

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть $f : L \rightarrow L$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве L .

Опр. 1. Ненулевой элемент $\bar{x} \in L$ ($\bar{x} \neq \bar{0}$) называется **собственным вектором** линейного оператора $f : L \rightarrow L$, если существует такое число λ , что $f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$. Число λ называется **собственным значением (собственным числом)** линейного оператора f , соответствующим собственному вектору \bar{x} .

Иными словами, собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется с коэффициентом λ , а его ориентация остается неизменной.

Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если \bar{x}_1 и \bar{x}_2 – два собственных вектора линейного оператора f с одним и тем же собственным значением λ , то $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ также является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ , т. е.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1) &= \lambda\bar{x}_1 \\ f(\bar{x}_2) &= \lambda\bar{x}_2 \end{aligned} \Rightarrow f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \lambda(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

3. Если \bar{x} – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ , то любой вектор $\alpha\bar{x}$ (α – число) является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ , т. е.

$$f(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \Rightarrow f(\alpha\bar{x}) = \lambda(\alpha\bar{x}).$$

Замечание. Из свойств 2, 3 следует, что множество собственных векторов данного линейного оператора f , соответствующих одному и тому же собственному числу λ , вместе с нулевым элементом образуют линейное подпространство линейного пространства L .

4. Собственные векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ линейного оператора f , соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Пусть $f: L \rightarrow L$ – линейный оператор, действующий в n -мерном линейном пространстве L . Зафиксируем некоторый базис E в пространстве L . Поскольку линейный оператор действует из L в L , логично рассматривать векторы и их образы в одном и том же базисе. Тогда матрица $A = A_f$ линейного преобразования состоит из столбцов координат образов базисных векторов в этом же базисе.

Если \bar{x} – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ , матрица A – матрица линейного оператора f в базисе E , то $AX = \lambda X$, где X – столбец координат вектора \bar{x} в базисе E .

Опр. 2. Ненулевой столбец $X \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий $AX = \lambda X$ при некотором λ , называется **собственным вектором** матрицы A , соответствующим **собственному значению** λ .

Рассмотрим способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A (а следовательно, и оператора f).

Преобразуем соотношение $AX = \lambda X$, определяющее собственные векторы и собственные значения матрицы, следующим образом:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda EX \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = O,$$

где E – единичная матрица n -го порядка, O – нулевой столбец из \mathbb{R}^n .

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда последнее матричное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица этой системы вырожденная, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$. Поэтому для нахождения собственных чисел матрицы A нужно решить уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Опр. 3. Уравнение (1) называется *характеристическим уравнением* матрицы A , а его корни называются *характеристическими числами*, или *собственными значениями* матрицы A .

Левая часть характеристического уравнения (1) представляет собой многочлен n -й степени.

Опр. 4. Многочлен n -й степени, стоящий в левой части характеристического уравнения (1), называется *характеристическим многочленом* матрицы A .

Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Замечание. Собственными значениями линейного оператора в действительном линейном пространстве являются только действительные корни характеристического уравнения.

Т 1. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть A_f – матрица линейного оператора f в базисе E ; A'_f – матрица линейного оператора f в базисе E' ; $T = T_{E \rightarrow E'}$ – матрица перехода от базиса E к базису E' . Тогда $A'_f = T^{-1}A_fT$.

Поскольку $E = T^{-1}ET$, то

$$A'_f - \lambda E = T^{-1}A_fT - \lambda T^{-1}ET = T^{-1}(A_f - \lambda E)T.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \det(A'_f - \lambda E) &= \det(T^{-1}(A_f - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A_f - \lambda E) \det T = \det(A_f - \lambda E), \end{aligned}$$

так как $\det T^{-1} = \frac{1}{\det T}$. \triangleleft

Пример 1. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения матрицы определяются из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0;$$

$$6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = 0;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4$.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (2-1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-1)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = -2x_2$. Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 4$, из системы

$$\begin{cases} (2-4)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-4)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = x_2$. Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 1, X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 4, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ •

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Поскольку работать с диагональной матрицей всегда легче, то базис, в котором матрица оператора принимает такой вид, является предпочтительным по сравнению с другими. Этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора.

Т 2. Матрица линейного оператора имеет диагональный вид

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора.

В этом случае на главной диагонали матрицы стоят собственные числа:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Опр. 5. Матрица A_f линейного оператора называется **приводимой к диагональному виду**, если существует такая невырожденная матрица T (такое преобразование базиса), что матрица $B = T^{-1}A_fT$ является диагональной.

Т 3. Матрица A_f линейного оператора f приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f .

Замечание. Не каждый линейный оператор n -мерного линейного пространства имеет n линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

Пример 2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные значения определим из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$
$$(1-\lambda)^2 = 0,$$

поэтому собственные значения матрицы равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O$, т. е., подставляя $\lambda = 1$, для собственного вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, причем в данном случае не существует двух линейно независимых собственных векторов. •

Утв. 1. 1) Если линейный оператор f , действующий в действительном линейном пространстве L , $\dim L = n$, имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

2) Если линейный оператор f , действующий в комплексном линейном пространстве L , $\dim L = n$, имеет n различных комплексных собственных значений, то существует базис пространства L из

собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

Замечание. Это условие является достаточным, но не является необходимым условием диагонализированности матрицы линейного оператора. Матрица линейного оператора может быть приводима к диагональному виду и в том случае, когда среди собственных значений оператора есть совпадающие либо когда имеются комплексные корни характеристического уравнения матрицы линейного оператора, действующего в вещественном линейном пространстве.

Пример 3. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения определим из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)+3)-3(-3+3\lambda-3)-(-9+15-3\lambda)=0;$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)-3(3\lambda-6)-(6-3\lambda)=0;$$

$$-\lambda^2+6\lambda-8-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda-9\lambda+18-6+3\lambda=0;$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0;$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0.$$

Заметим, что $\lambda_1 = 1$ является корнем этого уравнения. Разделим характеристический многочлен на $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 & -5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ \lambda^3 & -\lambda^2 \\ \hline & -4\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ & -4\lambda^2 + 4\lambda \\ \hline & 4\lambda - 4 \\ & 4\lambda - 4 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda - 1 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{array} \right.$$

Таким образом, $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$, откуда получим собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O$, т. е., подставляя $\lambda = 1$, для собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ полу-

чим

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 3 & -1 \\ -3 & 5-1 & -1 \\ -3 & 3 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I'=I-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{II'=II+3\cdot I \\ III'=III+3\cdot I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = x_2 = x_3$. Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = 2$. Их координаты удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -1 \\ -3 & 5-2 & -1 \\ -3 & 3 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

т. е. система равносильна одному уравнению $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Полагая $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, получим $x_3 = -3c_1 + 3c_2$. Эти формулы при $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ задают все решения системы и, соответственно, все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda = 2$.

При $c_1 = 1, c_2 = 0$ получим собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; при

$c_1 = 0, c_2 = 1$ получим собственный вектор $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Несложно ви-

деть, что эти векторы линейно независимы.

Таким образом, собственные векторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы, а следовательно, преобразование, задаваемое матрицей A , диагонализировано, его матрица в базисе $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \lambda_1 = 1, X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \bullet$$

§ 7. Евклидово пространство

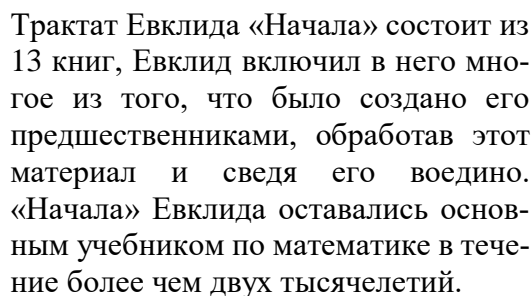
WWWИКИСПРАВКАWWW WWW WWW WWW WWW WWW WWW

Евкли́д

(др.-греч. Εὐκλείδης)

(III в. до н. э.)

древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.



W W

- 1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
- 3) $(\alpha \bar{x}, \bar{z}) = \alpha(\bar{x}, \bar{z})$;
- 4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Пример 2. Евклидовым пространством является пространство \mathbb{R}^n , в котором скалярное произведение элементов задается формулой

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

где $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $\bar{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$.

Можно показать, что в этом случае все 4 аксиомы скалярного произведения, указанные в определении 1, выполняются. •

Замечание. В матричной форме записи скалярное произведение векторов из \mathbb{R}^n находится по формуле $(\bar{x}, \bar{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов \bar{x}, \bar{y} соответственно.

Упражнение 1. Показать, что в пространстве \mathbb{R}^2 (которое можно трактовать как множество векторов на плоскости) операция

$$\bar{x} \circ \bar{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

удовлетворяет всем четырем аксиомам скалярного произведения.

Опр. 2. Векторы \bar{x} и \bar{y} евклидова пространства называются *ортгональными*, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Замечание. Считается, что нулевой вектор ортгонален любому вектору.

Т 1. Если ненулевые векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$ попарно ортгональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Допустим, векторы линейно зависимы. Тогда существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные 0, что

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k = \bar{0}.$$

Умножив это равенство скалярно на \bar{e}_1 , получим

$$(\bar{e}_1, \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k) = (\bar{e}_1, \bar{0}) = 0.$$

С другой стороны, в силу свойств скалярного произведения и ортгональности векторов,

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1, \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k) &= \alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \alpha_2 (\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \dots + \alpha_k (\bar{e}_1, \bar{e}_k) = \\ &= \alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) + 0 + \dots + 0 = \alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1), \end{aligned}$$

откуда $\alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0$, а значит, $\alpha_1 = 0$.

Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = 0; \dots; \alpha_k = 0$.

Таким образом, предположив, что векторы линейно зависимы, пришли к противоречию. Значит, векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}$ линейно независимы. \triangleleft

Опр. 3. **Нормой** вектора \overline{x} евклидова пространства называется положительное число $\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$.

Пример 1 (продолжение). Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора. •

Свойства нормы вектора.

1. $\|\overline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.
2. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \|\overline{x}\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $(\overline{x}, \overline{y}) \leq \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|$ (*неравенство Коши – Буняковского*).

WWWИКИСПРАВКАWWWWWWWWWWWWWWW



Виктор Яковлевич Буняковский
(1804–1889)

русский математик, педагог, историк математики, вице-президент академии наук в 1864–1889 гг. Был почетным членом всех русских университетов: Московского, Санкт-Петербургского, Казанского, Харьковского, Киевского, Новороссийского, многих иностранных и русских ученых обществ.

Начало всемирной известности Буняковского положил появившийся в 1846 г. обширный трактат «Основания математической теории вероятностей», в котором впервые было сведено вместе все, что было выработано по

этой теории трудами известных математиков, начиная с Паскаля и Ферма, даны объяснения новых решений самых трудных и запутанных вопросов, указано много практических приложений теории вероятностей, а также приведена история возникновения и развития теории вероятностей.

Все работы Буняковского, ставящие его в число величайших европейских математиков, помимо ценности в научном отношении — по богатству, новизне и оригинальной разработке научно-математических материалов, — отличаются замечательной ясностью и изяществом изложения. Многие из них переведены на иностранные языки.

WWWWWWWWWWWWWWW

Доказательство. Рассмотрим вектор $\bar{x} + t\bar{y}$, где t – произвольное действительное число. В силу аксиомы 4, скалярное произведение

$$(\bar{x} + t\bar{y}, \bar{x} + t\bar{y}) \geq 0.$$

Пользуясь аксиомами, перепишем это скалярное произведение в виде

$$(\bar{x} + t\bar{y}, \bar{x} + t\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2t(\bar{x}, \bar{y}) + t^2(\bar{y}, \bar{y}).$$

Таким образом, относительно переменной t получили квадратичное неравенство

$$t^2(\bar{y}, \bar{y}) + 2t(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{x}) \geq 0,$$

$$t^2 \|\bar{y}\|^2 + 2t(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{x}\|^2 \geq 0,$$

которое имеет место при любом t . Это означает, что дискриминант квадратного трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$D = 4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4\|\bar{y}\|^2\|\bar{x}\|^2 \leq 0,$$

откуда получаем доказываемое неравенство. \triangleleft

4. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство треугольника).

Опр. 4. Если $\|\bar{x}\| = 1$, то вектор \bar{x} называется *нормированным*.

Опр. 5. Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ называется **ортонормированной**, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Т 2. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

WWW.BIKISPRABKA.WWWWWW



WWW.BIKISPRABKA.WWWWWW

Работал математиком в страховом обществе; был председателем датского страхового совета. Наряду с прикладными статистическими исследованиями внес заметный вклад в фундаментальную математику.



немецкий математик, с 1917 г. профессор Берлинского университета. В 1946–58 гг. первый директор Института математики АН ГДР. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу.

Пусть $F = \{\overline{f_1}; \overline{f_2}; \dots; \overline{f_n}\}$ – исходный базис n -мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $E = \{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \dots; \overline{e_n}\}$ получается с помощью следующей процедуры:

$$1) \quad \bar{e}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|};$$

$$2) \quad \overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1}; \quad \overline{e_2} = \frac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|};$$

$$3) \quad \overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2}; \quad \overline{e_3} = \frac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|};$$

...;

$$n) \quad \overline{g_n} = \overline{f_n} - (\overline{f_n}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_n}, \overline{e_2})\overline{e_2} - \dots - (\overline{f_n}, \overline{e_{n-1}})\overline{e_{n-1}}; \quad \overline{e_n} = \frac{\overline{g_n}}{\|\overline{g_n}\|}.$$

Пример 3. В евклидовом пространстве \mathcal{V}_3 трехмерных векторов применим процесс ортогонализации Грама – Шмидта к базису $\overline{f_1} = \{1; -2; 2\}$; $\overline{f_2} = \{-1; 0; -1\}$; $\overline{f_3} = \{5; -3; -7\}$.

Решение. 1. Найдем норму вектора $\overline{f_1}$ и вектор $\overline{e_1} = \frac{\overline{f_1}}{\|\overline{f_1}\|}$:

$$\|\overline{f_1}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \quad \overline{e_1} = \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

2. Чтобы найти вектор $\overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1}$, спроектируем вектор $\overline{f_2}$ на вектор $\overline{e_1}$ и отнимем полученную проекцию от $\overline{f_2}$.

Поскольку $(\overline{f_2}, \overline{e_1}) = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} = -1$, то

$$\overline{g_2} = \overline{f_2} + \overline{e_1} = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}; \quad \|\overline{g_2}\| = 1; \quad \overline{e_2} = \frac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|} = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

3. Вектор $\overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2}$ равен разности вектора $\overline{f_3}$ и векторов, полученных при его проектировании на $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$.

Вычисляя $(\overline{f_3}, \overline{e_1}) = \frac{5}{3} + \frac{6}{3} - \frac{14}{3} = -1$; $(\overline{f_3}, \overline{e_2}) = -\frac{10}{3} + \frac{6}{3} + \frac{7}{3} = 1$,

имеем

$$\overline{g_3} = \overline{f_3} + \overline{e_1} - \overline{e_2} = \left\{ 5 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}; -3 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}; -7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right\} = \{6; -3; -6\};$$

$$\|\overline{g_3}\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9; \quad \overline{e_3} = \frac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|} = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}.$$

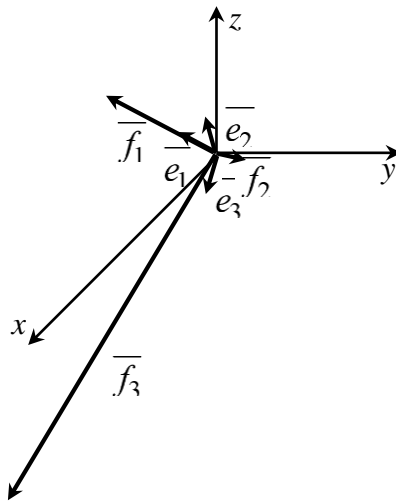


Рис. 2. Построение ортонормированного базиса

Таким образом, векторы $\bar{e}_1 = \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}$; $\bar{e}_2 = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$; $\bar{e}_3 = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве. •

Координаты вектора евклидова пространства в ортонормированном базисе

Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – ортонормированный базис в n -мерном евклидовом пространстве, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – координаты вектора \bar{x} в этом базисе, т. е.

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n.$$

Умножая обе части равенства скалярно на \bar{e}_1 , получим

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{e}_1) &= x_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) + x_2 (\bar{e}_2, \bar{e}_1) + \dots + x_n (\bar{e}_n, \bar{e}_1) = \\ &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 = x_1. \end{aligned}$$

Аналогично, $(\bar{x}, \bar{e}_2) = x_2$; ...; $(\bar{x}, \bar{e}_n) = x_n$.

Таким образом, *координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы.*

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе

Пусть даны $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – координаты векторов \bar{x} , \bar{y} в ортонормированном базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. Тогда

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Замечание 1. В матричном виде $(\bar{x}, \bar{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов \bar{x} , \bar{y} соответственно.

Замечание 2. В произвольном базисе $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ эти формулы имеют более сложный вид. Если $\bar{x} = x_1 \bar{f}_1 + x_2 \bar{f}_2 + \dots + x_n \bar{f}_n$, $\bar{y} = y_1 \bar{f}_1 + y_2 \bar{f}_2 + \dots + y_n \bar{f}_n$, то

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\bar{f}_i, \bar{f}_j).$$

Комплексное евклидово пространство

Опр. 6. *Комплексным евклидовым (или унитарным) пространством* называется комплексное линейное пространство L , в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ ставится в соответствие комплексное число (\bar{x}, \bar{y}) , которое называется *скалярным произведением* элементов \bar{x} и \bar{y} , причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$

- 1) $(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{(\bar{y}, \bar{x})}$;
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
- 3) $(\alpha \bar{x}, \bar{z}) = \alpha (\bar{x}, \bar{z})$;
- 4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Замечание. $(\bar{x}, \bar{x}) \in \mathbb{R}$.

Все определения и результаты, сформулированные для евклидова пространства, остаются справедливыми и для комплексного евклидова пространства.

§ 8. Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве

Ортогональные операторы

Пусть L – евклидово пространство.

Опр. 1. Линейный оператор $f : L \rightarrow L$ называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L , т. е. если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство

$$(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Из определения легко следует, что ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства, поскольку

$$\|f(\bar{x})\| = \sqrt{(f(\bar{x}), f(\bar{x}))} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \|\bar{x}\|.$$

Верно и обратное, поэтому имеет место следующее утверждение.

Утв. 1. Линейный оператор $f : L \rightarrow L$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он сохраняет норму элементов евклидова пространства L , т. е. если для любых $\bar{x} \in L$ выполняется равенство $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$.

Доказательство. Докажем, что если линейный оператор $f : L \rightarrow L$ сохраняет норму, то он является ортогональным оператором. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in L$. В силу определения нормы и свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + 2(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2,$$

откуда

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \left(\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x}\|^2 - \|\bar{y}\|^2 \right).$$

Следовательно, если оператор f сохраняет норму элементов евклидова пространства L , т. е. $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$, $\|f(\bar{y})\| = \|\bar{y}\|$, $\|f(\bar{x} + \bar{y})\| = \|\bar{x} + \bar{y}\|$, то $(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$. \triangleleft

Утверждение 1 позволяет привести примеры ортогональных операторов.

Пример 1. В пространствах \mathcal{V}_2 и \mathcal{V}_3 (в евклидовых пространствах свободных векторов на плоскости и в пространстве) ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние.

Например, ортогональными являются: оператор поворота вектора на фиксированный угол; оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве. •

Кроме того, ортогональный оператор сохраняет ортогональность элементов евклидова пространства, поскольку если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то $(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = 0$.

Таким образом, ортогональный оператор переводит любой *ортонормированный базис* евклидова пространства L в *ортонормированный базис* этого пространства. Верно и обратное утверждение.

Т 1. Линейный оператор $f: L \rightarrow L$, действующий в евклидовом пространстве, является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства.

Доказательство. Докажем, что если $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ – ортонормированный базис евклидова пространства L и линейный оператор f переводит его в ортонормированный базис $\mathcal{E}' = \{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2; \dots; \bar{e}'_n\}$, где $\bar{e}'_1 = f(\bar{e}_1); \bar{e}'_2 = f(\bar{e}_2); \dots; \bar{e}'_n = f(\bar{e}_n)$, то оператор f – ортогональный, т. е. для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство $(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Напомним, что если даны координаты векторов \bar{x}, \bar{y} в ортонормированном базисе \mathcal{E} : $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, т. е. $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ и $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n$, то

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

В силу линейности оператора f получим

$$f(\bar{x}) = x_1 f(\bar{e}_1) + x_2 f(\bar{e}_2) + \dots + x_n f(\bar{e}_n) = x_1 \bar{e}'_1 + x_2 \bar{e}'_2 + \dots + x_n \bar{e}'_n;$$

$$f(\bar{y}) = y_1 f(\bar{e}_1) + y_2 f(\bar{e}_2) + \dots + y_n f(\bar{e}_n) = y_1 \bar{e}'_1 + y_2 \bar{e}'_2 + \dots + y_n \bar{e}'_n,$$

т. е. координаты образов элементов \bar{x}, \bar{y} в базисе E' совпадают с координатами исходных элементов \bar{x}, \bar{y} в базисе E . А значит,

$$(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (\bar{x}, \bar{y}),$$

что означает, что оператор f является ортогональным. \triangleleft

Пусть A_f – матрица ортогонального оператора f в ортонормированном базисе E . Напомним, что если X, Y – столбцы координат элементов \bar{x}, \bar{y} соответственно в ортонормированном базисе E , то $(\bar{x}, \bar{y}) = X^T Y$. Тогда

$$(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (A_f X)^T A_f Y = X^T A_f^T A_f Y.$$

Поскольку для ортогонального оператора f равенство $(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$ выполняется для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$, то $A_f^T A_f = E$.

Опр. 2. Матрица A называется *ортогональной*, если $A^T A = E$.

Свойства ортогональных матриц.

1. Если A – ортогональной матрица, то $A^{-1} = A^T$.
2. Если A – ортогональной матрица, то $\det A = \pm 1$.

Пример 2. Примерами ортогональных матриц являются:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,6 & -0,8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т 2. Линейный оператор f является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

Следствие. Если $T = T_{E \rightarrow E'}$ – матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, то она является ортогональной матрицей.

Самосопряженные (симметрические) операторы

Опр. 3. Линейный оператор $f: L \rightarrow L$ называется *самосопряженным (симметрическим)*, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$

$$(f(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{y})).$$

Упражнение 1. Проверить, что в пространстве \mathcal{V}_3 являются симметрическими:

1) $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ (где $\lambda \in \mathbb{R}$ – фиксированное число) – оператор растяжения в λ раз;

2) $f(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{e})\bar{e}$ (где $\bar{e}, \|\bar{e}\| = 1$, – фиксированный вектор) – оператор проектирования на направление вектора \bar{e} . •

Опр. 4. Матрица A называется *симметрической*, если $A^T = A$, т. е. она симметрична относительно главной диагонали.

Т 3. Линейный оператор f является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом *ортонормированном* базисе его матрица является симметрической.

Утв. 2. Все собственные значения *симметрической* матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

Утв. 3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Т 4. Если f – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L , то в евклидовом пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора f .

Следствие. Матрица A_f самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду.

§ 9. Квадратичные формы

Опр. 1. *Квадратичной формой от n действительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n* называется сумма вида

$$q(x_1; x_2; \dots; x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

т. е.

$$q(x_1; x_2; \dots; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} квадратичной формы – некоторые действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, квадратичная форма может быть также записана в виде

$$q(x_1; x_2; \dots; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1;n}x_{n-1}x_n.$$

Заметим, что к изучению квадратичных форм от двух и трех переменных приводит задача об определении формы кривых и поверхностей 2-го порядка. Первоначально теория квадратичных форм возникла именно из этих задач, но впоследствии нашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

Опр. 2. Матрицей квадратичной формы называется матрица, составленная из ее коэффициентов, а именно, квадратичной форме (1) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что эта матрица является симметрической, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие: каждой квадратичной форме соответствует симметрическая матрица.

В матричном виде квадратичная форма (1) может быть записана как

$$q(X) = X^T A X, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть X – столбец координат вектора \bar{x} в некотором *ортонормированном* базисе E , $f: L \rightarrow L$ – линейный (самосопряженный) оператор, действующий в евклидовом пространстве L и имеющий в базисе E матрицу A , тогда запись (1) равносильна

$$q(\bar{x}) = (\bar{x}, f(\bar{x})),$$

т. е. значение квадратичной формы на векторе \bar{x} равно скалярному произведению вектора \bar{x} и его образа при отображении f .

Пусть $T = T_{E \rightarrow E'}$ – матрица перехода от базиса E к базису E' , X и X' – столбцы координат вектора \bar{x} в базисах E и E' соответственно, тогда, в силу теоремы 5 §3, $X = TX'$, а следовательно, в новых переменных квадратичная форма будет иметь вид

$$q(X) = X^T A X = (TX')^T A (TX') = (X')^T T^T A T X' = q_1(X'),$$

т. е. в новых переменных получается квадратичная форма с матрицей

$$A' = T^T A T.$$

Заметим, что поскольку T – матрица перехода от базиса к базису, то это матрица невырожденного линейного преобразования, а значит $\det T \neq 0$.

Более того, если T – матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому *ортонормированному* базису, то она является ортогональной матрицей, а значит, $T^{-1} = T^T$ и

$$A' = T^{-1} A T.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису преобразуется как матрица линейного самосопряженного оператора.

Как следует из теоремы 4 §8, матрицу линейного самосопряженного оператора, а значит, и матрицу A квадратичной формы можно привести к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A .

Таким образом, любую квадратичную форму можно привести к виду

$$q_1(x'_1; x'_2; \dots; x'_n) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \dots + \lambda_n(x'_n)^2. \quad (2)$$

Опр. 3. Если квадратичная форма записана в виде (2), то говорят, что она приведена к **каноническому виду**.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду

Чтобы определить преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Записать матрицу квадратичной формы и найти собственные значения этой матрицы.

2. Найти собственные векторы матрицы квадратичной формы и нормировать их.

Опр. 4. Направления собственных векторов называются **главными направлениями** квадратичной формы.

Замечание. Если среди собственных значений матрицы есть совпадающие, необходимо выбирать соответствующие собственные векторы так, чтобы они были *ортонормированы*.

3. Записать матрицу T , составив ее из полученных нормированных векторов-столбцов.

4. Записать искомое преобразование переменных по формуле $X = TX'$.

Пример 1. Определим преобразование координат, приводящее квадратичную форму

$$q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

к каноническому виду; запишем канонический вид квадратичной формы.

Решение. 1. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3 - \lambda)^2 - 25 = 0;$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = 0;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -2$.

2. Найдем собственные векторы из условия $(A - \lambda E)X = O$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 8$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (3 - 8)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3 - 8)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = x_2$. Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Норма этого вектора равна

$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, поэтому нормированный собственный вектор

найдем как $\bar{e}_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = -2$, из системы

$$\begin{cases} (3+2)x_1 + 5x_2 = 0, & 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3+2)x_2 = 0; & 5x_1 + 5x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -x_2$. Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вычисляя норму этого вектора

$\|X_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, получим нормированный собственный

вектор $\bar{e}_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3. Матрица перехода к новому ортонормированному базису будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Связь между новыми и старыми координатами задается формулой $X = TX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ – столбцы координат старом и новом базисах соответственно, откуда получим преобразование координат, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2', \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ x_2 = \frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

5. Подставим полученные формулы в исходную квадратичную форму и приведем ее к каноническому виду:

$$\begin{aligned} q(x_1; x_2) &= 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2; \\ q_1(x_1'; x_2') &= 3\left(\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} + 3\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 = \\ &= 3\frac{(x_1')^2 - 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} + 10\frac{(x_1')^2 - (x_2')^2}{2} + 3\frac{(x_1')^2 + 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} = \\ &= 3(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + 5(x_1')^2 - 5(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для записи канонического вида квадратичной формы достаточно знать собственные значения матрицы квадратичной формы:

$$q_1(x_1'; x_2') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2. \bullet$$

Пример 2. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = -8.$$

Решение. Из примера 1 следует, что заданное уравнение равносильно уравнению

$$8(x_1')^2 - 2(x_2')^2 = -8,$$

где x_1', x_2' – координаты точки в базисе

$$\bar{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}; \quad \bar{e}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Разделив обе части уравнения на -8 , получим

$$-\frac{(x'_1)^2}{1} + \frac{(x'_2)^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с полуосями $a=1, b=2$, действительной осью которой является Ox'_2 (см. рис. 3).

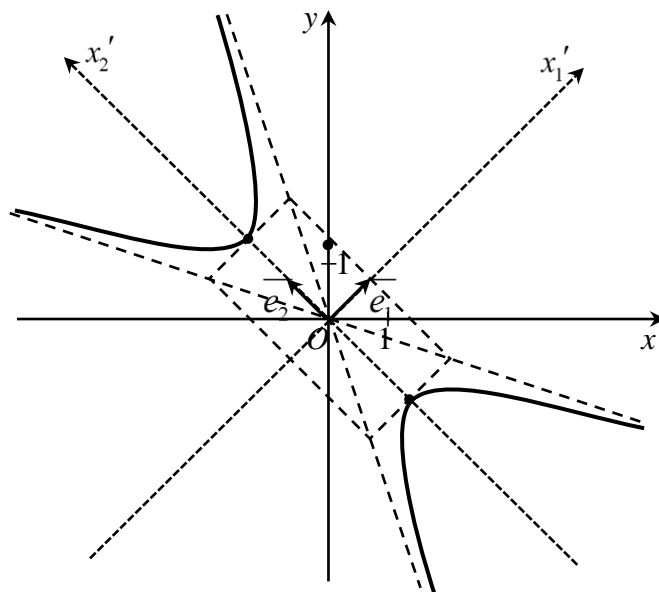


Рис. 3. Гипербола $-\frac{(x'_1)^2}{1} + \frac{(x'_2)^2}{4} = 1$

•

Пример 3. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Решение. В примере 1 показано, что квадратичная форма $3x^2 + 10xy + 3y^2$ диагонализуется с помощью преобразования

$$\begin{cases} x = \frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

которое сводится к повороту системы координат. Поэтому заданное уравнение равносильно уравнению

$$3\left(\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} + 3\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \\ - 2\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}} - 14\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} - 13 = 0,$$

или

$$8(x_1')^2 - 2(x_2')^2 - 8\sqrt{2}x_1' - 6\sqrt{2}x_2' - 13 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по каждой из переменных, получим

$$8((x_1')^2 - \sqrt{2}x_1') - 2((x_2')^2 + 3\sqrt{2}x_2') - 13 = 0;$$

$$8\left((x_1')^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 4 - \\ - 2\left((x_2')^2 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}x_2' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 9 - 13 = 0; \\ 8\left(x_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(x_2' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8.$$

Введем замену переменных

$$\begin{cases} X = x_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = x_2' + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

которая задает преобразование параллельного переноса новой системы координат $Ox_1'x_2'$. (Началом системы координат O_1XY является точка $x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2' = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.)

Перейдя к новым переменным и разделив обе части уравнения на 8, получим в системе координат O_1XY каноническое уравнение кривой 2-го порядка

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1,$$

а именно, уравнение гиперболы с полуосями $a=1, b=2$, действительной осью которой является O_1X (см. рис. 4).

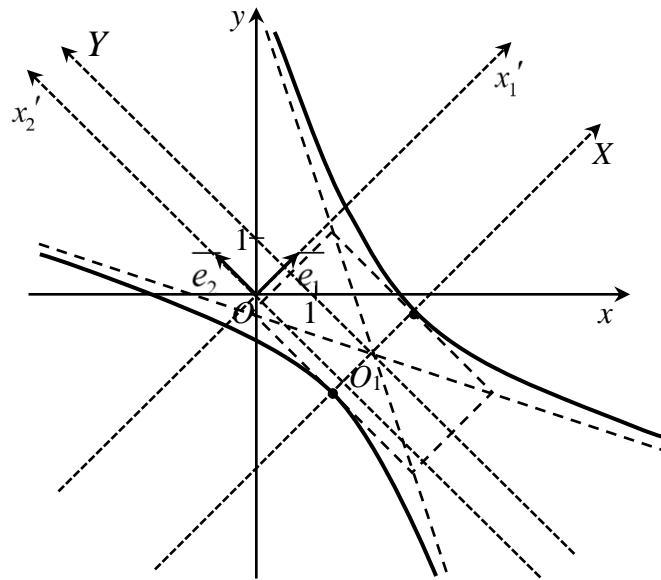


Рис. 4. Гипербола $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$

Запишем преобразование, с помощью которого исходное уравнение кривой 2-го порядка приводится к каноническому виду. Поскольку

$$\begin{cases} x = \frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \\ x_2' = \frac{y - x}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} X = x_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = x_2' + \frac{3\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}, \\ Y = \frac{y - x + 3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \bullet$$

Упражнение 1. Определить вид поверхности $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$.

Знакоопределенные квадратичные формы

Пусть $\bar{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

Опр. 5. Квадратичная форма $q(\bar{x})$ называется:

- *положительно определенной*, если $q(\bar{x}) > 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;
- *отрицательно определенной*, если $q(\bar{x}) < 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;
- *положительно полуопределенной*, если $q(\bar{x}) \geq 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;
- *отрицательно полуопределенной*, если $q(\bar{x}) \leq 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;
- *знаконеопределенной*, если существуют такие \bar{x} и \bar{y} что $q(\bar{x}) > 0$ и $q(\bar{y}) < 0$.

Замечание. Несложно видеть, что знакоопределенность квадратичной формы фактически означает постоянство знаков собственных значений ее матрицы.

Если квадратичная форма	то собственные значения ее матрицы
положительно определена,	все положительны;
отрицательно определена,	все отрицательны;
положительно полуопределена,	все неотрицательны;
отрицательно полуопределена,	все неположительны.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной

формы $q(\bar{x})$.

Опр. 6. Главными минорами квадратичной формы $q(\bar{x})$ называются миноры матрицы A , стоящие в левом верхнем углу:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = \det A.$$

По знакам главных миноров квадратичной формы можно легко проверить знакоопределенность квадратичной формы с помощью критерия Сильвестра.

WWWИКИСПРАВКАWWWWWWWWWWWWWWW



Джеймс Джозеф Сильвэстр
(англ. *James Joseph Sylvester*)
(1814–1897)

известный английский математик. Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике. В 1878 г. он основал «Американский математический журнал» (*American Journal of Mathematics*) – второй в то время в США. Лондонское королевское общество учредило бронзовую Медаль Сильвестра, которая вручается с 1901 г. за выдающиеся заслуги в математике.

коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ строго положительны, а значит, это уравнение задает в пространстве эллипсоид.