Задание 1

Типы уравнений, которые мы изучили:

1) ДУ (дифференциальное уравнение) с разделяющимися переменными (ДУ с РП).

$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$ – вид уравнения в дифференциалах или в виде $f_1(x)g_1(y)y'(x)=f_2(x)g_2(y).$ Чтобы решить такое уравнение, достаточно разделить переменные и **только затем** взять интегралы:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0,\ \int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0;$$

учитывая, что мы делим на $P_2(x)$ и на $Q_1(y),$ отдельно рассмотреть случаи $P_2(x)=0, Q_1(y)=0.$

Для уравнения $f_1(x)g_1(y)y'(x)=f_2(x)g_2(y).$ действия такие же:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx},\ \ f_1(x)g_1(y)\frac{dy}{dx}=f_2(x)g_2(y),\ \ \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx,\ \ \int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=\int\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Отдельно рассматриваем случаи $g_2(y)=0,\ f_1(y)=0.$

2) Однородное ДУ первого порядка.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\ P(t\cdot x,t\cdot y)=t^mP(x,y),\ Q(t\cdot x,t\cdot y)=t^mQ(x,y),$$

где $t>0;\ t,m\in\mathbb{R}$ или

$$y'(x)=f\left(\frac{x}{y}\right),\ y'(x)=f\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$y'(x)=f(x,y),\ \ f(t\cdot x,t\cdot y)=f(x,y).$$

Решаются такие уравнения с помощью замены $y=xu,\ dy=udx+xdu$ или $y(x)=xu(x),\ \ y'(x)=u(x)+xu'(x).$ После замены уравнение становится ДУ с разделяющимися переменными с неизвестной функцией u и переменной $x.$

3) Линейное ДУ первого порядка.

Если можно ДУ привести к виду

$$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0,$$

то оно линейное. Можно искать неизвестную функцию в $y(x)=u(x)v(x),$ тогда $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$

$$a(x)(u'v+uv')+b(x)uv+c(x)=0,$$
$$a(x)u'v+u(a(x)v'+b(x)v)+c(x)=0.$$

Решение данного уравнения сводим к решению двух ДУ с РП следующим образом:

$$\begin{cases} a(x)v' + b(x)v = 0, \\ a(x)u'v + c(x) = 0. \end{cases}$$

Сначала находим v, затем найденную функцию с заданной константой интегрирования подставляем во второе уравнение и находим u.

4) Уравнение Бернулли:

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^n = 0,\ \ n \neq 0, n \neq 1, n \in \mathbb{R}.$$

Решаем тем же методом (методом Бернулли), что и линейное уравнение:

$$y(x) = u(x)v(x),\ y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$a(x)(u'v + uv') + b(x)uv + c(x)u^n = 0,$$
$$a(x)u'v + u(a(x)v' + b(x)v) + c(x)u^n = 0.$$

$$\begin{cases} a(x)v' + b(x)v = 0, \\ a(x)u'v + c(x)u^n = 0. \end{cases}$$

а) $xyy' = 1 - x^2,$

это ДУ с РП $f_1(x)g_1(y)y'(x) = f_2(x)g_2(y),\quad f_1(x) = x,\ g_1(y) = y,\ f_2(x) = 1,\ g_2(y) - 1;$ см. пункт 1). По-простому говоря, переменные можно разделить:

$$xyy' = 1 - x^2,\ xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2,\ \ xydy = (1 - x^2)dx,\ \ ydy = \frac{1 - x^2}{x}dx,\ \ \int ydy = \int \frac{1 - x^2}{x}dx.$$

Находим интегралы:

$$\int ydy = \frac{y^2}{2} + C,\ \int \frac{1 - x^2}{x}dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x^2}{x}\,dx = \ln|x| - \int x\,dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C,\ \ y^2 + x^2 = 2\ln|x| + C.$$

Рассмотрим отдельно случай $x = 0$ (см. пункт 1)). Подставляя $x = 0$ в исходное уравнение, видим, что решением $x = 0$ не является.

Ответ: $y^2 + x^2 = 2\ln|x| + C.$

б) $xy' = x - y.$

Это линейное ДУ 1-го порядка $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ (см. пункт 3))

$$xy' + y - x = 0,\ \ a(x) = x,\ \ b(x) = 1,\ \ c(x) = -x.$$

Применяем метод Бернулли:

$$y = uv,\quad y'(x) = u'v + uv';$$

$$x(u'v+uv')+uv-x=0,$$
$$xu'v+u(xv'+v)-x=0;$$

$$\begin{cases} xv'+v=0, \\ xu'v-x=0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$xv'+v=0,$$
$$v'=\frac{dv}{dx},\ \ x\frac{dv}{dx}+v=0,$$
$$xdv+vdx=0,$$
$$\int\frac{dv}{v}=\int-\frac{dx}{x},$$
$$\ln|v|=-\ln|x|+C,$$
$$v=\frac{C}{x}.$$

Пусть $C=1,$ тогда $v=\frac{1}{x}.$ Решим второе уравнение системы:

$$xu'v-x=0, v=\frac{1}{x},$$
$$xu'\frac{1}{x}-x=0,$$
$$u'-x=0,$$

$$u'=\frac{du}{dx},\ \ \frac{du}{dx}=x,$$
$$du=xdx,$$
$$\int du=\int xdx,$$
$$u=\frac{x^2}{2}+C.$$

Получаем, что $y=uv=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\frac{1}{x}=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.$

Ответ: $y=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.$

в) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0,\ y(1)=1.$

Уравнение однородное (см. пункт 2)), т.к.

$$Q(x,y)=\sqrt{xy}-x,\ Q(t\cdot x,t\cdot y)=\sqrt{tx\cdot ty}-tx=t(\sqrt{xy}-x)=tQ(x,y),$$
$$P(x,y)=y,\ \ P(t\cdot x,t\cdot y)=ty=tP(x,y).$$

Делаем замену $y=xu,\ \ dy=udx+xdu$:

$$(\sqrt{x^2u}-x)(udx+xdu)+xudx=0,$$

$$(x\sqrt{u}-x)(udx+xdu)+xudx=0,$$
$$x((\sqrt{u}-1)(udx+xdu)+udx)=0,$$
$$x((\sqrt{u}-1)udx+(\sqrt{u}-1)xdu+udx)=0,$$
$$x((\sqrt{u}-1)xdu+(u(\sqrt{u}-1)+u)dx)=0,$$
$$x((\sqrt{u}-1)xdu+u\sqrt{u}dx)=0,$$
$$x\left(\frac{\sqrt{u}-1}{u\sqrt{u}}du+\frac{1}{x}dx\right)=0,$$

$x=0$ является решением исходного уравнения, но не удовлетворяет начальному условию $y(1)=1$.

$$\frac{\sqrt{u}-1}{u\sqrt{u}}du+\frac{1}{x}dx=0,$$
$$\int\frac{\sqrt{u}-1}{u\sqrt{u}}du+\int\frac{1}{x}dx=0,$$
$$\int\frac{1}{u}du-\int\frac{1}{u\sqrt{u}}du+\ln|x|=0,$$
$$\ln|u|+\frac{2}{\sqrt{u}}+\ln|x|=C.$$

Возвращаемся к исходной функции $y=xu$:

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|+2\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C,$$

$$\ln|y|-\ln|x|+2\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C,$$

$$\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=C,$$

Подставляем начальное условие $y(1)=1$, т.е. x заменяем на 1, y заменяем на 1.

$$\ln 1+2\sqrt{\frac{1}{1}}=C,\ \ C=2.$$

Ответ: $\ln|y| + 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2.$