Задание 4

$y'' + 6y' + 9y = f(x).$

Мы найдем частное решение методом подбора по специальной правой части. Вспомним необходимую теорию. Если правая часть ЛНДУ имеет вид

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

то тогда частное решение можно искать в виде

$$y_{чн}(x) = e^{ax}(\tilde{P}_s(x)\cos bx + \tilde{Q}_s(x)\sin bx)\cdot x^r,$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $s = \max(n,m)$; $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами, r – число повторений $a+bi$ среди корней характеристического уравнения. Для предотвращения ошибок распишем $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ для $s = 0,1,2,3.$

$$\tilde{P}_0(x) = A,\ \tilde{P}_1(x) = Ax + B,\ \tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C,\ \tilde{P}_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

где A, B, C, D – неизвестные коэффициенты.

составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,\ D = 36 - 4\cdot 9 = 0,\ \lambda_{1,2} = \frac{-6\pm 0}{2} = -3; -3.$$

а) $f(x) = 5e^{-3x}.$

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = 5e^{-3x} = e^{-3\cdot x}(5\cdot\cos 0x + 0\cdot\sin 0x) = e^{-3\cdot x}(P_0(x)\cdot\cos 0x + Q_0(x)\cdot\sin 0x),$$

тогда $a = -3, b = 0, n = m = 0, s = \max(0,0) = 0;$ число $a + bi = -3 + 0i = -3$ встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3$ два раза, значит $r = 2$. Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{-3\cdot x}(\tilde{P}_0(x)\cos 0x + \tilde{Q}_0(x)\sin 0x)\cdot x^2 = Ax^2e^{-3x}.$$

Ответ: $y_{чн}(x) = Ax^2e^{-3x}.$

б) $f(x) = x^2 + 2x + 1.$

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = e^{0\cdot x}((x^2 + 2x + 1)\cdot\cos 0x + 0\cdot\sin 0x) = e^{0\cdot x}(P_2(x)\cdot\cos 0x + Q_0(x)\cdot\sin 0x),$$

тогда $a = 0, b = 0, n = 2, m = 0, s = \max(2,0) = 2;$ число $a + bi = 0 + 0i = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3,$ значит $r = 0$. Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{0\cdot x}(\tilde{P}_2(x)\cos 0x + \tilde{Q}_2(x)\sin 0x)\cdot x^0 = Ax^2 + Bx + C.$$

Ответ: $y_{чн}(x) = Ax^2 + Bx + C.$

в) $f(x) = xe^{-3x}$.

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = xe^{-3x} = e^{-3\cdot x}(x\cdot\cos 0x + 0\cdot\sin 0x) = e^{-3\cdot x}(P_1(x)\cdot\cos 0x + Q_0(x)\cdot\sin 0x),$$

тогда $a=-3, b=0, n=1, m=0, s=\max(1,0)=1;$ число $a+bi=-3+0i=-3$ встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=-3$ два раза, значит $r=2$. Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{-3\cdot x}(\tilde{P}_1(x)\cos 0x + \tilde{Q}_1(x)\sin 0x)\cdot x^2 = e^{-3x}(Ax+B)x^2.$$

Ответ: $y_{чн}(x) = e^{-3x}(Ax^3 + Bx^2).$

г) $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x.$

Правая часть имеет вид:

$$f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x = e^{0\cdot x}(2\cdot\cos 3x + (-1)\cdot\sin 3x) = e^{0\cdot x}(P_0(x)\cdot\cos 3x + Q_0(x)\cdot\sin 3x),$$

тогда $a=0, b=3, n=m=0, s=\max(0,0)=0;$ число $a+bi=0+3i=3i$ не встречается среди корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=-3,$ значит $r=0$. Мы нашли все необходимые параметры, чтобы составить наше частное решение:

$$y_{чн}(x) = e^{0\cdot x}(\tilde{P}_0(x)\cos 3x + \tilde{Q}_0(x)\sin 3x)\cdot x^0 = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Ответ: $y_{чн}(x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$
