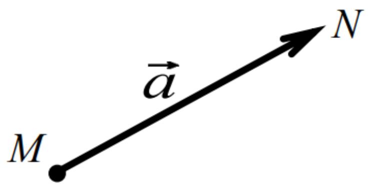
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Понятие вектора.

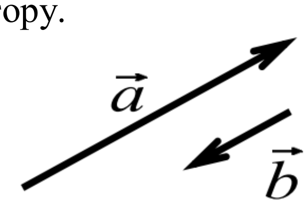
При изучении различных явлений природы встречаются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений. Такие величины называются ***скалярными*** (или ***скалярами***). Примером скаляров являются длина, площадь, объем, температура. Помимо скалярных величин встречаются такие, для определения которых, кроме числового значения, требуется знать также их направление (например, скорость, ускорение материальной точки). Такие величины называются ***векторными***. Векторные величины изображаются с помощью векторов.

Вектором будем называть направленный отрезок, то есть отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а другая – за конец. Если точка M начало вектора, а точка N его конец, то вектор обозначают $\overrightarrow{MN}$. Вектор можно также обозначать малой латинской буквой со стрелкой (или чертой) над ней $\vec{a}$. Изображается вектор отрезком со стрелкой на конце.



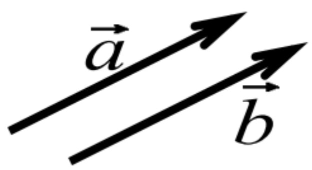
Расстояние между ограничивающими точками вектора называется ***длиной*** или ***модулем вектора*** и обозначается $|\overrightarrow{MN}|$. Вектор $\vec{a}$, длина которого равна единице называется ***единичным вектором***. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Направление нулевого вектора не определено, длина его считается равной нулю.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными.*** Обозначаются $\vec{a}||\vec{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если:

1) они коллинеарны;
2) имеют одинаковую длину;
3) имеют одинаковое направление.



В случае равенства векторов записывают $\vec{a} = \vec{b}$. ***Все нулевые векторы считаются равными***.

Понятие равенства векторов отличается от понятия равенства скалярных величин. Из последнего определения следует, что равными будут не только полностью совпадающие векторы, то есть имеющие общую начальную и общую конечную точки, но и те, которые можно совместить при помощи параллельного переноса. Итак:

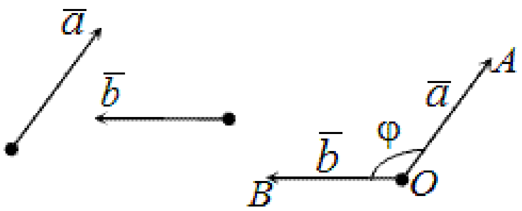
если точка приложения вектора может быть любой, то есть его можно переносить, то вектор называется ***свободным***;

вектор называется ***скользящим***, если его можно перемещать вдоль прямой, проходящей через начало и конец вектора;

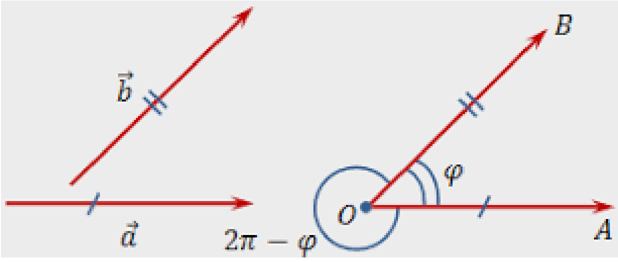
векторы, для которых точка приложения имеет существенное значение, называются ***связанными*** (например, сила, действующая на тело).

Из определения равенства векторов следует, что свободный вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства.

Рассмотрим два свободных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поместим начальные точки этих векторов в одну точку, то есть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. ***Углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол φ, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

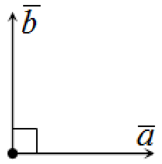


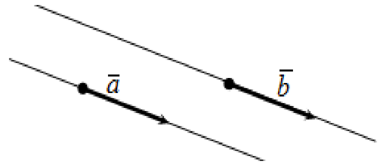
Непосредственно из определения следует, что угол между векторами $0 \le \varphi \le \pi$.

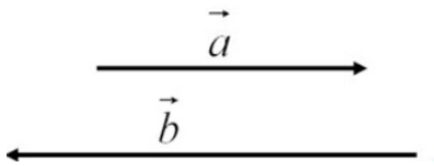


Если угол φ между векторами равен:

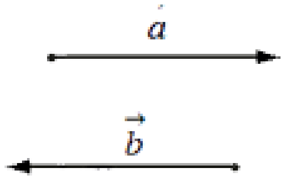
$\varphi = \frac{\pi}{2}$, то вектора называются ***ортогональными***: $\vec{a} \perp \vec{b}$	$\varphi = 0$, то вектора называются ***сонаправленными***: $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$	$\varphi = \pi$, то вектора называются ***противоположно направленными***: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$







Два коллинеарных, отличных от нулевого, вектора имеющие равную длину, но противоположно направленные, называются ***противоположными***. Противоположный к вектору $\vec{a}$ обозначается $-\vec{a}$.



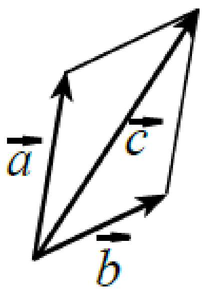
Нулевой вектор считается как ортогональным, так и коллинеарным любому вектору. Три вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

§2. Линейные операции над векторами.

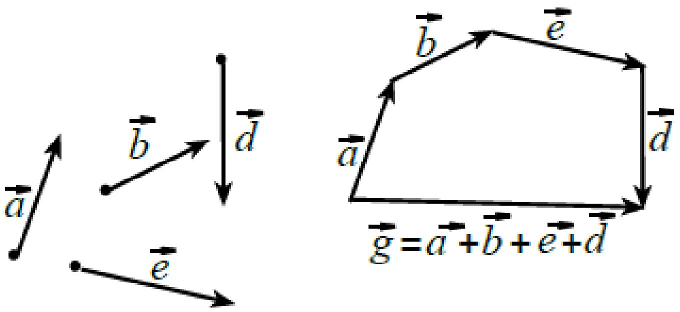
Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два свободных вектора. Выберем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, а затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго, называется суммой этих векторов и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется ***правилом треугольников***:

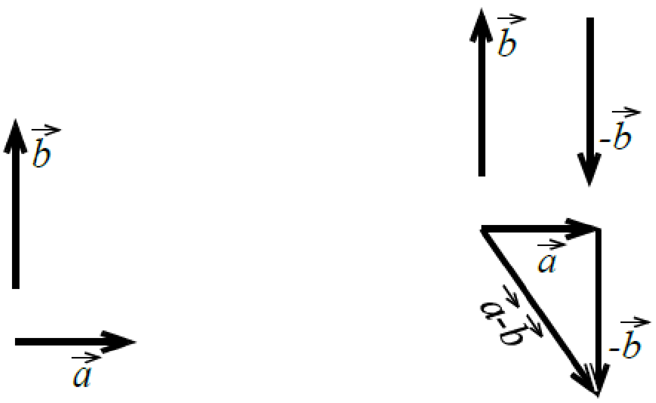
Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм $OACB$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, служащий диагональю этого параллелограмма, проведенной из вершины O, является суммой векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется ***правилом параллелограмма.***



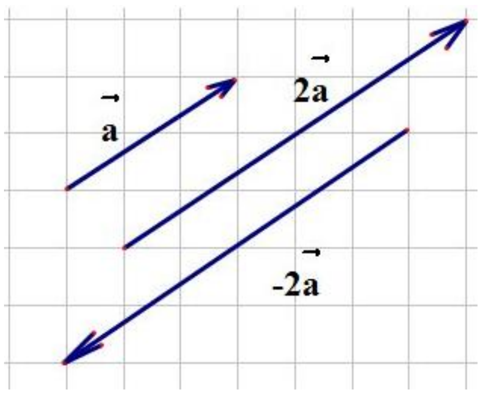
Понятие суммы векторов, введенное для двух слагаемых векторов, можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых. При сложении нескольких векторов начало следующего вектора помещается в конец предыдущего. Суммой векторов является вектор, проведенный из начала первого в конец последнего из векторов. Такое правило сложения называется ***правилом многоугольника***:



Разность двух векторов $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного к вектору $\vec{b}$, то есть $-\vec{b}$. Из определения суммы векторов следует правило построения вектора разности. Откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ из общей точки O. Вектор $\overrightarrow{BA}$, соединяющий концы уменьшаемого вектора $\vec{a}$ и вычитаемого вектора $\vec{b}$ и направленный от вычитаемого к уменьшаемому, является разностью $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.



Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\vec{b}$ такой, что его длина $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\lambda>0$ и противоположно направлены, если $\lambda<0$.



В случае, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a}$ представляет собой нулевой вектор.

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим единичный вектор $\vec{a}_0$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный. Из определения умножения вектора на число следует, что,

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0,$$

то есть ***каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления***. Далее из того же определения следует, что если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\vec{a}$ ненулевой вектор, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и, обратно, из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Таким образом, ***два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.***

Несложно убедиться, что для линейных операций над векторами имеют место следующие свойства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (***коммутативность относительно сложения векторов***);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (***ассоциативность относительно сложения векторов***);

3) $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (***ассоциативность умножения вектора на число***);

4) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (***дистрибутивность относительно сложения векторов***);

5) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (***дистрибутивность относительно сложения чисел***).

§3. Разложение вектора по базису.

Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Она называется ***линейно зависимой***, если существуют некоторые числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0.$$

Если последнее равенство имеет место только при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0,$$

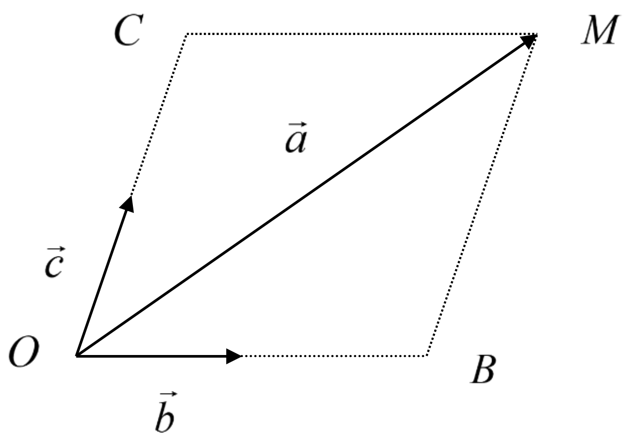
то ***система векторов называется линейно независимой***.

Несложно доказать, что ***если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных. Справедливо и обратное.***

Выберем на плоскости любых три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и рассмотрим следующие случаи:

1. Среди данных векторов имеется пара коллинеарных, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$, то есть вектор $\vec{a}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. Среди данных векторов нет ни одной пары коллинеарных. Поместим вектора в общее начало и покажем, что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых коллинеарен вектору $\vec{b}$, а другой – вектору $\vec{c}$.



Через конец M вектора $\vec{a}$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, до их пересечения в точках B и C с прямыми, на которых соответственно расположены векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Имеем очевидное равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Так как векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то $\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \lambda_2 \vec{c}$. Поэтому $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$. Следовательно, вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема. ***Всякие три вектора на плоскости линейно зависимы***.

Из этой теоремы следует, что:

1) если число данных векторов на плоскости больше или равно трем, то они линейно зависимы;

2) для того, чтобы два вектора на плоскости были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны;

3) максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

Аналогичные выводы можно получить относительно расположения векторов в пространстве:

1) если число данных векторов в пространстве больше или равно четырем, то они линейно зависимы;

2) для того, чтобы три вектора в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны;

3) максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

Базисом на плоскости назовем два любых линейно независимых вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Базисом в пространстве назовем три любых линейно независимых вектора пространства, взятые в определенном порядке.

Из выше доказанного следует, что ***два любых неколлинеарных вектора образуют базис***.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный ненулевой вектор на плоскости, а векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис. Так как на плоскости всякие три вектора линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, то есть выполняется соотношение $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$. Если вектор $\vec{a}$ представлен в таком виде, то говорят, что он ***разложен по базису***, образованному векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Числа λ_1 и λ_2 называют ***координатами вектора*** $\vec{a}$ ***на плоскости*** относительно базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Другими словами, ***каждому вектору на плоскости в заданном базисе соответствует единственная пара чисел, взятых в определенном порядке. Справедливо и обратное: каждой паре чисел, взятых в определенном порядке, соответствует в заданном базисе единственный вектор на плоскости.*** Отсюда непосредственно следует, что ***необходимым и достаточным условием равенства двух векторов, заданных в некотором базисе своими координатами, является равенство соответствующих координат.***

Аналогично определяются координаты вектора в пространстве относительно заданного базиса. ***Базис будем называть ортонормированным***, если базисные векторы попарно ортогональны и каждый базисный вектор является единичным.

Если вектор $\vec{a}$ в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, то будем записывать $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Пусть в пространстве задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и векторы

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3\ ,\ \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3.$$

Сложив эти векторы, получим

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3.$$

Каждая координата суммы векторов в некотором базисе равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов в том же базисе.

Умножим вектор $\vec{a}$ на число λ, получим

$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3)$ или $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3)$.

Каждая координата вектора $\lambda\vec{a}$ ***в некотором базисе равна произведению числа*** λ ***на соответствующую координату вектора*** $\vec{a}$ ***в том же базисе.***

Пусть ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3 = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3)$. Из этого равенства следует, что $\beta_1 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$ или

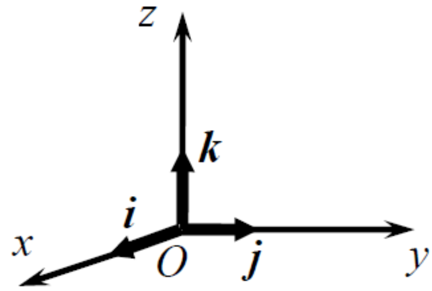
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат в заданном базисе.

Одно из основных значений базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами – координатами этих векторов в заданном базисе.

§4. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.

Совокупность некоторой точки O пространства и ортонормированного базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ называется ***декартовой прямоугольной системой координат в пространстве***. Точка O называется ***началом координат***. Ось, проходящая через точку O и имеющая направление вектора $\vec{e}_1$, называется осью Ox или ***осью абсцисс***. Ось, проходящая через точку O и имеющая направление вектора $\vec{e}_2$, называется осью Oy или ***осью ординат***. Ось, проходящая через точку O и имеющая направление вектора $\vec{e}_3$, называется осью Oz или ***осью аппликат***. Оси Ox, Oy, Oz называются ***осями координат***. Плоскости, проходящие через две оси координат, называются ***координатными плоскостями***. Декартову прямоугольную систему координат в пространстве будем обозначать $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ или $Oxyz$. Базисные векторы декартовой прямоугольной системы координат часто обозначают $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.



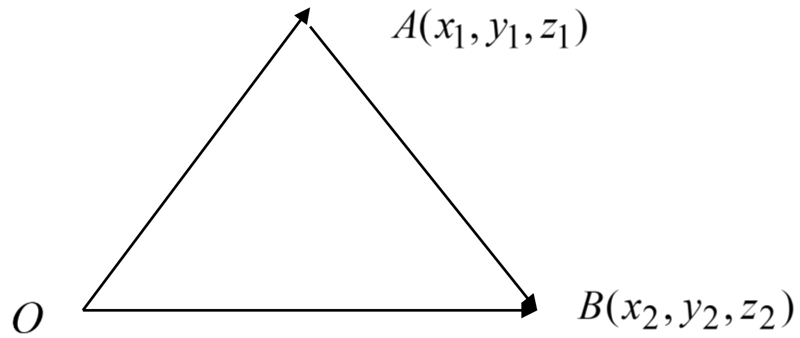
Хотя многие утверждения и свойства справедливы в произвольной декартовой системе координат, в дальнейшем изложении система координат будет подразумеваться прямоугольной декартовой, если специально не оговорено иное.

Радиус–вектором точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, то есть вектор, проведенный из начала координат в эту точку. Выберем некоторую точку M пространства и пусть радиус–вектор этой точки представлен в виде следующей линейной комбинации базисных векторов $\overrightarrow{OM}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$. Координаты α_1,α_2,a_3 вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ называются координатами точки M в декартовой прямоугольной системе координат $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ и используют обозначение $M(\alpha_1,\alpha_2,a_3)$. Первая координата называется ***абсциссой***, вторая – ***ординатой***, третья – ***аппликатой***.

Каждой точке M в заданной декартовой прямоугольной системе координат в пространстве соответствует единственная упорядоченная тройка чисел. Справедливо и обратное.

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Так как координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ совпадают с координатами точек A и B, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

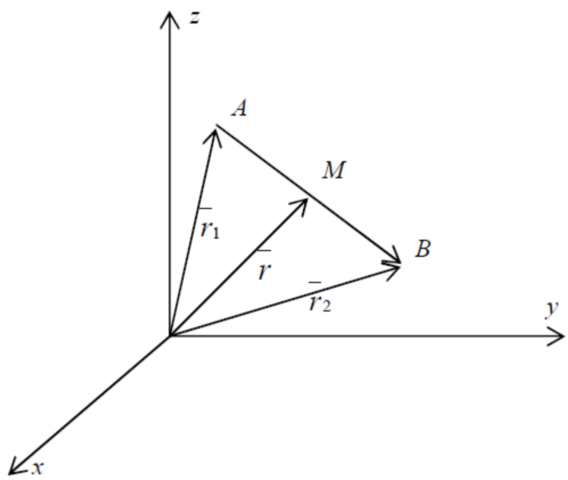
Для того чтобы найти координаты вектора в некоторой декартовой прямоугольной системе координат по известным координатам ограничивающих его точек нужно от координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.



Рассмотрим далее точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. На прямой AB требуется найти точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении λ так, чтобы

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

Если искомая точка M лежит между точками A и B, то такое ***деление отрезка*** AB называется ***внутренним***, и λ в этом случае положительно. Если точка M вне отрезка AB (на его продолжении), то такое ***деление*** называется ***внешним***, и λ при этом отрицательно.



Из введенных ранее операций сложения векторов и умножения вектора на число

$$\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r_1},\ \overrightarrow{MB} = \vec{r_2} - \vec{r}$$

и условие $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ в координатах перепишется в виде

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Эти формулы известны под названием ***формул деления отрезка в заданном отношении***. При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок AB пополам, и формулы принимают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

то есть координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концов.

§5. Нелинейные операции над векторами.

5.1. Скалярное произведение векторов и его свойства.

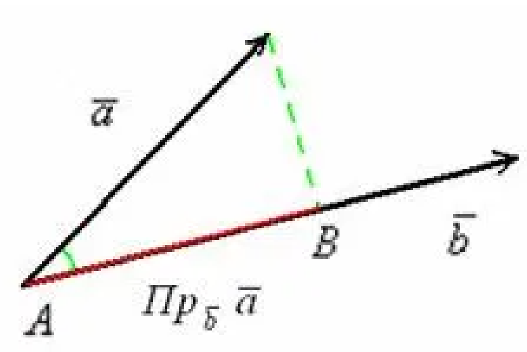
Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух заданных векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению считается равным нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Если угол между ними равен φ, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Так как $|\vec{b}|\cos\varphi$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на ось с направлением вектора $\vec{a}$ (обозначают $np_{\vec{a}}\vec{b}$), а $|\vec{a}|\cos\varphi$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось с направлением вектора $\vec{b}$ ($np_{\vec{b}}\vec{a}$), то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в следующем виде

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a},$$

то есть ***скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось с направлением первого.***



Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (***коммутативность***).

2) $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$ для любого числа α.

Докажем это свойство. Пусть φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

При $\alpha>0$: $(\alpha\vec{a},\vec{b})=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\alpha(\vec{a},\vec{b})$.

При $\alpha<0$: $(\alpha\vec{a},\vec{b})=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\varphi)=-\alpha|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\varphi)=\alpha(\vec{a},\vec{b})$, так как в этом случае угол между векторами $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\pi-\varphi$.

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$ (***дистрибутивность***).

4) Скалярное произведение вектора самого на себя (***скалярный квадрат вектора***) равно квадрату его длины: $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$.

Из свойств скалярного умножения и линейных операций над векторами следует, что ***векторы можно перемножать скалярно как многочлены.***

Из определения скалярного произведения векторов следует, что косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

и ***вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.***

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы своими координатами векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k},\ \vec{b}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}.$$

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты в заданной декартовой системе координат. Согласно свойствам скалярного произведения

$$(\vec{a},\vec{b})=(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k},\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k})=\alpha_1\beta_1(\vec{i},\vec{i})+$$
$$+\alpha_1\beta_2(\vec{i},\vec{j})+\alpha_1\beta_3(\vec{i},\vec{k})+\alpha_2\beta_1(\vec{j},\vec{i})+\alpha_2\beta_2(\vec{j},\vec{j})+$$
$$+\alpha_2\beta_3(\vec{j},\vec{k})+\alpha_3\beta_1(\vec{k},\vec{i})+\alpha_3\beta_2(\vec{k},\vec{j})+\alpha_3\beta_3(\vec{k},\vec{k}).$$

Так как базис ортонормированный, то длины базисных векторов равны единицы, а, следовательно, и скалярные квадраты этих векторов также равны единице. С другой стороны, вектора базиса попарно перпендикулярны, поэтому их попарные скалярные произведения равны нулю. Таким образом

$$(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

В декартовой прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Используя это правило, имеем $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ откуда

$$|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$$

длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат.

Из определения скалярного произведения и правил выражения скалярного произведения векторов и длины вектора через их координат в заданной декартовой системе координат, следует, что косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

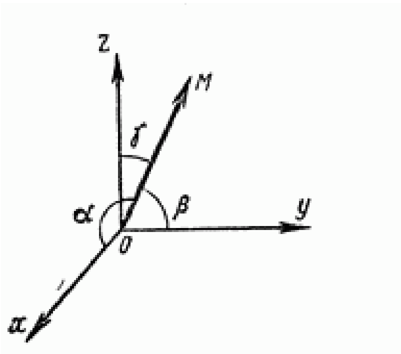
Из последнего выражения ***необходимое и достаточное условие ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных декартовыми координатами, выражается равенством*** $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Выразим расстояние между этими точками через их координаты. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,то расстояние между этими точками равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Расстояние между двумя точками, заданными декартовыми координатами, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

Пусть дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. Обозначим углы наклона этого вектора к осям Ox, Oy, Oz соответственно буквами α, β и γ.



Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\vec{a}$. Координаты первого базисного вектора $\vec{i}\,(1,0,0)$, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Аналогично

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Из последних формул следует:

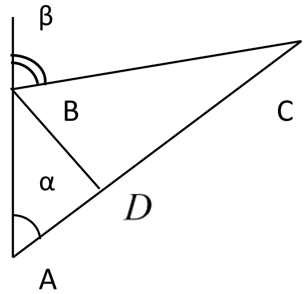
1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. ***Сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице***;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{x}=\dfrac{\cos\beta}{y}=\dfrac{\cos\gamma}{z}$. ***Направляющие косинусы вектора пропорциональны его координатам.***

Обозначим через $\vec{a}_0$ вектор $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Вектор $\vec{a}_0$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$ и имеет единичную длину. Из определения умножения вектора на число следует, что для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$, где $\vec{a}_0$ $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

Пример. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$A(1;-2;-1),\ B(5;2;-3),\ C(4;-2;3)$.



Найти: а) длину стороны AB;
б) проекцию стороны AB на AC, то есть AD; в) внутренний угол при вершине A; г) внешний угол при вершине B.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{4;4;-2\}$,

$$\overrightarrow{AC}=\{3;0;4\},\quad \overrightarrow{BC}=\{-1;-4;6\}:$$

а) Длина стороны AB равна

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=6.$$

б) Находя длину вектора $\overrightarrow{AC}$: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$, получаем

$$np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{4\cdot3+4\cdot0-2\cdot4}{5}=\frac{12-8}{5}=0{,}8.$$

в) для угла $\alpha=\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}$ имеем:

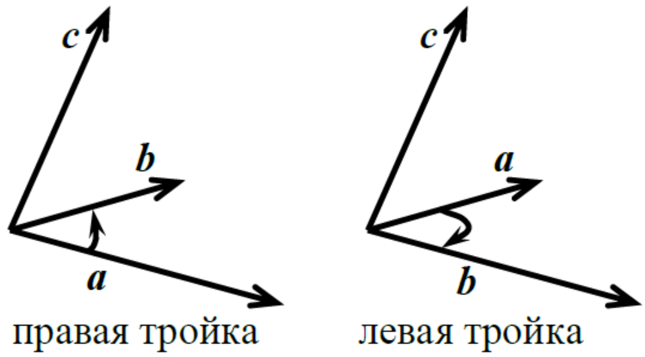
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{4}{6\cdot5}=\frac{2}{15},\ \alpha=\arccos\frac{2}{15}.$$

г) для угла $\beta=\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}$ имеем:

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{4\cdot(-1)+4\cdot(-4)-2\cdot6}{6\cdot\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+6^2}}=\frac{-32}{6\cdot\sqrt{53}},\ \beta=\pi-\arccos\left(\frac{16}{3\sqrt{53}}\right).$$

5.2. Векторное произведение векторов.

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в определенном порядке, и приведем их к общему началу: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Будем говорить, что ***данные вектора имеют правую ориентацию (образуют правую тройку)***, если из конечной точки вектора $\overrightarrow{AD}$ поворот от вектора $\overrightarrow{AB}$ к вектору $\overrightarrow{AC}$ по кратчайшему пути виден против часовой стрелки. В противном случае ***тройку называют левой***.



Несложно убедиться, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, то, поменяв местами любые два вектора, получим левую тройку. При круговой перестановке векторов ориентация троек не изменяется, то есть тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ имеют одинаковую ориентацию.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой что:

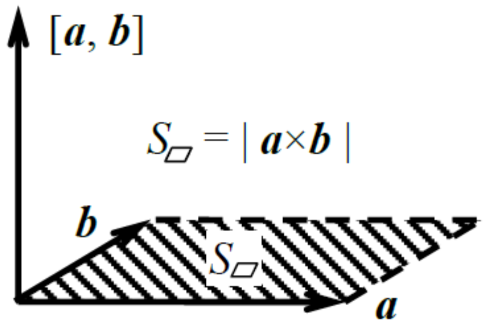
1) его длина равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) он ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

По определению считается, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения векторного произведения следует, что модуль вектора $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу.



Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$. Нарушение коммутативности происходит за счет изменения ориентации тройки при перестановке любых двух векторов.

2. $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\lambda\vec{b}]$, где λ – скаляр.

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону:

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}].$$

4. Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

Из определения и свойств векторного произведения следует, если декартова прямоугольная система координат имеет правую ориентацию, то, перемножая векторно базисные вектора, можно составить таблицу

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, имеющей правую ориентацию, вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k},\ \vec{b} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}.$$

Выразим координаты векторного произведения этих векторов через координаты сомножителей. По свойствам векторного произведения имеем

$$[\vec{a},\vec{b}] = [\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}, \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}] = \alpha_1\beta_1[\vec{i},\vec{i}] +$$

$$+\alpha_1\beta_2[\vec{i},\vec{j}] + \alpha_1\beta_3[\vec{i},\vec{k}] + \alpha_2\beta_1[\vec{j},\vec{i}] + \alpha_2\beta_2[\vec{j},\vec{j}] +$$

$$+\alpha_2\beta_3[\vec{j},\vec{k}] + \alpha_3\beta_1[\vec{k},\vec{i}] + \alpha_3\beta_2[\vec{k},\vec{j}] + \alpha_3\beta_3[\vec{k},\vec{k}].$$

или используя предыдущую таблицу

$$[\vec{a},\vec{b}] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Для удобства запоминания последняя формула записывается в виде определителя третьего порядка

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

который затем разлагается по элементам первой строки.

Пример. Найти площадь треугольника ABC, если координаты вершин $A(1,2,-1)$, $B(3,3,2)$, $C(2,-1,1)$.

Решение. Из геометрического смысла векторного произведения искомая площадь $S = 0{,}5 \cdot \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}(2,1,3)$ и $\overrightarrow{AC}(1,-3,2)$. Подставляя эти координаты в определитель

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}..$$

Используя далее выражение длины вектора через координаты

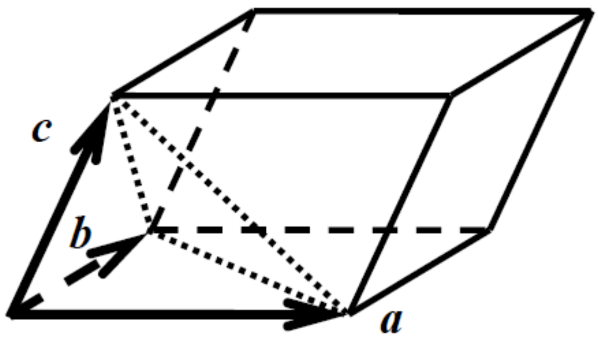
$$S = 0{,}5\sqrt{11^2 + 1^2 + 7^2} = 1{,}5\sqrt{19}.$$

5.3. Смешанное произведение векторов.

Пусть даны три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Умножим векторно вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ и полученный вектор умножим скалярно на вектор $\vec{c}$. Полученное число называется ***векторно–скалярным*** или ***смешанным произведением трех векторов*** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Смешанное произведение будем обозначать

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]).$$

Геометрически, модуль смешанного произведения трех некомпларных векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного как на ребрах на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, приведенных к общему началу.



И, как следствие, объем пирамиды, образованной теми же векторами, равен одной шестой модуля смешанного произведения.

Из геометрического смысла смешанного произведения векторов следует, что ***необходимым и достаточным условием компланарности трех ненулевых векторов является равенство нулю их смешанного произведения.***

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

2) Круговая перестановка сомножителей смешанного произведения не меняет его величины, а перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}).$$

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат, имеющей правую ориентацию, вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы координатами

$$\vec{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \vec{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3),\ \vec{c} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3).$$

Выразим смешанное произведение векторов через их координаты.
Как уже установлено,

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Далее по формуле для скалярного произведения получаем:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \gamma_3,$$

или

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, ***смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят соответствующие координаты перемножаемых векторов.***

Пример. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\vec{a} = \{-5;3;2\},\ \vec{b} = \{-6;3;4\},\ \vec{c} = \{-8;6;-5\}.$$

Решение. Объем параллелепипеда равен $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ -8 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -5\cdot(-15-24) - 3\cdot(30+32) + 2\cdot(-36+24) = -15$$

Следовательно, $V = \left|-15\right| = 15$ (куб.ед.)