

## **Вопросы к курсу «Дифференциальные уравнения»**

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.
2. Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.
3. Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения (теорема).
4. Уравнение в полных дифференциалах.
5. Автономное уравнение. Общее решение. Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.
6. Уравнение с разделяющимися переменными. (теорема о разделении переменных)
7. Однородное уравнение. (лемма о сведении к уравнению с разделяющимися переменными)
8. Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.
9. Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.
10. Операторная норма. Оценка конечных приращений.
11. Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.
12. Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
13. Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.
14. Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.
15. Доказательство теоремы Пеано.
16. Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.
17. Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.
18. Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.
19. Теорема продолжаемости для линейной системы.
20. Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.
21. Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.
22. Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.
23. Метод введения параметра. Уравнение Клеро.
24. Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.

25. Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице)
26. Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.
27. Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций.  
Определитель и след оператора Коши.
28. Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).
29. Общее решение линейного уравнения. линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.
30. Определитель Вронского скалярных функций. Свойства.  
Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.
31. Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка(теорема). Функция Грина задачи Коши.
32. Краевая задача. Теорема об альтернативе.
33. Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.
34. Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.
35. Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы.  
Действительные и комплексные решения.
36. Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма.  
Фундаментальная система решений.
37. Метод неопределенных коэффициентов.
38. Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.
39. Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема)
40. Уравнение с квазимногочленом в правой части.
41. Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (Лемма).
42. Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).
43. Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.
44. Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.
45. Лемма об асимптотической устойчивости.
46. Теорема Четаева.
47. Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.
48. Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.
49. Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).
50. Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.

51. Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП.  
Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.
52. Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точку. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.
53. Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия.  
Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.
54. Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).
55. Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий.  
Инвариантные множества. Независимые первые интегралы.  
Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.
56. Особые точки на плоскости