Задание 5

а) $y'' - 4y' + 13y = \cos 3x.$

Мы решаем ЛНДУ (линейное неоднородное дифференциальное уравнение) второго порядка с неизвестной функцией $y,$ зависящей от переменной $x.$ Мы помним, чтобы решить ЛНДУ, вначале необходимо решить ЛОДУ, т.к.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн},$$

где $y_{он}$ – общее решение неоднородного уравнения, $y_{оо}$ – общее решение однородного уравнения, $y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения. Поэтому найдем $y_{оо}$. Для этого составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,\ D = 16 - 4\cdot 13 = -36,\ \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 - 3i; 2 + 3i.$$

А значит общее решение ЛОДУ будет: $y_{оо} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

Напоминаю, что если Вы решаете ЛОДУ 2-го порядка, то возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения различные действительные числа

$$D > 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

2) корни характеристического уравнения – действительные числа, которые совпадают (корень кратности два):

$$D = 0,\quad \lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x};$$

3) корни характеристического уравнения – комплексные числа:

$$D < 0,\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ y_{оо} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Чтобы решить ЛНДУ, осталось найти $y_{чн}$. Мы найдем его методом подбора частных решений по специальной правой части. Вспомним необходимую теорию. Если правая часть ЛНДУ имеет вид

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

то тогда частное решение можно искать в виде

$$y_{чн}(x) = e^{ax}(\tilde{P}_s(x)\cos bx + \tilde{Q}_s(x)\sin bx)\cdot x^r,$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $s = \max(n, m)$; $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами, r – число повторений $a + bi$ среди корней характеристического уравнения. Для предотвращения ошибок распишем $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ для $s = 0, 1, 2, 3.$

$$\tilde{P}_0(x) = A,\ \tilde{P}_1(x) = Ax + B,\ \tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C,\ \tilde{P}_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

где A, B, C, D – неизвестные коэффициенты.

Возвращаемся к решению нашего уравнения. Правая часть имеет вид:

$$f(x)=\cos 3x=e^{0\cdot x}(1\cdot\cos 3x+0\cdot\sin 3x)=e^{0\cdot x}(P_0(x)\cdot\cos 3x+Q_0(x)\cdot\sin 3x),$$

тогда $a=0, b=3, n=m=0, s=\max(0,0)=0;$ число $a+bi=0+3i=3i$ не встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2-3i;2+3i,$ значит $r=0.$ Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x)=e^{0\cdot x}(\tilde{P}_0(x)\cos 3x+\tilde{Q}_0(x)\sin 3x)\cdot x^0=A\cos 3x+B\sin 3x,$$

помним, что для неизвестных коэффициентов $\tilde{P}_s(x),\tilde{Q}_s(x)$ не должны использоваться одинаковые обозначения. Например, было бы **ошибкой** написать, что $y_{чн}(x)=A\cos 3x+A\sin 3x.$

Чтобы найти $A, B,$ подставим частное решение в исходное ЛНДУ:

$$y''_{чн}-4y'_{чн}+13y_{чн}=\cos 3x.$$

Найдем $y'_{чн}, y''_{чн}$:

$$y'_{чн}=(A\cos 3x+B\sin 3x)'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,$$
$$y''_{чн}=(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)'=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$$

Найденные производные подставляем в уравнение:

$$(-9A\cos 3x-9B\sin 3x)-4(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+13(A\cos 3x+B\sin 3x)=\cos 3x.$$

В левой части соберем все коэффициенты перед $\cos 3x$ и $\sin 3x$:

$$(4A-12B)\cos 3x-(4B+12A)\sin 3x=\cos 3x.$$

Получаем, что

$$\begin{cases}4A-12B=1,\\12A+4B=0;\end{cases}\quad \begin{cases}-12A+36B=-3,\\12A+4B=0;\end{cases} + \quad \begin{cases}40B=-3,\\12A+4B=0;\end{cases}\quad \begin{cases}B=-\dfrac{3}{40},\\12A+4B=0;\end{cases}\quad \begin{cases}B=-\dfrac{3}{40},\\A=-\dfrac{B}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}B=-\dfrac{3}{40},\\A=\dfrac{1}{40}.\end{cases}$$

Таким образом

$$y(x)=y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+A\cos 3x+B\sin 3x=$$
$$=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{1}{40}\cos 3x-\frac{3}{40}\sin 3x.$$

б) $y''+2y'+y=2x^3+4x^2-6x+1.$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0,\ D=4-4\cdot 1=0,\ \lambda_{1,2}=\frac{-2\pm 0}{2}=-1;-1.$$

А значит общее решение ЛОДУ будет: $y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Чтобы решить ЛНДУ, осталось найти $y_{чн}$. Мы найдем его методом подбора частных решений по специальной правой части. Правая часть имеет вид:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1 = e^{0\cdot x}((2x^3 + 4x^2 - 6x + 1)\cdot\cos 0x + 0\cdot\sin 0x) =$$
$$= e^{0\cdot x}(P_3(x)\cdot\cos 0x + Q_0(x)\cdot\sin 0x),$$

тогда $a = 0, b = 0, n = 3, m = 0, s = \max(3,0) = 3;$ число $a + bi = 0 + 0i = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$ значит $r = 0.$ Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{0\cdot x}(\tilde{P}_3(x)\cos 0x + \tilde{Q}_3(x)\sin 0x)\cdot x^0 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Чтобы найти A, B, C, D подставим частное решение в исходное ЛНДУ:

$$y''_{чн} + 2y'_{чн} + y_{чн} = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1.$$

Найдем $y'_{чн}, y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$
$$y''_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B.$$

Найденные производные подставляем в уравнение:

$$(6Ax + 2B) + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1.$$

В левой части соберем все коэффициенты перед одинаковыми степенями x:

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C + D) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1.$$

Получаем, что

$$\begin{cases} A = 2, \\ 6A + B = 4, \\ 6A + 4B + C = -6, \\ 2B + 2C + D = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = 4 - 6A, \\ C = -6 - 6A - 4B, \\ D = 1 - 2B - 2C; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = -8, \\ C = -6 - 6\cdot 2 - 4\cdot(-8) = 14, \\ D = 1 - 2(-8) - 2\cdot 14 = -11. \end{cases}$$

Таким образом

$$y(x) = y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D =$$
$$= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 2x^3 - 8x^2 + 14x - 11.$$

в) $y''' - y'' - y' + y = 6e^x$.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0,$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0,$$
$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$
$$\lambda_1=-1, \lambda_{2,3}=1.$$

А значит общее решение ЛОДУ будет: $y_{oo}=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3xe^x$.

Помним, что если

1) $\lambda\in\mathbb{R}$ – корень кратности m, то решениями ЛОДУ будут функции $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}$, …, $x^m e^{\lambda x}$;

2) $\lambda_{1,2}=a\pm bi\in\mathbb{C}$ – корни кратности m, то решениями ЛОДУ будут функции $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx, xe^{ax}\sin bx, \; x^2e^{ax}\cos bx, x^2e^{ax}\sin bx, ..., x^m e^{ax}\cos bx, x^m e^{ax}\sin bx.$

Чтобы решить ЛНДУ, осталось найти $y_{чн}$. Мы найдем его методом подбора частных решений по специальной правой части. Правая часть имеет вид:

$$f(x)=6e^x=e^{1\cdot x}(6\cdot\cos 0x+0\cdot\sin 0x)=$$
$$=e^x(P_0(x)\cdot\cos 0x+Q_0(x)\cdot\sin 0x),$$

тогда $a=1, b=0, n=0, m=0, s=\max(0,0)=0;$ число $a+bi=1+0i=1$ встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_1=-1, \lambda_{2,3}=1$ два раза, значит $r=2$. Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x)=e^{1\cdot x}(\tilde{P}_0(x)\cos 0x+\tilde{Q}_0(x)\sin 0x)\cdot x^2=Ax^2e^x.$$

Чтобы найти A подставим частное решение в исходное ЛНДУ:

$$y'''_{чн}-y''_{чн}-y'_{чн}+y_{чн}=6e^x.$$

Найдем $y'_{чн}, y''_{чн}, y'''_{чн}$:

$$y'_{чн}=(Ax^2e^x)'=2Axe^x+Ax^2e^x=e^x(Ax^2+2Ax),$$
$$y''_{чн}=(e^x(Ax^2+2Ax))'=e^x(2Ax+2A)+e^x(Ax^2+2Ax)=e^x(Ax^2+4Ax+2A),$$
$$y'''_{чн}=(e^x(Ax^2+4Ax+2A))'=e^x(2Ax+4A)+e^x(Ax^2+4Ax+2A)=e^x(Ax^2+6Ax+6A).$$

Найденные производные подставляем в уравнение:

$$e^x(Ax^2+6Ax+6A)-e^x(Ax^2+4Ax+2A)-e^x(Ax^2+2Ax)+Ax^2e^x=6e^x.$$

Поделим обе части уравнения на e^x и соберем все коэффициенты перед одинаковыми степенями x:

$$(A-A+A-A)x^2+(6A-4A-2A)x+(6A-2A)=6,$$
$$4A=6,$$
$$A=\frac{3}{2}.$$

Таким образом

$$y(x) = y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3xe^{x} + Ax^2e^{x} = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3xe^{x} + \frac{3}{2}x^2e^{x}.$$