§1. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ.

Матрицей называется система mn чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа, из которых она составлена, называются ***элементами матрицы***. Если матрица содержит mn элементов, образующих m строк и n столбцов, то говорят, что ее порядок m на n, и записывают это $m \times n$. Элемент матрицы, стоящий в строке с номером i и в столбце с номером k обозначается через a_{ik}. Числа i и k называются ***индексами элемента***.

Обозначаются матрицы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

или более кратко $(a_{ik})_{mn}$, $[a_{ik}]$, $\|a_{ik}\|$, где i меняется от 1 до m, а k – от 1 до n. Иногда матрицу обозначают одной заглавной латинской буквой ($A, B, \dots$), но тогда под буквой подразумевают таблицу.

Матрица порядка $1 \times n$ содержит только одну строку элементов и называется ***строчной*** или ***вектор-строкой***, например:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix},$$

а матрица порядка $m \times 1$ (у которой всего один столбец) называется ***столбцовой*** или ***вектор-столбцом***:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется ***нулевой***.

Квадратной матрицей n***-го порядка*** называется матрица, у которой n строк и n столбцов. Например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется количество ее строк (столбцов). Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим элементом. ***Главной диагональю квадратной матрицы*** называется ее диагональ, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Другая диагональ называется ***побочной***.

§2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ.

Две матрицы A и B называются **равными**, если они имеют один и тот же порядок и если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j. Это означает, что равные матрицы совпадают поэлементно. Рассмотрим далее действия над матрицами:

1. Сложение матриц. Если A и B - две матрицы одного порядка, то можем определить новую матрицу C, которая имеет тот же порядок и для всех индексов i и j $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Чтобы получить элементы матрицы $C = A + B$, нужно сложить соответствующие элементы матриц A и B.

2. Умножение на скаляр. Если λ - скаляр (число), то произведение матрицы A на число λ называется матрица B, которая получается из матрицы A умножением на λ всех ее элементов, то есть $B = \lambda A$, если $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \text{ и } \lambda = -5,$$

то

$$\lambda A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 25 & -30 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $(-1)A$ называют ***противоположной матрице*** A и обозначают $-A$. Из правил сложения матриц и умножения на скаляр следует

$$A - B = \lfloor a_{ij} - b_{ij} \rfloor.$$

Пример:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Найти $A + B,\ A - B,\ 3B,\ A + 3B$.

Решение.

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+1 & 6-1 & 7+3 \\ -1+2 & 2+0 & 3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}; \quad 3B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 0 & 21 \end{bmatrix};$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}; \quad A + 3B = \begin{bmatrix} 5+3 & 6-3 & 7+9 \\ -1+6 & 2+0 & 3+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 24 \end{bmatrix}.$$

3. Произведение матриц. Если матрица A имеет порядок $m \times n$, а матрица B имеет порядок $n \times p$, то произведение матриц $C = AB$ определяется как новая матрица порядка $m \times p$, в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Таким образом, элемент произведения матриц, имеющий индекс ij, определяется как сумма попарных произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы. Для того, чтобы это было возможно, очевидно, что необходимо равенство числа элементов в строке первой матрицы и числа элементов в столбце второй матрицы, то есть необходимо равенство числа столбцов первой матрицы числу строк второй матрицы. Матрицы, обладающие этим свойством, называются ***соответственными*** или ***согласованными по отношению к умножению***. Поэтому всегда нужно указывать порядок матриц при их умножении.

Пример.

$$C = A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 7 & -5 & 21 \end{bmatrix}.$$

Элемент c_{11} мы получили, умножив элементы первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B и сложив полученные произведения, то есть

$$c_{11} = 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 = -3 + 4 = 1.$$

Аналогично

$$c_{12} = 3\cdot 3 + 2\cdot(-2) = 5, c_{13} = 3\cdot 1 + 2\cdot 5 = 13, c_{21} = 1\cdot(-1) + 4\cdot 2 = 7,$$
$$c_{22} = 1\cdot 3 + 4\cdot(-2) = -5, c_{23} = 1\cdot 1 + 4\cdot 5 = 21.$$

В произведении матриц AB рассматриваем A как первый (предшествующий) сомножитель по отношению к B, а B – как второй (последующий) сомножитель по отношению к A. Произведение BA обычно отличается от AB, а может и вовсе не существовать. Оба произведения AB и BA существуют только в том случае, когда матрицы имеют порядок $m\times n$ и $n\times m$. В этом случае первое произведение есть матрица порядка $m\times m$, а второе – матрица порядка $n\times n$.

Пример. Пусть заданы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Тогда AB есть матрица порядка 2×2:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix},$$

а BA есть матрица порядка 3×3:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{bmatrix}.$$

Как видим, при перемножении матриц порядок множителей играет существенную роль, поэтому применяются термины «умножение справа», «умножение слева».

Для квадратных матриц одного порядка оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ существуют, но в общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Например,

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 19 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}, \text{ а } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что не все законы алгебры чисел будут иметь место для матриц. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{, то } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

То есть ***произведение ненулевых матриц может быть нулевой матрицей***.

§3. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ МАТРИЦ

Единичная или **тождественная матрица** определяется следующим образом:

$$I_n = E_n = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

– это квадратная матрица порядка $n \times n$, на главной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол) которой расположены единицы, а на остальных местах – нули.

Легко проверить, что умножение как слева, так и справа любой матрицы A того же порядка на единичную матрицу оставляет матрицу неизменной:

$$EA = AE = A.$$

Другими словами, при умножении ненулевых матриц единичная матрица играет ту же роль, что и единица при умножении чисел.

Матрица-скаляр – это такая матрица, на главной диагонали которой стоит одно и то же число, а все остальные элементы равны нулю. Из определения операции умножения матрицы на скаляр λ следует, что матрицу-скаляр можно определить как произведение числа λ на единичную матрицу:

$$\lambda E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Благодаря этому всегда можно преобразовать некоторое число в матрицу-скаляр, умножив его на единичную матрицу и выбрав тот порядок, который удовлетворяет заданным требованиям. Умножение матрицы на скаляр, которое уже было определено, эквивалентно умножению матриц и может быть представлено как умножение справа и как умножение слева:

$$\lambda A = (\lambda E)A = A(\lambda E) = A\lambda.$$

То есть единичную матрицу можно дополнительно включать в матричное выражение или же исключать из него, не изменяя значения этого выражения.

Диагональная матрица. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали равны нулю:

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица-скаляр представляет собой частный случай диагональной матрицы.

Треугольная матрица. Квадратную матрицу называют треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

§4. ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

В алгебре чисел деление определяется как действие, обратное умножению. В алгебре матриц дело обстоит не так просто, и прежде чем удастся решить эту проблему, потребуется ввести некоторую операцию над матрицами, не имеющую аналога в алгебре чисел.

Транспонирование матрицы A определяется как действие, в результате которого из A получается новая матрица, строками которой служат столбцы матрицы A, а столбцами – строки матрицы A с теми же номерами. Таким образом, первая строка матрицы A становится первым столбцом транспонированной матрицы, вторая строка матрицы A становится вторым столбцом транспонированной матрицы и вообще элемент a_{ji} транспонированной матрицы есть элемент a_{ij} исходной матрицы A, поэтому, если A порядка $m \times n$, то транспонированная к ней – $n \times m$. Обозначают транспонированную к A матрицу символом A' или A^T. Например,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \ A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Если $A = A^T$, то A называется ***симметрической матрицей***. Очевидно, что симметрическая матрица непременно должна быть квадратной, и для нее $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

тогда

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \end{bmatrix}$$

и

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} & a_{13}^2 + a_{23}^2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что обе матрицы AA^T и A^TA симметрические. Поскольку A не является квадратной матрицей, эти произведения имеют разный порядок. Однако суммы элементов матриц AA^T и A^TA, стоящих на главной диагонали (такую сумму называют ***следом матрицы***), равны. Более того, след матрицы AA^T, который обозначают $tr(AA^T)$, оказывается равным сумме квадратов элементов матрицы A.

Обратим внимание на специальный случай, когда x – вектор столбец, состоящий из n элементов, а x^T - вектор-строка из тех же n элементов. Тогда

$$x^Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

и

$$xx^T = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix}.$$

Свойства транспонированных матриц:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^TA^T$.

Первые три свойства очевидным образом следуют из определения операции транспонирования. Для доказательства четвертого заметим, что элемент ji матрицы B^TA^T получен при умножении j-й строки матрицы B^T на i-й столбец матрицы A^T, он равен произведению j-го столбца матрицы B на i-ю строку матрицы A, или равен элементу ij матрицы AB.

Используя четвертое свойство, можно доказать, что

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T.$$

В самом деле

$$(ABC)^T = \left((AB)C\right)^T = C^T(AB)^T = C^TB^TA^T.$$

§5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

Любой квадратной матрице A можно сопоставить некоторое число, которое называется ее ***определителем*** и обозначается $\det A$ или $|A|$. Это число получается суммированием различных произведений элементов матрицы A. Введем первоначально определители матриц первого, второго и третьего порядков.

Определитель матрицы первого порядка равен элементу матрицы $|a_{11}| = a_{11}$.

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице 2×2, называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка равен сумме произведений элементов, стоящих на диагоналях, причем, произведение элементов, стоящих на главной диагонали берется со своим знаком, а на побочной диагонали – с противоположным. Числа a_{ij} $(i,\ j = 1, 2)$ называются ***элементами определителя*** второго порядка.

Пример,

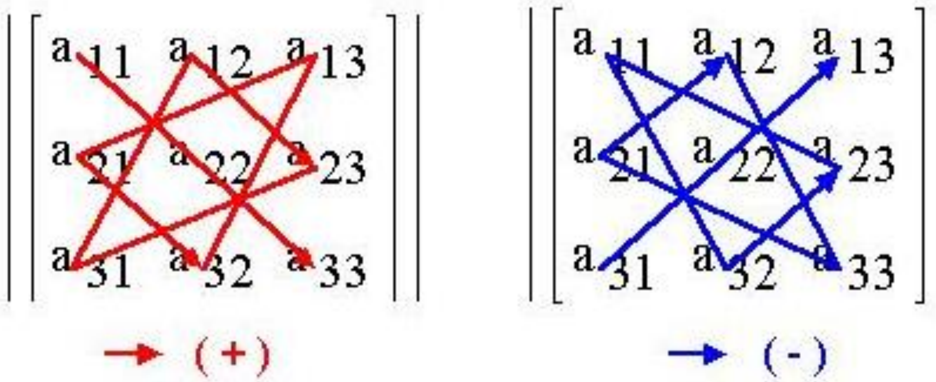
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot 9 - 2\cdot 7 = 22; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot 5 - 3\cdot 2 = -11.$$

Определителем матрицы порядка 3×3 будет число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Существует ряд правил, облегчающих составление выражения, стоящего в правой части последней формулы. Рассмотрим некоторые из них.

1. Слагаемые составляются по следующей схеме:



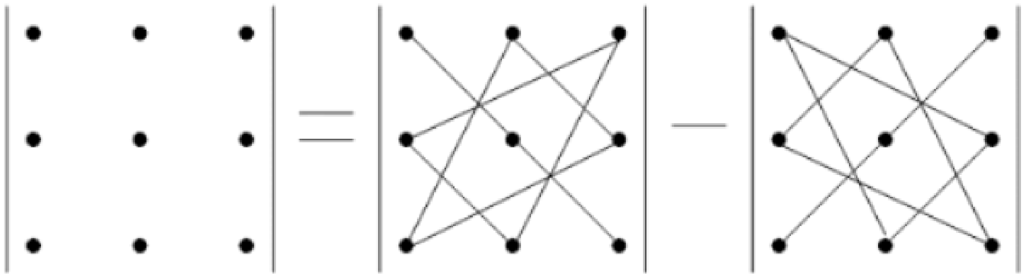
В этой схеме плюс означает, что произведения указанных элементов берутся со своими знаками, а минус – с противоположными. Это правило называется ***правилом треугольников*** или ***правилом Саррюса.***

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} -$$

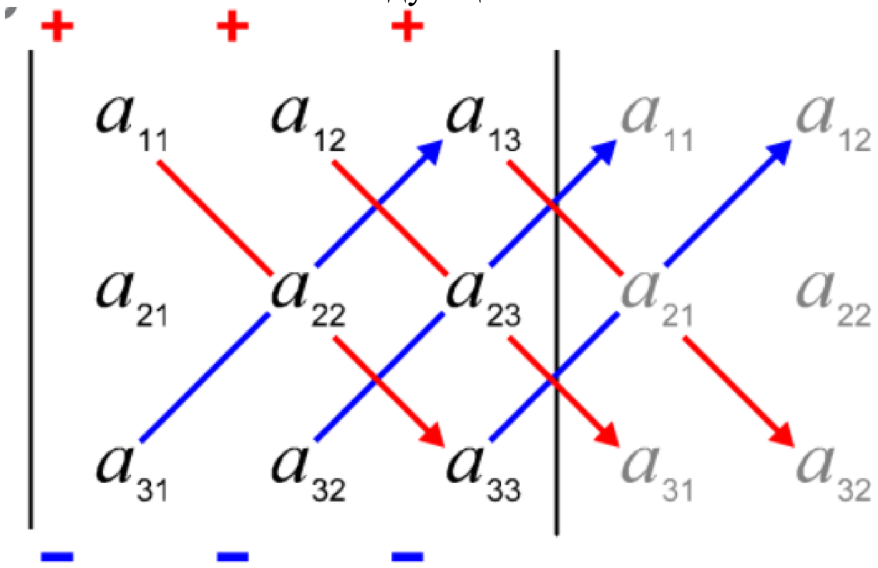
$$- \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 70 - 9 - 84 + 0 + 12 = -11.$$

Схематично правило треугольников можно представить и в более простом виде. Здесь точками обозначены элементы на соответствующих местах:



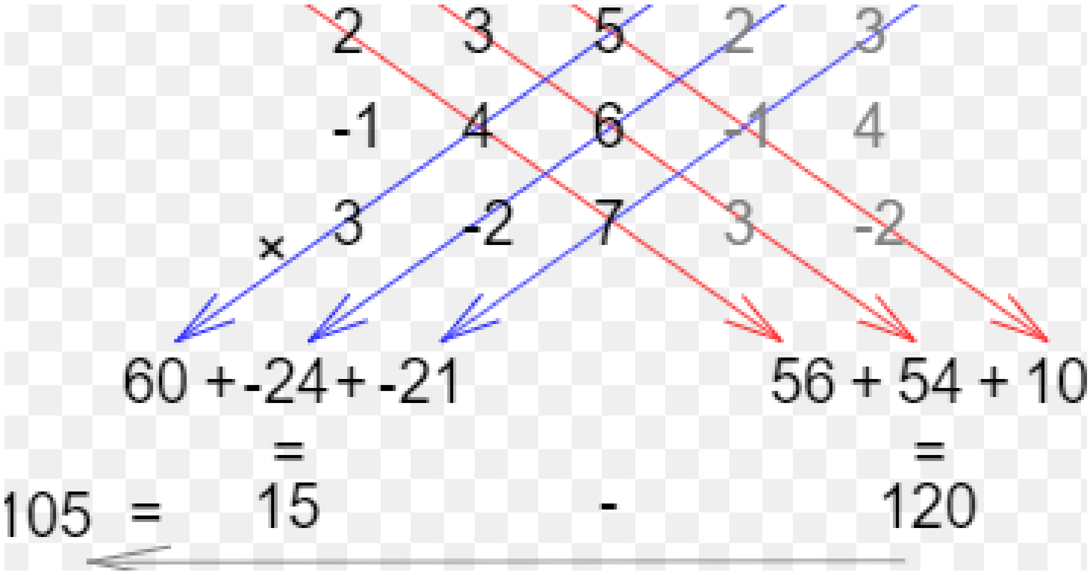
2. Слагаемые составляются по следующей схеме



В этой схеме используется матрица, полученная из матрицы определителя приписыванием справа первых двух ее столбцов.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

Решение.



Отметим ряд особенностей, введенных выше определителей:

1. Каждый член в правой части есть произведение такого же количества элементов, каков порядок матрицы A (двух элементов для матрицы 2×2 и трех элементов для матрицы 3×3). В случае матрицы $n\times n$ каждый член алгебраической суммы содержит n сомножителей.

2. Каждый член алгебраической суммы содержит в качестве сомножителя один и только один элемент из каждой строки и один и только один элемент из каждого столбца матрицы A. Таким образом, ни один элемент не встречается дважды в одном и том же слагаемом.

3. Количество членов (слагаемых) в выражении, раскрывающем определитель, равно соответственно 2=2! и 6=3!, причем все члены различны. В общем случае ожидаем получить

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

различных членов.

4. Каждый член алгебраической суммы содержит элементы определителя, расположенные так, что их первые индексы образуют ряд натуральных чисел $1, 2, ..., n$. Вторые индексы представляют собой различные перестановки из этих n элементов. Поскольку таких перестановок из n различных объектов существует ровно $n!$, то получим $n!$ различных членов.

5. Половина всех членов берется со своим знаком (в схемах плюс), а половина – с противоположным (минус). Знак зависит от расположения вторых индексов. Говорят, что в расположении натуральных чисел возникает ***инверсия естественного порядка***, если среди двух натуральных чисел большее предшествует меньшему. Количество инверсий в перестановке n натуральных чисел есть число пар элементов, не обязательно соседних, в которых большее число предшествует меньшему. ***Перестановка называется четной***, если число инверсий в ней четно, и называется ***нечетной***, если число инверсий нечетно. Четным перестановкам соответствует знак плюс, а нечетным – знак минус. Например, пятый член в представлении определителя третьего порядка образован элементами, вторые индексы которых расположены в таком порядке: 2, 1, 3, где имеется только одна инверсия – число 2 стоит раньше числа 1. Следовательно, эта перестановка нечетна и перед пятым членом должен быть взят знак минус. У второго члена вторые индексы расположены в порядке 2, 3, 1, где имеются две инверсии, так как 2 стоит раньше 1 и 3 расположено тоже раньше 1. Следовательно, перед этим членом должен стоять знак плюс.

Эти пять особенностей приводят к общему определению определителя матрицы A n-го порядка как

$$|A|=\sum\left(\pm a_{1i}a_{2j}\cdots a_{nr}\right),$$

где сумма берется по всем перестановкам вторых индексов сомножителей, причем со знаком плюс берутся члены с четными перестановками, а со знаком минус - члены с нечетными перестановками.

Непосредственно из определения следует, что:

1) ***определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (или строки) равны нулю;***

2) ***множитель, общий для элементов некоторого столбца (или строки), можно выносить за знак определителя.***

3) ***определитель, у которого каждый элемент некоторого столбца (или строки) является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанном столбце (или строке) стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые; остальные столбцы (строки) у всех определителей одинаковы.***

§6. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

1. Определитель не изменяется при транспонировании матрицы (свойство инвариантности определителя относительно транспонирования матриц): $\det A = \det A^T$.

2. Перестановка любых двух столбцов (или строк) матрицы A изменяет знак ее определителя.

3. Определитель матрицы с двумя равными столбцами (или строками) равен нулю.

Это следует из свойства 2, поскольку перестановка двух одинаковых столбцов (или строк), с одной стороны, приводит к определителю, равному $-|A|$, а с другой стороны, оставляет определитель неизменным. Поэтому $|A| = -|A|$, что возможно только в случае $|A| = 0$.

4. Если каждый элемент столбца (или строки) матрицы A умножить на число λ, то для определителя полученной матрицы B имеем $|B| = \lambda |A|$. Если каждый элемент матрицы A умножить на число λ, то $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Это непосредственно следует из того факта, что каждый член в разложении определителя содержит один и только один элемент каждого столбца (или строки) данной матрицы.

5. Если матрица A имеет два пропорциональных столбца (или строки), то $\det A = 0$.

Пусть, например, в матрице A элементы некоторой строки равны соответствующим элементам другой строки, умноженным на λ. Тогда, вынося λ за знак определителя, получаем $\det A = \lambda \cdot \det B$, где B – матрица с двумя одинаковыми строками. Так как $\det B = 0$, то и $\det A = 0$.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторого столбца (или строки) прибавить соответственные элементы другого столбца (или строки), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Покажем истинность этого свойства для определителя третьего порядка. Используя свойства определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda\alpha & a_{12} + \lambda\beta & a_{13} + \lambda\gamma \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $[\alpha \quad \beta \quad \gamma]$ совпадает с какой-либо строкой исходного определителя, то последний определитель в правой части равенства обращается в нуль, поскольку у него появляются две одинаковые строки. Таким образом, правая часть равенства приводится к значению исходного определителя.

§7. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ (СТОЛБЦА).

Рассмотрим определитель $|A| = \sum\left(\pm\, a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\nu}\right)$ и соберем вместе все члены разложения, содержащие элемент a_{11}. Коэффициентом при a_{11} будет

$$\sum\left(\pm\, a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\nu}\right),$$

где суммирование происходит по всем $(n-1)!$ перестановкам чисел 2,3,...,*n*. Поскольку рассматриваемый элемент находится в строке с номером 1 и столбце с номером 1, то его добавление в качестве сомножителя к любому члену не влияет на знак этого члена. Этот знак определяется перестановкой $(\beta, \gamma, ..., \nu)$ натуральных чисел $(2, 3, ..., n)$. Таким образом,

$$\sum\left(\pm\, a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\nu}\right)$$

есть определитель порядка $n-1$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием из нее первой строки и первого столбца. Полученный определитель называется ***минором элемента*** a_{11} ***определителя*** и обозначается M_{11}.

В общем случае ***минором элемента*** a_{ij} ***определителя*** называется определитель, полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, которым принадлежит данный элемент. Минор элемента a_{ij} обозначается через M_{ij}.

Если задаться вопросом, чему равна сумма всех элементов разложения определителя $|A|$, содержащих в качестве сомножителя элемент a_{ij}, то, по аналогии, можно получить $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} ***определителя*** называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение будем обозначать A_{ij}**:** $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим далее выражение $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$.

Оно содержит $(n-1)!\,n = n!$ членов разложения определителя $|A|$. Все члены различны и обладают теми же знаками, что и в разложении определителя $|A|$. Другими словами, установили, что $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$.

Эта формула дает разложение определителя $|A|$ по элементам первой строки, каждый из которых умножается на свое алгебраическое дополнение. Аналогично определитель $|A|$ может быть разложен по элементам любой строки (или столбца). То есть верна

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Для определителя третьего порядка эта теорема, в случае разложения по первой строке, имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (0+6) - 1 \cdot (16-2) + 3 \cdot (12+0) = 12 - 14 + 36 = 34.$$

Сформулируем без доказательства группу теорем, которые будем использовать в дальнейшем.

Теорема (замещения). Пусть Δ – некоторый определитель. Сумма произведений алгебраических дополнений какой-либо строки (или столбца) на любые числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ равна определителю Δ', который получается из данного определителя Δ заменой упомянутой строки (столбца) строкой (столбцом) чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Теорема (аннулирования). Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

§8. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ *n*-го ПОРЯДКА

1. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца позволяет свести вычисление определителя n-го ($n>1$) порядка к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Если определитель имеет равные нулю элементы, то удобнее всего разлагать определитель по элементам той строки или столбца, которые содержат наибольшее число нулей.

Используя свойства определителей, можно преобразовать определитель n-го порядка так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме, может быть, одного, равнялись нулю. Таким образом, вычисление определителя n-го порядка, если он отличен от нуля, сводится к вычислению одного определителя $n-1$-го порядка.

Пример. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -24.$$

Можно поступить иначе. Если к первой строке прибавить вторую, умноженную на –2 (или, что тоже самое, из первой строки вычесть удвоенную вторую), то по свойствам определителей получим равный исходному определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix},$$

который разложим по элементам первой строки

$$|A| = (-4)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -4\cdot 6 = -24.$$

2. Приведение определителя к треугольному виду. ***Определителем треугольного вида*** называется определитель треугольной матрицы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель Δ_1 по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta_1 = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель вновь разлагаем по элементам первого столбца

$$\Delta_1 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ 0 & 0 & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получаем $\Delta_1 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$. Аналогично можно показать, что $\Delta_2 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$.

Таким образом, ***определитель треугольного вида равен произведению элементов его главной диагонали***.

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

Приведем определитель к треугольному виду. Используя свойство 6 определителя, преобразуем его так, чтобы каждый элемент, находящийся ниже главной диагонали, был равен нулю. Для этого из второй строки вычтем первую, к третьей строке прибавим первую, из четвертой строки вычтем первую, умноженную на два. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, то $\Delta = -12$.

§9. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

В алгебре чисел для $x \neq 0$ имеем $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (единица). Это наводит на мысль выяснить, существует ли в матричной алгебре для некоторой матрицы A такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (единичная матрица). Если такая матрица A^{-1} существует, то ее называют ***обратной матрицей по отношению к матрице*** A. Непосредственно из правила перемножения матриц следует, что матрицы A и A^{-1} должны быть квадратными матрицами одного порядка.

Естественным образом возникают следующие вопросы. **Во-первых**, при каких условиях существует обратная матрица? **Во-вторых**, если она существует, то сколько их (вопрос единственности) для данной? **В-третьих**, если она существует, каким образом ее построить? Проанализируем далее поставленные математические вопросы.

Прежде чем рассмотреть вопрос о существовании обратной матрицы, введем некоторые понятия.

Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной*** (или ***неособенной***). Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется ***вырожденной*** (или ***особенной***).

Из квадратной матрицы A порядка $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

сформируем новую матрицу, в которой каждый элемент a_{ij} заменен его алгебраическим дополнением A_{ij} и эту матрицу транспонируем:

$$C = adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Полученную таким образом матрицу называют ***присоединенной или союзной к матрице*** A. Воспользовавшись теоремой аннулирования, можно непосредственно убедиться в том, что

$$AC = CA = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|E,$$

где E – единичная матрица порядка n.

Пусть для матрицы A существует обратная A^{-1}. Тогда, по определению обратной матрицы, $A \cdot A^{-1} = E$ и, следовательно, $\det\left(AA^{-1}\right) = \det E$. Используя теорему об определителе произведения матриц, имеем

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E.$$

Так как $\det E = 1$, то $\det A \neq 0$. То есть, если для матрицы A существует обратная, то матрица A - невырожденная.

Пусть далее, матрица A – невырожденная. Рассмотрим матрицу $\frac{1}{\det A}C$, где C – матрица, союзная к A. По свойству союзной матрицы

$$\frac{1}{\det A}AC = \frac{1}{\det A}CA = E$$

или

$$A\left(\frac{1}{\det A}C\right) = \left(\frac{1}{\det A}C\right)A = E,$$

откуда следует, что матрица $\frac{1}{\det A}C$ является обратной для матрицы A. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы существовала матрица A^{-1}, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Доказательство этой теоремы носит конструктивный характер и дает алгоритм построения обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – матрицы, обратные данной невырожденной матрице A. Тогда имеет место равенство $AA_1^{-1} = E$. Умножив обе его части на A_2^{-1} слева, получим

$$A_2^{-1}AA_1^{-1} = A_2^{-1}E = A_2^{-1}.$$

С другой стороны,

$$A_2^{-1}AA_1^{-1} = (A_2^{-1}A)A_1^{-1} = A_1^{-1}.$$

Следовательно, $A_2^{-1} = A_1^{-1}$. То есть доказали следующую теорему.

Теорема. Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.

Пример. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель исходной матрицы. Для этого ко второй и третьей строкам прибавим первую, умноженную на минус единицу, и разложим определитель по элементам первого столбца

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}. Построим союзную к A матрицу C. Для этого находим алгебраические дополнения элементов определителя и транспонируем полученную матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в правильности результата.

Сформулируем ***свойства обратных матриц***.

1. $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.

Это свойство можно получить непосредственно из свойства определителя произведения матриц: $\left|AA^{-1}\right|=|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=|E|=1$.

2. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Действительно, по определению обратной матрицы

$$A^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1}=E.$$

Умножим обе части равенства слева на матрицу A

$$A\cdot A^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1}=AE\Rightarrow E\cdot(A^{-1})^{-1}=A\Rightarrow(A^{-1})^{-1}=A.$$

Таким образом, обратная матрица по отношению к обратной воспроизводит первоначальную матрицу.

3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

По определению обратной матрицы

$$(AB)(AB)^{-1}=(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$$

Аналогично доказывается, что $(AB)^{-1}(AB)=E$.

Это свойство легко распространяется на произведение конечного числа матриц. В частности, $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

4. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$. Матрица, обратная к транспонированной, равна транспонированной от обратной.

Транспонируем равенство $AA^{-1}=E$. Получим выражение $(A^{-1})^T A^T=E$, которое умножим справа на $(A^T)^{-1}$: $(A^{-1})^T A^T(A^T)^{-1}=(A^T)^{-1}$.

Следовательно, $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Обратная матрица применяется для решения матричных уравнений. Пусть A – квадратная матрица порядка n, B - прямоугольная матрица размерности $n\times m$. Требуется найти такую матрицу X, чтобы выполнялось следующее матричное равенство

$$AX=B.$$

Из условия согласованности перемножаемых матриц следует, что искомая матрица X должна быть размерности $n\times m$. Если матрица A является невырожденной, то, умножая последнее матричное равенство на A^{-1} слева, найдем искомую матрицу X: $X=A^{-1}B$.

§10. РАНГ МАТРИЦЫ.

Рассмотрим прямоугольную матрицу A порядка $m \times n$ и через

$$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$$

обозначим ее столбцы. Пусть далее $\beta_1, \beta_2,\ ...,\ \beta_n$ некоторые действительные числа. Составим линейную комбинацию столбцов матрицы

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_n a_n .$$

Если существуют такие числа $\beta_1, \beta_2,\ ...,\ \beta_n$, не все одновременно равные нулю, что линейная комбинация

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_n a_n = 0$$

обращается в ноль, то ***вектор–столбцы*** $a_1, a_2, ..., a_n$ ***называются линейно зависимыми***. Если линейная комбинация равна нулю только тогда, когда

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0,$$

то ***система вектор–столбцов*** $a_1, a_2, ..., a_n$ ***называется линейно независимой***.

Непосредственно из определения следуют *утверждения*:

1. Если среди вектор–столбцов $a_1, a_2, ..., a_n$ имеются a_i и a_k $(k \neq i)$, такие, что $a_i = \lambda a_k$, где λ - отличное от нуля число, то система вектор–столбцов $a_1, a_2, ..., a_n$ линейно зависима.

2. Если среди вектор–столбцов $a_1, a_2, ..., a_n$ имеется нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

3. Для того чтобы вектор–столбцы $a_1, a_2, ..., a_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Рангом матрицы A называется максимальное число линейно независимых ее столбцов. Обозначают ранг матрицы A обычно $r(A)$, $\rho(A)$, $rang(A)$ или $rank(A)$. Аналогичным образом можно ввести понятие ранга матрицы, используя понятие линейной независимости строк матрицы. Несложно доказать, что для матрицы A количество линейно независимых столбцов и линейно независимых строк совпадает. Поэтому ранг исходной матрицы A и транспонированной A^T совпадают. Если ранг прямоугольной матрицы равен числу столбцов, то ее называют матрицей ***полного столбцового ранга***, а если ранг равен числу строк – матрицей ***полного строчного ранга***.

Определим, например, ранг следующей матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

При помощи непосредственной проверки убеждаемся, что линейная комбинация столбцов матрицы

$$\beta_1\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\beta_3\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}$$

обращается в ноль при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = -1$,

$$a_1 - 2a_2 - a_3 = 0,$$

где через a_1, a_2, a_3 обозначены столбцы матрицы A. Уравнение означает, что любой из этих трех столбцов может быть выражен как линейная комбинация двух оставшихся, например,

$$a_1 = 2a_2 + a_3.$$

Непосредственная проверка показывает, что каждая пара рассмотренных вектор–столбцов линейно независима, откуда следует, что ранг матрицы равен двум.

Введем другое эквивалентное определение ранга матрицы, более удобное с вычислительной точки зрения. Вычеркнем из исходной матрицы A несколько строк и такое же количество столбцов. Элементы, стоящие на пересечении вычеркнутых строк и столбцов образуют некоторую квадратную матрицу, определитель которой назовем ***минором матрицы*** A. ***Рангом матрицы называется наивысший из порядков ее миноров, отличных от нуля***. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю. Можно доказать, что определение ранга матрицы, введенное через линейную независимость столбцов (или строк) матрицы и через порядок отличных от нуля миноров, эквивалентны.

Используя второе определение, найдем ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix}3 & -6 & 0\\4 & -8 & 0\end{bmatrix}.$$

Ранг равен единице, так как все миноры второго порядка матрицы A равны нулю

$$\begin{vmatrix}3 & -6\\4 & -8\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 0\\4 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-6 & 0\\-8 & 0\end{vmatrix},$$

а среди миноров первого порядка (то есть среди элементов матрицы) имеются отличные от нуля.

Из определения ранга следует:

1) для матрицы размерности $m \times n$ $0 \le r(A) \le \min(n, m)$;

2) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю;

3) для квадратной матрицы n–го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. Невырожденную матрицу иногда называют ***матрицей полного ранга.*** Таким образом, если о квадратной матрице A говорят, что она полного ранга, это означает, что ее определитель отличен от нуля и, следовательно, существует единственная обратная A^{-1} к ней матрица.

Из разложения определителя по элементам строки (или столбца) следует, что если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка, если они существуют, также равны нулю. Поэтому ранг матрицы может быть найден следующим способом. Если все миноры первого порядка (элементы матрицы) равны нулю, то $r(A)=0$. Если хотя бы один из миноров первого порядка отличен от нуля, а все миноры второго порядка равны нулю, то $r(A)=1$. И так далее до тех пор, пока либо все миноры порядка k равны нулю, либо миноры порядка k не существуют. Тогда $r(A)=k-1$.

Указанный метод нахождения ранга матрицы не всегда удобен, так как связан с вычислением большого числа определителей. Один из более экономичных методов обосновывает следующая

Теорема. Если какой-либо минор k-го порядка матрицы A отличен от нуля, а все миноры $(k+1)$-го порядка, заключающие его в качестве минора, равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Эта теорема дает метод вычисления ранга матрицы (***метод окаймляющих миноров***). При вычислении ранга матриц следует находить миноры меньшего порядка, отличные от нуля, и переходить к высшему порядку. Если уже найден минор k-го порядка, отличный от нуля, то необходимо вычислить лишь миноры $(k+1)$–го порядка, окаймляющие этот минор (содержащие его целиком внутри себя): если они все равны нулю, то ранг матрицы равен k.

В качестве примера найдем ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Среди элементов исходной матрицы A имеются отличные от нуля, например элемент, стоящий в левом верхнем углу. Среди миноров второго порядка, окаймляющих этот элемент, также есть отличные от нуля, например

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Среди миноров 3-го порядка, окаймляющих этот минор,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & -15 & -7 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -15 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix},$$

нет отличных от нуля. Следовательно, ранг матрицы A равен двум.

Другой метод нахождения ранга – это сведение матрицы к диагональной или трапециевидной (матрице, в которой ниже или выше ее главной диагонали лежат только нулевые элементы). Любая матрица может быть приведена к такому виду с помощью ***элементарных преобразований матрицы***. К ним относятся следующие преобразования:

1) умножение элементов какой-нибудь строки (или столбца) матрицы на отличное от нуля число;

2) прибавление к строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число;

3) перестановка двух строк (или столбцов) матрицы.

Из свойств определителей следует, что ***при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменится***.

Проиллюстрируем этот метод на матрице из предыдущего примера

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ко второй строке исходной матрицы прибавим первую, умноженную на два, к четвертой – первую, умноженную на –7 и к пятой первую. Придем к следующей матрице:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 6 & -21 & -33 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Прибавляя далее к третьей и пятой строке вторую строку, умноженную на –1, и к четвертой строке вторую строку, умноженную на три, получим преобразованную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

у которой существует только минор второго порядка, отличный от нуля, значит ранг исследуемой матрицы равен двум.

§11. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§11.1. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Линейной системой m уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

где a_{ij}, h_i $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – заданные числа, называемые соответственно ***коэффициентами при неизвестном*** x_j ***и свободными членами системы***.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных системы, называется ***матрицей*** или ***основной матрицей системы***, а матрица

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & h_m \end{bmatrix},$$

которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов, - ***расширенной матрицей системы***.

Наряду с матрицами A и $\widetilde{A}$ рассмотрим следующие матрицы-столбцы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A согласована с матрицей X, то можно найти произведение AX. Элементами полученной матрицы-столбца являются левые части уравнений системы. На основании определения равенства матриц, можно записать систему в виде матричного уравнения $AX = H$. Такая запись называется ***матричной записью системы линейных алгебраических уравнений***. Каждой системе соответствует единственная пара матриц A и H, и наоборот.

Упорядоченная система чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$ называется ***решением системы***, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, ..., c_n$. Решение можно записать в виде матрицы-столбца

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

называемой ***вектор–решением*** данной ***системы***. Если существует хотя бы одно решение системы, то она называется ***совместной***, в противном случае - ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение. Система, имеющая более одного решения, называется ***неопределенной***.

Решить систему - это выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения (множество решений).

Две системы называются ***эквивалентными***, или ***равносильными***, если всякое решение одной из них является решением другой и наоборот (если их множества решений совпадают). Очевидно, что если проделать с уравнениями системы следующие преобразования (называемые ***элементарными преобразованиями системы***):

1) умножить некоторое уравнение системы на число отличное от нуля;

2) прибавить к одному уравнению системы другое ее уравнение, умноженное на некоторое число;

3) поменять местами любые два уравнения системы, то приходим к системе, эквивалентной данной.

§11.2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА.

Пусть дана система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$AX = H.$$

Матрица A этой системы является квадратной матрицей порядка n. Ее определитель Δ называется ***определителем системы***. Если определитель системы отличен от нуля, то она называется ***невырожденной***, в противном случае - ***вырожденной***.

Пусть определитель матрицы системы отличен от нуля. Найдем ее решение. Так как матрица A невырожденная, то для нее существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная. Умножим обе части уравнения $AX = H$ на A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}H.$$

Так как $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то $X = A^{-1}H$.

Эта формула является ***матричной записью решения*** рассматриваемой системы, а метод решения называется ***матричным методом решения линейной системы***. Последнее матричное равенство можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_j \\ \cdots \\ h_n \end{bmatrix},$$

или, перемножив матрицы, получаем

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \ldots + A_{nj}h_n\right) \ (j = \overline{1,n}).$$

Согласно теореме замещения

$$A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \ldots + A_{nj}h_n = \Delta_j,$$

где Δ_j - определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Таким образом, имеем

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ (j = \overline{1,n}).$$

Последние формулы называются ***формулами Крамера***.

Итак, ***невырожденная система*** n ***линейных уравнений с*** n ***неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера.***

Пример. Установить, совместна ли система и, если она совместна, то найти решение по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\Delta = 12 \neq 0$, система совместна и имеет единственное решение.
Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.
Определитель Δ_1 получим из Δ, заменив первый столбец столбцом свободных членов системы, то есть

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -4 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 36,$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{36}{12} = 3.$

Определитель Δ_2 получится из Δ заменой 2-го столбца столбцом свободных членов, а Δ_3 - заменой 3-го столбца столбцом свободных членов. Вычислим их:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&0&-1\\7&-4&-5\end{vmatrix}=-24,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&4&0\\7&10&-4\end{vmatrix}=12.$$

Следовательно, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-24}{12}=-2$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{12}{12}=1.$

Решение системы имеет вид $(3;-2;1)$.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим это на примерах.

Пример. Найти решения систем 2-го порядка; дать геометрическую интерпретацию полученного результата:

а) $\begin{cases}3x+2y=5,\\4x+5y=2,\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y=1,\\4x-6y=8,\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-3y=1,\\4x-6y=2.\end{cases}$

Решение а) Определитель системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&2\\4&5\end{vmatrix}=15-8=7\neq 0\,.$$

Следовательно, система имеет единственное решение.

Так как $\Delta_1=\begin{vmatrix}5&2\\2&5\end{vmatrix}=25-4=21,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}3&5\\4&2\end{vmatrix}=-14,$

то $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{21}{7}=3,\ y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-\dfrac{14}{7}=-2.$

Найденное решение $(3;-2)$ – точка пересечения прямых $3x+2y=5$ и $4x+5y=2$.

Решение б) Так как определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3\\4&-6\end{vmatrix}=0,$ решить систему по формулам Крамера нельзя. Однако можно исследовать эту систему, исходя из того, что каждое уравнение системы – это уравнение прямой. Прямые $2x-3y=1$ и $4x-6y=8$ (или $2x-3y=4$) параллельны и не имеют общих точек. Следовательно, данная система несовместна.

Решение в) В этом случае определитель системы также равен нулю:

$$\begin{vmatrix}2&-3\\4&-6\end{vmatrix}=0,$$

но в отличии от б) оба уравнения $2x-3y=1$ и $4x-6y=2$ определяют одну и ту же прямую (сократив обе части второго уравнения на 2, получим первое). Следовательно, данная система имеет бесчисленное множество решений –

ими будут все точки прямой $2x-3y=1$. Эти решения можно записать в виде: $y=c,\ x=\dfrac{1+3c}{2}$, где c – любое действительное число.

§11.3. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ.

Формулы Крамера дают ответ на вопрос о наличии решения только в случае невырожденной матрицы системы. Если матрица системы прямоугольная либо ее определитель равен нулю (в случае квадратной матрицы системы) эти формулы неприменимы.

Рассмотрим произвольную систему m уравнений с n неизвестными. Для нее имеет место теорема.

Теорема Кронекера–Капелли *(критерий совместности системы).* Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Как следствия из вышеприведенного критерия совместности можно доказать:

1. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Верно и обратное.*
2. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно. Верно и обратное.*

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений $Ax=y$, где матрица A и вектор–столбцы x и y равны соответственно

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\3&1&4&0\\1&3&4&2\\1&3&4&2\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\ \text{и}\ y=\begin{bmatrix}200\\340\\540\\540\end{bmatrix}.$$

Решение. Введенное матричное уравнение эквивалентно решению следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=200;\\ 3x_1+x_2+4x_3=340;\\ x_1+3x_2+4x_3+2x_4=540;\\ x_1+3x_2+4x_3+2x_4=540.\end{cases}$$

Исследуем на совместность данную систему. Для удобства применения критерия запишем расширенную матрицу системы и проверим, равны ли ранги основной и расширенной матрицы этой системы. Расширенная матрица имеет вид

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&2&200\\3&1&4&0&340\\1&3&4&2&540\\1&3&4&2&540\end{array}\right].$$

При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется, поэтому Прибавляя к последней строке предпоследнюю, умноженную на (-1), получим матрицу, имеющую тот же ранг, что и расширенная матрица системы, и, кроме того содержащая нулевую строку. Так как при приписывании или удалении нулевой строки ранг матрицы не изменяется, то ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&2&200\\3&1&4&0&340\\1&3&4&2&540\end{array}\right].$$

Проделывая далее элементарные преобразования над этой матрицей, придем к матрице

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&2&200\\0&1&1&0&340\\0&5&5&6&260\end{array}\right]$$

или

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&2&200\\0&1&1&0&340\\0&0&0&6&-1440\end{array}\right].$$

Видим, что ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы равны между собой и равны трем. Следовательно, система совместна. Так как ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то система является неопределенной (имеет бесконечное множество решений) и ее решения зависит от одной свободной переменной.

Вернемся от матричной записи к обычной. При нахождении ранга матрицы элементарные преобразования производились только над строками расширенной матрицы, поэтому полученная матрица представляет собой расширенную матрицу системы, множество решений которой совпадает со множеством решений исходной системы. Имеем

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=200;\\ \quad x_2+x_3=340;\\ \quad 6x_4=-1440.\end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид

$$x_1=-x_3,\ x_2=340-x_3,\ x_4=-240,$$

где x_3 - свободный параметр.

§11.4. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если столбец ее свободных членов есть нулевой столбец, $h_i = 0$ для всех $i = \overline{1, m}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что это частный случай рассмотренной выше системы линейных алгебраических уравнений. Однородная система всегда совместна, так как ранг матрицы этой системы равен рангу расширенной матрицы. Действительно, решением системы является $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

Если ранг матрицы системы равен числу неизвестных, $r(A) = n$, то система имеет единственное тривиальное решение. Если же $r(A) < n$, то система будет иметь бесконечное множество решений.

В случае однородной системы n уравнений с n неизвестными (матрица системы является квадратной) система имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда матрица системы невырождена. Если определитель системы равен нулю, то однородная система имеет бесконечное множество решений.

С однородными системами линейных алгебраических уравнений связана проблема характеристических (собственных) значений квадратной матрицы A, которая состоит в отыскании таких чисел λ и соответствующих им векторов (вектор–столбцов) $x \neq 0$, которые удовлетворяют равенству $Ax = \lambda x$, где A - квадратная матрица порядка n. Число λ называют ***собственным (характеристическим) значением матрицы*** A, а x - ее ***собственным (характеристическим) вектором.***

Последнее равенство можно переписать в матричной форме

$$[A - \lambda E]x = 0$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение $x \neq 0$ только в том случае, если матрица $[A - \lambda E]$ вырожденная, то есть если $|A - \lambda E| = 0$. Последнее уравнение называется ***характеристическим уравнением*** и представляет собой алгебраическое уравнение относительно неизвестной λ. Корни данного уравнения являются собственными значениями матрицы A. Решения же матричного уравнения (3), соответствующие различным собственным значениям, будут являться собственными векторами.

Рассмотрим пример нахождения собственных значений и соответствующих им собственных векторов для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нее имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное алгебраическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, найдем собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 0$.

Чтобы найти собственные вектора, соответствующие полученным собственным значениям, решим для каждого из собственных значений систему однородных уравнений. Для $\lambda_1 = 5$ матрица системы

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

и система принимает вид

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases}$$

а ее решение $x_1 = 2x_2$.

Как видим, один элемент собственного вектора произволен и поэтому, если вектор x удовлетворяет системе при данном значении λ, то kx, где k – произвольная константа, тоже удовлетворяет этой системе. В качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 5$, можно выбрать вектор-столбец

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично может быть получен собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 0$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

§11.5. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными по правилу Крамера сводится к вычислению $(n+1)$ определителей n-го порядка. Если число n большое, то вычисление определителей громоздко. В случае, когда число уравнений системы и число неизвестных системы не равны между собой, формулы Крамера вообще не применимы. Необходимость решения систем линейных уравнений приводит к применению других методов, в частности ***методу Гаусса***, который иногда называют ***методом последовательного исключения неизвестных.***

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m. \end{cases}$$

Причем среди коэффициентов при x_j $(j = \overline{1, n})$ имеется хотя бы один, отличный от нуля. Не ограничивая общности можно считать, что $a_{11} \neq 0$, так как всегда можно принять за первое уравнение системы то, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля, а затем перенумеровать уравнения. Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого (если таковые имеются). Если $a_{i1} = 0$, то i–ое уравнение не содержит x_1. Если $a_{i1} \neq 0$, то к i-му уравнению системы, умноженному на $(-a_{11})/a_{i1}$, прибавим первое уравнение. Получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1; \\ \qquad\quad a_{22}^1x_2 + \ldots + a_{2n}^1x_n = h_2^1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a_{m2}^1x_2 + \ldots + a_{mn}^1x_n = h_m^1, \end{cases}$$

эквивалентную системе. Назовем этот переход от одной системы к другой системе ***первым шагом метода Гаусса***.

После первого шага возможны случаи:

1. Среди уравнений системы имеется хотя бы одно такое, у которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Тогда система несовместна.

2. Все коэффициенты a_{ij}^1 и свободные члены h_j^1 равны нулю. Тогда система состоит из одного уравнения. Если в этом случае все коэффициенты кроме a_{11} равны нулю, то система имеет единственное решение. В противном случае она неопределенна, имеет бесконечное множество решений.

3. Среди коэффициентов a_{ij}^1 найдется хотя бы один, отличный от нуля. В этом случае переходим ко второму шагу. Не ограничивая общности можем считать, что $a_{22}^1 \neq 0$. Исключим аналогично неизвестное x_2 из всех уравнений системы. В результате второго шага возможны те же случаи.

Продолжаем данный процесс до тех пор, пока это возможно. Проделав $p-1$ шагов, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1; \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = h_2^1; \\ \qquad\quad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = h_3^2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n = h_p^{p-1}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_{p+1}^{p-1}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_m^{p-1}. \end{cases}$$

Переход от системы (4) к эквивалентной ей системе (6) называется ***прямым ходом метода Гаусса***.

Возможны следующие случаи:

1. Хотя бы одно из чисел $h_{p+1}^{p-1}, ..., h_m^{p-1}$ отлично от нуля. Тогда система несовместна.

2. Все h_j^{p-1} $(j = \overline{p+1, m})$ равны нулю. Очевидно, что последние $m-p$ уравнений, левые и правые части которых равны нулю, не влияют на решение системы и их можно отбросить. Система при этом может иметь один из двух видов: треугольный (при $p = n$) или трапециевидный (при $p < n$).

Нахождение неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ из последней системы называется ***обратным ходом метода Гаусса***. В случае треугольной матрицы система имеет единственное решение. Если матрица трапециевидная, то число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp} \neq 0$, то из последнего уравнения этой системы x_p единственным образом выражается через $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$. Осуществляя обратный ход, выражаем единственным образом неизвестные $x_{p-1}, x_{p-2}, ..., x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, ..., c_n$, получаем бесконечное множество решений системы.

Одним из преимуществ метода Гаусса является то, что решение системы и ее исследование на совместность производится одновременно, дополнительных исследований не требуется.

При применении метода Гаусса на практике имеет смысл вместо преобразований системы производить соответствующие преобразования над строками расширенной матрицы системы, приводить расширенную матрицу системы к трапециевидной с помощью элементарных преобразований над строками.

Пример. Исследовать на совместность и в случае совместности решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right].$$

Прибавим ко второй и третьей строке расширенной матрицы системы первую строку, умноженную на (–1). Придем к следующей матрице:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right].$$

От деления второй строки матрицы на (-2), а третьей на (-4) решение исходной системы не изменится, поэтому можно произвести такое преобразование:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Если далее к третьей строке матрицы прибавить вторую, умноженную на (-1), придем к матрице вида

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен двум, а так как число неизвестных системы больше ранга системы, то система имеет бесконечное множество решений. Переходя от матрицы к системе уравнений, получим

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = 1. \end{cases}$$

Решения системы имеют вид $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$ и содержит два свободных параметра x_2 и x_1.

Практическое применение метода Гаусса имеет достаточно большое число модификаций, которые позволяют решать, как специфические задачи, так и облегчают вычислительную работу в случае решения систем непосредственно.