

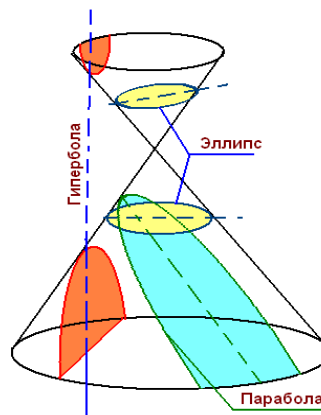
Кривые второго порядка как конические сечения

Впервые кривые второго порядка изучались древнегреческим математиком Менехмом (ок. 380 г. – ок. 320 г. до н.э.). Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится коническая поверхность (бесконечный в обе стороны конус). Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры:

- если плоскость пересекает одну половину конуса, получается эллипс;
- если плоскость пересекает обе половины конуса, то гипербола;
- если плоскость параллельна образующей конуса, получается парабола.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII в., когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Еще позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, при достижении второй космической скорости – по параболе, а при скорости, большей второй космической – по гиперболе. Для Земли вторая космическая скорость равна 11,16 км/с. Тело, имеющее около Земли такую скорость, покидает окрестности Земли и становится спутником Солнца. Для Солнца вторая космическая скорость составляет 617,7 км/с.

Оптические свойства эллипса и гиперболы заключаются в том, что отрезки, проведенные из фокусов к некоторой точке эллипса (гиперболы), образуют равные углы с касательной.



В связи с этим если в один из фокусов эллиптического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись, соберутся в другом фокусе (луч отражается от касательной к эллипсу по правилу «угол падения равен углу отражения»). Если источником является, например, свеча, то предмет, помещенный в другой фокус, может загореться. Отсюда и происходит термин «фокус» (лат. focus – «очаг»), введенный И. Кеплером. На этом свойстве основаны некоторые эффекты с распространением звуковых волн в зданиях с овальными стенами, сводами и др., когда шепотом произнесенное слово в одном из фокусов оказывается слышно в другом.

В результате отражения в гиперболическом зеркале не лучи, исходящие из фокуса, а их продолжения соберутся в другом фокусе: они создадут иллюзию, что источник света находится в другом фокусе.

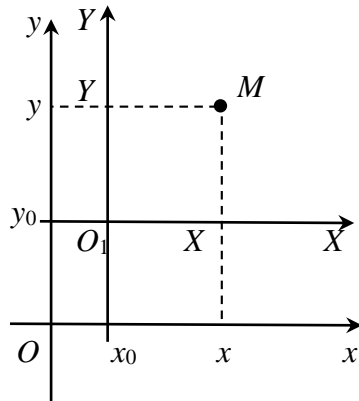
Существует и *оптическое свойство параболы*: параболическое зеркало собирает в одной точке параллельные лучи; в частности, лучи, параллельные оптической оси, собираются в фокусе параболы.

На этом свойстве основано действие зажигательных зеркал, собирающих параллельные солнечные лучи в одной точке. Согласно легенде, Архимед использовал этот принцип при обороне Сиракуз от римлян, поджигая таким образом вражеские корабли. Оптическое свойство параболы широко применяется сегодня в самых различных сферах жизни: карманный фонарик, автомобильные фары, прожекторы и т. д. Широкое применение нашли параболические зеркала и в конструкции телескопов.

§5. Кривые второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Пусть даны две системы Oxy и $O_1X_1Y_1$ декартовых координат на плоскости с разными началами O и O_1 и одинаковым направлением осей. Пусть $O_1(x_0; y_0)$ в системе координат на Oxy . Пусть M – произвольная точка на плоскости. Обозначим через $M(x; y)$ ее координаты в системе координат Oxy ; через $M(X; Y)$ – в системе координат $O_1X_1Y_1$. Тогда

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases}$$



Пусть имеется эллипс с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям Ox и Oy , его уравнение в новой системе координат

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

а значит, в системе координат Oxy уравнение эллипса примет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично для гиперболы с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям Ox и Oy (если действительная ось параллельна Ox), имеем:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

для параболы с вершиной $O_1(x_0; y_0)$ получим

$$Y^2 = \pm 2pX \Leftrightarrow (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0),$$

если ось симметрии параллельна Ox ;

$$X^2 = \pm 2pY \Leftrightarrow (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0),$$

если ось симметрии параллельна Oy .

Заметим, что после преобразований все эти уравнения могут быть записаны в виде

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22} не равен 0.

Для того, чтобы определить тип кривой второго порядка, имея уравнение общего вида, нужно получить ее каноническое уравнение, выделив полный квадрат по каждой переменной. Таким образом, уравнение приводится к каноническому виду с помощью замены переменных

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

которая сводится к параллельному переносу системы координат.

Пример. Построим линию $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат по x и по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

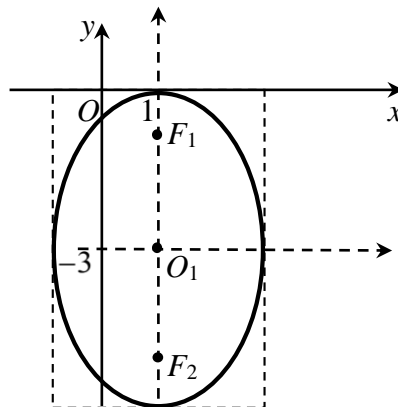
$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 6y) + 9 = 0;$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 6y + 9) - 36 + 9 = 0;$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 36;$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1.$$

Получили уравнение **эллипса** с центром в точке $O_1(1; -3)$ и полуосями $a = 2; b = 3$ (рис. 30).



Отметим, что у этого эллипса $a = 2$ – малая полуось, а $b = 3$ – большая. Фокусы эллипса лежат на его большой оси.

Найдем дополнительно координаты фокусов эллипса. Эти точки будут расположены симметрично относительно центра $O_1(1; -3)$ эллипса на расстоянии c от него, поэтому $F_1(1; -3 + c); F_2(1; -3 - c)$. Величину c найдем из условия $c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$, поэтому $c = \sqrt{5}$, а значит

$$F_1(1; -3 + \sqrt{5}); F_2(1; -3 - \sqrt{5}). \bullet$$

Пример. Построить линию $x^2 + 3y^2 - 4x + 20 = 0$.

Решение. Выделяя полный квадрат по x , получим

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 3y^2 + 20 = 0;$$

$$(x - 2)^2 + 3y^2 = -16.$$

Очевидно, что этому уравнению никакая линия не соответствует.

Пример. Построить линию $x^2 - 4y^2 + 16y = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

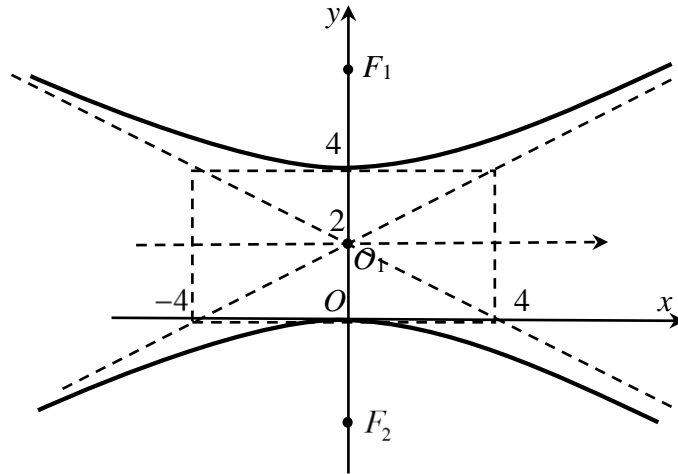
$$x^2 - 4(y^2 - 4y) = 0;$$

$$x^2 - 4(y^2 - 4y + 4) + 16 = 0;$$

$$x^2 - 4(y - 2)^2 = -16;$$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1.$$

Получили уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(0; 2)$ и полуосями $a = 4; b = 2$, причем a – мнимая, b – действительная полуось.



Эта **гипербола** проходит через начало координат – точку с координатами $x=0$; $y=0$, что хорошо видно из исходного уравнения. Ее фокусы лежат на действительной оси симметрично относительно центра $O_1(0; 2)$ гиперболы на расстоянии c от него, поэтому $F_1(0; 2+c)$; $F_2(0; 2-c)$. Величину c найдем из условия

$$c^2 = 4^2 + 2^2 = 20,$$

поэтому $c = 2\sqrt{5}$, а значит $F_1(0; 2+2\sqrt{5})$; $F_2(0; 2-2\sqrt{5})$. •

Пример. Построим линию $y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$.

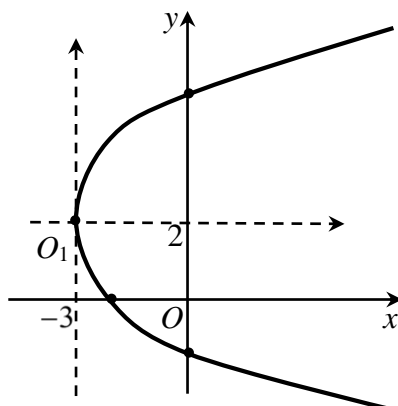
Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 4x - 8 = 0;$$

$$(y - 2)^2 = 4x + 12;$$

$$(y - 2)^2 = 4(x + 3).$$

Получили уравнение **параболы** с вершиной $O_1(-3; 2)$ и осью симметрии $y=2$. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то $x \geq -3$, а значит, ветви параболы направлены вправо. Для уточнения рисунка, найдем точки пересечения параболы с осями координат. На оси Ox переменная $y=0$, поэтому из исходного уравнения получим $-4x-8=0$; $x=-2$. На оси Oy переменная $x=0$, из последнего уравнения получаем $(y-2)^2=12$; $y=2 \pm 2\sqrt{3}$.



Пример. Построим линию $x^2 - 2x - y^2 + 1 = 0$.

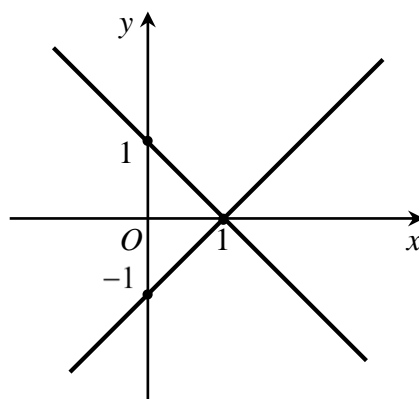
Решение. Выделяя полный квадрат по x , получим

$$(x-1)^2 - y^2 = 0.$$

Раскладывая левую часть на множители, имеем:

$$(x-1-y)(x-1+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1-y=0, \\ x-1+y=0. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение задает на плоскости две пересекающиеся прямые $x-y=1$ и $x+y=1$.



Теорема. Всякое алгебраическое уравнение 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

(в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен 0) задает одну из следующих линий на плоскости: эллипс (возможно, вырожденный эллипс вида $x^2 + y^2 = 0$ (точка) или мнимый эллипс

вида $x^2 + y^2 = -1$), гиперболу, параболу или пару прямых (пересекающихся, параллельных или совпадающих).

Преобразование уравнения к каноническому виду осуществляется с помощью замены переменных вида

$$\begin{cases} X = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + c_1, \\ Y = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + c_2, \end{cases}$$

которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

§6. Поверхности второго порядка. Метод сечений

Поверхностью 2-го порядка называется поверхность, определяемая в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве алгебраическим уравнением 2-й степени с тремя переменными, т. е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равен 0.

В зависимости от значений коэффициентов это уравнение определяет поверхности следующих типов:

- 1) **эллиптический** (эллипсоид, частный случай – сфера);
- 2) **гиперболический** (однополостный и двуполостный гиперболоиды, коническая поверхность);
- 3) **параболический** (эллиптический и гиперболический параболоиды);
- 4) **цилиндрические** поверхности (эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры, пара пересекающихся или пара параллельных плоскостей).

Для того чтобы определить тип поверхности, ее уравнение приводят к наиболее простому **каноническому виду**. Как и в случае кривых 2-го порядка, это можно сделать с помощью замены переменных, которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

При изучении формы поверхностей используется **метод сечений**, который состоит в том, что поверхность пересекают плоскостями и по виду линий пересечения делают вывод о форме самой поверхности. Для простоты в качестве секущих плоскостей рассматривают координатные плоскости и им параллельные.

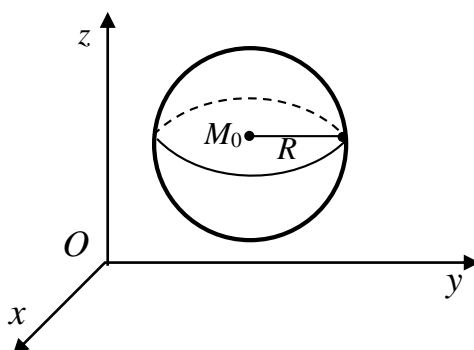
Сфера

Сфера – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая называется **центром сферы**. Расстояние R от центра до точек сферы называется ее **радиусом**.

Если $M(x; y; z)$ – произвольная точка на сфере, то, по определению, расстояние от точки M до точки M_0 должно быть равно R , поэтому

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R \text{ или}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$



Если $x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$, то уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Эллипсоид

Эллипсоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для исследования формы этой поверхности применим метод сечений. Будем пересекать данную поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b . При $|h| < c$ получим линию

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

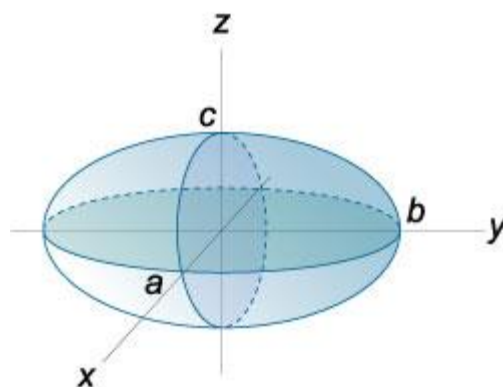
Это уравнение определяет эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \leq a$; $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \leq b$ и уменьшаются с возрастанием $|h|$.

При $|h| = c$ получим точку.

При $|h| > c$ плоскость не пересекается с эллипсоидом.

Аналогичная картина имеет место при пересечении эллипсоида плоскостями $y = h$ и $x = h$.

Таким образом, в сечении эллипсоида любой плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, можно получить пустое множество, точку или эллипс.



Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b . При $h \neq 0$ получим линию

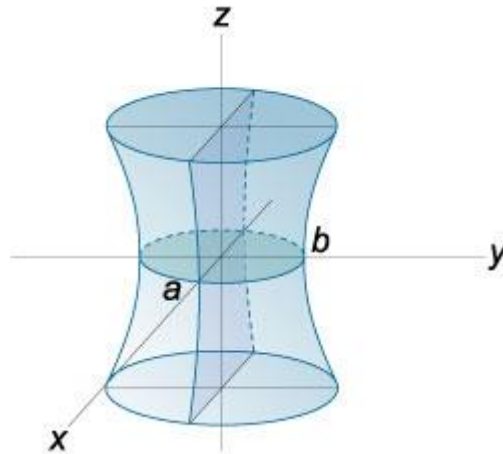
$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

т. е. эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq a$; $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq b$ и увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c . Действительной осью здесь является ось Oy (гипербола пересекает ось Oy в точках b и $-b$), а мнимой – ось Oz .



Двуполостный гиперboloид

Двуполостный гиперboloид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

При $|h| < c$ плоскость не пересекает гиперboloид.

При $|h| = c$ получим в сечении точку.

При $|h| > c$ получим эллипс

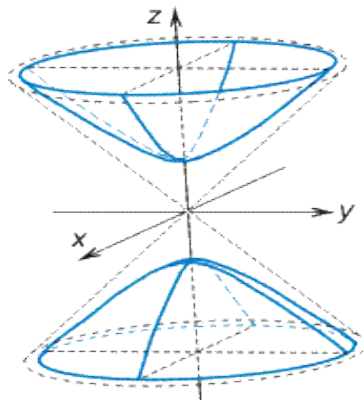
$$\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1,$$

полуоси которого $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$; $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается линия

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c . Действительной осью здесь является ось Oz (гипербола пересекает ось Oz в точках c и $-c$), а мнимой – ось Oy .



Коническая поверхность

Коническая поверхность – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy . При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

При $|h| = 0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h \neq 0$ получим эллипс

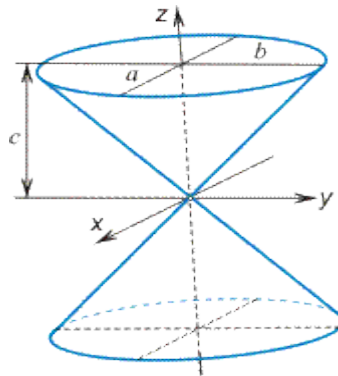
$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{h^2}{c^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{h^2}{c^2}} = 1,$$

полуоси которого $\frac{a}{c}|h|$; $\frac{b}{c}|h|$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

т. е. пара пересекающихся прямых $y = \pm \frac{b}{c} z$.



Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy :

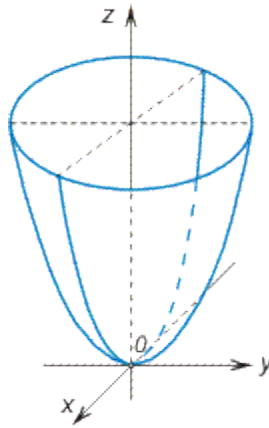
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h.$$

При $h < 0$ пересечения нет.

При $h = 0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h > 0$ получим эллипс с полуосями $a\sqrt{h}$; $b\sqrt{h}$, увеличивающимися с возрастанием h .

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2} = z$ с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz .



Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -z.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -h.$$

При $h = 0$ получим в сечении пару пересекающихся прямых $y = \pm \frac{b}{a}x$. При $h \neq 0$ получим гиперболу

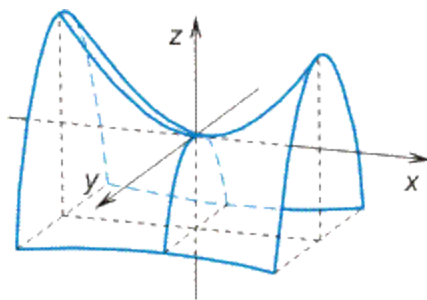
$$-\frac{x^2}{a^2h} + \frac{y^2}{b^2h} = 1.$$

При $h > 0$ эта гипербола пересекает ось Oy (точнее, прямую $x = 0; z = h$, параллельную оси Oy); при $h < 0$ пересекает ось Ox (прямую $y = 0; z = h$, параллельную оси Ox).

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2} = z$, осью симметрии которой является ось Oz , а ветви направ-

лены вверх. Более того, в сечении любой плоскостью $x = h$, параллельной Oyz , получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz , а ветви направлены вверх.

Аналогично, в сечении плоскостью Oxz (при $y = 0$) получается парабола $\frac{x^2}{a^2} = -z$, осью симметрии которой является ось Oz , а ветви направлены вниз. Более того, в сечении любой плоскостью $y = h$, параллельной Oxz , получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz , а ветви направлены вниз.

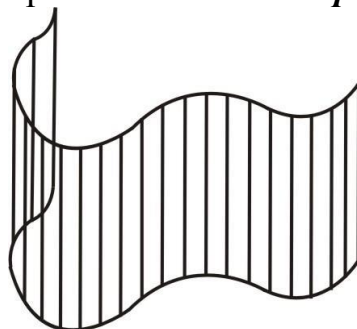


Гиперболический параболоид называют также **седловидной поверхностью**.

Замечание. Гиперболический параболоид можно получить, взяв две параболы с общей вершиной и противоположно направленными ветвями, расположенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и перемещая одну из парабол параллельно самой себе так, чтобы ее вершина двигалась по второй параболе.

§7. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью, или **цилиндром**, называется поверхность, которую можно получить перемещением прямой L , которая называется **образующей**, параллельно самой себе вдоль некоторой кривой K , которая называется **направляющей**.

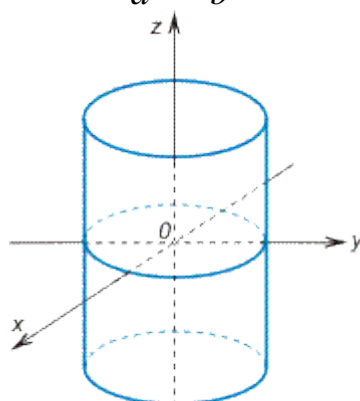


Цилиндрическая поверхность называется **цилиндрической поверхностью 2-го порядка**, если ее направляющей является одна из линий 2-го порядка.

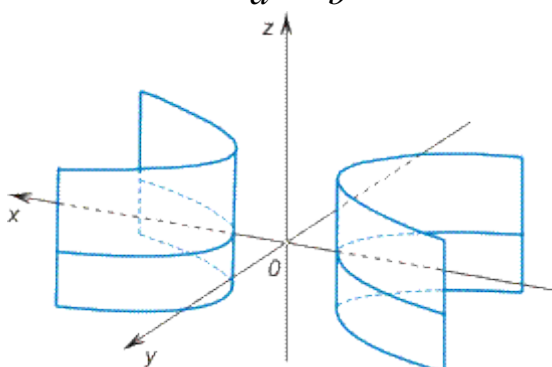
Уравнение второй степени с двумя переменными определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной той координатной оси, переменная которой отсутствует в уравнении. Так, уравнение любой цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz , имеет вид $F(x; y) = 0$.

Рассмотрим цилиндрические поверхности 2-го порядка с образующими, параллельными оси Oz :

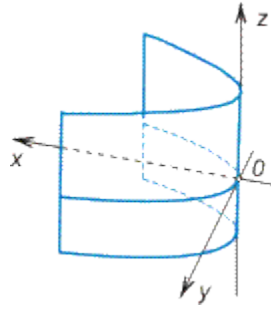
- **эллиптический цилиндр** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;



- **гиперболический цилиндр** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;



- **параболический цилиндр** $y^2 = 2px$.



§8. Способы образования поверхностей

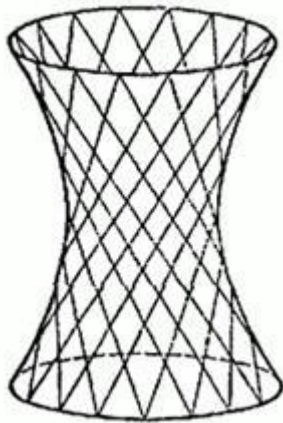
По способу образования поверхностей выделяют линейчатые поверхности и поверхности вращения.

Линейчатая поверхность – это поверхность, которую можно получить движением некоторой прямой линии (*образующей*).

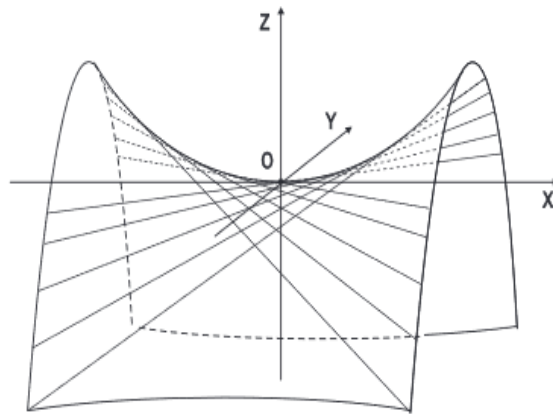
Линейчатыми поверхностями являются:

- цилиндрические поверхности;
- коническая поверхность;
- однополостный гиперболоид;
- гиперболический параболоид (седло).

Интересно, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходит *ровно две прямые*, лежащие на этой поверхности.



а



б

Отметим, что однополостные гиперболоиды нашли применение в практике строительства. Сооружение различных высотных башен с использованием прямолинейных образующих однополостного гиперболоида сочетает в себе прочность конструкции с простотой ее исполнения. Идея использования однополостного гипер-

болоида в строительстве принадлежит русскому и советскому инженеру В. Г. Шухову (1853–1939). По проекту Шухова строились водонапорные башни, опоры линий передач, маяки, а также была построена телевизионная башня на Шаболовке в г. Москве, она состоит из секций однополостных гиперболоидов вращения.

Поверхность вращения – это поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Поверхность, полученная вращением вокруг оси Oz , имеет уравнение $F(x^2 + y^2; z) = 0$. Например,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – эллипсоид вращения;}$$

$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения;

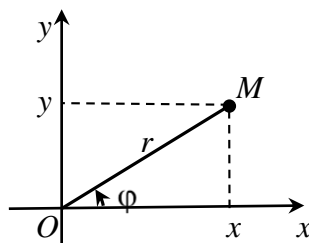
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – круговой конус;}$$

$$x^2 + y^2 = \pm a^2 z \text{ – параболоид вращения (круговой параболоид);}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ – круговой цилиндр.}$$

§ 9. Криволинейные системы координат на плоскости и в пространстве

В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости каждая точка M однозначно определяется двумя своими координатами x и y . С другой стороны, можно охарактеризовать точку M следующим образом: расстоянием r от начала координат (точки O) и углом φ между положительным направлением оси Ox и лучом OM .



Говорят, что на плоскости задана **полярная система координат**, если заданы:

- 1) точка O , которая называется **полюсом**;
- 2) луч OP , выходящий из полюса, который называется **полярным лучом**;
- 3) единица масштаба на полярной оси.

Полярными координатами точки M называется пара чисел $(r; \varphi)$, где:

r – расстояние от точки M до полюса (точки O) – **полярный радиус**;

φ – угол между полярной осью и лучом OM , который отсчитывается против часовой стрелки, как в тригонометрии, – **полярный угол**.

Обычно считается, что полярный радиус удовлетворяет условию $0 \leq r < +\infty$, так как характеризует расстояние. Иногда рассматривают так называемую *обобщенную полярную систему координат*, в которой допускаются отрицательные значения полярного радиуса. Для точки O (полюса) $r = 0$, значение φ не определено.

Любой точке плоскости, кроме полюса, соответствует одно определенное значение r и множество значений φ , отличающихся на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$, называется **главным**.

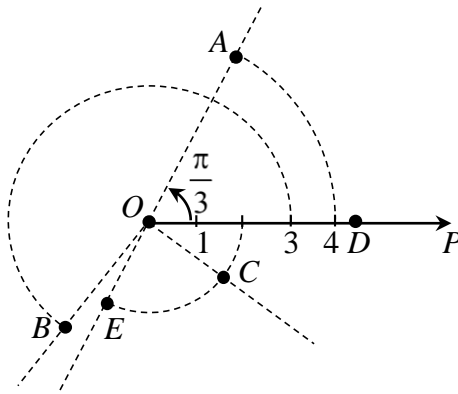
Пример 1. Построим точки $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right); B\left(3; \frac{5\pi}{4}\right); C\left(2; -\frac{\pi}{4}\right); D(4,5; 0); E\left(-2; \frac{\pi}{3}\right)$, заданные полярными координатами.

Решение. Выберем начало отсчета точку O (полюс), зададим направление полярного луча OP и единицу масштаба на полярной оси. Чтобы построить точку $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$, повернем луч OP против ча-

совой стрелки на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и отложим на новом луче отрезок дли-

ной $r = 4$. Аналогично, точка $B\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$ получится, если повернуть

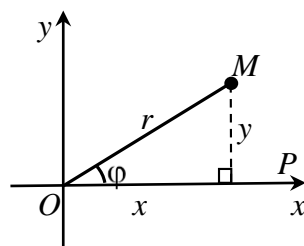
полярную ось OP против часовой стрелки на угол $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ и отложить отрезок длиной $r = 3$.



Чтобы построить точку $C\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$ (с отрицательным значением полярного угла $\varphi = -\frac{\pi}{4}$), нужно повернуть полярную ось по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{4}$. Точка $D(4; 0)$ располагается на полярной оси. Чтобы получить точку $E\left(-2; \frac{\pi}{3}\right)$ (с отрицательным значением полярного радиуса $r = -2$), нужно отложить отрезок длины 2 на продолжении луча $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (луча OA) за точку O .

Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом O , а ось Ox – с полярной осью OP , то **связь между полярными $(r; \varphi)$ и декартовыми $(x; y)$ координатами точки** задается формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



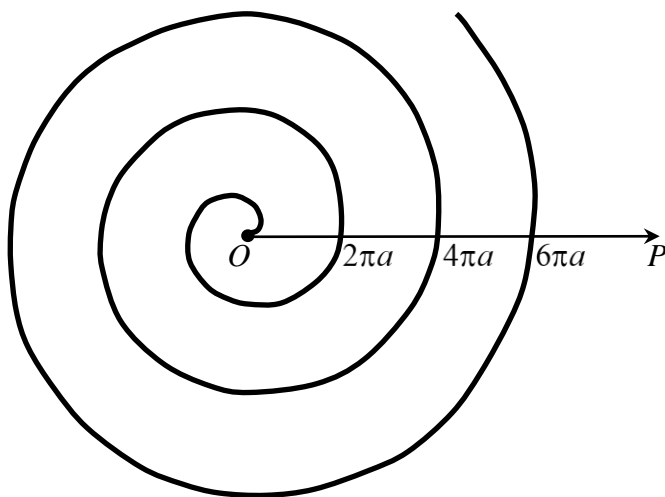
С другой стороны, зная декартовы координаты $(x; y)$ точки, можно определить ее полярные координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Примеры линий, заданных уравнениями в полярных координатах

Пример. Построим *спираль Архимеда* $r = a\varphi$.

Решение. При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ полярный радиус постепенно увеличивается от $r = 0$ до $r = 2\pi a$. Далее, при изменении полярного угла на 2π (полный оборот вокруг полюса) полярный радиус изменяется на одно и то же значение $2\pi a$, т. е. каждый новый виток спирали отстоит от предыдущего и последующего на одно и то же расстояние $2\pi a$.



Пример. Определим, какая линия задается уравнением $r = 2a \cos \varphi$.

Решение. Перейдем к декартовым координатам. Для этого умножим обе части уравнения на r и воспользуемся формулами $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \varphi$. Тогда

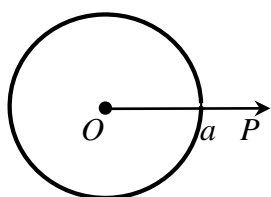
$$r = 2a \cos \varphi; \quad r^2 = 2ar \cos \varphi; \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

Выделяя в последнем уравнении полный квадрат по переменной x , получим

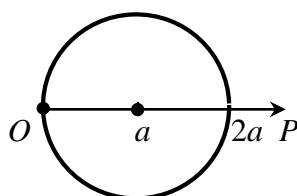
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2; \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, $r = 2a \cos \varphi$ – это уравнение окружности с центром $(a; 0)$ и радиусом $R = a$. •

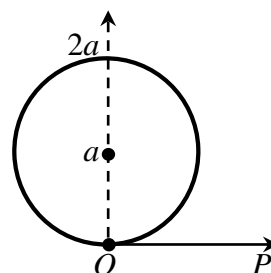
Аналогично, $r = 2a \sin \varphi$ – уравнение окружности с центром $(0; a)$ и радиусом $R = a$.



а
 $r = a$



б
 $r = 2a \cos \varphi$

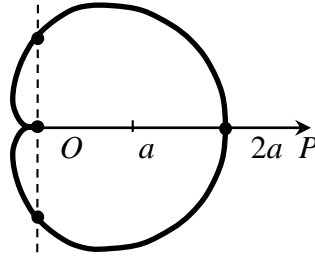


в
 $r = 2a \sin \varphi$

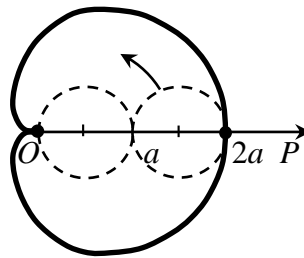
Пример. Построим линию $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\cos \varphi$ имеет период 2π , то все точки линии можно получить, если взять $\varphi \in [0; 2\pi]$.

При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ значения функции $\cos \varphi$ уменьшаются от 1 до -1 , а значения полярного радиуса – соответственно, от $r = 2a$ до $r = 0$. Аналогично, при изменении полярного угла от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$ значения функции $\cos \varphi$ увеличиваются от -1 до 1, значения полярного радиуса – от $r = 0$ до $r = 2a$. Учитывая это, отметим опорные точки с полярными координатами $(2a; 0)$, $\left(a; \frac{\pi}{2}\right)$, $(0; \pi)$, $\left(a; \frac{3\pi}{2}\right)$ и схематически построим линию.



Линия, заданная уравнением $r = a(1 + \cos \varphi)$ (или $r = a(1 - \cos \varphi)$, $r = a(1 + \sin \varphi)$, $r = a(1 - \sin \varphi)$), называется **кардиоидой**. **Кардиоид** – это траектория точки, лежащей на окружности радиуса $\frac{a}{2}$, которая катится по окружности такого же радиуса.



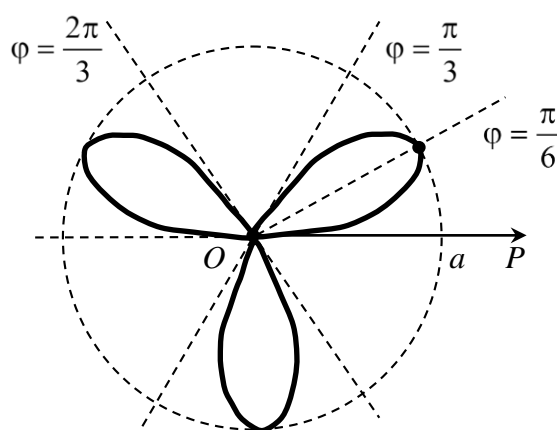
Линия, заданная уравнением вида $r = a + b \cos \varphi$ (или $r = a + b \sin \varphi$), называется **улиткой Паскаля** (в честь Этьена Паскаля (1588–1651), математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля). Линии, заданные уравнениями вида $r = a \cos k\varphi$ (или $r = a \sin k\varphi$), называются **розами**.

Пример. Построим трехлепестковую розу $r = a \sin 3\varphi$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\sin 3\varphi$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, достаточно построить часть линии, соответствующую значениям $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, а затем повернуть картинку на угол $\frac{2\pi}{3}$ дважды, чтобы получить все точки, отвечающие $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Значения полярного радиуса $r \leq a$, т. е. вся линия будет расположена внутри окружности $r = a$. При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{6}$ значения полярного радиуса увеличиваются от

$r=0$ до $r=a$, а при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ значения полярного радиуса уменьшаются от $r=a$ до $r=0$. При $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ получаем $r \leq 0$, т. е. в секторе между $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ точек линии нет (если рассматривать обобщенные полярные координаты, то соответствующие точки будут расположены в секторе между $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{5\pi}{3}$). Отмечая опорные точки, в которых $r=a$, схематически построим линию.



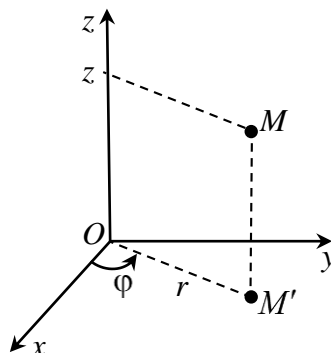
При специальном выборе полярной системы координат (если поместить полюс в один из фокусов кривой 2-го порядка, а полярную ось направить из фокуса по оси кривой в сторону, противоположную той, где лежит соответствующая директриса) уравнение кривой 2-го порядка имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

где ε – эксцентриситет кривой, а p – ее *фокальный параметр* (в случае параболы p – ее параметр; в случае эллипса $p = \frac{a^2}{b}$, где a –

большая, b – малая полуось; в случае гиперболы $p = \frac{a^2}{b}$, где a – действительная, b – мнимая полуось).

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Пусть M' – проекция точки M на плоскость Oxy .



Цилиндрическими координатами точки M называется тройка чисел $(r; \varphi; z)$, где:

r – расстояние от начала координат (точки O) до точки M' ;

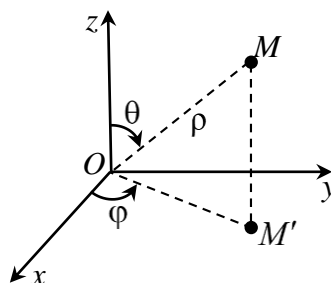
φ – угол между осью Ox и лучом OM' ;

z – аппликата точки M .

Связь между цилиндрическими $(r; \varphi; z)$ и декартовыми $(x; y; z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Обозначим через M' проекцию точки M на плоскость Oxy .



Сферическими координатами точки M называется тройка чисел $(\rho; \theta; \varphi)$, где:

ρ – расстояние от начала координат (точки O) до точки M ;

θ – угол между осью Oz и лучом OM ($0 \leq \theta \leq \pi$);

φ – угол между осью Ox и лучом OM' ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Можно видеть, что связь между сферическими $(\rho; \theta; \varphi)$ и декартовыми $(x; y; z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$