

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Линейные пространства: определение и примеры

Пример 1. Рассмотрим несколько множеств различных математических объектов:

- 1) множество $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ матриц фиксированного размера $m \times n$, элементы которых – действительные числа;
- 2) множество \mathcal{V}_3 векторов в пространстве (либо множество \mathcal{V}_2 векторов на плоскости, либо множество \mathcal{V}_1 векторов на прямой);
- 3) множество \mathbb{R} действительных чисел;
- 4) множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

Во всех этих множествах определены операции сложения элементов и умножения на число, обладающие одинаковыми свойствами. •

Существует много других примеров множеств элементов различной природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, обладающие теми же свойствами. Для изучения общих свойств таких множеств вводится понятие линейного пространства.

Опр. 1. *Линейным (или векторным) пространством* называется множество L элементов произвольной природы, если определены операция *сложения элементов*, ставящая в соответствие каждой паре элементов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ единственный элемент $\bar{x} + \bar{y} \in L$, и операция *умножения элементов на действительные числа*, ставящая в соответствие каждому элементу $\bar{x} \in L$ и каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ единственный элемент $\alpha \bar{x} \in L$, причем заданные операции удовлетворяют следующим 8 аксиомам: для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- 1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (коммутативность сложения)
- 2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (ассоциативность сложения);
- 3) существует *нейтральный (нулевой) элемент* $\bar{0} \in L$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для всех $\bar{x} \in L$;

4) для каждого $\bar{x} \in L$ существует **противоположный элемент** $-\bar{x} \in L$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1\bar{x} = \bar{x}$;

6) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ (*дистрибутивность* умножения на число относительно сложения элементов);

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ (*дистрибутивность* умножения элемента на число относительно сложения чисел);

8) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ (*ассоциативность* умножения на число).

Замечание. Элементы линейного пространства часто называют **векторами**.

Пример 1 (продолжение). Укажем некоторые примеры линейных пространств.

1. Множество \mathbb{R} всех действительных чисел с обычными операциями сложения элементов и умножения на число.

2. Множество всех свободных векторов на плоскости \mathcal{V}_2 , либо в пространстве \mathcal{V}_3 , либо множество \mathcal{V}_1 всех векторов, коллинеарных заданной прямой.

3. Множество $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ всех матриц фиксированного размера $m \times n$.

Упражнение 1. Почему не является линейным пространством множество всех матриц?

4. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

5. Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами.

Упражнение 2. Почему не является линейным пространством множество всех многочленов фиксированной степени n с действительными коэффициентами?

6. Множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на \mathbb{R} .

7. Множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на \mathbb{R} . •

Пример 2. Важнейший пример линейного пространства дает **пространство \mathbb{R}^n – пространство n -мерных векторов** – множество всех упорядоченных комбинаций n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

в котором равенство n -мерных векторов, а также сложение и умножение на число понимаются поэлементно: если $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $\bar{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \dots, \\ x_n = y_n; \end{cases}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n);$$

$$\alpha \bar{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n).$$

В частности, множество \mathcal{V}_2 всех векторов на плоскости можно трактовать как множество \mathbb{R}^2 , так как при выбранном базисе на плоскости каждый вектор плоскости может быть задан упорядоченной парой чисел – своими координатами в данном базисе.

Аналогично, множество \mathcal{V}_3 векторов в пространстве отождествляют с \mathbb{R}^3 .

Множество $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ матриц размера $m \times n$ с действительными элементами иногда обозначают $\mathbb{R}^{m \times n}$. •

Пример 3. Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента: $L = \{\bar{0}\}$. Такое линейное пространство называют **нулевым**. •

Замечание. В определении линейного пространства произвольными могут быть не только природа элементов, но и способы сложения элементов и умножения их на число.

Пример 4. Рассмотрим множество всех *положительных* действительных чисел

$$L = \{\bar{x} = x : x > 0\}$$

и определим *сумму* элементов как их произведение, а *умножение на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ как возведение в степень α :

$$\bar{x} + \bar{y} = xy; \quad \alpha \bar{x} = x^\alpha.$$

Покажем, что множество L с введенными таким образом операциями является линейным пространством.

Решение. Проверим, что введенные на множестве L операции удовлетворяют 8 аксиомам линейного пространства. Действительно,

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$, так как $xu = ux$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$;

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$, так как $(xy)z = x(yz)$ для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$;

3) нейтральным элементом является $\bar{1} \in L$, поскольку $\bar{x} + \bar{1} = 1x = x = \bar{x}$ для всех $\bar{x} \in L$;

4) противоположным элементом $\bar{x} \in L$ является $\frac{\bar{1}}{x} \in L$, поскольку $\bar{x} + \frac{\bar{1}}{x} = x \frac{1}{x} = 1 = \bar{1}$;

5) $1\bar{x} = x^1 = x = \bar{x}$ для всех $\bar{x} \in L$;

6) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ для любого $\bar{x} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

8) $\alpha(\beta\bar{x}) = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)\bar{x}$ для любого $\bar{x} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Следовательно, множество L с введенными указанным образом операциями сложения и умножения на действительное число является линейным пространством. •

Замечание. В сформулированном определении 1 рассмотрена операция умножения на действительные числа, поэтому такое линейное (векторное) пространство называют также **действительным** (или **вещественным**) **линейным пространством**.

Если в определении 1 рассмотреть операцию умножения на комплексные числа, то получим определение **комплексного линейного пространства**.

Пример 5. Приведем примеры комплексных линейных пространств.

1. Множество \mathbb{C} всех комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения на комплексное число.

2. Множество $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ всех матриц фиксированного размера $m \times n$ с комплексными элементами.

3. Множество $\mathbb{C}[x]$ всех многочленов с комплексными коэффициентами.

4. Множество $\mathbb{C}^n = \{\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) : x_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n\}$ n -мерных векторов с комплексными координатами. •

Замечание. Множество \mathbb{C} комплексных чисел по отношению к обычной операции сложения комплексных чисел и операции умножения комплексных чисел на действительное число является действительным линейным пространством.

Простейшие свойства линейных пространств

Непосредственно из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств.

Т 1. В произвольном линейном пространстве L :

- 1) нулевой элемент единственен;
- 2) для каждого $\bar{x} \in L$ существует *единственный* противоположный элемент.

Доказательство. 1) В аксиоме 3 линейного пространства не утверждается, что нулевой элемент должен быть единственным. Но из аксиом 1 и 3 в совокупности это вытекает.

Пусть существуют два нулевых элемента $\bar{0}_1 \in L$ и $\bar{0}_2 \in L$. Тогда

$$\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2.$$

Здесь в первом равенстве использован тот факт, что $\bar{0}_2$ – нулевой элемент, второе следует из коммутативности сложения, а третье справедливо в силу того, что $\bar{0}_1$ – нулевой элемент.

Следовательно, элементы $\bar{0}_1$ и $\bar{0}_2$ совпадают.

2) Пусть для некоторого $\bar{x} \in L$ существует два противоположных элемента $(-\bar{x})_1 \in L$ и $(-\bar{x})_2 \in L$.

Рассмотрим сумму $(-\bar{x})_1 + \bar{x} + (-\bar{x})_2$. В силу аксиомы 2 эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем:

$$((-x)_1 + x) + (-x)_2 = \bar{0} + (-x)_2 = (-x)_2;$$

$$(-x)_1 + (x + (-x)_2) = (-x)_1 + \bar{0} = (-x)_1,$$

т. е. оба противоположных элемента совпадают. \triangleleft

Т 2. В произвольном линейном пространстве L :

1) $0\bar{x} = \bar{0}$ для всех $\bar{x} \in L$;

2) $-1\bar{x} = -\bar{x}$ для всех $\bar{x} \in L$;

3) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (либо для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, если рассматривается комплексное линейное пространство);

4) $\alpha\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow$ либо $\alpha = 0$, либо $\bar{x} = \bar{0}$.

§2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства

Понятия линейной комбинации элементов, а также линейной зависимости и линейной независимости векторов произвольного линейного пространства определяются точно так же, как для обычных векторов в пространстве.

Опр. 1. *Линейной комбинацией* элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in L$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется элемент

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n \in L.$$

Опр. 2. Система (множество) элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in L$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно 0, что $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}$.

Опр. 3. Система (множество) элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in L$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Т 1 (критерий линейной зависимости системы элементов). Система элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in L$ линейно зависима тогда и

только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. По определению, если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные 0, что $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \dots + \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}$. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\overline{x_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \overline{x_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \overline{x_3} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \overline{x_n},$$

т. е. элемент $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_n}$.

Обратно, если $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_n}$, т. е. $\overline{x_1} = \alpha_2 \overline{x_2} + \alpha_3 \overline{x_3} + \dots + \alpha_n \overline{x_n}$. Тогда $\overline{x_1} - \alpha_2 \overline{x_2} - \alpha_3 \overline{x_3} - \dots - \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}$, т. е. линейная комбинация элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ равна $\overline{0}$, причем коэффициент при $\overline{x_1}$ не равен 0, а значит, элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ линейно зависимы. \triangleleft

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем элементов

Утв. 1. Всякая система элементов, содержащая нулевой элемент, линейно зависима.

Утв. 2. Если часть системы элементов образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

Утв. 3. Если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема (часть) линейно независима.

Утв. 4. Если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ линейно независимы и элемент $\overline{y} \in L$ не является их линейной комбинацией, то система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y} \in L$ линейно независима.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ матриц размера 2×2 проверить, являются линейно зависимыми или линейно независимыми следующие системы элементов:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

$$\text{б) } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Составим линейную комбинацию указанных элементов (матриц) и приравняем ее к нулевому элементу, т. е. нулевой матрице:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O;$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над матрицами в левой части равенства, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку равенство двух матриц означает равенство их соответствующих элементов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Если эта система имеет только нулевое решение, то элементы линейного пространства линейно независимы. Если эта система имеет ненулевое решение, то элементы линейного пространства линейно зависимы.

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{II'=II-2\cdot I \\ IV'=IV-3\cdot I}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{IV'=IV+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{IV'=IV-3 \cdot III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ -8\alpha_4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация матриц A_1, A_2, A_3, A_4 равна нулевой матрице только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Следовательно, матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 линейно независимы.

б) Проверим, может ли быть равна нулевой матрице линейная комбинация матриц B_1, B_2, B_3, B_4 , не все коэффициенты которой равны 0 (**нетривиальная** линейная комбинация матриц B_1, B_2, B_3, B_4):

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4 = O;$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнявая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{II'=II-2\cdot I \\ IV'=IV-3\cdot I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \xrightarrow{IV'=IV+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{IV'=IV-3\cdot III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система, имеющая бесконечно много решений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 0 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -c, \\ \alpha_2 = c, \\ \alpha_3 = -3c, \\ \alpha_4 = c, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В частности, полагая $c = 1$, получим $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3, \alpha_4 = 1$, т. е. существует равная нулевой матрице *нетривиальная* линейная комбинация матриц B_1, B_2, B_3, B_4 :

$$-B_1 + B_2 - 3B_3 + B_4 = O,$$

а значит, матрицы B_1, B_2, B_3, B_4 линейно зависимы. •

Пример 2. а) Несложно видеть, что в линейном пространстве многочленов элементы

$$f_1(x) = x^4; f_2(x) = x^3; f_3(x) = x^2; f_4(x) = x; f_5(x) = 1; f_6(x) = x^3 - 4x + 1$$

линейно зависимы, так как последний из них является линейной комбинацией остальных: $f_6(x) = f_2(x) - 4f_4(x) + f_5(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные многочлены линейно зависимы.

б) В линейном пространстве непрерывных функций элементы

$$f_1(x) = 1; f_2(x) = \cos x; f_3(x) = \cos^2 x; f_4(x) = \cos 2x$$

линейно зависимы, так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, т. е. последний элемент является линейной комбинацией остальных: $f_4(x) = 2f_3(x) - f_1(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные функции линейно зависимы. •

§3. Размерность и базис линейного пространства

Опр. 1. *Размерностью* линейного пространства L называется такое число $\dim L = n$, что:

- 1) в L существует n линейно независимых элементов;
- 2) любая система из $n + 1$ элемента линейно зависима.

Таким образом, *размерность линейного пространства* – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства.

Размерность нулевого линейного пространства считается равной 0.

Опр. 2. Линейное пространство L называется *бесконечномерным* ($\dim L = \infty$), если при любом натуральном n существует система n линейно независимых элементов этого пространства.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами является бесконечномерным линейным пространством, так как для любого натурального n система многочленов $1; x; x^2; \dots; x^{n-1}$ является линейно независимой. (Действительно, линейная комбинация этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, есть многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, который является нулевым (т. е. равен постоянной функции 0), только если все его коэффициенты (они же коэффициенты линейной комбинации) равны нулю.)

Аналогично, множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на \mathbb{R} , а также множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на \mathbb{R} , являются бесконечномерными линейными пространствами, поскольку содержат линейно независимую систему функций $1; x; x^2; \dots; x^{n-1}$ для любого натурального n . •

Опр. 3. *Базисом* линейного пространства L называется такая упорядоченная система $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, что любой элемент $\bar{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n. \quad (1)$$

Опр. 4. Представление (1) называется *разложением элемента \bar{x} по базису $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$* , а числа x_1, x_2, \dots, x_n — *координатами элемента \bar{x} в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$* ; в этом случае пишут

$$\bar{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}.$$

Пример 2. В линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами элементы x и x^2 линейно независимы: их линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ есть многочлен, который равен нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha = \beta = 0$.

Однако пара этих элементов не образует базиса, так как, к примеру, многочлен 1 нулевой степени, являющийся элементом $\mathbb{R}_2[x]$, нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов x и x^2 , поскольку равенство $1 = \alpha x + \beta x^2$ двух многочленов невозможно ни при каких значениях коэффициентов.

В то же время три многочлена $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$, так как:

1) система многочленов $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ линейно независима: их линейная комбинация

$$\alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

равна нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;

2) через многочлены $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ можно выразить любой многочлен степени не выше 2: если $p(x) = ax^2 + bx + c$, то $p(x) = ce_1(x) + be_2(x) + ae_3(x)$.

Таким образом, система многочленов $1, x, x^2$ есть базис в $\mathbb{R}_2[x]$.

•

Пример 3. Покажем, что квадратные трехчлены

$$e_1(x) = x^2 - x + 2, e_2(x) = 2x^2 + x, e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами.

Решение. 1) Покажем, что система многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независима, т. е. что равенство $\alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x) = 0$ возможно только в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим линейную комбинацию данных квадратных трехчленов и приравняем ее к 0:

$$\alpha_1(x^2 - x + 2) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(4x^2 - x + 1) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочлена в левой части равны 0, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}'=\text{III}-2\cdot\text{I}]{\text{II}'=\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow[\text{III}'=-\text{III}]{\text{II}'=\frac{1}{3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \xrightarrow{\text{III}'=\text{III}-4\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ равна 0 только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, многочлены $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независимы.

2) Покажем, что любой многочлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$. Для этого, приравняв линейную комбинацию многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ к $p(x)$:

$$\alpha_1(x^2 - x + 2) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(4x^2 - x + 1) = ax^2 + bx + c,$$

определим значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + 2\alpha_1 + \alpha_3 = ax^2 + bx + c.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x совпадают, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = a, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = c. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}' = \text{III} - 2\text{I}]{\text{II}' = \text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 3 & 3 & b+a \\ 0 & -4 & -7 & c-2a \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow[\text{III}' = -\text{III}]{\text{II}' = \frac{1}{3}\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+a}{3} \\ 0 & 4 & 7 & 2a-c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}' = \text{III} - 4\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+a}{3} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{2a-4b-3c}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система, имеющая единственное решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = a, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{b+a}{3}, \\ 3\alpha_3 = \frac{2a-4b-3c}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{-a+2b+6c}{9}, \\ \alpha_2 = \frac{a+7b+3c}{9}, \\ \alpha_3 = \frac{2a-4b-3c}{9}. \end{cases}$$

Следовательно, любой многочлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$.

Таким образом, квадратные трехчлены

$$e_1(x) = x^2 - x + 2, e_2(x) = 2x^2 + x, e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

образуют базис в $\mathbb{R}_2[x]$. •

Квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ имеет в базисе

$$e_1(x) = x^2 - x + 2, e_2(x) = 2x^2 + x, e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

координаты

$$\alpha_1 = \frac{-a+2b+6c}{9}; \alpha_2 = \frac{a+7b+3c}{9}; \alpha_3 = \frac{2a-4b-3c}{9}.$$

поскольку $p(x) = \alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x)$.

Определим координаты квадратного трехчлена $p(x) = 2x^2 + x + 3$ в этом базисе. Так как $a = 2, b = 1, c = 3$, то

$$\alpha_1 = \frac{-2+2 \cdot 1+6 \cdot 3}{9} = 2; \alpha_2 = \frac{2+7 \cdot 1+3 \cdot 3}{9} = 2; \alpha_3 = \frac{2 \cdot 2-4 \cdot 1-3 \cdot 3}{9} = -1,$$

т. е. $p(x) = 2e_1(x) + 2e_2(x) - e_3(x)$.

Проверка: действительно,

$$2(x^2 - x + 2) + 2(2x^2 + x) - (4x^2 - x + 1) = 2x^2 + x + 3. \bullet$$

Т 1. Координаты любого элемента $\bar{x} \in L$ в данном базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ определяются однозначно.

Доказательство. Если допустить, что некоторый элемент $\bar{x} \in L$ имеет в данном базисе два разложения:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n; \quad \bar{x} = x'_1 \bar{e}_1 + x'_2 \bar{e}_2 + \dots + x'_n \bar{e}_n,$$

то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$\bar{0} = (x_1 - x'_1) \bar{e}_1 + (x_2 - x'_2) \bar{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \bar{e}_n.$$

Так как базис — это линейно независимая система элементов, то ее линейная комбинация равна нулевому элементу только в том случае, когда она тривиальная, т. е. все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю:

$$x_1 - x'_1 = 0; x_2 - x'_2 = 0; \dots; x_n - x'_n = 0.$$

Следовательно, $x_1 = x'_1; x_2 = x'_2; \dots; x_n = x'_n$, а значит, два разложения элемента $\bar{x} \in L$ в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ совпадают. \triangleleft

Основное значение базиса заключается в том, что операции сложения и умножения элементов линейного пространства на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над координатами элементов.

Т 2. Пусть в линейном пространстве L задан базис $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$. Тогда:

- 1) все координаты нулевого элемента равны 0;
- 2) два элемента равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе;
- 3) при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты;
- 4) при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число.

Т 3. Базис линейного пространства L состоит из n элементов тогда и только тогда, когда $\dim L = n$.

Пример 4. 1) Если $L = \mathbb{R}$, то $\dim L = 1$; базис — любое число, отличное от 0.

2) Множество \mathcal{V}_3 всех векторов в пространстве является трехмерным линейным пространством: $\dim \mathcal{V}_3 = 3$; базис — любые три

некомпланарных вектора. Если $L = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости), то $\dim \mathcal{V}_2 = 2$; базис – любые две неколлинеарных вектора. Множество \mathcal{V}_1 векторов, коллинеарных заданной прямой, – одномерное линейное пространство: $\dim \mathcal{V}_1 = 1$; базис – любой ненулевой вектор этого пространства.

3) Если $L = \mathbb{R}^n$, то $\dim L = n$; базис в пространстве \mathbb{R}^n составляют, например, n n -мерных векторов:

$$\bar{e}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0); \bar{e}_2 = (0; 1; 0; \dots; 0); \dots; \bar{e}_n = (0; 0; 0; \dots; 1), \quad (2)$$

поскольку для любого $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$.

Базис (2) в пространстве \mathbb{R}^n называют **стандартным**.

4) *Упражнение 1.* Показать, что в качестве базиса в линейном пространстве $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ матриц размера 2×3 можно взять

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) = 6$.

5) Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет базис $1; x; x^2; \dots; x^n$, поэтому $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$. •

Замечание. Базис линейного пространства определяется неоднозначно.

Т 4. В n -мерном линейном пространстве всякая упорядоченная система, состоящая из n линейно независимых элементов, является базисом.

Пример 5. Найдем координаты вектора $\bar{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\bar{e}_1 = (1; 0; 1; 0); \bar{e}_2 = (0; 1; 0; 1); \bar{e}_3 = (1; 1; 1; 0); \bar{e}_4 = (0; 1; 1; 1)$.

Решение. Найдем коэффициенты разложения элемента \bar{x} по базису $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3; \bar{e}_4\}$, т. е. такие числа x_1, x_2, x_3, x_4 , что $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 + x_4 \bar{e}_4$. При этом удобно записывать элементы

пространства \mathbb{R}^4 (упорядоченные комбинации n действительных чисел) как матрицы-столбцы. Тогда

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{III'=III-I \\ IV'=IV-II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_4 = 2, \\ -x_3 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -2, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\bar{x} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4$, т. е. определили координаты $\bar{x} = \{3; 2; -2; 2\}$ в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3; \bar{e}_4\}$. •

Преобразование координат вектора при изменении базиса

В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования координат векторов, которое связано с изменением базиса.

Пусть $E = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ – базис линейного пространства L ; $E' = \{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2; \dots; \bar{e}'_n\}$ – новый базис линейного пространства L , причем (любой вектор пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса E)

$$\begin{aligned}\bar{e}'_1 &= t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + \dots + t_{n1}\bar{e}_n, \\ \bar{e}'_2 &= t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + \dots + t_{n2}\bar{e}_n, \\ &\dots, \\ \bar{e}'_n &= t_{1n}\bar{e}_1 + t_{2n}\bar{e}_2 + \dots + t_{nn}\bar{e}_n.\end{aligned}$$

Опр. 5. Матрица

$$T = T_{E \rightarrow E'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей перехода от базиса E к базису E'** .

Согласно данному определению, *i -й столбец матрицы перехода есть столбец координат i -го вектора нового базиса в старом.* Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Замечание. Поскольку векторы $\overline{e'_1}; \overline{e'_2}; \dots; \overline{e'_n}$ линейно независимы, то матрица перехода является невырожденной матрицей: $\det T \neq 0$.

Пример 6. В пространстве \mathcal{V}_2 векторов на плоскости найдем матрицу перехода от базиса $\mathcal{E} = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ к базису $\mathcal{E}' = \{\overline{e'_1}; \overline{e'_2}\}$, который получается из базиса $\mathcal{E} = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ поворотом на заданный угол φ против часовой стрелки (рис. 1).

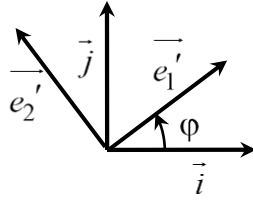


Рис. 1. Поворот ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ на угол φ

Несложно видеть, что координаты векторов нового базиса в базисе $\mathcal{E} = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ равны

$$\overline{e'_1} = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}; \overline{e'_2} = \{-\sin \varphi; \cos \varphi\}.$$

Поэтому

$$T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой доказывается следующий факт.

Т 5. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента

$\overline{x} \in L$ в базисе \mathcal{E} и в базисе \mathcal{E}' соответственно, то $\boxed{X = TX'}.$

Следствие 1. $X' = T^{-1}X$, где T – матрица перехода от базиса E к базису E' .

Следствие 2. Матрица перехода от базиса E' к базису E – это матрица, обратная матрице перехода от базиса E к базису E' :

$$T_{E' \rightarrow E} = T_{E \rightarrow E'}^{-1}.$$

Изоморфизм линейных пространств

Опр. 6. Два линейных пространства L_1 и L_2 называются **изоморфными**, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если $\bar{x}_1 \leftrightarrow \bar{y}_1$, $\bar{x}_2 \leftrightarrow \bar{y}_2$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L_1$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in L_2$, то $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leftrightarrow \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ и $\alpha \bar{x}_1 \leftrightarrow \alpha \bar{y}_1$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Из определения изоморфизма следует, что линейно зависимым векторам из L_1 соответствуют линейно зависимые векторы из L_2 , и наоборот. Поэтому размерности изоморфных пространств одинаковы, а пространства разной размерности не могут быть изоморфны друг другу.

Т 6. Два линейных пространства L_1 и L_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim L_1 = \dim L_2$.

Таким образом, все **линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу**. Поэтому любое n -мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с \mathbb{R}^n , рассматривая его элементы как столбцы координат в некотором фиксированном базисе.

§4. Подпространства линейных пространств

Опр. 1. Непустое подмножество L' действительного линейного пространства L называется **линейным подпространством** пространства L , если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элементы $\bar{x} + \bar{y} \in L'$, $\alpha \bar{x} \in L'$.

Утв. 1. Подпространство само является линейным пространством, причем $\dim L' \leq \dim L$.

Пример 1. Приведем примеры подпространств линейных пространств.

1. Простейшими примерами подпространств для любого линейного пространства L являются нулевое подпространство $\{\bar{0}\}$ и само пространство L . Эти подпространства называются **тривиальными**.

2. Пусть L – множество всех непрерывных функций, тогда $L' = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n – является подпространством линейного пространства L .

3. Пусть $L = \mathbb{R}_5[x]$ – множество многочленов степени не выше 5, тогда $L' = \mathbb{R}_4[x]$ – множество многочленов степени не выше 4 – является подпространством линейного пространства L .

4. Если $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), то $L' = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости) является подпространством линейного пространства L , а $L'' = \mathcal{V}_1$ (множество векторов, коллинеарных заданной прямой) является подпространством L' . •

Важный пример линейного подпространства дает следующее понятие.

Опр. 2. Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$ – элементы линейного пространства L . **Линейной оболочкой** элементов $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов:

$$L(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \dots + \gamma\bar{z} : \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Линейную оболочку элементов $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$ обозначают $L(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$ либо $\langle \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z} \rangle$. Иногда также говорят, что линейная оболочка *натянута на векторы* $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$.

Упражнение. Показать, что линейная оболочка заданных элементов линейного пространства L является подпространством линейного пространства L .

Утв. 2. Линейная оболочка $L(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$ является **наименьшим** подпространством, содержащим элементы $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$.

Утв. 3. Размерность линейной оболочки $L(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z})$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}$.

Пример 2. В линейном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов линейная оболочка $L(1, x, x^2, \dots, x^n) = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n ; линейная оболочка $L(x, x^2, \dots, x^n)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x$; линейная оболочка $L(1, x, x^2, x^2 + x + 1)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^2 + a_1x + a_2$, т. е. $\mathbb{R}_2[x]$. •

Пример 3. Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), $\bar{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\bar{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k} \in L$. Тогда линейная оболочка

$$L(\bar{x}, \bar{y}) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

– это множество всех векторов, параллельных плоскости, содержащей векторы $\bar{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\bar{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$, т. е. плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-2x + 4y + 6z = 0$, т. е. $x - 2y - 3z = 0$. •

Операции над подпространствами

Пусть L_1 и L_2 – два линейных подпространства одного и того же линейного пространства L .

Опр. 3. Пересечением $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется множество всех элементов, принадлежащих одновременно и L_1 , и L_2 :

$$L_1 \cap L_2 = \{\bar{x} \in L : \bar{x} \in L_1, \bar{x} \in L_2\}.$$

Очевидно, что $L_1 \cap L_2$ также является подпространством линейного пространства L .

Опр. 4. Суммой $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется множество всех элементов вида $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, где $\bar{x} \in L_1$, $\bar{y} \in L_2$, т. е.

$$L_1 + L_2 = \{\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} : \bar{x} \in L_1, \bar{y} \in L_2\}.$$

Упражнение. Проверить, что $L_1 + L_2$ является подпространством линейного пространства L .

Пример 4. Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех свободных векторов в пространстве); L_1 – множество всех векторов, параллельных плоскости Oxy ; L_2 – множество всех векторов, параллельных плоскости Oxz .

Тогда $L_1 \cap L_2$ – множество всех векторов, параллельных оси Ox , а $L_1 + L_2 = L$.

Заметим, что

$$\dim L = 3, \dim L_1 = 2, \dim L_2 = 2, \dim(L_1 \cap L_2) = 1, \dim(L_1 + L_2) = 3. \bullet$$

Т 1. Пусть L_1 и L_2 – два подпространства одного и того же линейного пространства L . Тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Пример 5. Пусть $L = \mathbb{R}[x]$ (множество всех многочленов); $L_1 = L(1, x, x^2, x^3)$, $L_2 = L(x^2, x^3, x^4)$. Тогда $\dim L_1 = 4$, $\dim L_2 = 3$.

В этом случае $L_1 + L_2 = L(1, x, x^2, x^3, x^4)$, $\dim(L_1 + L_2) = 5$; $L_1 \cap L_2 = L(x^2, x^3)$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$. •

§ 5. Линейные операторы

Пусть L_1 и L_2 – два линейных пространства.

Опр. 1. Если задано правило f , по которому каждому элементу $\bar{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\bar{y} \in L_2$, то говорят, что задан **оператор (отображение, преобразование)**, действующий из L_1 в L_2 : $f: L_1 \rightarrow L_2$; при этом элемент $\bar{y} = f(\bar{x})$ называется **образом** элемента \bar{x} , а элемент \bar{x} – **прообразом** элемента \bar{y} (при данном отображении f).

Замечание. Термин «преобразование» используется в случае, когда пространства L_1 и L_2 совпадают.

Опр. 2. Отображение, при котором каждый элемент $\bar{y} \in L_2$ имеет единственный прообраз (иными словами, разным элементам $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L_1$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, соответствуют разные образы $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in L_2$, $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$) называется **взаимно однозначным**, или **биективным**.

Замечание. Отображения, которые мы будем рассматривать, не обязательно будут взаимно однозначными.

Опр. 3. Оператор $f : L_1 \rightarrow L_2$ называется *линейным*, если для любых элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha \in \mathbb{C}$, если рассматриваются комплексные линейные пространства) выполняются условия:

- 1) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$;
- 2) $f(\alpha \bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$.

Утв. 1. Оператор $f : L_1 \rightarrow L_2$ является линейным тогда и только тогда, когда для любых элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L_1$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в случае комплексных линейных пространств) выполняется условие $f(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) = \alpha f(\bar{x}_1) + \beta f(\bar{x}_2)$.

Пример 1. Пусть $L_1 = \mathcal{V}_2$ – множество всех свободных векторов на плоскости. Будем рассматривать элементы этого линейного пространства как векторы, исходящие из начала координат – точки O .

Тогда примерами линейных операторов являются: поворот вектора на данный угол φ ; умножение вектора на данное число λ ; симметрия относительно прямой, проходящей через точку O ; симметрия относительно точки O ; проекция на одну из осей. •

Пример 2. Пусть $L_1 = \mathbb{R}^{n \times 1}$ – множество матриц-столбцов (множество столбцов высоты n), а $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – фиксированная матрица размера $m \times n$. Тогда $f(X) = AX$ – линейное отображение, $f : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Отметим, что поскольку всякое n -мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с \mathbb{R}^n , то данное отображение можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. •

Пример 3. Пусть $L_1 = \mathbb{R}[x]$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами. Рассмотрим отображение D – оператор дифференцирования, который ставит в соответствие каждому многочлену

$$a(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

его производную

$$a'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \in \mathbb{R}[x].$$

Оператор дифференцирования является линейным оператором $D: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$.

Заметим, что $D: \mathbb{R}^n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}[x]$. •

Пример 4. В любом линейном пространстве L можно определить отображения $I(\bar{x}) = \bar{x}$ и $O(\bar{x}) = \bar{0}$, которые также являются линейными операторами. •

Опр. 4. Оператор $I: L \rightarrow L$, действующий по правилу $I(\bar{x}) = \bar{x}$, называется *тождественным оператором*.

Пример 5. Рассмотрим на множестве векторов в пространстве

$$L = \mathcal{V}_3 = \{\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) : x_1; x_2; x_3 \in \mathbb{R}\}$$

два линейных оператора:

$f_1(\bar{x}) = \bar{x} \times \vec{a}$ — умножение вектора $\bar{x} \in \mathcal{V}_3$ справа на заданный вектор $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$;

$f_2(\bar{x})$ — отображение вектора $\bar{x} \in \mathcal{V}_3$ симметрично относительно плоскости Ox_1x_2 .

Найдем явный вид операторов f_1 и f_2 , т. е. для каждого $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$ укажем координаты его образов $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$.

Для отображения $f_1(\bar{x}) = \bar{x} \times \vec{a}$ имеем

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) = f_1(x_1; x_2; x_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(3x_2 - 2x_3) - \vec{j}(3x_1 - x_3) + \vec{k}(2x_1 - x_2), \end{aligned}$$

поэтому $f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2)$.

Вектор, симметричный вектору $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)$ относительно плоскости Ox_1x_2 , очевидно, имеет координаты $(x_1; x_2; -x_3)$, поэтому $f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$. •

Действия с линейными операторами

Опр. 5. Суммой двух линейных операторов $f: L_1 \rightarrow L_2$ и $g: L_1 \rightarrow L_2$ называется оператор $h = f + g: L_1 \rightarrow L_2$, действующий так, что для любого $\bar{x} \in L_1$ справедливо $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})$.

Очевидно, что сумма линейных операторов является линейным оператором.

Очевидно, что $f + g = g + f$ (сложение операторов коммутативно).

Опр. 6. Произведением линейного оператора $f: L_1 \rightarrow L_2$ на число λ называется оператор $h = \lambda f: L_1 \rightarrow L_2$, действующий по правилу $h(\bar{x}) = \lambda f(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in L_1$.

Очевидно, что при умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

Замечание. Множество $L(L_1 \rightarrow L_2)$ всех линейных операторов, действующих из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 , также является линейным пространством.

Опр. 7. Произведением (композицией) линейного оператора $f: L_1 \rightarrow L_2$ на линейный оператор $g: L_2 \rightarrow L_3$ называется оператор $h = g \circ f: L_1 \rightarrow L_3$, действие которого заключается в последовательном действии операторов f и g , т. е. $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ для любого $\bar{x} \in L_1$.

Произведение оператора f на оператор g обозначают $h = g \circ f$ или $h = gf$.

Замечание 1. Оператор, действующий первым, записывается справа.

Замечание 2. Как правило, $gf \neq fg$, т. е. операция умножения операторов не коммутативна.

Упражнение. Проверить, что произведение линейных операторов является линейным оператором.

Пример 5 (продолжение). Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$$

для всех $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$, определим явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

Решение. Найдем явный вид оператора $h_1 = f_2 \circ f_1$. Пусть $\bar{y} = f_1(\bar{x})$, $\bar{z} = f_2(\bar{y})$. Тогда координаты элементов $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\bar{y} = (y_1; y_2; y_3)$, $\bar{z} = (z_1; z_2; z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = -y_3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2, \end{cases}$$

поэтому $h_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; -2x_1 + x_2)$.

Найдем явный вид оператора $h_2 = f_1 \circ f_2$. Пусть теперь $\bar{y} = f_2(\bar{x})$, $\bar{z} = f_1(\bar{y})$. Тогда координаты элементов $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\bar{y} = (y_1; y_2; y_3)$, $\bar{z} = (z_1; z_2; z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = -x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 3y_2 - 2y_3, \\ z_2 = -3y_1 + y_3, \\ z_3 = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 + 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 - x_3, \\ z_3 = 2x_1 - x_2, \end{cases}$$

а значит, $h_2(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 + 2x_3; -3x_1 - x_3; 2x_1 - x_2)$.

Теперь найдем координаты элемента $\bar{z} = h(\bar{x}) = h_1(\bar{x}) - h_2(\bar{x})$:

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3 - (3x_2 + 2x_3) = -4x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3 - (-3x_1 - x_3) = 2x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2 - (2x_1 - x_2) = -4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Следовательно, $h(x_1; x_2; x_3) = (-4x_3; 2x_3; -4x_1 + 2x_2)$. •

Опр. 8. Оператор $\varphi: L \rightarrow L$ называется *обратным* к данному оператору $f: L \rightarrow L$, если $\varphi \circ f = I$ и $f \circ \varphi = I$.

Оператор, обратный к оператору f , обозначается f^{-1} .

Пример 6. Найдем f^{-1} , если

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_3; x_2)$$

для всех $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L$.

Решение. Пусть $\bar{y} = f(\bar{x})$. Тогда координаты элементов $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\bar{y} = (y_1; y_2; y_3)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases}$$

Выразим из этих соотношений координаты элемента $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ через y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3 = y_2, \\ x_2 = y_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_3 - y_2, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2; \end{cases}$$

поэтому $f^{-1}(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_3 - x_2; x_3; x_2)$. •

Утв. 2. Если $f: L \rightarrow L$ – линейный оператор и оператор f^{-1} существует, то f^{-1} – тоже линейный оператор.

Утв. 3. Если $f: L \rightarrow L$ – линейный оператор, то обратный оператор f^{-1} существует тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор.

Матрицы линейных операторов

Пусть $f: L_1 \rightarrow L_2$ – линейный оператор и линейные пространства L_1 и L_2 конечномерны.

Выберем базисы: $E = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ – базис линейного пространства L_1 ; $F = \{\bar{f}_1; \bar{f}_2; \dots; \bar{f}_m\}$ – базис линейного пространства L_2 .

Элементы $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)$ (образы базисных векторов линейного пространства L_1 при отображении f) являются элементами линейного пространства L_2 , а значит, их можно разложить по базису F :

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \dots + a_{m1}\bar{f}_m, \\ f(\bar{e}_2) &= a_{12}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \dots + a_{m2}\bar{f}_m, \\ &\dots, \\ f(\bar{e}_n) &= a_{1n}\bar{f}_1 + a_{2n}\bar{f}_2 + \dots + a_{mn}\bar{f}_m. \end{aligned}$$

Опр. 9. Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)$, называется **матрицей линейного оператора** f .

Утв. 4. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ – столбцы координат эле-

мента $\bar{x} \in L_1$ в базисе \mathcal{E} и его образа $\bar{y} = f(\bar{x}) \in L_2$ в базисе \mathcal{F} соответственно, то $Y = A_f X$.

Утв. 5. Действиям над линейными операторами соответствуют такие же действия над их матрицами (в соответствующих базисах):

- 1) $A_{f+g} = A_f + A_g$;
- 2) $A_{\lambda f} = \lambda A_f$ (λ – число);
- 3) $A_{g \circ f} = A_g A_f$;
- 4) $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$;

5) матрица тождественного оператора является единичной: $A_I = E$.

Таким образом, линейные преобразования описываются с помощью матриц и действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Пример 5 (продолжение). Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$$

для всех $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$, найдем их матрицы, а также определим матрицу и явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

Решение. Выберем базис $E = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3\}$ линейного пространства L_1 и найдем матрицу A_{f_1} линейного оператора f_1 в этом базисе. Пусть

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} -$$

матрица линейного оператора f_1 и столбцы координат элемента \bar{x} и его образа $\bar{y} = f_1(\bar{x})$ в базисе E . Согласно утверждению 4, $Y = A_{f_1} X$, т. е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

С другой стороны, из условия вытекает, что координаты элемента \bar{x} и его образа $\bar{y} = f_1(\bar{x})$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Отсюда получим $A_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем $A_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти матрицу A_h оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$, вычислим сначала матрицы операторов $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$, используя утверждение 5:

$$A_{f_2 f_1} = A_{f_2} A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{f_1 f_2} = A_{f_1} A_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A_h = A_{f_2 f_1} - A_{f_1 f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$ задается соотношением $h(x_1; x_2; x_3) = (-4x_3; 2x_3; -4x_1 + 2x_2)$. •

Опр. 10. Линейный оператор $f : L \rightarrow L$ называется **невыврожденным**, если его матрица невырожденная, т. е. $\det A_f \neq 0$.

Утв. 6. Линейный оператор $f : L \rightarrow L$ является невырожденным тогда и только тогда, когда f — взаимно однозначный оператор.

Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса

Пусть $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ – базис линейного пространства L ;
 $\mathcal{E}' = \{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2; \dots; \bar{e}'_n\}$ – новый базис линейного пространства L ,
 $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса \mathcal{E} к базису \mathcal{E}' .

Утв. 7. Если $f: L \rightarrow L$ – линейный оператор и A_f – матрица линейного оператора f в базисе \mathcal{E} , а A'_f – матрица линейного оператора f в базисе \mathcal{E}' , то

$$A'_f = T^{-1} A_f T.$$

Доказательство. Пусть X и Y – столбцы координат элемента $\bar{x} \in L$ и его образа $\bar{y} = f(\bar{x})$ в базисе \mathcal{E} , а X' и Y' – столбцы координат элементов \bar{x} и $\bar{y} = f(\bar{x})$ в базисе \mathcal{E}' . Тогда, в силу теоремы 5 §3, $X = TX'$ и $Y = TY'$.

Если A_f – матрица линейного оператора f в базисе \mathcal{E} , то, согласно утверждению 4, $Y = A_f X$. Выражая X и Y через X' и Y' , получим

$$TY' = A_f TX' \Leftrightarrow Y' = T^{-1} A_f TX',$$

откуда, в силу $Y' = A'_f X'$, получим $A'_f = T^{-1} A_f T$. \triangleleft

Пример 7. Пусть $A_f = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$. Найдём матрицу A'_f этого линейного оператора в базисе $\mathcal{E}' = \{\bar{e}'_1; \bar{e}'_2\}$, где $\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $\bar{e}'_2 = 6\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$.

Решение. Согласно утверждению 7, $A'_f = T^{-1} A_f T$, где $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса \mathcal{E} к базису \mathcal{E}' .

Матрица $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ состоит из координат векторов нового базиса \mathcal{E}' в старом базисе \mathcal{E} , записанных по столбцам, поэтому

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу T^{-1} по формуле

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T.$$

Вычислим определитель матрицы T и алгебраические дополнения к элементам этой матрицы:

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{11} = 4; \quad A_{21} = -6;$$

$$A_{12} = -1; \quad A_{22} = 2.$$

Следовательно, $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\begin{aligned} A'_f &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \bullet \end{aligned}$$