.**