Задание 3

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Мы решаем ЛНДУ (линейное неоднородное дифференциальное уравнение) второго порядка с неизвестной функцией y, зависящей от переменной x. Мы помним, чтобы решить ЛНДУ, вначале необходимо решить ЛОДУ (линейное однородное дифференциальное уравнение), т.к.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ – общее решение неоднородного уравнения, $y_{оо}$ – общее решение однородного уравнения, $y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения. Поэтому найдем $y_{оо}$. Для этого составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,\ D = 4 - 4\cdot 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1; -1.$$

А значит общее решение ЛОДУ будет: $y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Напоминаю, что если Вы решаете ЛОДУ 2-го порядка, то возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения различные действительные числа

$$D > 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

2) корни характеристического уравнения – действительные числа, которые совпадают (корень кратности два):

$$D = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x};$$

3) корни характеристического уравнения – комплексные числа:

$$D < 0,\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Чтобы решить ЛНДУ, осталось найти $y_{чн}$. Мы найдем его с помощью метода вариации произвольных постоянных, т.е. общее решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y_{он} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$. Тогда составляем систему для метода вариации:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

где y_1, y_2 – ФСР (фундаментальная система решений) ЛОДУ 2-го порядка, f – правая часть в ЛНДУ. Для нашего уравнения имеем $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ -C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x)(e^{-x} - x e^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Поделим оба уравнения на e^{-x} :

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0, \\ -C_1'(x) + C_2'(x)(1-x) = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

Полученную систему можно решать различными способами, решим методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) + x = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{x} & 1-x \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x},$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x}.$$

Чтобы найти неизвестные функции $C_1(x), C_2(x),$ возьмем интегралы от их производных:

$$C_1(x) = \int -1\,dx = -x + C_3, \; C_2(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_4.$$

$$y_{он} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = (-x + C_3)e^{-x} + (\ln x + C_4)xe^{-x} = C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} - xe^{-x}(1 - \ln|x|),$$

где $y_{оо} = C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$, $y_{чн} = -xe^{-x}(1 - \ln|x|)$.

Ответ: $y_{он} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - xe^{-x}(1 - \ln|x|)$.