КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Понятие кривой второго порядка. Окружность

Кривой второго порядка называется линия на плоскости Oxy, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x, y вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Здесь A, B, C, D, E, F — заданные числа, называемые коэффициентами уравнения. Считаем, что в этом уравнении коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю, поскольку в противном случае уравнение второй степени обращается в уравнение первой степени. Рассмотрим отдельные случаи введенного уравнения и соответствующие им кривые.

Окружность. Как мы уже знаем, окружность радиуса R с центром в точке $O_1(a, b)$ имеет уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

В левой части раскроем скобки и получим

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Характерной чертой этого уравнения является то, что коэффициенты при квадратах текущих координат равны. Кроме того, в этом уравнении отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат. Легко проверить, что если в общем уравнении A=C, B= 0, то оно будет определять окружность в плоскости Oxy (если уравнению отвечает множество точек). Чтобы убедиться в сказанном, достаточно общее уравнение поделить на A=C, а затем в левой части выделить полные квадраты членов, содержащих x, и полные квадраты членов, содержащих y. Таким образом перейдем к уравнению окружности с центром в заданной точке $O_1(a, b)$ радиуса R:

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{A^2} - \frac{E^2}{A^2} = 0.$$

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, выделяя полные квадраты в левой его части: $(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 3 = 0$, или $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.

Значит, центр окружности – точка $N(3;-2)$, радиус $R = 4$.

§2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a$, фокусы — через F_1 и F_2, а расстояние между ними F_1F_2 через $2c$. Ось Ox проведем через фокусы. Начало координат O возьмем в середине отрезка, соединяющего фокусы. При указанном выборе осей координаты имеем $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса, соединим ее с F_1 и F_2.

По определению эллипса сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна $2a$, то есть (F_1M и F_2M называются ***фокальными радиусами***)

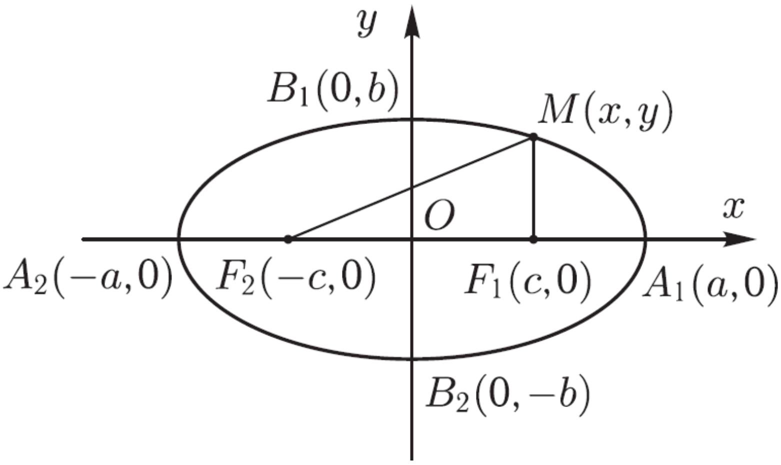
$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Из треугольника F_1MF_2 видно, что $2a > 2c$. Выразим расстояния через координаты:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}, F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}.$$

Подставим эти выражения в предыдущее равенство и получим

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$



Последнему соотношению удовлетворяют координаты любой точки эллипса, следовательно, это соотношение — уравнение эллипса. Упростим его, перенеся второй корень из левой части вправо и возведя обе части уравнения в квадрат. Тогда будем иметь

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2.$$

После приведения подобных членов оставим в правой части корень с множителем, остальные слагаемые перенесем влево и полученное выражение возведем в квадрат. Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ (так как $a > c$), считая $b > 0$. После простых преобразований получим соотношение

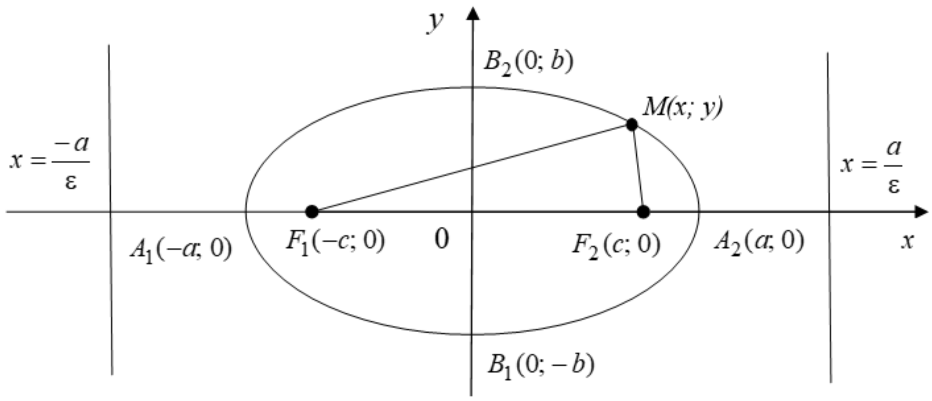
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такое уравнение эллипса называется ***каноническим***. Имея это уравнение, выясним форму эллипса.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. На плоскости Oxy возьмем точку $M'(x, -y)$, имеющую туже абсциссу x, что и точка M, и ординату $-y$, отличающуюся от ординаты точки M только знаком. Точка M' симметрична M относительно оси Ox. Каноническое уравнение содержит y только во второй степени, $y^2=(-y)^2$. Координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению эллипса, но тогда этому уравнению удовлетворяют и координаты точки M'. Получаем, что точка M' лежит на эллипсе, но сказанное относится к произвольной точке M эллипса, следовательно, эллипс будет симметричным относительно оси Ox. Так в каноническом уравнении x содержится только в квадрате, рассуждая аналогично, покажем, что ось Oy также является осью симметрии эллипса, следовательно, начало координат O — центр симметрии эллипса. В силу симметрии форму эллипса достаточно выяснить для первой четверти плоскости Oxy, в которой $x > 0$ и $y > 0$. Для таких значений x и y каноническое уравнение запишем так:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Получили выражение для ординаты y точки M с абсциссой x. Когда абсцисса точки M принимает значение x=0, то ее ордината $y = b$, а точка M находится на Oy в точке $B_1(0,b)$. С увеличением абсциссы точки M ордината этой точки согласно уменьшается. Точка M опускается, и при $x = a$ ордината этой точки будет равна нулю, а M совпадет с точкой $A_1(a, 0)$. Остальные части эллипса вычерчиваются по симметрии. Точки A_1, B_1, A_2, B_2 называются ***вершинами эллипса***, а числа $2a = A_1A_2$ и $2b = B_1B_2$ — ***большой и малой осями эллипса*** соответственно.



Эксцентриситетом эллипса называется отношение полуфокусного расстояния к большей его полуоси

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда видно, что для окружности, когда $b = a, \varepsilon = 0.$ Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль большей полуоси. Чем больше величина эксцентриситета, тем больше вытянутый эллипс. Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$.

Две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon},\ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

перпендикулярные большей полуоси, называются *директрисами эллипса*.

Для эллипса справедливо следующее утверждение.

Теорема. Отношение расстояния от любой точки до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε.

Пример. Дано уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) длину его осей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса $9x^2+25y^2=225$ к каноническому виду, разделив обе части его на 225:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,$$

из которого следует:

а) $a^2=25$, $b^2=9$, т. е. $a=5$, $b=3$, $2a=10$ − длина большой оси, $2b=6$ − длина малой оси;

б) используя равенство $c^2=a^2-b^2$, найдем $c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$, значит, $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

в) эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

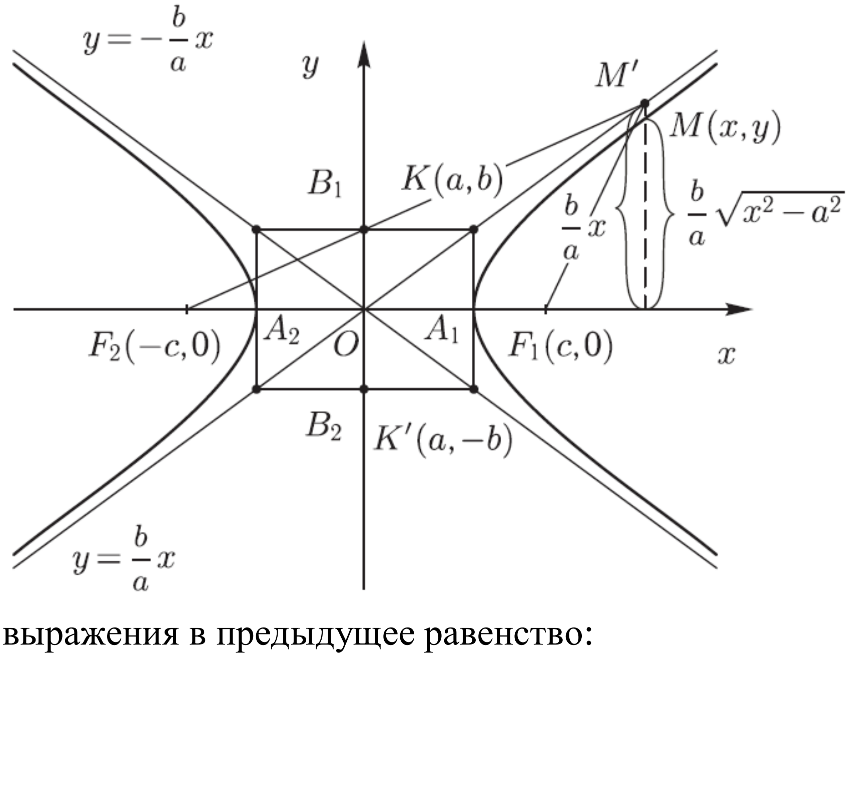
§3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. Обозначим эту постоянную $2a>0$, а фокусы — через F_1 и F_2. Пусть расстояние между ними $F_1F_2=2c$. Ось Ox проведем через фокусы. Начало координат O возьмем в середине отрезка F_1F_2. Тогда фокусы имеют координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы, тогда по определению

$$F_1M-F_2M=\pm 2a.$$

Знак «+» берется, когда левая часть положительна, а знак «−» — когда левая часть отрицательна. Расстояния F_1M и F_2M, как и раньше, выражаются формулами

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}, F_2M=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}.$$



Подставим эти выражения в предыдущее равенство:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Получили уравнение гиперболы. Как видно из рисунка $2c$ есть длина стороны F_1F_2 треугольника F_1F_2M, и она больше $2a$, поэтому $c^2-a^2=b^2$, где число b будем считать положительным. Уравнение упростим, убрав корни так же, как в уравнении эллипса. Получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Исследуем форму гиперболы, исходя из этого уравнения (как и в случае эллипса). Так как уравнение содержит x и y только во второй степени, то Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы (аналогично случаю эллипса), поэтому точка пересечения этих осей — начало координат $O(0, 0)$ — центр симметрии гиперболы. Ясно, что для установления вида гиперболы достаточно рассмотреть картину в первой четверти плоскости, где $x>0$ и $y>0$. Для таких значений x, y из уравнения выразим y и получим

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Эта формула выражает ординату y точки M гиперболы, абсцисса которой есть x. При $x=a$ ордината $y=0$, получим точку $A_1(a, 0)$ гиперболы. С увеличением абсциссы точки M ее ордината согласно увеличивается. Точка M уходит вправо, неограниченно поднимаясь вверх. Остальные части гиперболы строятся по симметрии.

Определим вид гиперболы, когда OM неограниченно увеличивается. Возьмем прямую с уравнением

$$y=\frac{b}{a}x$$

проходящую через точки $K(a,b)$ и $O(0,0)$. Пусть M' — точка прямой, имеющая ту же абсциссу x, что и точка M гиперболы. Ординаты этих точек равны $\frac{b}{a}x$ и $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, так как они удовлетворяют уравнениям

$$y=\frac{b}{a}x \text{ и } y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

соответственно. Разность между указанными ординатами равна расстоянию между точками M и M', следовательно,

$$MM'=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{b\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{b(x^2-x^2-a^2)}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

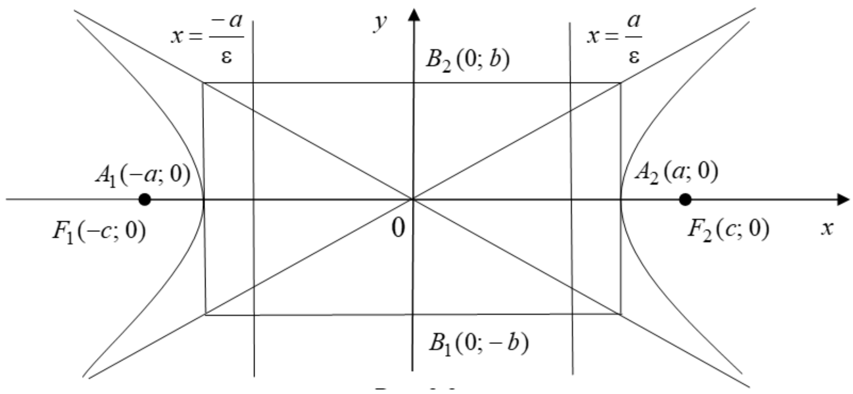
Для положительных x знаменатель с увеличением x неограниченно увеличивается, поэтому дробь убывает. Таким образом, MM' стремится к нулю, то есть точка M гиперболы приближается к точке M' прямой. В силу симметрии относительно $O(0,0)$ такая же картина будет в третьей четверти плоскости.

Возьмем теперь прямую

$$y = -\frac{b}{a}x$$

Она симметрична с прямой $y = \frac{b}{a}x$ относительно Ox, проходит через точку $O(0,0)$ и через точку $K^{/}(a,-b)$, симметричную с K относительно Ox. В силу симметрии гиперболы относительно оси абсцисс ясно, что гипербола по отношению к прямой $y = -\frac{b}{a}x$ расположена аналогично ее расположению к прямой $y = \frac{b}{a}x$. Эти прямые называются ***асимптотами*** гиперболы.

При построении гиперболы целесообразно сначала начертить ее асимптоты. Точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ пересечения гиперболы с осью Ox называются ***вершинами гиперболы***. Расстояние между ними $2a=A_1A_2$ называется ***действительной осью гиперболы***; число $2b=B_1B_2$ называется ***мнимой осью гиперболы***.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a – действительная полуось, называется ***эксцентриситетом гиперболы***. Очевидно, что для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Две прямые $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные действительной полуоси, называются ***директрисами гиперболы***

Как и для эллипса, для гиперболы справедливо утверждение. Отношение расстояния от любой точки до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε.

Пример. Дано уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти:
а) длины полуосей гиперболы; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 144. Получим каноническое уравнение $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, из которого следует:

а) $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, то есть $a = 4$, $b = 3$;

б) используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, найдем $c = \sqrt{16+9} = 5$, значит, фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$

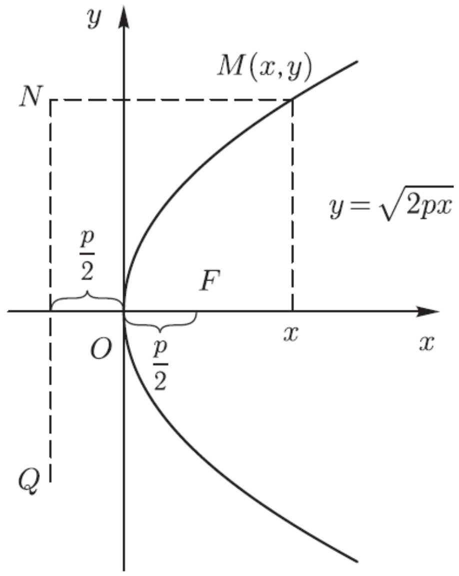
б) эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$;

в) уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, то есть в данном случае $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

§ 3. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой. Пусть F — фокус. Ось Ox проведем через F перпендикулярно директрисе NQ в направлении от нее.

Пусть p — расстояние от фокуса F до директрисы. Это число задано и называется ***параметром параболы***. Начало координат возьмем в середине перпендикуляра, опущенного из точки F на директрису. Тогда фокус будет иметь координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.



Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка параболы, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Из рисунка видно, что расстояние $MN = \frac{p}{2} + x$. Запишем расстояние от F до M:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$$

Для любой точки M параболы имеем $MN = FM$ (по определению параболы). Подставим сюда выражения для MN и FM и получим уравнение параболы

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Упростим его, избавляясь от корня. Получим ***каноническое уравнение параболы***

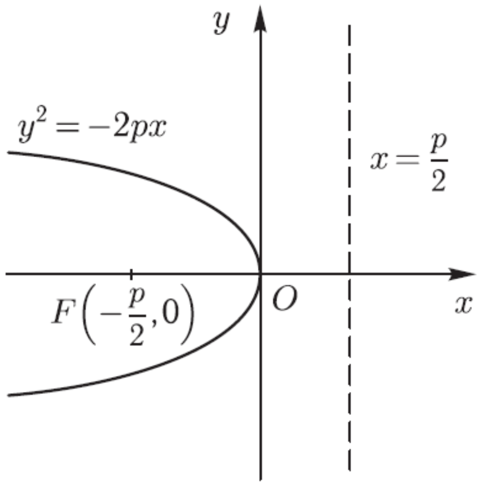
$$y^2 = 2px.$$

Исследуем форму параболы по уравнению. Так как это уравнение содержит y только во второй степени, то, как и в случае эллипса, Ox является осью симметрии параболы. Следовательно, вид параболы достаточно установить в верхней полуплоскости, где $y>0$. Для таких значений y уравнение запишем в виде

$$y = \sqrt{2px}.$$

Эта формула выражает ординату точки M, абсцисса которой равна x. Когда $x=0$, согласно последней формуле $y=0$, точка M совпадает с (0, 0). С увеличением абсциссы x точки M ее ордината, равная $\sqrt{2px}$, неограниченно растет, и точка M уходит вверх и вправо. Остальная часть параболы вычерчивается симметрично.

Если Ox провести от F к директрисе, то получим параболу, изображенную на следующем рисунке.



Легко проверить, что уравнение параболы в этом случае будет иметь вид

$$y^2 = -2px.$$

Пусть теперь ось Oy направлена перпендикулярно директрисе в направлении от нее и проходит через F. При этом уравнение параболы будет иметь вид

$$x^2 = 2py.$$