

Вопросы к курсу «Дифференциальные уравнения»

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.
2. Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.
3. Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения (теорема).
4. Уравнение в полных дифференциалах.
5. Автономное уравнение. Общее решение. Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.
6. Уравнение с разделяющимися переменными. (теорема о разделении переменных)
7. Однородное уравнение. (лемма о сведении к уравнению с разделяющимися переменными)
8. Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.
9. Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.
10. Операторная норма. Оценка конечных приращений.
11. Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.
12. Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
13. Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.
14. Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.
15. Доказательство теоремы Пеано.
16. Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.
17. Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.
18. Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.
19. Теорема продолжаемости для линейной системы.
20. Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.
21. Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.
22. Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.
23. Метод введения параметра. Уравнение Клеро.
24. Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.

- 25.Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице)
- 26.Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.
- 27.Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций.
Определитель и след оператора Коши.
- 28.Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).
- 29.Общее решение линейного уравнения. линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.
- 30.Определитель Вронского скалярных функций. Свойства.
Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.
- 31.Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения n -го порядка(теорема). Функция Грина задачи Коши.
- 32.Краевая задача. Теорема об альтернативе.
- 33.Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.
- 34.Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.
- 35.Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы.
Действительные и комплексные решения.
- 36.Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма.
Фундаментальная система решений.
- 37.Метод неопределенных коэффициентов.
- 38.Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.
- 39.Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема)
- 40.Уравнение с квазимногочленом в правой части.
- 41.Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (Лемма).
- 42.Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).
- 43.Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.
- 44.Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.
- 45.Лемма об асимптотической устойчивости.
- 46.Теорема Четаева.
- 47.Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.
- 48.Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.
- 49.Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).
- 50.Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.

51. Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП.
Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.
52. Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.
53. Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия.
Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.
54. Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).
55. Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий.
Инвариантные множества. Независимые первые интегралы.
Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.
56. Особые точки на плоскости