Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

И. Н. Сергеев

Лекции по дифференциальным уравнениям

I семестр

Москва 2004

Сергеев И. Н.

Лекции по дифференциальным уравнениям. I семестр. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 96 с.

Представлен конспект лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читавшихся автором в осеннем семестре второго курса механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и связанных с геометрической интерпретацией дифференциального уравнения, с вопросами существования, единственности и продолжаемости решений, с теорией линейных уравнений и систем, в том числе и с постоянными коэффициентами.

Даны точные определения, подробно доказаны сформулированные утверждения, теоретически обоснованы наиболее важные методы решения задач. Приведены все необходимые теоретические сведения, сопутствующие понятия и факты из смежных разделов математики. Предложены задачи для самостоятельного решения, развивающие и углубляющие прочитанный материал и, тем самым, позволяющие лучше подготовиться к экзамену.

Для студентов и аспирантов, изучающих классическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Содержание

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение

n-го порядка — это запись вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

(пока не уточняем, из какого пространства в какое действует функция F, но предполагаем, что последняя переменная этой функции — нефиктивная).

Определение 1. Любая функция y, определенная на каком-либо интервале[1)]

$$I \equiv (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\},$$

и удовлетворяющая тождеству

$$F\left(x, \mathsf{y}(x), \mathsf{y}(x)', \ldots, \mathsf{y}(x)^{(n)}\right) \equiv 0, \quad x \in I,$$

называется *решением* уравнения (1), а график Γ_{y} любого решения y называется *интегральной кривой*. *Общее решение* дифференциального уравнения (1) — это множество всех его решений, заданное неявно уравнением

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

или, что лучше, явной формулой

$$y = \Phi(x, C_1, \ldots, C_n).$$

(если для какого-либо набора констант $C_1, \ldots, C_n$ явно или неявно задается определенная на интервале функция $y = \mathsf{y}(x)$, то она есть решение дифференциального уравнения, и наоборот, любое его решение задается таким способом).

2. Некоторые соглашения и обозначения

Ниже одной и той же буквой[2)], но разного начертания, обозначены и переменные $y, y', \ldots,$ и функции $\mathsf{y}(\cdot), \mathsf{y}'(\cdot), \ldots$. Значками $\lhd$ и $\rhd$ отмечены, соответственно, начало и конец доказательства. Нумерация всех утверждений (лемм, теорем и следствий) — сплошная, определений — тоже.

[1)] Т. е. на открытом связном подмножестве I числовой прямой $\mathbf{R}$ (в дальнейшем буква I, как правило, будет обозначать интервал).

[2)] Это оправдано сходством самих объектов.

1. Поля направлений на плоскости

1.1. Поле направлений уравнения первого порядка

$$y' = f(x,y), \quad (x,y) \in G \subset \mathbf{R}^2, \quad f\colon G \to \mathbf{R}, \tag{2}$$

разрешенного относительно производной, представляет собой естественную геометрическую интерпретацию этого уравнения.

Определение 2. *Поле направлений*:

— это отображение l, ставящее в соответствие каждой точке $(x,y) \in G$ прямую $l(x,y) \subset \mathbf{R}^2$, проходящую через эту точку;

— *уравнения* (2) — это поле $l = l_f$, определяемое правилом: для каждой точки $(x,y) \in G$ *угловой коэффициент* $\operatorname{tg}\varphi(x,y)$ прямой $l_f(x,y)$ равен $f(x,y)$.

Здесь под $\varphi(x,y) \in (-\pi/2;\, \pi/2]$ понимается угол, образуемый прямой $l_f(x,y)$ с положительным направлением оси абсцисс, которая называется *горизонталью*. Заметим, что поле l_f ни в какой точке $(x,y) \in G$ не принимает *вертикального* направления, так как равенство $f(x,y) = \operatorname{tg}(\pi/2)$ невозможно.

Все прямые $l(x,y)$, соответствующие точкам $(x,y) \in G$, можно для наглядности параллельно перенести так, чтобы они проходили через какую-либо одну точку, например, через начало координат. Тогда поле направлений превратится в отображение

$$l\colon G \to P,$$

где P — *проективная прямая*, т. е. пространство[1)] всех прямых в векторном пространстве $\mathbf{R}^2$ с метрикой, задаваемой углом между прямыми.

Определение 3. График Γ_{y} функции y *касается*:

— поля направлений l *в точке* (x,y), если $y = \mathsf{y}(x)$ и производная $\mathsf{y}'(x)$ равна угловому коэффициенту прямой $l(x,y)$;

— *поля направлений* l, если он касается этого поля в каждой точке $(x,y) \in \Gamma_{\mathsf{y}}$.

Теорема 1. *Функция* y — *решение уравнения* (2) *тогда и только тогда, когда ее график* Γ_{y} *касается поля направлений* l_f.

[1)] *Топологическое*, поэтому в дальнейшем можно будет говорить о непрерывности поля направлений.

$\lhd$ Функция y — решение уравнения (2) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}\mathsf{y}'(x) = f(x, \mathsf{y}(x)), \quad x \in D(\mathsf{y}), \iff \mathsf{y}'(x) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_{\mathsf{y}}, \\ \iff \mathsf{y}'(x) = \operatorname{tg}\varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_{\mathsf{y}} \quad \text{(определение 2)},\end{gathered}$$

т. е. когда график Γ_{y} касается поля направлений l_f (определение 3). $\rhd$

1.2. Уравнение первообразной

имеет вид

$$y' = f(x), \quad f\colon I \to \mathbf{R}, \tag{3}$$

и задано в области $G = I \times \mathbf{R}$.

I. В курсе математического анализа доказана следующая

Лемма 2. *Если $f \in \mathrm{C}(I)$, то:*

1) *функция*

$$\mathsf{y}(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in I,$$

является решением уравнения (3)*;*

2) *для любого $C \in \mathbf{R}$ функция $\mathsf{z} = \mathsf{y} + C$ — также решение этого уравнения;*

3) *любое решение z уравнения* (3) *удовлетворяет при некотором $C \in \mathbf{R}$ равенству*

$$\mathsf{z} = \mathsf{y}|_{D(\mathsf{z})} + C.$$

Из леммы 2 получается

Теорема 3. *Если $f \in \mathrm{C}(I)$, то для всякого фиксированного $x_0 \in I$ общее решение уравнения* (3) *задается формулой*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + C. \tag{4}$$

$\lhd$ 1. При каждом $C \in \mathbf{R}$ эта формула задает решение, определенное на I, или его сужение на любой меньший интервал.

2. Любое решение y уравнения (3) будет задаваться такой формулой, даже если $x_0 \notin D(\mathsf{y})$. $\rhd$

II. Как видно из теоремы 3, дифференциальное уравнение может иметь много решений, а потому не праздным является вопрос об их взаимосвязи.

Определение 4. Решение z называется *продолжением* решения y, если

$$D(\mathsf{z}) \supset D(\mathsf{y}) \quad \text{и} \quad \mathsf{z}|_{D(\mathsf{y})} = \mathsf{y}.$$

Решение y называется *непродолжаемым*, если не существует его продолжений, отличных от него самого.

Следствие 4. *Если $f \in \mathrm{C}(I)$, то все непродолжаемые решения уравнения (3) задаются формулой (4), где $x \in I$.*

$\lhd$ 1. Все решения, определенные на интервале I, — непродолжаемые, поскольку ни одно из них на больший интервал доопределить невозможно, так как $D(f) \subset I$.

2. Других непродолжаемых решений нет, так как любое решение, определенное на меньшем интервале $J \subset I$, также задается формулой (4) и непосредственно по ней продолжается на весь интервал I. $\rhd$

Определение 5. Точка $(x, y) \in G$ для уравнения (2), или для его поля направлений, называется точкой:

— *существования*, если $(x, y) \in \Gamma$ хотя бы для одной интегральной кривой Γ;

— *единственности*, если для любых интегральных кривых Γ_1, Γ_2 выполнено условие

$$\Gamma_1 \overset{\text{loc}}{=} \Gamma_2 \quad \text{в точке } (x, y),$$

как только $(x, y) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Для кривых, функций и т. п. равенство в какой-либо точке, обозначаемое символом $\overset{\text{loc}}{=}$, означает не совпадение в одной лишь этой точке, но и не полное совпадение, а совпадение *локальное*, т. е. хотя бы в одной достаточно малой окрестности этой точки.

Следствие 5. *Если $f \in \mathrm{C}(I)$, то для уравнения* (3) *все точки области G — точки существования и единственности.*

$\lhd$ Через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит график единственного[2)] решения y, так как любое решение задается формулой (4), причем

[2)] С точностью до выбора области определения.

$$\mathsf{y}(x_0) = y_0 \iff \int_{x_0}^{x_0} f(\xi)\,d\xi + C = y_0 \iff C = y_0.$$

$\triangleright$

1.3. Обобщение понятия интегральной кривой

на случай поля направлений с вертикалями дает следующее

Определение 6. Кривая Γ:

— *касается поля направлений* l *в точке* $(x_0, y_0) \in \Gamma$, если существует хотя бы одна из следующих функций:

1) $\mathsf{y}(x)$, для которой

$$\Gamma \overset{\text{loc}}{=} \Gamma_{\mathsf{y}} \quad \text{в точке } (x_0, y_0), \quad \mathsf{y}'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi(x_0, y_0)$$

(см. определение 2);

2) $\mathsf{x}(y)$, для которой[3)]

$$\Gamma \overset{\text{loc}}{=} \Gamma_{\mathsf{x}} \quad \text{в точке } (x_0, y_0), \quad \mathsf{x}'(y_0) = \operatorname{ctg}\varphi(x_0, y_0);$$

— *касается поля направлений* l, или, что то же, Γ — *интегральная кривая (поля* l*)*, если кривая Γ касается поля l в каждой точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Условие 1) определения 6 осуществимо, только если прямая $l(x_0, y_0)$ не вертикальна, а условие 2) — если она не горизонтальна[4)]. Если же эта прямая — *наклонная* (т. е. ни вертикальна, ни горизонтальна), то условия 1) и 2), вообще говоря, не эквивалентны, поскольку кривая может удовлетворять одному из них, не удовлетворяя при этом другому. Однако подобный казус невозможен для интегральной кривой при условии непрерывности поля направлений. Иными словами, справедлива

Лемма 6. *Если* Γ — *интегральная кривая поля направлений* $l \in \mathrm{C}(G)$ *и в некоторой точке* $(x_0, y_0) \in G$ *прямая* $l(x_0, y_0)$ — *наклонная, то в этой точке выполнены оба условия* 1) *и* 2) *определения* 6.

[3)] В отличие от определения 2, здесь уже возможно и равенство $\varphi = \pi/2$, а $\operatorname{ctg}\varphi(x_0, y_0)$ — *обратный* угловой коэффициент прямой $l(x_0, y_0)$.

[4)] В противном случае функция, график которой локально совпадает с кривой Γ, может просто не найтись, а если и найдется, то ее производная в точке x_0 или, соответственно, в точке y_0 не будет определена.

$\triangleleft$ 1. Если для интегральной кривой Γ в точке (x_0, y_0) с наклонным направлением $l(x_0, y_0)$ поля выполнено, скажем, условие 1), то в этой точке имеем

$$\Gamma \overset{\text{loc}}{=} \Gamma_{\mathsf{y}} \quad \text{и} \quad \mathsf{y}'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi(x_0, y_0) \neq 0.$$

2. Пусть, для определенности, $\operatorname{tg}\varphi(x_0, y_0) > 0$. Тогда, в силу условия $l \in \mathrm{C}(G)$, в целой окрестности точки (x_0, y_0) имеем и $\operatorname{tg}\varphi(x, y) > 0$, и $\operatorname{ctg}\varphi(x, y) > 0$. Следовательно, в этой окрестности для каждой точки (x, y) кривой Γ имеем $\mathsf{y}'(x) > 0$ (если в какой-либо точке кривой только $\mathsf{x}'(y) > 0$, то в силу существования непрерывной обратной к x функции y существует и ее производная

$$\mathsf{y}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x) = \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}(y)\right)^{-1} = \frac{1}{\mathsf{x}'(y)} > 0,$$

так как $\Delta x \to 0 \iff \Delta y \to 0$).

3. Поэтому функция y строго монотонна[5)] на некотором интервале I, содержащем x_0, а значит, имеет обратную $\mathsf{x} = \mathsf{y}^{-1}$, дифференцируемую в точке y_0 и удовлетворяющую условиям

$$\mathsf{x}'(y_0) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi(x_0, y_0)} = \operatorname{ctg}\varphi(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad \Gamma_{\mathsf{x}} \overset{\text{loc}}{=} \Gamma_{\mathsf{y}} \overset{\text{loc}}{=} \Gamma$$

(в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma_{\mathsf{x}}$), что и означает выполнение условия 2). $\triangleright$

1.4. Уравнение в дифференциалах

I. Пусть на открытых множествах G_f и G_g заданы соответственно уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G_f, \quad \text{и} \quad x' = g(y, x), \quad (x, y) \in G_g, \qquad (5)$$

удовлетворяющие условию

$$f(x, y) \cdot g(y, x) = 1, \quad (x, y) \in G_{f,g} \equiv G_f \cap G_g.$$

Определение 7. Поле направлений в области $G = G_f \cup G_g$, заданное формулой

$$l_{f,g}(x, y) = \begin{cases} l_f(x, y), & (x, y) \in G_f, \\ l_g(y, x), & (x, y) \in G_g, \end{cases}$$

[5)] В данном случае даже возрастает.

назовем *обобщенным*, задаваемым парой *сопряженных* уравнений (5).

Поскольку во втором уравнении по сравнению с первым буквы x и y поменялись ролями, согласно определению 2, поле направлений l_g строится по следующему правилу: каждой точке $(x, y) \in G_g$ соответствует прямая $l_g(y, x)$ с обратным угловым коэффициентом $\operatorname{ctg}\varphi$, равным $g(y, x)$.

Пара уравнений (5) может задавать действительно более широкое поле направлений, чем одно уравнение (2), за счет точек $(x, y) \in G_g \setminus G_f$, в которых направление может оказаться уже и вертикальным. Однако корректность определения 7 нуждается в обосновании, так как согласно ему в точках[6] $(x, y) \in G_{f,g}$ заданы сразу два, формально разных, значения поля направлений.

Лемма 7. *Определение* 7 *корректно, причем если* $f \in \mathrm{C}(G_f)$ *и* $g \in \mathrm{C}(G_g)$, *то* $l_{f,g} \in \mathrm{C}(G)$.

$\lhd$ 1. В любой точке $(x, y) \in G_{f,g}$ оба уравнения задают одну и ту же наклонную прямую с угловым коэффициентом[7] $f(x, y)$.

2. В любой точке $(x, y) \in G_f \cup G_g$, в силу открытости множеств G_f и G_g, поле $l_{f,g}$ локально совпадает либо с l_f, либо с l_g, а потому непрерывно. $\rhd$

II. Для функций $M, N \in \mathrm{C}(G')$ рассмотрим пару сопряженных уравнений

$$y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad x' = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \tag{6}$$

определенных соответственно на множествах

$$G_f = \{(x, y) \in G' \mid N(x, y) \neq 0\}, \quad G_g = \{(x, y) \in G' \mid M(x, y) \neq 0\}.$$

Эта пара, в соответствии с определением 7, задает обобщенное поле направлений в области

$$G = G' \setminus \{(x, y) \mid N(x, y) = M(x, y) = 0\}. \tag{7}$$

[6] В которых, кстати, направление может быть только наклонным.

[7] Второе уравнение задает обратный угловой коэффициент $g(y, x)$, но зато относительно другой оси, поэтому прямая — та же.

Определение 8. Пара сопряженных уравнений (6) в области (7), записанная в симметричной форме[8)]

$$N(x,y)\,dy = M(x,y)\,dx, \quad (x,y) \in G,$$

называется *уравнением в дифференциалах.*

1.5. Расширение уравнения первообразной

(3) в точки вида $(\alpha, y),\ y \in \mathbf{R}$, при условии, что функция f, стоящая в правой части уравнения, имеет в точке $x = \alpha$ особенность типа *полюс*, происходит следующим образом: во-первых, предполагается выполнение условий

$$f \in \mathrm{C}(I \setminus \{\alpha\}), \qquad \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0, \tag{8}$$

последнее из которых равносильно следующему

$$\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \infty \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty \\ \lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = +\infty \text{ или } -\infty \end{cases} \tag{9}$$

(поскольку если в достаточно малой проколотой окрестности точки α функция f отлична от нуля и непрерывна, то она и слева, и справа от α локально знакоопределена, а значит, ее модуль раскрывается с фиксированным знаком); во-вторых, берется уравнение

$$x' = g(x) \equiv \begin{cases} 1/f(x), & x \in I \setminus \{\alpha\},\ f(x) \neq 0, \\ 0, & x = \alpha, \end{cases}$$

которое (см. определение 7), будучи сопряженным к уравнению (3), в паре с ним задает в области $G = I \times \mathbf{R}$ обобщенное поле направлений с вертикальным значением в точках, где $x = \alpha$.

Согласно теореме 3, области

$$G_1 = \{(x,y) \in G |\ x < \alpha\} \quad \text{и} \quad G_2 = \{(x,y) \in G |\ x > \alpha\}$$

[8)]Эта форма записи оправдана уже тем, что с помощью операций деления она может быть превращена в любое из двух уравнений (6).

сплошь заполнены интегральными кривыми[9], которые задаются формулами

$$y = \int_{x_1}^{x} f(\xi)\,d\xi + C_1, \quad x_1 < \alpha, \quad \text{и} \quad y = \int_{x_2}^{x} f(\xi)\,d\xi + C_2, \quad x_2 > \alpha,$$

Еще одна обобщенная интегральная кривая[10] задается равенством $x = \alpha$. Поэтому для описания всех интегральных кривых достаточно выяснить, как они могут склеиваться, т. е. в каких точках области G может нарушаться локальная единственность.

Теорема 8. *Все точки множества* $(I \setminus \{\alpha\}) \times \mathbf{R}$ *— точки единственности обобщенного поля направлений для уравнения* (3) *при условиях* (8)*, а точки прямой* $x = \alpha$ *являются точками единственности тогда и только тогда (а тогда все сразу), когда расходятся оба интеграла*

$$\int^{\alpha \pm 0} f(\xi)\,d\xi.$$

$\lhd$ 1. Все точки множества $G_1 \cup G_2$ — точки локальной единственности в силу следствия 5.

2. Рассмотрим точку (x_0, y_0), где $x_0 = \alpha$.

А. Если несобственный интеграл $\int_{x_1}^{\alpha-0} f(\xi)\,d\xi$ $(x_1 < \alpha)$ равен какому-то числу, скажем y_1, то для некоторого решения y из области G_1 имеем

$$\lim_{x \to \alpha - 0} \mathsf{y}(x) = \int_{x_1}^{\alpha - 0} f(\xi)\,d\xi + C_1 = y_1 + C_1 = y_0,$$

если $C_1 = y_0 - y_1$. Поэтому через точку (x_0, y_0) проходит еще одна интегральная кривая, которая сначала совпадает с решением y, а затем идет по прямой[11] $x = \alpha$.

В. Интегральную кривую в п. А пришлось доопределить в точку (x_0, y_0) по непрерывности. Докажем, что в предельной точке кривая имеет вертикальную касательную[12], т. е. подходит к

---

[9] В данном случае даже обычными, но это не мешает им называться обобщенными.

[10] Действительно обобщенная, причем прямая.

[11] Точнее, по одному из двух ее лучей с началом в точке (x_0, y_0), в зависимости от направления, в котором кривая подходит к прямой.

[12] Хотя и одностороннюю.

этой точке либо только снизу, либо только сверху, а направление касательной стремится к вертикальному:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0) = \frac{\mathsf{y}(x) - y_0}{x - \alpha} = \frac{\int_{x_1}^{x} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_1}^{\alpha-0} f(\xi)\,d\xi}{x-\alpha}$$

$$= \frac{\int_{x}^{\alpha-0} f(\xi)\,d\xi}{\alpha - x} \begin{cases} \geqslant \frac{M(\alpha-x)}{\alpha-x} = M, & \lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = \infty, \\ \leqslant \frac{-M(\alpha-x)}{\alpha-x} = -M, & \lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = -\infty, \end{cases}$$

где $M > 0$ — наперед заданное число, а значения x достаточно близки к α (чтобы выполнялись условия $\operatorname{sgn} f(x) = \mathrm{const}$ и $|f(x)| \geqslant M$, откуда либо $f(x) \geqslant M$, либо $f(x) \leqslant -M$; см. условие (9)), поэтому

$$\lim_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0) = +\infty \text{ или } -\infty.$$

C. Если интеграл $\int_{x_1}^{\alpha-0} f(\xi)\,d\xi$ расходится, то интегральные кривые слева от прямой $x = \alpha$ приближаются к ней лишь асимптотически при $y \to \infty$ и не имеют общих предельных точек с этой прямой. Поэтому слева от нее единственность не нарушается.

D. Аналогично изучается поведение кривых при $x \to \alpha + 0$. $\triangleright$

Возврат от обобщенного уравнения к исходному происходит путем забывания добавленных точек прямой $x = \alpha$.

1.6. Автономное уравнение

имеет вид

$$y' = g(y), \quad g\colon I \to \mathbf{R}, \tag{10}$$

и задано в области $G = \mathbf{R} \times I$.

I. Будем предполагать, что нули функции g изолированы: скажем, для простоты, их просто нет или нуль всего один. Из доказанных выше теорем 3 и 8 вытекает

Теорема 9. *Пусть $g \in \mathrm{C}(I)$, тогда для уравнения* (10) *справедливы утверждения:*

1) *если функция g не обращается в нуль на интервале I, то все точки области G — точки существования и единственности, причем для любого фиксированного $y_0 \in I$ общее решение*

неявно задается уравнением

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} + C; \tag{11}$$

2) *если функция g обнуляется на интервале I ровно в одной точке $\alpha \in I$, то в каждой из областей*

$$G_1 = \{(x, y) \in G |\ y < \alpha\} \quad и \quad G_2 = \{(x, y) \in G |\ y > \alpha\}$$

справедливы выводы предыдущего пункта настоящей теоремы, а прямая $y = \alpha$ — интегральная кривая, причем ее точки — точки единственности тогда и только тогда (а тогда все сразу), когда расходятся оба интеграла

$$\int^{\alpha \pm 0} \frac{d\eta}{g(\eta)}. \tag{12}$$

$\lhd$ 1. Если в уравнении (10) поменять местами буквы x и y, то оно принимает вид

$$x' = g(x)$$

и, являясь сопряженным к уравнению

$$y' = f(x) \equiv 1/g(x), \tag{13}$$

является результатом доопределения поля направлений уравнения (13) вертикалями, т. е. в новых обозначениях справедливо равенство $l_g = l_{f,g}$. Действительно, во втором из сформулированных в теореме случаев имеют место соотношения

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{1/g(x)} = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1/f(x), & x \neq \alpha, \\ 0, & x = \alpha. \end{cases}$$

2. Уравнение (13) является уравнением первообразной. Применив к нему все выводы теорем 3, 8 и сделав обратную перестановку букв x и y местами, мы получим утверждение доказываемой теоремы.

3. Остается заметить только, что на любом интервале, где функция f не обнуляется, она имеет фиксированный знак, следовательно, задаваемая формулой (11) функция x — на таком интервале монотонна, а значит, обратима. $\rhd$

II. Один из наиболее перспективных[13] способов обеспечения локальной единственности решений уравнения (10) состоит в требовании самой обыкновенной дифференцируемости его правой части, как показывает

Следствие 10. *Если в условиях случая* 2) *теоремы* 9 *существует производная* $f'(\alpha)$, *то все точки прямой* $y = \alpha$ — *точки единственности.*

$\triangleleft$ Докажем, что при сделанных предположениях интегралы (12) расходятся. Действительно, например, при $y \to \alpha - 0$ имеем

$$|f(y)| \leqslant |f(\alpha)| + |f'(\alpha)(y-\alpha)| + |o(y-\alpha)| \leqslant L(\alpha - y)$$

где $L \equiv |f'(\alpha)| + 1$, а значения $\alpha - y > 0$ не превышают некоторого $h_0 > 0$, и коль скоро функция[14] $f(y)$ имеет фиксированный знак, при $y \in (y_0; \alpha) \equiv (\alpha - h_0; \alpha)$ получаем

$$\left| \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} \right| = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{|f(\eta)|} \geqslant \int_{\alpha-h_0}^{\alpha-h} \frac{d\eta}{L(\alpha-\eta)} = \frac{1}{L}\int_{h}^{h_0} \frac{d\zeta}{\zeta} \to \infty,$$

если $\alpha - y \equiv h \to +0$. $\triangleright$

1.7. Уравнение в полных дифференциалах

— это такое уравнение в дифференциалах (см. определение 8)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad M, N \colon G \to \mathbf{R}, \tag{14}$$

для которого существует функция $\Phi \colon G \to \mathbf{R}$, называемая *потенциалом* и удовлетворяющая равенствам

$$\Phi'_x(x,y) = M(x,y), \quad \Phi'_y(x,y) = N(x,y), \quad (x,y) \in G. \tag{15}$$

Чтобы уравнение (14), при условии $M, N \in \mathrm{C}^1(G)$, было уравнением в полных дифференциалах, необходимо[15] выполнение равенства

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y), \quad (x,y) \in G: \tag{16}$$

[13] См. теорему 14 ниже.

[14] Непрерывная и не принимающая нулевых значений при $y < \alpha$.

[15] А в случае односвязности области G — и достаточно, что доказано в курсе математического анализа.

действительно, при этом условии имеем

$$\Phi'_x, \Phi'_y \in \mathrm{C}^1(G) \implies \Phi \in \mathrm{C}^2(G)$$
$$\implies M'_y(x,y) = \Phi''_{xy}(x,y) = \Phi''_{yx}(x,y) = N'_x(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

Теорема 11. *Если уравнение* (14) *— уравнение в полных дифференциалах с коэффициентами* $M, N \in \mathrm{C}(G)$ *или, что то же, с потенциалом* $\Phi \in \mathrm{C}^1(G)$, *то все точки области* G *— точки существования и единственности, а общее решение задается уравнением*

$$\Phi(x,y) = C. \tag{17}$$

$\lhd$ 1. Пусть, например, $N(x_0,y_0) \neq 0$, тогда $\Phi'_y(x_0,y_0) \neq 0$ и по теореме о неявной функции уравнение (17) с константой

$$C = \Phi(x_0,y_0)$$

в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0) задает дифференцируемую функцию $y = \mathsf{y}(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0, локально единственную и удовлетворяющую условию

$$\mathsf{y}(x_0) = y_0. \tag{18}$$

2. Из неравенства $N(x_0,y_0) \neq 0$ следует (определение 8), что в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0) уравнение (14) записывается в виде

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \tag{19}$$

3. Но для функции $y = \mathsf{y}(x)$, удовлетворяющей условию (18), уравнения (17) и (19) эквивалентны (см. равенства (15)):

$$\Phi(x,\mathsf{y}(x)) = \Phi(x_0,y_0) \iff \tfrac{d}{dx}\Phi(x,\mathsf{y}(x)) = 0$$
$$\iff \Phi'_x(x,\mathsf{y}(x)) + \Phi'_y(x,\mathsf{y}(x))\mathsf{y}'(x) = 0 \iff \mathsf{y}'(x) = -\tfrac{M(x,\mathsf{y}(x))}{N(x,\mathsf{y}(x))},$$

поэтому и уравнение (14) также задает локально единственную кривую, проходящую через точку (x_0,y_0), — а именно, график упомянутой выше функции y. $\rhd$

1.8. Уравнение с разделяющимися переменными

записывается в виде

$$P(x)Q(y)\,dy = R(x)S(y)\,dx, \quad P, R\colon I \to \mathbf{R}, \quad Q, S\colon J \to \mathbf{R}, \tag{20}$$

и задано в области

$$G = (I \times J) \setminus \{(x, y) |\ P(x)Q(y) = R(x)S(y) = 0\}. \tag{21}$$

Из теоремы 11 вытекает

Теорема 12. *Если $P, R \in \mathrm{C}(I)$ и $Q, S \in \mathrm{C}(J)$, а функции P и S не имеют нулей, то для уравнения* (20) *любая фиксированная точка $(x_0, y_0) \in G$ — точка существования и единственности, а общее решение задается уравнением*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{Q(\eta)}{S(\eta)}\,d\eta = \int_{x_0}^{x} \frac{R(\xi)}{P(\xi)}\,d\xi + C. \tag{22}$$

$\lhd$ Действительно, в области G уравнение

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \qquad \text{где} \quad M(x) = \frac{R(x)}{P(x)}, \quad N(y) = -\frac{Q(y)}{S(y)},$$

равносильное исходному, есть уравнение в полных дифференциалах с потенциалом

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta.$$

Поэтому к нему непосредственно применима теорема 11. $\rhd$

1.9. Вопросы и задачи для самостоятельного решения

I. Задает ли формула

$$y = \int_{C_1}^{x} f(\xi)\,d\xi + C_2$$

общее решение уравнения (3) первообразной? Каким недостатком обладает эта формула?

II. Является ли (в случае непостоянной непрерывной на интервале функции f) уравнением в полных дифференциалах:

— уравнение первообразной, записанное в форме

$$dy = f(x)\,dx;$$

— автономное уравнение, записанное в форме

$$dy = f(y)\,dx?$$

III. Получить формулу для общего решения уравнения (14) в полных дифференциалах в области $G = I \times J$ при выполнении условия (16).

IV. Может ли в случае уравнения (14) в полных дифференциалах множество точек (17) быть не связным, а потому представлять собой не одну, а несколько интегральных кривых? Может ли число таких кривых не быть одинаковым для разных значений C?

V. Какие преобразования плоскости не меняют поле направлений любого:

— уравнения первообразной;

— автономного уравнения;

— однородного уравнения (см. задачу X ниже)?

VI. Привести пример кривой, касающейся в точке (x_0, y_0) наклонной прямой $l(x_0, y_0)$ поля направлений, удовлетворяя условию 1), но не 2) определения 6.

VII. Для уравнения

$$y' = |y|^a \quad (\text{или} \quad y' = |y|^a \cdot \operatorname{sgn} y)$$

в зависимости от значения $a \in \mathbf{R}$ исследовать на существование и единственность точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (доопределив при $a \leqslant 0$ по непрерывности обобщенное поле направлений в точки, где $y = 0$.)

VIII. Какое наибольшее количество не равных локально друг другу интегральных кривых может проходить через точку прямой $x = \alpha$ в формулировке теоремы 8, если:

— расходится один из указанных в ней интегралов;

— расходятся оба указанных в ней интеграла?

IX. Доказать утверждение: если $P, R \in \mathrm{C}(I)$ и $Q, S \in \mathrm{C}(J)$, а функция P имеет изолированный нуль $\alpha \in I$, то в области (21) любой интервал прямой $x = \alpha$ — интегральная кривая, причем ее точка (x_0, y_0), удовлетворяюшая условию

$$Q(y_0) \neq 0, \tag{23}$$

— точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла

$$\int^{\alpha \pm 0} \frac{R(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi.$$

Существенно ли в этом утверждении условие (23)?

X. Доказать, что если $f \in \mathrm{C}(I)$, то замена переменной y на

$$t = y/x$$

приводит так называемое *однородное* уравнение

$$y' = f\left(y/x\right), \quad G = \left\{(x, y) |\ x > 0,\ y/x \in I\right\},$$

к уравнению с разделяющимися переменными, причем справедливы утверждения:

a) если функция f не обращается в нуль на интервале I, то все точки области G — точки существования и единственности;

b) если функция g обнуляется на интервале I ровно в одной точке $\alpha \in I$, то в каждой из областей

$$G_1 = \{(x, y) \in G|\ y/x < \alpha\} \quad \text{и} \quad G_2 = \{(x, y) \in G|\ y/x > \alpha\}$$

справедливы выводы предыдущего пункта настоящей теоремы, а луч $y = \alpha$ — интегральная кривая, причем ее точки — точки единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла

$$\int^{\alpha \pm 0} \frac{d\eta}{f(\eta) - \eta}.$$

2. Существование, единственность и продолжаемость решений

2.1. Задача Коши для нормальной системы

I. *Задача Коши* (или *начальная задача*) ставится так: по заданной *правой части*

$$f\colon G \to \mathbf{R}^n, \quad \text{где} \quad G \subset \mathbf{R}^{1+n} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n,$$

и *начальным данным* (или *начальной точке*) $(t_0, x_0) \in G$ найти решение уравнения (или *нормальной* $(n \times n)$*-системы*)

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{24}$$

удовлетворяющее *начальному условию*

$$x(t_0) = x_0. \tag{25}$$

Решение задачи Коши — это функция $\mathsf{x}\colon I \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющая условиям (24) — (25) при подстановке $x = \mathsf{x}(t)$:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) \equiv f(t, \mathsf{x}(t)), \qquad \mathsf{x}(t_0) = x_0, \quad (t_0 \in I). \tag{26}$$

Переменная $x \in \mathbf{R}^n$ обычно называется *фазовой*, а переменная $t \in \mathbf{R}$ — *временем.*

Если в $\mathbf{R}^n$ фиксирован базис, то задача Коши записывается покоординатно в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \ldots, x^n) \\ \cdots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \ldots, x^n), \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ \cdots \\ x^n(t_0) = x_0^n. \end{cases}$$

II. Производная вектор-функции $\mathsf{x}\colon I \to \mathbf{R}^n$ в точке $t \in I$ может пониматься двояко: либо в *абстрактном* линейном векторном пространстве

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathsf{x}(t+h) - \mathsf{x}(t)}{h},$$

либо в *координатном* линейном пространстве

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathsf{x}}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathsf{x}}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Оба эти понятия приводят к одинаковому результату из-за естественного изоморфизма[1] между указанными *линейными топологическими* пространствами, т. е. изоморфизма, сохраняющего

[1] Определяемого базисом в $\mathbf{R}^n$.

не только линейные операции, но и предельный переход, возможный благодаря имеющейся в пространстве *системе открытых множеств*, которая называется его *топологией*.

В данном случае в обоих рассматриваемых линейных пространствах топология задается с помощью *нормы*[2]: *открытым* считается любое множество, в котором каждая точка содержится с целой окрестностью — шариком достаточно малого радиуса с центром в этой точке. И хотя саму норму изоморфизм линейных пространств может и не сохранять, но топологию обязательно сохраняет. Просто, в *конечномерном* линейном пространстве любые две нормы задают одну и ту же топологию, или *эквивалентны*, что и доказывает

Лемма 13. *Для любых двух норм* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *в* $\mathbf{R}^n$ *существует константа* c*, удовлетворяющая оценке*

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

$\triangleleft$ Действительно, пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$, на время доказательства — уже *евклидовом* (т. е. наделенном *скалярным произведением*), фиксирован некоторый ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ и обозначено

$$|x| = |x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{(x,x)},$$

тогда имеем

$$\|x\|_1 = \begin{cases} \|x\|_2 \cdot \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leqslant \|x\|_2 \cdot \sup\limits_{|y|=1} \frac{\|y\|_1}{\|y\|_2} = c\|x\|_2, & x \neq 0, \\ 0 \leqslant c\|x\|_2, & x = 0, \end{cases}$$

где величина

$$c \equiv \sup_{|y|=1} \frac{\|y\|_1}{\|y\|_2}$$

— конечна, так как функция, стоящая под знаком точной верхней грани по компакту

$$\{y \mid |y| = 1\} \subset \mathbf{R}^n,$$

непрерывна в смысле топологии, задаваемой *евклидовой* нормой $|\cdot|$, поскольку любая норма $\|\cdot\|$ непрерывна в том же смысле в

[2] Существуют и другие способы задания топологии.

силу оценки

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \leqslant |x_1|\,\|e_1\| + \ldots + |x_n|\,\|e_n\| \leqslant C|x|,$$

где $C \equiv \|e_1\| + \ldots + \|e_n\|$. $\triangleright$

2.2. Формулировка локальной теоремы существования и единственности

Следующие вопросы о решении задачи Коши ждут своего ответа: какие свойства функции f могут гарантировать

— *существование*, хотя бы *локальное*, решения;

— *единственность*, хотя бы *локальную*, решения;

— *продолжаемость* решения неограниченно *вправо и влево* по оси времени;

— *продолжаемость* решения *до границы* области G;

— *единственность продолжения* решения;

— *непрерывную зависимость* решения от начальных данных и от правой части уравнения;

— *дифференцируемость* решения по начальным данным или по параметру.

Последние вопросы будут рассматриваться в главе 5, а на некоторые из перечисленных вопросов в частных случаях (при $n = 1$) ранее мы получали ответы (теоремы 3, 8, 9, 11 и 12). Более общий, а потому менее сильный результат представляет следующая

Теорема 14. *Если* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$*, то для любой начальной точки* $(t_0, x_0) \in G$*:*

1) *в некоторой окрестности* I *точки* t_0 *существует решение* $\mathsf{x}\colon I \to \mathbf{R}^n$ *задачи Коши* (24) — (25)*;*

2) *любое другое решение этой задачи локально совпадает с решением* x.

Последнее условие теоремы означает, что для любого решения y этой задачи существует интервал $J \subset I$, содержащий точку t_0, для которого выполнено равенство

$$\mathsf{y}|_J = \mathsf{x}|_J. \tag{27}$$

$\triangleleft$ Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных понятий и фактов.

2.3. Свед́ение задачи Коши к интегральному уравнению

Лемма 15. *Если $f \in \mathrm{C}(G)$, то функция $\mathsf{x}\colon I \to \mathbf{R}^n$ — решение задачи Коши (24) — (25) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\mathsf{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \mathsf{x}(\tau))\, d\tau, \quad t \in I. \tag{28}$$

$\lhd$ 1. Если x — решение задачи Коши, то заменив t на τ в тождестве (26) и проинтегрировав его по τ от t_0 до некоторого $t \in I$, получаем

$$\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \mathsf{x}(\tau))\, d\tau,$$

а с учетом начального условия (26) имеем равенство (28).

2. Если функция x удовлетворяет равенству (28), то продифференцировав его по t и, соответственно, положив в нем $t = t_0$, получим для этой функции оба условия (26): дифференцировать равенство (28) можно, так как его правая часть непрерывна по t, следовательно, левая — тоже[3)], откуда подынтегральная функция $f(\tau, \mathsf{x}(\tau))$ непрерывна по τ (поскольку функции f и x непрерывны), а значит, правая часть дифференцируема по t и, стало быть, левая — тоже. $\rhd$

2.4. Операторная норма, оценка конечных приращений

I. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ фиксируем евклидову норму $|\cdot|$, а в пространстве $\operatorname{End}\mathbf{R}^n$ — *операторную* норму $\|\cdot\|$, задаваемую формулой

$$\|A\| = \sup_{|x|\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| < \infty, \quad A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n,$$

последнее неравенство выполнено, поскольку для любого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n \subset \mathbf{R}^n$ имеем

$$|Ax| \leqslant |Ax_1e_1| + \ldots + |Ax_ne_n| = |x_1|\,|Ae_1| + \ldots + |x_n|\,|Ae_n| \leqslant C|x|,$$

[3)] Впрочем, ее непрерывность можно было предположить с самого начала, уже в формулировке леммы.

где $C = |Ae_1| + \ldots + |Ae_n|$. Тогда справедлива оценка

$$|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|,$$

поскольку

$$|Ax| = \begin{cases} \frac{|Ax|}{|x|} \cdot |x| \leqslant \|A\| \cdot |x|, & x \neq 0, \\ 0 \leqslant \|A\| \cdot |x|, & x = 0, \end{cases}$$

а операторная норма — *банахова*, т. е.

$$\|AB\| \leqslant \sup_{|x| \neq 0} \frac{\|A\| \cdot |Bx|}{|x|} \leqslant \|A\| \cdot \sup_{|x| \neq 0} \frac{\|B\| \cdot |x|}{|x|} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

II. В формулировке теоремы 14 участвует *производная* g' (в точке x, с параметром t) конечномерной функции конечномерной переменной $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, которая определяется как линейный оператор $g'(x) \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$, удовлетворяющий условию

$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + o(|h|), \quad h \to 0.$$

Следующее утверждение обобщает формулу Лагранжа конечных приращений на случай такой функции.

Лемма 16. *Если $g(x) \in \mathrm{C}^1(B)$, где $B \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклый компакт, то*

$$|g(y) - g(x)| \leqslant \sup_{\xi \in U} \|g'(\xi)\| \cdot |y - x|, \quad x, y \in B.$$

$\lhd$ Действительно, если $x \in B$ и $y = (x + \Delta x) \in B$, то для любого $\theta \in [0; 1]$ имеем $(x + \theta\Delta x) \in B$ и, обозначив $\varphi(\theta) = g(x + \theta\Delta x)$, получаем

$$\begin{aligned} |g(x+\Delta x) - g(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \textstyle\int_0^1 g'(x + \theta\Delta x)\Delta x \, d\theta \right| \\ \leqslant \textstyle\int_0^1 \|g'(x + \theta\Delta x)\| \, |\Delta x| \, d\theta \leqslant \sup_{\xi \in U} \|g'(\xi)\| \, |\Delta x|. \end{aligned}$$

$\rhd$

2.5. Принцип сжимающих отображений, равномерная метрика

I. Напомним, что последовательность x_n $(n \in \mathbf{N})$ в пространстве с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется *фундаментальной*, если выполнено условие

$$\lim_{m > n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0,$$

а метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Любое *замкнутое* подпространство полного пространства — также полное.

Определение 9. Пусть X — метрическое пространство, тогда отображение $A\colon X \to X$ называется *сжимающим*, если существует число $q \in (0;1)$, для которого справедлива оценка

$$\rho(Ay, Ax) \leqslant q\,\rho(y, x), \quad x, y \in X,$$

а точка $x \in X$ называется *неподвижной*, если $Ax = x$.

Лемма 17. *Любое сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.*

$\lhd$ 1. Единственность неподвижной точки докажем от противного: если бы существовали две разные неподвижные точки $x, y \in X$, то получилось бы противоречие

$$\rho(x,y) > 0 \quad \text{и} \quad \rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \leqslant q\,\rho(x,y) < \rho(x,y).$$

2. Для нахождения неподвижной точки возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и образуем последовательность $x_n = A^n x_0$, $n \in \mathbf{N}$. Она — фундаментальна, так как

$$\begin{gathered}\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant q^n\,\rho(x_0, x_1)\\ \Longrightarrow\ \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m)\\ \leqslant \rho(x_0, x_1)(q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{m-1}) \leqslant q^n\,\tfrac{\rho(x_0,x_1)}{1-q} \leqslant \varepsilon\end{gathered}$$

при достаточно больших значениях $n < m$. Поэтому в пространстве[4)] X существует предельная точка x ($x_n \to x$ при $n \to \infty$), которая является неподвижной, для доказательства чего достаточно перейти в равенстве $Ax_n = x_{n+1}$ к пределу при $n \to \infty$, получив равенство $Ax = x$ (соотношение $Ax_n \to Ax$ вытекает из оценки $\rho(Ax_n, Ax) \leqslant q\,\rho(x_n, x) \to 0$). $\rhd$

II. Для заданного отрезка $K \subset \mathbf{R}$ через $\mathrm{C}(K)$ обозначаем множество непрерывных функций $\mathsf{x}\colon K \to \mathbf{R}^n$ с *равномерной* нормой (метрикой)

$$\|\mathsf{x}\| \equiv \sup_{t\in K} |\mathsf{x}(t)| \quad \bigl(\rho(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \equiv \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|\bigr).$$

[4)] Полном.

Из курса математического анализа известно, что $\mathrm{C}(K)$ — *полное* нормированное (метрическое) пространство.

2.6. Доказательство теоремы

14 фактически сводится к следующему: по заданной области G, функции f и точке (t_0, x_0) требуется построить упомянутый в формулировке этой теоремы интервал I.

1. Выберем целиком лежащий в области G замкнутый шар

$$B_r = \{(t,x) |\ |(t,x) - (t_0,x_0)| \leqslant r\},$$

что возможно, так как точка (t_0, x_0) лежит в этой области с целой окрестностью, в которой можно выбрать меньшую: шаровую и замкнутую.

2. Обозначим

$$M \equiv \sup_{(t,x)\in B_r} |f(t,x)| < \infty, \quad L \equiv \sup_{(t,x)\in B_r} \|f'_x(t,x)\| < \infty \qquad (29)$$

(эти значения конечны, так как обе функции под знаком верхней грани — непрерывны, а значит, принимают свои наибольшие значения на компакте $B_r \subset \mathbf{R}^{n+1}$).

3. Обозначив

$$K_T \equiv [t_0 - T; t_0 + T], \quad C_{T,R} \equiv \{(t,x) |\ t \in K_T,\ |x - x_0| \leqslant R\},$$

выберем $T_0, R_0 > 0$ так, чтобы при любых $T \leqslant T_0,\ R \leqslant R_0$ выполнялось включение

$$C_{T,R} \subset B_r.$$

Например, если положить $T_0 = R_0 = r/2$, то для любой точки $(t,x) \in C_{T,R}$ будет выполнена оценка

$$|(t,x) - (t_0,x_0)| = \sqrt{|t-t_0|^2 + |x-x_0|^2} \leqslant \sqrt{T^2 + R^2} \leqslant \frac{r}{2}\sqrt{2} < r,$$

из которой будет следовать условие $(t,x) \in B_r$.

4. Фиксировав какое-нибудь $R \leqslant R_0$, обозначим $\mathsf{x}_0(\cdot) \equiv x_0$ и

$$X_T \equiv \{\mathsf{x} \in \mathrm{C}(K_T) |\ \Gamma_{\mathsf{x}} \subset C_{T,R}\} = \{\mathsf{x} \in \mathrm{C}(K_T) |\ \|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0\|_T \leqslant R\}.$$

В полном пространстве $\mathrm{C}(K_T)$ множество функций X_T есть замкнутый шар с центром x_0 и радиусом R, поэтому метрическое подпространство X_T замкнуто, а значит, это — полное метрическое пространство.

5. Выберем $T_1 \leqslant T_0$ так, что при любом $T \leqslant T_1$ формула

$$(A\mathsf{x})(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \mathsf{x}(\tau))\, d\tau, \quad t \in K_T,$$

задает оператор

$$A\colon X_T \to X_T.$$

Это возможно, поскольку если $\mathsf{x} \in X_T$ и $t \in K_T$, то

$$|A\mathsf{x}(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \mathsf{x}(\tau))\, d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \sup_{(s,x)\in B_r} |f(s,x)|\, d\tau\right| \leqslant TM \leqslant R$$

при $T \leqslant T_1 \equiv R/(M+1)$, откуда $\|A\mathsf{x} - \mathsf{x}_0\|_T \leqslant R$ и $A\mathsf{x} \in X_T$.

6. Если $\mathsf{x} \in X_T$, то функция x — неподвижная точка оператора A тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению (28), в котором переменная t пробегает не интервал I, а отрезок K_T.

7. Выберем $T_2 \leqslant T_1$ так, чтобы при любом $T \leqslant T_2$ оператор A был сжимающим (например, с коэффициентом $q = 1/2$): это возможно, поскольку если $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in X_T$, то, применяя при каждом фиксированном $t_0 \in K_T$ лемму 16 к функции $f(t, x)$, определенной на выпуклом замкнутом сечении $B_{r,t}$ шара B_r плоскостью $t = t_0$, имеем оценку

$$|A\mathsf{x}(t) - A\mathsf{y}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \mathsf{x}(\tau)) - f(\tau, \mathsf{y}(\tau))|\, d\tau\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \sup_{(s,x)\in B_{r,t}} \|f'(s,x)\|\, |\mathsf{x}(\tau) - \mathsf{y}(\tau)|\, d\tau\right| \leqslant TL\|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_T \leqslant q\|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_T$$

при $T \leqslant T_2 \equiv q/(L+1)$, откуда $\|A\mathsf{x} - A\mathsf{y}\|_T \leqslant q\|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_T$.

8. По принципу сжимающих отображений для оператора A, переводящего полное метрическое пространство X_T в себя, имеем: для любого $T \leqslant T_2$ существует единственная неподвижная точка оператора A, поэтому в пространстве X_T существует единственное решение уравнения (28) на отрезке K_T. Следовательно, можно утверждать, что на интервале

$$I \equiv (t_0 - T_2; t_0 + T_2)$$

решение задачи Коши, по меньшей мере, существует, т. е. этот интервал удовлетворяет условию 1) теоремы.

9. Докажем справедливость условия 2) теоремы. Пусть y — решение задачи Коши, тогда y — решение уравнения (28) и функция y — непрерывна в точке t_0, причем $\mathsf{y}(t_0) = x_0$ и для некоторого $T \leqslant T_2$ выполнено неравенство

$$|\mathsf{y}(t) - x_0| \leqslant R, \quad t \in K_T \equiv J \subset I,$$

следовательно, $\mathsf{y} \in X_T$ и y — неподвижная точка оператора A. Из единственности неподвижной точки следует равенство (27), а с ним и условие 2) теоремы 14. $\triangleright$

2.7. Варианты формулировок локальной теоремы

I. Условие 2) в теореме 14 можно переформулировать так: *любые два решения задачи Коши локально совпадают.*

Действительно, оба они локально совпадают с тем решением, существование которого утверждается в условии 1), а значит, и друг с другом.

II. Условие $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, равносильное условию

$$f, \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \in \mathrm{C}(G), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

можно в формулировке теоремы 14 *заменить* более сильным, но легче проверяемым условием $f \in \mathrm{C}^1(G)$, ослабив тем самым теорему.

III. Теорему 14 можно усилить, заменив условие $f'_x \in \mathrm{C}(G)$ более слабым[5]: f — *липшицева по* x (обозначение $f \in \mathrm{Lip}_x(G)$), т. е. для некоторой константы L и любых точек $(t, x), (t, y) \in G$ выполнена оценка (*условие Липшица*)

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leqslant L|y - x|.$$

Действительно, если $f \in \mathrm{Lip}_x(G)$ — липшицева, то оценка в п. 7 доказательства теоремы будет вытекать прямо из условия Липшица.

[5] Но более трудным для проверки.

Формально, условие $f \in \mathrm{Lip}_x(G)$ из условия $f'_x \in \mathrm{C}(G)$ не вытекает, так как единой для всей области G константы L может и не найтись. Однако локальная, для любой точки $(t_0, x_0) \in G$, липшицевость из этого условия все же вытекает: заменив область G какой-либо ограниченной замкнутой выпуклой окрестностью $B \subset G$ точки $(t_0, x_0) \in G$, можно обеспечить липшицевость по x функции $f|_B$ с константой

$$L = \sup_{(t,x)\in B} \|f'_x(t,x)\| < \infty,$$

от чего факты локального существования и локальной единственности не пострадают[6)].

IV. В формулировке теоремы 14 можно явно указать *размер интервала* $K_T = (t_0 - T; t_0 + T)$, на котором заведомо существует решение. Он равен $2T$ и зависит только от радиуса r содержащегося в области G замкнутого шара B_r с центром в точке (t_0, x_0) и величин M, L, заданных равенствами (29). Например, в качестве T годится любое положительное число

$$T \leqslant T(r, M, L) \equiv \frac{1}{2} \min\left\{r, \frac{r}{M+1}, \frac{1}{L+1}\right\}.$$

2.8. Теорема единственности в целом

Теорема 18. *Если $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, то для любых решений* x *и* y *задачи Коши* (24) — (25) *справедливо равенство*

$$\mathsf{y}|_D = \mathsf{x}|_D, \quad D \equiv D(\mathsf{x}) \cap D(\mathsf{y}).$$

$\lhd$ 1. Предположим, что вопреки утверждению теоремы, например, множество

$$S \equiv \{t \in D|\ t \geqslant t_0,\ \mathsf{y}(t) \neq \mathsf{x}(t)\}$$

не пусто (случай неравенства $t \leqslant t_0$ в определении множества S рассматривается аналогично).

2. Обозначим

$$t_1 \equiv \inf S,$$

[6)] Именно это рассуждение и использовалось в доказательстве теоремы 14.

тогда $t_0 \leqslant t_1 \in D$. В случае $t_0 < t_1$ имеем равенство

$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{x}(t), \quad t_0 \leqslant t < t_1, \tag{30}$$

которое выполнено и при $t = t_1$ (для доказательства достаточно перейти в нем к пределу при $t \to t_1 - 0$, воспользовавшись непрерывностью функций x и y), т. е.

$$\mathsf{y}(t_1) = \mathsf{x}(t_1) \equiv x_1$$

(в случае $t_0 = t_1$ последнее равенство выполнено уже в силу начального условия).

3. Таким образом, обе функции x и y являются решениями задачи Коши с тем же уравнением и начальной точкой $(t_1, x_1) \in G$, а значит, они, согласно теореме 14, локально совпадают. Поэтому равенство (30) останется справедливым и после замены числа t_1 несколько бóльшим числом t_2, откуда получим противоречие

$$t_1 = \inf S \geqslant t_2 > t_1.$$

$\rhd$

2.9. Непродолжаемые решения

Данные в определении 4 понятия продолжения решения и непродолжаемого решения дифференциального уравнения без труда распространяются на решения задачи Коши.

Лемма 19. *Если $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, то для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in G$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши* (24) — (25)*, причем оно служит продолжением любого решения этой задачи.*

$\lhd$ 1. Множество всех решений задачи Коши (24) — (25), обозначенное через E, согласно теореме 14, не пусто, поэтому можно в качестве области определения искомого непродолжаемого решения x взять множество

$$D(\mathsf{x}) = \bigcup_{\mathsf{y} \in E} D(\mathsf{y}),$$

а саму функцию x задать с помощью правила

$$\mathsf{x}(t) = \mathsf{y}(t), \quad \text{как только} \quad t \in D(\mathsf{y}).$$

2. Полученная область определения $D(\mathsf{x})$ — интервал, так как это открытое и связное (благодаря точке t_0) множество на прямой, а сформулированное правило корректно, поскольку согласно теореме 18 все решения, содержащие в своей области определения какую-либо точку, принимают в ней одно и то же значение.

3. Полученная функция x есть:

a) решение задачи Коши, так как для любого $t \in D(\mathsf{x})$ существует решение $\mathsf{y} \in E$, для которого

$$t \in D(\mathsf{y}) \quad \text{и} \quad \mathsf{x}|_{D(\mathsf{y})} = \mathsf{y};$$

b) продолжение любого решения $\mathsf{y} \in E$ (по определению);

c) непродолжаемое решение, так как оно само является продолжением любого решения $\mathsf{y} \in E$;

d) единственное непродолжаемое решение, так как любое другое решение $\mathsf{y} \in E$ имеет отличное от себя продолжение x, а значит, продолжаемо. $\rhd$

2.10. Теорема продолжаемости

гласит, по существу, что непродолжаемое решение задачи Коши, существующее в силу теоремы 19, обязательно выходит, как вправо, так и влево, *за пределы любого компакта*, лежащего в области G определения правой части уравнения. Иными словами, любое решение *асимптотически продолжается до границы области*: ведь окрестностью границы ∂G как раз и следует признать[7] дополнение такого компакта до G.

Теорема 20. *Пусть* $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$, *а* x — *непродолжаемое решение уравнения* (24). *Тогда для любого компакта* $C \subset G$ *существует такой отрезок* $K \subset D(\mathsf{x})$, *что имеет место включение*

$$\Gamma_{\mathsf{x}|_{D(\mathsf{x})\setminus K}} \subset (G \setminus C).$$

$\lhd$ Прежде чем доказывать теорему, напомним, что *расстоянием между подмножествами* X, Y метрического пространства M называется величина[8]

$$\rho(X, Y) \equiv \inf_{x \in X,\, y \in Y} \rho(x, y),$$

[7] Ср. с окрестностью точек $\pm\infty$ на числовой прямой.

[8] Равная по определению ∞, если хотя бы одно из этих подмножеств пусто.

и докажем следующую лемму.

Лемма 21. *Если* $X, Y \subset M$, $X \cap Y = \varnothing$, X *— компакт, а* Y *— замкнуто, то* $\rho(X, Y) > 0$.

$\lhd$ Пусть, напротив, $\rho(X, Y) = 0$. Тогда для некоторых двух последовательностей $x_n \in X$ и $y_n \in Y$ $(n \in \mathbf{N})$, первую из которых (в силу компактности X) можно сразу считать сходящейся к некоторому $x_0 \in X$, имеет место равенство

$$0 = \rho(X, Y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

а значит, и равенство

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

из которого (в силу замкнутости Y) получаем условие $x_0 \in Y$, а с ним и противоречие: $x_0 \in X \cap Y = \varnothing$. $\rhd$

Приступим теперь к доказательству теоремы 20.

1. Выберем такое r, что

$$\rho(C, \partial G) \geqslant 2r > 0$$

(это возможно, так как по лемме 21 первое из чисел цепочки положительно, поскольку C — компакт, а граница ∂G — замкнута).

2. Для каждой точки $(t, x) \in C$ обозначим

$$B_r(t, x) = \{(s, y) \in \mathbf{R}^{1+n} |\ \rho((s, y), (t, x)) \leqslant r\},$$

тогда для любой точки $(s, y) \in B_r(t, x)$ имеем

$$\rho((s, y), \partial G) \geqslant \rho((t, x), \partial G) - \rho((t, x), (s, y)) \geqslant r.$$

3. Обозначим

$$B = \bigcup_{(t,x)\in C} B_r(t, x),$$

тогда[9)]

$$\rho(\overline{B}, \partial G) \geqslant r,$$

поэтому $\overline{B} \subset G$ и можно определить константы

$$M = \sup_{(t,x)\in\overline{B}} |f(t, x)| < \infty, \quad L = \sup_{(t,x)\in\overline{B}} \|f'_x(t, x)\| < \infty.$$

[9)] Можно доказать, что множество B — замкнуто.

4. Для любой точки $(t,x) \in C$ имеем $B_r(t,x) \subset B$, поэтому решение задачи Коши с этой начальной точкой определено по меньшей мере на интервале

$$(t-T; t+T), \quad \text{где} \quad T = T(r, M, L)$$

(см. вариант IV теоремы 14 из п. 2.7).

5. Пусть некоторая точка $(t_0, x(t_0))$ графика непродолжаемого решения x принадлежит компакту C (если такой точки нет, то теорема доказана), тогда

$$D(\mathsf{x}) \equiv (\alpha; \beta) \supset (t_0 - T; t_0 + T).$$

6. Докажем существование такого числа $t_1 \in (\alpha; \beta)$, что

$$(t, \mathsf{x}(t)) \notin C, \quad \alpha < t < t_1.$$

А. В случае $\alpha = -\infty$, в силу ограниченности множества C, достаточно взять

$$t_1 = \inf\{t|\ (t, \mathsf{x}(t)) \in C\} > -\infty = \alpha.$$

В. В случае $\alpha > -\infty$ положим

$$t_1 \equiv \alpha + T < t_0.$$

Тогда если существует такая точка $(t, \mathsf{x}(t)) \in C$, что $t < t_1$, то решение задачи Коши с этой начальной точкой продолжается влево по меньшей мере до[10)] числа

$$t - T < t_1 - T = \alpha,$$

что противоречит непродолжаемости решения x.

7. Существование такого числа $t_2 \in (\alpha; \beta)$, что

$$(t, \mathsf{x}(t)) \notin C, \quad t_2 < t < \beta,$$

доказывается аналогично. $\triangleright$

[10)] Не включительно.

2.11. Лемма Гронуолла — Беллмана

или *лемма об интегральном неравенстве*, позволяет получать так называемые *априорные оценки* нормы решений дифференциального или интегрального уравнения.

Лемма 22. *Если функция $u \in \mathrm{C}(J)$, где $J = [t_0; \beta)$, для некоторых чисел $a, b \geqslant 0$ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant u(t) \leqslant a + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau, \quad t \in J, \tag{31}$$

то и оценке

$$u(t) \leqslant a e^{b(t-t_0)}, \quad t \in J.$$

$\lhd$ 1. Если $a > 0$, то правая часть неравенства (31) положительна и его можно на нее разделить, получив неравенство

$$\frac{d}{dt} \ln \left(a + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \right) = \frac{bu(t)}{a + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau} \leqslant b$$

Заменив в нем переменную t на s и проинтегрировав его по s от t_0 до любого $t \in J$, получим оценку

$$\ln \left(a + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \right) - \ln a = \ln \left(a + b \int_{t_0}^{s} u(\tau)\, d\tau \right) \Bigg|_{t_0}^{t} \leqslant b(t - t_0),$$

из которой, с помощью все того же неравенства (31), получится требуемое

$$u(t) \leqslant a + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \leqslant a e^{b(t-t_0)}.$$

2. Если неравенство (31) имеет место при $a = 0$, то и при любом $a > 0$. Следовательно, по доказанному в предыдущем пункте, требуемое неравенство также выполнено при любом $a > 0$, а значит, и при $a = 0$. $\rhd$

Следствие 23. *Если функция $u \in \mathrm{C}(J)$, где $J = (\alpha; \beta)$, для некоторых чисел $a, b \geqslant 0$ и $\alpha < t_0 < \beta$ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant u(t) \leqslant a + b \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \right|, \quad t \in J,$$

то и оценке

$$u(t) \leqslant ae^{b|t-t_0|}, \quad t \in J.$$

$\lhd$ Для значений $t \geqslant t_0$ утверждение просто совпадает с доказанным, а для значений $t \leqslant t_0$ — сводится к нему с помощью замены $v(s) = u(t)$, где $s - t_0 = t_0 - t$, так как тогда

$$\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau\right| = \int_{t_0}^{s} v(\sigma)\,d\sigma, \qquad |t - t_0| = s - t_0.$$

$\rhd$

2.12. Теорема продолжаемости для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad A\colon I \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n, \quad F\colon I \to \mathbf{R}^n,$$

называемой *линейной неоднородной* $(n \times n)$-системой[11], а в случае $F = 0$ — *линейной однородной*, уточняет теорему 20.

Теорема 24. *Если $A, F \in \mathrm{C}(I)$, то для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши, причем оно служит продолжением любого решения этой задачи и определено на всем интервале I.*

$\lhd$ 1. Правая часть

$$f(t, x) \equiv A(t)x + F(t)$$

системы удовлетворяет условиям теоремы 20, так как $A, F \in \mathrm{C}(I)$ и $f'_x(t, x) = A(t)$. Поэтому остается доказать лишь последнее из сформулированных в теореме 24 условий, а именно, что непродолжаемое решение x задачи Коши определено на всем интервале $I = (\alpha; \beta)$.

2. Предположим, что непродолжаемое решение x, которое непременно удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathsf{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(\tau)x(\tau) + F(\tau))\,d\tau, \quad t \in D(\mathsf{x}),$$

определено не при всех $t \in [t_0; \beta)$, а только при $t \in J \equiv [t_0; \beta')$ для некоторого $\beta' < \beta$ (случай, когда оно не определено при $t \in (\alpha; \alpha']$, рассматривается аналогично).

[11]Здесь $G = I \times \mathbf{R}^n$.

3. Тогда для функции $u(t) = |\mathsf{x}(t)|$ при всех $t \in J$ имеем

$$0 \leqslant u(t) \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} (\|A(\tau)\|\, u(\tau) + |F(\tau)|)\, d\tau \leqslant a + b\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau$$
$$\Longrightarrow\ u(t) \leqslant ae^{b(t-t_0)} \leqslant R$$

(согласно лемме Гроноулла — Беллмана), где

$$a = |x_0| + \int_{t_0}^{\beta'} |F(\tau)|\, d\tau, \quad b = \sup_{t\in\overline{J}} \|A(t)\|, \quad R = ae^{b(\beta'-t_0)}.$$

4. Тогда график непродолжаемого решения x при $t > t_0$ не выходит за пределы компакта

$$C = \{(t,x)|\ t \in \overline{J},\ |x| \leqslant R\} \subset G,$$

что противоречит теореме 20. $\triangleright$

2.13. Ломаная Эйлера

для задачи Коши (24) — (25) — это график любой такой непрерывной функции $\varphi\colon K \to \mathbf{R}^n$, где $K \equiv [\alpha;\beta] \ni t_0$, или сама эта функция[12)], которая удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = x_0$ и для некоторого *разбиения*

$$\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_{n_\sigma}), \quad \alpha \equiv s_0 < s_1 < \ldots < s_{n_\sigma} \equiv \beta,$$

отрезка K при каждом значении $i = 1, \ldots, n_\sigma$ для некоторого $s \in [s_{i-1}; s_i]$ задается равенством[13)]

$$\dot{\varphi}(t) = f(s, \varphi(s)), \quad t \in [s_{i-1}; s_i].$$

Нормой разбиения σ называется величина

$$|\sigma| = \max_{i\in\{1,\ldots,n_\sigma\}} (s_i - s_{i-1}).$$

I. Значение s, фигурирующее в определении ломаной Эйлера, следует считать функцией $s = s_\sigma(t)$ по меньшей мере от t и σ, которая тогда удовлетворяет условиям

$$s_\sigma(t) \in [s_{i-1}; s_i], \qquad t \in [s_{i-1}; s_i], \quad i = 1, \ldots, n_\sigma,$$
$$\Longrightarrow\ |s_\sigma(t) - t| \leqslant |\sigma|, \quad t \in K,$$

---

12)В зависимости от контекста.

13)Которое означает, что функция φ — кусочно линейна, а ее график — действительно ломаная.

а для кусочно дифференцируемой функции φ справедливо равенство
$$\dot{\varphi}(t) = f(s_\sigma(t), \varphi(s_\sigma(t))), \quad t \in K \setminus \{s_0, \ldots, s_{n_\sigma}\}. \tag{32}$$

II. Построим *простейшую* ломаную Эйлера:

— возьмем в качестве одной из точек разбиения точку t_0 и будем двигаться от нее вправо, сначала положив $s = t_0$ (тем самым определяется значение $f(s, \varphi(s))$, задающее угловой коэффициент звена ломаной) и выбрав точку разбиения $t_1 > t_0$, затем положив $s = t_1$ и выбрав точку разбиения $t_2 > t_1$, и т. д. до тех пор, пока $(s, \varphi(s)) \in G$;

— аналогично, будем двигаться от t_0 влево, сначала положив $s = t_0$ и выбрав точку разбиения $t_{-1} < t_0$, затем положив $s = t_{-1}$ и выбрав точку разбиения $t_{-2} < t_{-1}$, и т. д.;

— перенумеровав числа $t_0, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots$ подряд в возрастающем порядке, получим разбиение σ.

2.14. Теорема Арцела — Асколи

Определение 10. Семейство Φ функций $\varphi\colon K \to \mathbf{R}^n$ на отрезке $K \subset \mathbf{R}$ называется:

a) *равномерно ограниченным*, если
$$\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\|_K < \infty;$$

b) *равностепенно непрерывным*[14)], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $\varphi \in \Phi$ и $t, s \in K$ имеет место импликация
$$|t - s| < \delta \implies |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon;$$

c) *предкомпактным*, в смысле равномерной на K нормы, если из любой последовательности $\varphi_n \in \Phi$ $(n \in \mathbf{N})$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Теорема 25. *Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство $\Phi \subset \mathrm{C}(K)$ — предкомпактно.*

[14)] Из чего, в частности, следует, что каждая из функций семейства — непрерывна, и даже равномерно непрерывна.

$\lhd$ 1. Пусть заданы $\varphi_n \in \Phi$ $(n \in \mathbf{N})$ и $\varepsilon > 0$.

A. По заданному $\varepsilon > 0$ в соответствии с п. b) определения 10 выберем число $\delta > 0$. Кроме того, выберем разбиение $\sigma = (s_j|\ j \in J)$ отрезка K с нормой $|\sigma| < \delta$, а в ограниченном, согласно п. a) определения 10, множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ всех значений всех функций семейства Φ выберем конечную *ε-сеть*[15] $\{x_i\}$. Рассмотрим конечное множество всех функций $\psi_k \in \mathrm{C}(K)$, графики которых являются ломаными[16] с узлами в точках вида (s_j, x_i).

B. Каждой функции φ_n поставим в соответствие какую-либо функцию ψ_k, для которой

$$|\varphi_n(s_j) - \psi_k(s_j)| < \varepsilon, \quad j \in J.$$

Тогда хотя бы одна из функций ψ_k будет поставлена в соответствие бесконечному числу членов последовательности φ_n, образующих подпоследовательность, причем любые два члена $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}$ этой подпоследовательности при $t \in [s_{j-1}; s_j]$, $j \in J \setminus \{0\}$ будут удовлетворять неравенству

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_1}(t) - \varphi_{n_2}(t)| \leqslant |\varphi_{n_1}(t) - \varphi_{n_1}(s_j)| + |\varphi_{n_1}(s_j) - \psi_k(s_j)| \\ + |\varphi_{n_2}(t) - \varphi_{n_2}(s_j)| + |\varphi_{n_2}(s_j) - \psi_k(s_j)| < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда будем иметь

$$\|\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2}\|_K < 4\varepsilon.$$

C. Из найденной подпоследовательности исключим первую функцию, предварительно обозначив ее через φ_1^*.

D. Уменьшим вдвое значение ε и проделаем с оставшейся подпоследовательностью те же операции A — C, получив функцию φ_2^*, затем, аналогично, функцию φ_3^* и т. д.

2. Полученная в итоге последовательность φ_n^* будет фундаментальной, так как

$$\lim_{n_1 > n_2 \to \infty} \|\varphi_{n_1}^* - \varphi_{n_2}^*\|_K = 0.$$

$\rhd$

---

[15] Т. е. такое множество центров шаров радиуса ε, что объединение этих шаров содержит множество X.

[16] Не ломаными Эйлера!

2.15. Теорема Пеано

утверждает, что существование[17)] решения задачи Коши гарантируется одной лишь непрерывностью правой части системы, каковое условие представляется уже совершенно естественным.

Теорема 26. *Если $f \in \mathrm{C}(G)$, то для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши* (24) — (25).

$\lhd$ 1. Выберем целиком лежащий в бласти G замкнутый шар

$$B = \{(t,x) |\ |(t,x) - (t_0,x_0)| \leqslant r\}$$

и обозначим

$$M \equiv \sup_{(t,x)\in B} |f(t,x)| < \infty.$$

2. Обозначим через Φ множество всех ломаных Эйлера, определенных на отрезке $K = [\alpha;\beta] \equiv [t_0 - T; t_0 + T]$ и лежащих в шаре B, а через $\Phi_\sigma \subset \Phi$ — подмножество тех из них, которые соответствуют разбиению σ отрезка K. Выберем число $T > 0$ столь малым, чтобы любое из множеств Φ_σ было не пусто. Это возможно, поскольку, например, простейшая ломаная $\varphi \in \Phi_\sigma$ может быть по индукции достроена вправо (аналогично, влево) на весь отрезок K: действительно, во-первых, имеем

$$(t_0, \varphi(t_0)) = (t_0, x_0) \in B$$

и, во-вторых, если уже

$$(t_i, \varphi(t_i)) \in B, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

то и $(t_k, \varphi(t_k)) \in B$, так как в силу равенства (32) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(t_k) - \varphi(t_0)| &= \left|\int_{t_0}^{t_k} \dot\varphi(\tau)\,d\tau\right| = \left|\int_{t_0}^{t_k} f(s_\sigma(\tau), \varphi(s_\sigma(\tau)))\,d\tau\right| \\ &\leqslant \sup_{s\in[t_0;t_{k-1}]} |f(s,\varphi(s))| \cdot (t_k - t_0) \leqslant MT \\ \Longrightarrow\ |(t_k, \varphi(t)) - (t_0, x_0)| &\leqslant \sqrt{T^2 + (MT)^2} \leqslant T(M+1) \leqslant r, \end{aligned}$$

как только $T \leqslant r/(M+1)$.

[17)] Но не единственность!

3. Семейство Φ ломаных Эйлера равномерно ограничено, поскольку

$$\sup_{\varphi\in\Phi}\|\varphi\|_K \leqslant |x_0| + \sup_{\substack{\varphi\in\Phi\\ t\in K}}|\varphi(t)-x_0| \leqslant |x_0| + r < \infty,$$

и равностепенно непрерывно (даже равностепенно липшицево с константой M), поскольку в силу равенства (32) имеем

$$|\varphi(t)-\varphi(s)| = \left|\int_s^t f(s_\sigma(\tau),\varphi(s_\sigma(\tau)))\,d\tau\right| \leqslant M|t-s| < \varepsilon, \quad \varphi\in\Phi,$$

если только числа $t, s \in K$ таковы, что $|t-s| < \delta \equiv \varepsilon/M$.

4. Выберем такую последовательность $\varphi_n \in \Phi$ ($n \in \mathbf{N}$) ломаных Эйлера, что соответствующие им разбиения σ_n отрезка K удовлетворяют условию $|\sigma_n| \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме Арцела — Асколи из этой последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение φ_n), которая, в силу полноты пространства $\mathrm{C}(K)$, равномерно сходится к некоторой непрерывной функции φ_0.

5. Докажем, что функция $\varphi = \varphi_0|_I$, где $I \equiv (\alpha;\beta)$, — есть решение задачи Коши.

A. Начальное условие выполнено, поскольку

$$\varphi(t_0) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t_0) = \lim_{n\to\infty} x_0 = x_0.$$

B. Для каждого $t \in I$ проверим равенство

$$\dot\varphi(t) = f(t,\varphi(t)) \iff \varphi(t+h)-\varphi(t)-f(t,\varphi(t))h = o(h), \quad h\to 0.$$

Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции f в точке $(t,\varphi(t))$ для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{cases}|s-t|<\delta\\ |y-\varphi(t)|<\delta\end{cases} \implies |f(s,y)-f(t,\varphi(t))| < \varepsilon.$$

Далее, с учетом равенства (32) имеем

$$\begin{gathered}|\varphi(t+h)-\varphi(t)-f(t,\varphi(t))h| \leqslant |\varphi(t+h)-\varphi_n(t+h)|\\ +|\varphi_n(t)-\varphi(t)| + \left|\int_t^{t+h}(\dot\varphi_n(\tau)-f(t,\varphi(t)))\,d\tau\right|\\ < \varepsilon|h| + \varepsilon|h| + \left|\int_t^{t+h}|f(s_{\sigma_n}(\tau),\varphi_n(s_{\sigma_n}(\tau)))-f(t,\varphi(t))|\,d\tau\right| < 3\varepsilon|h|,\end{gathered}$$

если только число $h \neq 0$ — достаточно мало и число n — достаточно велико, а именно, если только выполнены условия

$$0 < |h| < \min\left\{t-\alpha,\, \beta - t,\, \frac{\delta}{2},\, \frac{\delta}{2M+\varepsilon}\right\}, \qquad \begin{cases} |\sigma_n| < |h| \\ \|\varphi_n - \varphi\|_K < \varepsilon |h|, \end{cases}$$

так как тогда

$$\begin{aligned} &|s_{\sigma_n}(\tau) - t| \leqslant |s_{\sigma_n}(\tau) - \tau| + |\tau - t| \leqslant |\sigma_n| + |h| < 2|h| < \delta \\ \Longrightarrow\ &|\varphi_n(s_{\sigma_n}(\tau)) - \varphi(t)| \leqslant |\varphi_n(s_{\sigma_n}(\tau)) - \varphi_n(t)| + \|\varphi_n - \varphi\|_K \\ &\qquad < M\,|s_{\sigma_n}(\tau) - t| + \varepsilon|h| < (2M+\varepsilon)|h| < \delta \\ &\qquad\Longrightarrow\ |f(s_{\sigma_n}(\tau), \varphi_n(s_{\sigma_n}(\tau))) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 26 доказана. $\triangleright$

2.16. Сведéние уравнения произвольного порядка к нормальной системе

Обозначим через E_f и $E_f(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ множества всех решений следующего уравнения *n-го порядка, разрешенного* относительно старшей производной, и, соответственно, задачи Коши для него

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}), \qquad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{33}$$

а через $E_{\overline{f}}$ и $E_{\overline{f}}(t_0, \overline{y}_0)$ — множества решений следующей нормальной системы и, соответственно, задачи Коши для нее

$$\dot{x} = \overline{f}(t,x) \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \overline{y}_0 \equiv \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Определение 11. *Канонической заменой* (переменных) назовем отображение ψ, переводящее любую $(n-1)$ раз дифференцируемую скалярную функцию y в вектор-функцию

$$\psi \mathsf{y} \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{y} \\ \dot{\mathsf{y}} \\ \ldots \\ \mathsf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 27. *Каноническая замена ψ осуществляет изоморфизмы*

$$E_f \xrightarrow{\psi} E_{\overline{f}} \quad \text{и} \quad E_f(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \xrightarrow{\psi} E_{\overline{f}}(t_0, \overline{y}_0)$$

множеств, наделенных структурой областей определения функций, локального их совпадения и продолжения, причем обратные к этим изоморфизмам отображения задаются формулой

$$\psi^{-1}\mathsf{x} = \mathsf{x}_1.$$

Имеется в виду, что отображение ψ, равно как и обратное к нему, сохраняет указанную структуру, т. е. и области определения всех функций, и всякие факты их локального совпадения, и свойство всякой функции быть продолжением другой.

$\lhd$ Для доказательства достаточно проверить следующие свойства:

a) $\psi(E_f) \subset E_{\overline{f}}$, причем $D(\psi\mathsf{y}) = D(\mathsf{y})$: действительно, если $\mathsf{y} \in E_f$, то при всех $t \in D(\mathsf{y})$ имеем

$$(\psi\mathsf{y})^{\cdot}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{y} \\ \dot{\mathsf{y}} \\ \ldots \\ \mathsf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix}^{\cdot}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathsf{y}}(t) \\ \ddot{\mathsf{y}}(t) \\ \ldots \\ f(t, \mathsf{y}(t), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} = \overline{f}(t, \psi\mathsf{y}(t)),$$

поэтому $\psi\mathsf{y} \in E_{\overline{f}}$, причем

$$D(\mathsf{y}) = D(\dot{\mathsf{y}}) = \ldots = D(\mathsf{y}^{(n-1)}) = D(\psi\mathsf{y});$$

b) $E_f \xrightarrow{\psi} E_{\overline{f}}$ — сюръекция: действительно, для $\mathsf{x} \in E_{\overline{f}}$ положим $\mathsf{y} = \mathsf{x}_1$, тогда при всех $t \in D(\mathsf{x})$ имеем

$$\begin{cases} \dot{\mathsf{y}}(t) = \dot{\mathsf{x}}_1(t) = \mathsf{x}_2(t) \\ \ldots \\ \mathsf{y}^{(n-1)}(t) = \dot{\mathsf{x}}_{n-1}(t) = \mathsf{x}_n(t) \\ \mathsf{y}^{(n)}(t) = \dot{\mathsf{x}}_n(t) = f(t, \mathsf{x}(t)) = f(t, \mathsf{y}(t), \ldots, \mathsf{y}^{(n-1)}(t)), \end{cases}$$

откуда $\mathsf{y} \in E_f$ и $\psi\mathsf{y} = \mathsf{x}$;

c) $E_f \xrightarrow{\psi} E_{\overline{f}}$ — инъекция[18]: действительно, если совпадают вектор-функции $\psi \mathsf{y}_1 = \psi \mathsf{y}_2$, то совпадают и их первые координаты $\mathsf{y}_1 = \mathsf{y}_2$;

d) $E_f \xrightarrow{\psi} E_{\overline{f}}$ — биекция, причем

$$(\psi|_{E_f})^{-1}\mathsf{x} = \mathsf{x}_1, \quad \mathsf{x} \in E_{\overline{f}},$$

(следствие предыдущих пунктов доказательства);

e) $\psi\left(E_f(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1})\right) = E_{\overline{f}}(t_0, \overline{y}_0)$: действительно, имеем

$$E_f(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \subset E_f, \quad \text{и} \quad E_{\overline{f}}(t_0, \overline{y}_0) \subset E_{\overline{f}},$$

причем

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \iff \psi \mathsf{y}(t_0) = \overline{y}_0;$$

f) оба отображения $\psi|_{E_f}$ и $(\psi|_{E_f})^{-1}$ сохраняют равенство функций (так как $\psi|_{E_f}$ — биекция) и переход от функции к ее сужению (из-за сохранения областей определения), а значит, они сохраняют и свойство одной функции быть продолжением другой (т. е. равенство второй функции сужению первой; см. определение 4), и локальное равенство функций (т. е. равенство некоторых их сужений). $\triangleright$

2.17. Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения

n-го порядка выводятся из соответствующих теорем для нормальной системы с помощью леммы 27, которая фактически означает, что в отношении вопросов локального существования решений, их локальной единственности, продолжаемости и единственности в целом множества решений задачи Коши для уравнения и для соответствующей системы устроены совершенно одинаково.

Теорема 28. *Если $f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in \mathrm{C}(G)$, то для любой начальной точки $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in G$:*

[18] Причем как функция, определенная не только на E_f, но и с самой полной областью определения — множеством всех $(n-1)$ раз дифференцируемых скалярных функций.

1) в некоторой окрестности I точки t_0 существует решение $\mathsf{y}\colon I \to \mathbf{R}$ *задачи Коши* (33)*;*

2) любое другое решение этой задачи локально совпадает с решением y.

Теорема 29. *Если $f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in \mathrm{C}(G)$, то для любых решений y и z задачи Коши* (33)*, то справедливо равенство*

$$\mathsf{y}|_D = \mathsf{z}|_D, \quad D \equiv D(\mathsf{y}) \cap D(\mathsf{z}).$$

Лемма 30. *Если $f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in \mathrm{C}(G)$, то для любой начальной точки $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in G$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши* (33)*, причем оно служит продолжением любого решения этой задачи.*

Теорема 31. *Пусть $f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in \mathrm{C}(G)$, а y — непродолжаемое решение уравнения* (33)*. Тогда для любого компакта $C \subset G$ существует такой отрезок $K \subset D(\mathsf{y})$, что имеет место включение*

$$\Gamma_{(\mathsf{y},\ldots,\mathsf{y}^{(n-1)})|_{D(\mathsf{x})\setminus K}} \subset (G \setminus C).$$

Теорема 32. *Если $f \in \mathrm{C}(G)$, то для любой начальной точки $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in G$ существует решение задачи Коши* (33).

2.18. Теорема продолжаемости для линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t), \qquad a_1, \ldots, a_n, f\colon I \to \mathbf{R},$$

называемого *линейным неоднородным* уравнением[19]), а в случае $f = 0$ — *линейным однородным*, уточняет теорему 31.

Теорема 33. *Если $a_1, \ldots, a_n, f \in \mathrm{C}(I)$, то для любой начальной точки $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times \mathbf{R}^n$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши, причем оно служит продолжением любого решения этой задачи и определено на всем интервале I.*

---

[19]) *n-го порядка*, и даже *приведенным*, т. е. с коэффициентом $a_0 = 1$ при старшей производной; здесь $G = I \times \mathbf{R}^n$.

$\triangleleft$ Каноническая замена (определение 11) приводит уравнение к линейной системе

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ -a_n(t)x_1 - \ldots - a_1(t)x_n + f(t) \end{pmatrix} \equiv A(t)x + F(t), \quad t \in I,$$

где

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad F \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{34}$$

к которой можно применить теорему 24, сведя полученное утверждение к доказываемому с помощью леммы 27. $\triangleright$

Определение 12. Матричную функцию A и вектор-функцию F, определенные по формулам (34), назовем *матрицей линейного уравнения* и его *векторной неоднородностью* соответственно.

2.19. Вопросы и задачи для самостоятельного решения

I. Какое из условий 1) или 2), сформулированных в теореме 14, не вытекает из единого условия, состоящего в следующем: *в некоторой окрестности I точки t_0 существует единственное решение* $\mathsf{x}\colon I \to \mathbf{R}^n$ *задачи Коши* (24) — (25)?

II. Доказать, что теорема 14 останется в силе, если в ней условие $f, f'_x \in \mathrm{C}(G)$ заменить следующим: *f — непрерывна по t и липшицева по x в области G.*

III. При каждом значении $n \in \mathbf{N}$ определить, могут ли два различных решения уравнения

$$y^{(n)} = f(t, y), \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2),$$

пересекаться друг с другом или касаться друг друга хотя бы в одной точке $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

IV. Какой наименьший порядок может иметь уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}), \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^{n+1}),$$

с частными решениями $\mathsf{y}_1(t) = t$ и $\mathsf{y}_2(t) = \sin t$?

V. Останется ли верной лемма 21, если в ней условие компактности множества X заменить его замкнутостью?

VI. Доказать, что если для каждой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует хотя бы одно решение задачи Коши (24) — (25), то существует и непродолжаемое ее решение.

VII. Для заданного уравнения (24) и компакта $C \subset G$ оценить снизу время пребывания вне этого компакта графика любого непродолжаемого решения, начинающегося в этом компакте, при движении по оси времени, например, вправо.

VIII. Какие из следующих утверждений для уравнения (24) верны:

a) если $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$, то область определения $D(\mathsf{x})$ любого непродолжаемого решения x есть вся числовая ось $\mathbf{R}$;

b) если $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$ и область определения $D(\mathsf{x})$ некоторого непродолжаемого решения x есть луч $\mathbf{R}^+ \equiv (0; \infty)$, то существует бесконечный (т. е. равный $+\infty$ или $-\infty$) предел

$$\lim_{t \to +0} \mathsf{x}(t); \tag{35}$$

c) если $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ и область определения $D(\mathsf{x})$ некоторого непродолжаемого решения x есть луч $\mathbf{R}^+$, то существует предел (35), возможно, бесконечный?

IX. Построить (графически) простейшую ломаную Эйлера для задачи Коши

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 1,$$

на отрезке $[0; 3]$ в случае разбиения σ, равного:

a) (0, 1, 2, 3);

b) (0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3).

X. Доказать, что если функция f липшицева по x и непрерывна в области G, содержащей множество

$$C \equiv \{(t, x) |\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ |x - x_0| \leqslant R\},$$

причем
$$\frac{R}{\beta-\alpha} \geqslant M \equiv \sup_{(t,x)\in C} |f(t,x)|$$
(если $M=\infty$, то и $R=\infty$), то для любой точки $(t_0,x_0)\in C$ последовательность $\mathsf{x}_n\colon[\alpha;\beta]\to\mathbf{R}^n$ $(n\in\mathbf{N})$ *приближений Пикара*, определяемая равенствами
$$\mathsf{x}_0 \equiv x_0, \qquad \mathsf{x}_n = A\mathsf{x}_{n-1} \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\mathsf{x}_{n-1}(\tau))\,d\tau, \quad n\in\mathbf{N},$$
сходится равномерно на отрезке $[\alpha;\beta]$ к решению уравнения (28).

3. Общая теория линейных уравнений и систем

3.1. Линейное пространство функций

$f\colon I \to \mathbf{R}^n$ с естественными линейными операциями

$$(C_1f_1+C_2f_2)(t) = C_1f_1(t)+C_2f_2(t), \quad t \in I, \quad f_{1,2} \in \Phi, \quad C_{1,2} \in \mathbf{R},$$

обозначим через[1)] Φ. Нулем $0 \in \Phi$ в этом линейном пространстве является функция

$$0(t) = 0 \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I.$$

Определение 13. Функции $f_1, \ldots, f_k \in \Phi$ называются *линейно зависимыми*, если для некоторого *ненулевого*[2)] набора констант $C_1, \ldots, C_k$ выполнено равенство

$$C_1f_1 + \ldots + C_kf_k = 0,$$

и *линейно независимыми* — в противном случае.

Согласно теореме 24, если $A, F \in \mathrm{C}(I)$, то множества $E_{A,F}$ и E_A всех непродолжаемых решений линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \tag{36}$$

и *соответствующей однородной* системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \tag{37}$$

являются подмножествами пространства Φ.

3.2. Общее решение линейной однородной системы

образует подпространство линейного пространства Φ и, рассматриваемое как линейное пространство, отождествимо с множеством начальных значений самих решений, что утверждает следующая, называемая *теоремой об изоморфизме*,

---

[1)] Здесь интервал I и число $n \in \mathbf{N}$ — заранее фиксированы, но в обозначение пространства Φ не включены.

[2)] Т. е. не состоящего из одних нулей.

Теорема 34. *Множество* E_A *— линейное пространство, причем для любого* $t_0 \in I$ *отображение*

$$\varphi_{t_0}\colon\ \mathsf{x} \in E_A \mapsto \mathsf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств E_A *и* $\mathbf{R}^n$.

$\lhd$ 1. Множество E_A — есть линейное пространство, так как оно — подмножество линейного пространства Φ и замкнуто относительно линейных операций: действительно, если $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in E_A$ и $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, то

$$(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2)^{\cdot} = C_1\dot{\mathsf{x}}_1 + C_2\dot{\mathsf{x}}_2 = C_1A\mathsf{x}_1 + C_2A\mathsf{x}_2 = A(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2),$$

откуда $(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2) \in E_A$.

2. Отображение $\varphi_{t_0}\colon E_A \to \mathbf{R}^n$ — биекция, так как согласно теореме 24 для любого начального значения $a \in \mathbf{R}^n$ существует единственная функция $\mathsf{x} \in E_A$, удовлетворяющая начальному условию

$$\varphi_{t_0}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}(t_0) = a.$$

3. Отображение $\varphi_{t_0}\colon E_A \to \mathbf{R}^n$ — гомоморфизм линейных пространств (а раз биекция — то и изоморфизм), поскольку если $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in E_A$ и $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, то

$$\varphi_{t_0}(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2) = (C_1\mathsf{x}_1)(t_0) + (C_2\mathsf{x}_2)(t_0) = C_1\varphi_{t_0}(\mathsf{x}_1) + C_2\varphi_{t_0}(\mathsf{x}_2).$$

$\rhd$

Таким образом, любые свойства и характеристики решений, определяемые только линейными операциями[3)], — такие же, как и для их начальных значений.

Следствие 35. *Размерность пространства решений линейной однородной* $(n \times n)$*-системы равна* n.

Определение 14. Любой базис $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ в пространстве E_A решений линейной однородной $(n \times n)$-системы (37) называется *фундаментальной системой* ее решений.

Следствие 36. *Фундаментальные системы решений линейной однородной системы* (37) *существуют. Если* $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ —

[3)] Как-то: размерность пространства или подпространства решений, линейная зависимость или независимость данной системы решений, принадлежность ее линейной оболочке какого-либо решения и т. п.

фундаментальная система решений системы (37), *то общее решение этой системы имеет вид*

$$x = C_1\mathsf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathsf{x}_n(t).$$

◁ Для построения фундаментальной системы решений достаточно взять любой базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbf{R}^n$ и, выбрав начальный момент $t_0 \in I$, построить решения

$$\mathsf{x}_1 = \varphi_{t_0}^{-1} e_1\,, \ldots, \mathsf{x}_n = \varphi_{t_0}^{-1} e_n.$$

▷

3.3. Определитель Вронского вектор-функций

$f_1, \ldots, f_n \in \Phi$ — это функция

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = \det(f_1(t), \ldots, f_n(t)), \quad t \in I.$$

Здесь предполагается, что в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ выбран базис, или что $\mathbf{R}^n$ — координатное векторное пространство. Правда, в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ определителю Вронского можно придать и инвариантный[4)] геометрический смысл, а именно, $W_{f_1,\ldots,f_n}(t)$ — это *ориентированный объем* параллелепипеда, натянутого на репер $f_1(t), \ldots, f_n(t)$.

Лемма 37. *Если функции $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$ — линейно зависимы, то*

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0, \quad t \in I.$$

◁ Если линейно зависимы вектор-функции $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$, то для каждого $t \in I$ линейно зависимы их значения $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ в момент t, а значит, $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0$. ▷

Обратное к лемме 37, вообще говоря, неверное, утверждение справедливо для решений линейной однородной системы, более того, имеет место

Теорема 38. *Если $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \in E_A$, то следующие утверждения эквивалентны:*

[4)] Относительно выбора в $\mathbf{R}^n$ ортогонального базиса положительной ориентации.

1) *функции* $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ *— линейно зависимы;*
2) $W_{\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n} = 0$;
3) $W_{\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n}(t_0) = 0$ *для некоторого* $t_0 \in I$.

$\lhd$ Из первого утверждения по лемме 37 получаем второе, из второго — третье, а из третьего следует, что векторы

$$\mathsf{x}_1(t_0) = \varphi_{t_0}(\mathsf{x}_1), \ldots, \mathsf{x}_n(t_0) = \varphi_{t_0}(\mathsf{x}_n)$$

— линейно зависимы, откуда, согласно теореме 34, получаем снова первое утверждение. $\rhd$

3.4. Фундаментальная матрица

— это такая *матрица решений*

$$X(t) = (\mathsf{x}_1(t), \ldots, \mathsf{x}_n(t)), \quad t \in I, \quad \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \in E_A, \tag{38}$$

столбцы которой[5)] образуют фундаментальную систему решений.

I. Из теоремы 38 вытекает

Следствие 39. *Для матрицы решений X следующие утверждения эквивалентны:*
1) *матрица X — фундаментальна;*
2) $\det X(t_0) \neq 0$ *для некоторого* $t_0 \in I$;
3) $\det X(t) \neq 0$ *для всех* $t \in I$.

Из следствия 36 получаем

Следствие 40. *Общее решение системы* (37) *с фундаментальной матрицей X имеет вид*

$$x = X(t)c, \quad c \in \mathbf{R}^n. \tag{39}$$

$\lhd$ Действительно, в силу равенства (38) имеем:

$$x = \mathsf{x}_1 C_1 + \ldots + \mathsf{x}_n C_n \equiv Xc, \quad c \equiv \begin{pmatrix} C_1 \\ \cdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

$\rhd$

[5)] В координатном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$.

II. Производную $(n \times n)$-матричной функции $X\colon I \to \mathbf{M}^{n\times n}$, по определению[6], вычисляют покоординатно, а производную оператор-функции $\mathsf{X}\colon I \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ — по формуле

$$\dot{\mathsf{X}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{X}(t+h) - \mathsf{X}(t)}{h}$$

(предельный оператор, если он существует, — обязательно линейный, в силу полноты пространства $\operatorname{End}\mathbf{R}^n$). Эти вычисления приводят к одинаковому результату из-за естественного изоморфизма[7] между n^2-мерными линейными топологическими (см. лемму 13) пространствами $\operatorname{End}\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{M}^{n\times n}$: если матричная функция X служит записью оператор-функции X в некотором базисе, то ее производная $\dot{X}$ служит записью оператора $\dot{\mathsf{X}}$ в том же базисе. Кроме того, для таких функций будут верны все обычные правила для взятия производных или пределов[8].

Лемма 41. *Матрица X решений системы* (37) *и только она она удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{X} = A(t)X, \quad t \in I. \tag{40}$$

$\lhd$ По формуле (38) уравнение (40) равносильно следующему

$$(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = (A(t)x_1, \ldots, A(t)x_n) \iff \dot{x}_i = A(t)x_i,\ i = 1, \ldots, n.$$
$\rhd$

3.5. Оператор Коши

системы (37), или оператор *сдвига*, $\mathsf{X}(t,s)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — это оператор, удовлетворяющий для заданной пары $t, s \in I$ равенству

$$\mathsf{X}(t,s)\mathsf{x}(s) = \mathsf{x}(t), \quad \mathsf{x} \in E_A. \tag{41}$$

Здесь пространство $\mathbf{R}^n$ — абстрактное линейное, т. е. не обязательно координатное. Более того, оператор Коши, по определению, замечателен своим естественным геометрическим смыслом,

[6] Как и вектор-функции.

[7] Определяемого базисом в $\mathbf{R}^n$.

[8] Такие как производная или предел суммы, произведения (композиции операторов), вынос постоянного множителя (вектора, матрицы, оператора) и т. п.

который позволяет формулировать и доказывать утверждения с его участием, не прибегая к координатной записи.

Лемма 42. *Равенство* (41) *однозначно задает линейный невырожденный оператор, причем для любых $t, s, r \in I$ справедливы следующие свойства:*

a) $\mathsf{X}(t,t) = \mathsf{I}$ — *тождественный оператор;*

b) $\mathsf{X}(t,s)\,\mathsf{X}(s,r) = \mathsf{X}(t,r)$*;*

c) $\mathsf{X}^{-1}(t,s) = \mathsf{X}(s,t)$.

$\lhd$ 1. Проверим корректность определения: для любого $a \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение $\mathsf{x} \in E_A$, для которого $\mathsf{x}(s) = a$, поэтому значение $\mathsf{X}(t,s)a = \mathsf{x}(t)$ определено однозначно.

2. Проверим линейность: пусть $a_1 = \mathsf{x}_1(s)$, $a_2 = \mathsf{x}_2(s)$, причем $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in E_A$, тогда для любых $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ имеем $(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2) \in E_A$ и

$$\begin{aligned}\mathsf{X}(t,s)(C_1a_1 + C_2a_2) &= \mathsf{X}(t,s)(C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2)(s) = (C_1\mathsf{x}_1 + C_2\mathsf{x}_2)(t) \\ &= C_1\mathsf{x}_1(t) + C_2\mathsf{x}_2(t) = C_1X(t,s)a_1 + C_2\mathsf{X}(t,s)a_2.\end{aligned}$$

3. Проверим свойства:

a) для всякого решения $\mathsf{x} \in E_A$ имеем

$$\mathsf{X}(t,t)\mathsf{x}(t) = \mathsf{x}(t) = \mathsf{I}\,\mathsf{x}(t),$$

откуда $\mathsf{X}(t,t) = \mathsf{I}$;

b) для всякого решения $\mathsf{x} \in E_A$ имеем

$$\mathsf{X}(t,s)\mathsf{X}(s,r)\mathsf{x}(r) = \mathsf{X}(t,s)\mathsf{x}(s) = \mathsf{x}(t) = \mathsf{X}(t,r)\mathsf{x}(r),$$

откуда $\mathsf{X}(t,s)\mathsf{X}(s,r) = \mathsf{X}(t,r)$;

c) для всяких чисел $t, s \in I$ имеем

$$\mathsf{X}(t,s)\mathsf{X}(s,t) = \mathsf{X}(t,t) = \mathsf{I},$$

откуда получаем $\mathsf{X}^{-1}(t,s) = \mathsf{X}(s,t)$, а заодно и то, что оператор $\mathsf{X}(t,s)$ невырожден. $\rhd$

Матрица оператора Коши есть не что иное как фундаментальная матрица, нормированная в начальный момент, что, в частности, и утверждает следующая

Лемма 43. *Если $X(\cdot,\cdot)$ — матрица оператора Коши системы* (37) *в некотором базисе в $\mathbf{R}^n$, то:*

1) *для любой фундаментальной матрицы* $X(\cdot)$ *имеет место представление*

$$X(t,s) = X(t)X^{-1}(s), \quad t, s \in I;$$

2) *для любого фиксированного значения* $s \in I$ *матричная функция* $X(\cdot, s)$ *и только она есть матрица решений* $X(\cdot)$ *с начальным условием* $X(s) = E$.

$\lhd$ 1. Если X — фундаментальная матрица, то для любого решения $\mathsf{x} \in E_A$ существует такой вектор $c \in \mathbf{R}^n$, что $\mathsf{x} = Xc$ и

$$\big(X(t)X^{-1}(s)\big)\,\mathsf{x}(s) = X(t)X^{-1}(s)X(s)c = X(t)c = \mathsf{x}(t),$$

поэтому $X(t)X^{-1}(s) = X(t,s)$.

2. С одной стороны, если X — матрица решений и $X(s) = E$ — невырождена, то X — фундаментальная матрица и

$$X(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = X(t).$$

С другой стороны, для любой фундаментальной матрицы X имеем

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}X(t,s) &= \tfrac{d}{dt}\big(X(t)X^{-1}(s)\big) = \dot{X}(t)X^{-1}(s) \\ &= A(t)X(t)X^{-1}(s) = A(t)X(t,s), \quad t \in \mathsf{I}, \end{aligned}$$

поэтому $X(t,s)$ — матрица решений (лемма 41) и $X(s,s) = E$. $\rhd$

Из п. 2 леммы 43, с учетом леммы 41, вытекает

Следствие 44. *Для любого фиксированного значения* $s \in I$ *оператор Коши* X *системы* (37) *и только он удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению*

$$\dot{\mathsf{X}}(\cdot, s) = A(t)\mathsf{X}(\cdot, s), \quad t \in I,$$

с начальным условием $\mathsf{X}(s,s) = \mathsf{I}$.

3.6. Формула Лиувилля — Остроградского

касается определителя Вронского решений линейной однородной системы в координатном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Теорема 45. *Для любых решений* $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \in E_A$ *имеет место формула*

$$W_{\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n}(t) = W_{\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau}, \quad t_0, t \in I.$$

$\triangleleft$ 1. Докажем, что определитель Вронского $W \equiv W_{\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) \cdot W,$$

из которого будет вытекать требуемое

$$W(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}, \quad C = W(t_0).$$

2. Производную определителя матричной функции можно считать по правилу

$$(\det X)^{\cdot} = \det \begin{pmatrix} \dot{\mathsf{x}}^1 \\ \mathsf{x}^2 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^{n-1} \\ \dot{\mathsf{x}}^n \end{pmatrix},$$

где x^i — i-я строка матрицы X. Этот факт вытекает, например, из представления определителя в виде знакопеременной суммы всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца

$$\Big(\sum\nolimits_\sigma (-1)^\sigma \mathsf{x}^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \mathsf{x}^n_{\sigma(n)}\Big)^{\cdot}$$
$$= \sum\nolimits_\sigma (-1)^\sigma \dot{\mathsf{x}}^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \mathsf{x}^n_{\sigma(n)} + \ldots + \sum\nolimits_\sigma (-1)^\sigma \mathsf{x}^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \dot{\mathsf{x}}^n_{\sigma(n)}.$$

3. Если a^i — i-я строка матрицы A, то

$$\dot{W} = \begin{vmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix}^{\cdot} = \begin{vmatrix} \dot{\mathsf{x}}^1 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ \dot{\mathsf{x}}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 X \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ a^n X \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a^1_1 x^1 + \ldots + a^1_n x^n \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ a^n_1 x^1 + \ldots + a^n_n x^n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a^1_1 x^1 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \mathsf{x}^1 \\ \cdots \\ a^n_n x^n \end{vmatrix} = (a^1_1 + \ldots + a^n_n) \begin{vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ \mathsf{x}^n \end{vmatrix} = \operatorname{tr} A \cdot W.$$

$\triangleright$

Следствие 46. *Если* $\operatorname{tr} A \equiv 0$*, то определитель Вронского любых решений* $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \in E_A$ *равен константе.*

Таким образом, если след матрицы системы тождественно равен нулю, то объем параллелепипеда, натянутого на любой репер решений $\mathsf{x}_1(t), \ldots, \mathsf{x}_n(t)$, взятых в момент t, не меняется с изменением времени t.

Определение 15. *Определитель* $\det \mathsf{X}$ и *след* $\operatorname{tr} \mathsf{X}$ оператора $\mathsf{X} \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ — это определитель и след его матрицы X, записанной в некотором базисе в $\mathbf{R}^n$.

Инвариантность этих характеристик оператора относительно выбора базиса или, что то же, относительно матрицы L перехода к новому базису вытекает, например, из такой же инвариантности его характеристического многочлена

$$\det(\lambda E - L^{-1}XL) = \det L^{-1} \cdot \det(\lambda E - X) \cdot \det L$$
$$= \det(\lambda E - X) = \lambda^n - \operatorname{tr} X \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det X,$$

первый коэффициент которого равен $-\operatorname{tr} X$, а свободный член равен $(-1)^n \det X$.

Следствие 47. *Если* $\mathsf{X}(t,s)$ *— оператор Коши системы* (37), *то*

$$\det \mathsf{X}(t,s) = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}.$$

◁ Если в $\mathbf{R}^n$ фиксирован базис, то (лемма 43) $X(\cdot, s)$ — матрица решений, причем $X(s,s) = E$, поэтому согласно теореме 45 имеем

$$\det X(t,s) = \det X(s,s) \cdot e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau} = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}.$$

▷

3.7. Общее решение линейной неоднородной системы

есть общее решение однородной системы плюс частное решение неоднородной системы, как утверждает следующая

Теорема 48. *Для всякого решения* $\mathsf{x}_0 \in E_{A,F}$ *справедливо равенство*

$$E_{A,F} = E_A + \mathsf{x}_0.$$

Под суммой двух подмножеств[9)] $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$ понимается множество

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \{f_1 + f_2 |\ f_1 \in \Phi_1,\ f_2 \in \Phi_2\}.$$

[9)] Одно из которых в данном случае содержит всего один элемент.

$\lhd$ Пусть $\mathsf{x}_0 \in E_{A,F}$, тогда:

1) если $\mathsf{x} \in E_A$, то

$$(\mathsf{x}+\mathsf{x}_0)^{\cdot} = \dot{\mathsf{x}} + \dot{\mathsf{x}}_0 = A\mathsf{x} + (A\mathsf{x}_0 + F) = A(\mathsf{x}+\mathsf{x}_0) + F,$$

поэтому $(\mathsf{x}+\mathsf{x}_0) \in E_{A,F}$;

2) если $\mathsf{x} \in E_{A,F}$, то $\mathsf{x} = (\mathsf{x}-\mathsf{x}_0) + \mathsf{x}_0$, где

$$(\mathsf{x}-\mathsf{x}_0)^{\cdot} = \dot{\mathsf{x}} - \dot{\mathsf{x}}_0 = (A\mathsf{x} + F) - (A\mathsf{x}_0 + F) = A(\mathsf{x}-\mathsf{x}_0),$$

т. е. $(\mathsf{x}-\mathsf{x}_0) \in E_A$. $\rhd$

Следствие 49. *Если* x_0 *— частное решение линейной неоднородной системы* (36), *а* $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ *— фундаментальная система решений соответствующей однородной системы* (37), *то общее решение системы* (36) *имеет вид*

$$x = C_1\mathsf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathsf{x}_n(t) + \mathsf{x}_0(t).$$

С абстрактной точки зрения, множество решений линейной неоднородной системы представляет собой n-мерное *аффинное пространство*, или сдвиг n-мерного линейного пространства — множества решений соответствующей однородной системы, т. е. множество точек с операцией, называемой *разностью* и обладающей тем свойством, что всевозможные разности между точками[10)] образуют n-мерное векторное пространство.

3.8. Метод вариации постоянных для системы

точнее, для линейной неоднородной $(n \times n)$-системы (36), исходит из формулы общего решения (39) соответствующей однородной системы. Согласно этому методу, носящему имя Лагранжа, достаточно приравнять к неоднородности системы правую часть упомянутой формулы, считая в ней постоянный вектор c функцией от t и навесив над ней точку (знак производной).

Теорема 50. *Для любой фундаментальной матрицы* X *линейной однородной системы* (37) *и вектор-функции* $c\colon I \to \mathbf{R}^n$ *справедливо утверждение*

$$Xc \in E_{A,F} \iff X(t)\dot{c}(t) = F(t), \quad t \in I.$$

[10)] Даже при фиксированной вычитаемой точке.

$\lhd$ Имеем

$$Xc \in E_{A,F} \iff \dot{X}c + X\dot{c} = AXc + F \iff X\dot{c} = F,$$

так как $\dot{X} = AX$. $\rhd$

Согласно следствию 39, при каждом $t \in I$ матрица $X(t)$ невырождена, а значит, последнее уравнение в формулировке теоремы однозначно разрешимо относительно неизвестной $\dot{c}$:

$$\dot{c}(t) = X^{-1}(t)F(t) \iff c(t) = c(t_0) + \textstyle\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)F(\tau)\,d\tau$$
$$\iff X(t)c(t) = X(t)c(t_0) + \textstyle\int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)F(\tau)\,d\tau,$$

откуда по теореме 50 находим специальное частное решение линейной неоднородной системы (36)

$$\mathsf{x}_0(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)F(\tau)\,d\tau, \quad \mathsf{x}_0(t_0) = 0,$$

и, прибавив к нему решение соответствующей однородной системы (37), получаем *формулу*[11] *вариации постоянной* для решения задачи Коши, которую представляет

Следствие 51. *Решение задачи Коши для линейной неоднородной системы* (36) *с начальным условием* (25) *задается формулой*

$$\mathsf{x}(t) = \mathsf{X}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{X}(t, \tau)F(\tau)\,d\tau, \tag{42}$$

где X *— оператор Коши соответствующей однородной системы* (37).

3.9. Общее решение линейного уравнения

I. Обозначим через Φ^{n-1} линейное пространство[12] всех скалярных $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $f\colon I \to \mathbf{R}$.

[11] Уже не зависящую от базиса в $\mathbf{R}^n$.

[12] В его обозначение не входит фикстрованный интервал I.

Лемма 52. *Каноническая замена* (*определение* 11) *осуществляет изоморфизм линейных пространств*

$$\Phi^{n-1} \xrightarrow{\psi} \psi\left(\Phi^{n-1}\right) \subset \Phi.$$

$\lhd$ Если $f_1, f_2 \in \Phi^{n-1}$ и $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, то

$$\psi(C_1 f_1 + C_2 f_2) = \begin{pmatrix} C_1 f_1 + C_2 f_2 \\ C_1 \dot{f}_1 + C_2 \dot{f}_2 \\ \dots \\ C_1 f_1^{(n-1)} + C_2 f_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = C_1(\psi f_1) + C_2(\psi f_2),$$

поэтому рассматриваемое отображение ψ сохраняет линейные операции, стало быть, образ $\psi\left(\Phi^{n-1}\right)$ линейного пространства Φ^{n-1} — тоже линейное пространство, а раз каноническая замена — инъекция[13)], то ψ — биекция. $\rhd$

II. Для подмножеств $E_{a,f}, E_a \subset \Phi^{n-1}$, состоящих из всех непродолжаемых решений линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t) y = f(t), \quad y \in \mathbf{R},\ t \in I, \tag{43}$$

и *соответствующего однородного* уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t) y = 0, \quad y \in \mathbf{R},\ t \in I, \tag{44}$$

где $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ и $a, f \in \mathrm{C}(I)$ (теорема 33), справедлив следующий аналог теорем 34 и 48.

Теорема 53. *Множество E_a — линейное пространство, причем:*

1) *для любого $t_0 \in I$ отображение*

$$\psi_{t_0}\colon\ \mathsf{y} \in E_a \mapsto (\psi \mathsf{y})(t_0) \in \mathbf{R}^n$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств E_a и $\mathbf{R}^n$;

2) *для всякого решения $\mathsf{y}_0 \in E_{a,f}$ справедливо равенство*

$$E_{a,f} = E_a + \mathsf{y}_0.$$

[13)] См. п. 3 доказательства леммы 27.

$\lhd$ 1. Отображение

$$\psi_{t_0} = (\varphi_{t_0} \circ \psi|_{E_a})\colon E_a \to \mathbf{R}^n$$

есть изоморфизм линейных пространств в силу следующих двух обстоятельств:

a) если A — матрица линейного уравнения (44) (определение 12), то отображение

$$\psi|_{E_a}\colon E_a \to E_A$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств, так как множество $E_a = \psi^{-1}(E_A) \subset \Phi^{n-1}$ (лемма 27) — прообраз линейного подпространства $E_A \subset \psi\left(\Phi^{n-1}\right)$ при изоморфизме (лемма 52) линейных пространств Φ^{n-1} и $\psi\left(\Phi^{n-1}\right)$, а значит, кстати, — тоже линейное пространство;

b) отображение

$$\varphi_{t_0}\colon E_A \to \mathbf{R}^n$$

— изоморфизм линейных пространств (теорема 34).

2. В обозначениях определения 12 по лемме 27 и теореме 48 имеем: $E_{a,f} \xrightarrow{\psi} E_{A,F}$ — биекция, $\psi \mathsf{y}_0 \in E_{A,F}$ и

$$E_{a,f} = \psi^{-1} E_{A,F} = \psi^{-1}\left(E_A + \psi \mathsf{y}_0\right) = \psi^{-1} E_A + \psi^{-1}(\psi \mathsf{y}_0) = E_a + \mathsf{y}_0.$$

$\rhd$

III. Попутно было доказано

Следствие 54. *Если A — матрица линейного уравнения* (44), *то отображение*

$$E_a \xrightarrow{\psi} E_A$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств.

Из теоремы 53 получаем

Следствие 55. *Размерность пространства решений линейного однородного уравнения n-го порядка равна n.*

Определение 16. Любой базис $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$ в пространстве E_a решений линейного однородного уравнения (37) называется *фундаментальной системой* его решений.

Следствие 56. *Фундаментальные системы решений линейного однородного уравнения* (44) *существуют. Если $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$ —*

фундаментальная система решений однородного уравнения (44), *а* y_0 *— частное решение неоднородного уравнения* (43), *то общие решения этих уравнений имеют, соответственно, вид*

$$y = C_1\mathsf{y}_1(t) + \ldots + C_n\mathsf{y}_n(t) \quad \text{и} \quad y = C_1\mathsf{y}_1(t) + \ldots + C_n\mathsf{y}_n(t) + \mathsf{y}_0(t).$$

$\lhd$ Фундаментальную систему решений однородного уравнения образуют, например, решения

$$\mathsf{y}_1 = \psi_{t_0}^{-1} e_1, \ldots, \mathsf{y}_n = \psi_{t_0}^{-1} e_n,$$

если только $t_0 \in I$, а $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbf{R}^n$. $\rhd$

Таким образом, как и для линейных систем, *общее решение линейного неоднородного уравнения есть общее решение однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения.*

3.10. Определитель Вронского скалярных функций

$f_1, \ldots, f_n \in \Phi^{n-1}$ — это функция

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = W_{\psi f_1,\ldots,\psi f_n}(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ \dot f_1(t) & \ldots & \dot f_n(t) \\ & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

I. Утверждения о связи определителя Вронского с линейной зависимостью скалярных функций аналогичны соответствующим утверждениям для вектор-функций (см. п. 3.3).

Лемма 57. *Если функции* $f_1, \ldots, f_n \in \Phi^{n-1}$ *— линейно зависимы, то*

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) \equiv 0, \quad t \in I.$$

$\lhd$ Если функции $f_1, \ldots, f_n \in \Phi^{n-1}$ — линейно зависимы, то вектор-функции $\psi f_1, \ldots, \psi f_n$ — тоже линейно зависимы (лемма 52), поэтому $W_{f_1,\ldots,f_n} = W_{\psi f_1,\ldots,\psi f_n} = 0$ (лемма 37). $\rhd$

Обратное к лемме 57, вообще говоря, неверное, утверждение справедливо для решений линейного однородного уравнения, более того, имеет место

Теорема 58. *Если* $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n \in E_a$, *то следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функции* $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$ *— линейно зависимы;*
2) $W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n} = 0$;
3) $W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n}(t_0) = 0$ *для некоторого* $t_0 \in I$.

$\lhd$ Настоящая теорема превращается в теорему 38 благодаря тому, что определители Вронского для функций

$$\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n \in E_a \quad \text{и} \quad \psi\mathsf{y}_1, \ldots, \psi\mathsf{y}_n \in E_A$$

совпадают по определению, а высказывания об их линейной зависимости эквивалентны, так как ψ — изоморфизм линейных пространств E_a и E_A (следствие 54). $\rhd$

II. Формула Лиувилля — Остроградского для линейного однородного уравнения принимает следующий вид.

Теорема 59. *Для любых решений* $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n \in E_a$ *имеет место формула*

$$W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n}(t) = W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}, \quad t_0, t \in I.$$

$\lhd$ Действительно, в силу теоремы 45 и равенства $\operatorname{tr} A = -a_1$, вытекающего из определения (34), имеем

$$\begin{aligned} W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n}(t) &= W_{\psi\mathsf{y}_1,\ldots,\psi\mathsf{y}_n}(t) = W_{\psi\mathsf{y}_1,\ldots,\psi\mathsf{y}_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau} \\ &= W_{\mathsf{y}_1,\ldots,\mathsf{y}_n}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}, \quad t_0, t \in I. \end{aligned}$$

$\rhd$

3.11. Восстановление линейного уравнения по фундаментальной системе его решений

Чтобы данные n функций образовывали фундаментальную систему некоторого линейного однородного уравнения n-го порядка, необходимо, чтобы они были n раз непрерывно дифференцируемы и их определитель Вронского нигде не обнулялся. Этого и достаточно, как показывает

Лемма 60. *Если скалярные функции* $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^n(I)$ *удовлетворяют условию*

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) \neq 0, \quad t \in I,$$

то они образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения n-го порядка

$$\frac{1}{W_{f_1,\ldots,f_n}(t)}\begin{vmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) & y \\ & \ldots & & \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ f_1^{(n)}(t) & \ldots & f_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (45)$$

$\lhd$ 1. Если разложить определитель (45) по последнему столбцу и, разделив на коэффициент $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) \neq 0$ при старшей производной $y^{(n)}$, приравнять к нулю, то получится линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно y.

2. Каждая из функций $f_i,\ i = 1, \ldots, n$, удовлетворяет полученному уравнению, так как при подстановке $y = f_i(\cdot)$ определитель (45) обнуляется. А все вместе они, согласно теореме 58, образуют фундаментальную систему решений. $\rhd$

Следствие 61. *Если скалярные функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^{n-1}(I)$ удовлетворяют условиям*

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0, \quad W_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(t) \neq 0, \qquad t \in I,$$

то они линейно зависимы.

$\lhd$ Из данных условий вытекает, что функция f_n — частное решение линейного однородного уравнения $(n-1)$-го порядка с фундаментальной системой решений $f_1, \ldots, f_{n-1}$, а значит, их линейная оболочка содержит эту функцию. $\rhd$

3.12. Метод вариации постоянных для уравнения

точнее, линейного неоднородного уравнения (43) n-го порядка, в качестве отправной точки использует формулу

$$y = \mathsf{y}_1(t)C_1 + \ldots + \mathsf{y}_n(t)C_n \equiv Y(t)c, \quad c \equiv \begin{pmatrix} C_1 \\ \cdots \\ C_n \end{pmatrix}, \ Y \equiv (\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n),$$

общего решения соответствующего однородного уравнения (44), образуемую по фундаментальной системе его решений $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$

(следствие 56), и состоит в том, чтобы, считая в этой формуле постоянные $C_1, \dots, C_n$ функциями от t, записать для их производных систему специального вида.

Теорема 62. *Если* $\mathsf{y}_1, \dots, \mathsf{y}_n$ *— фундаментальная система решений линейного однородного уравнения* (44), *то для любой вектор-функции* $c\colon I \to \mathbf{R}^n$ *справедливо утверждение*

$$\begin{cases} Y(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dots \\ Y^{(n-2)}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ Y^{(n-1)}(t)\dot{c}(t) = f(t), \end{cases} \quad t \in I, \quad \Longrightarrow \quad Yc \in E_{a,f}. \tag{46}$$

$\lhd$ Если A — матрица линейного уравнения (43), а F — его векторная неоднородность (определение 12), то по теореме 50 и лемме 27 из системы (46) получаем

$$\begin{aligned} &(\psi\mathsf{y}_1, \dots, \psi\mathsf{y}_n)\dot{c} = F \implies (\psi\mathsf{y}_1, \dots, \psi\mathsf{y}_n)c \in E_{A,F} \\ &\implies \psi^{-1}((\psi\mathsf{y}_1, \dots, \psi\mathsf{y}_n)c) \in E_{a,f} \implies Yc \in E_{a,f}. \end{aligned}$$

$\rhd$

Система (46) разрешима относительно неизвестной $\dot{c}$, так как при каждом $t \in I$ матрица ее коэффициентов $(\psi\mathsf{y}_1(t), \dots, \psi\mathsf{y}_n(t))$ не вырождена. При $n = 1$ эта система превращается в одно уравнение

$$\mathsf{y}_1(t)\dot{C}_1 = f(t),$$

а при $n > 1$ — имеет вид

$$\begin{cases} \mathsf{y}_1(t)\dot{C}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n(t)\dot{C}_n = 0 \\ \dots \\ \mathsf{y}_1^{(n-2)}(t)\dot{C}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n^{(n-2)}(t)\dot{C}_n = 0 \\ \mathsf{y}_1^{(n-1)}(t)\dot{C}_1 + \ldots + \mathsf{y}_n^{(n-1)}(t)\dot{C}_n = f(t) \end{cases}$$

и является лишь достаточным, но вовсе не необходимым условием того, что функция $\mathsf{y}_0 \equiv \mathsf{y}_1 C_1 + \ldots + \mathsf{y}_n C_n$ — решение неоднородного уравнения.

3.13. Нули решений уравнения второго порядка

I. Изучается вопрос о количестве или частоте *нулей* всякого *ненулевого*[14)] решения линейного однородного уравнения второго

[14)] Точнее, *не тождественно нулевого*, всюду ниже — по умолчанию.

порядка

$$\ddot{y}+p(t)\dot{y}+q(t)y=0,\quad y\in\mathbf{R},\quad t\in I,\quad p,q\in\mathrm{C}(I).\tag{47}$$

Свойство нулей решения быть *соседними* делает корректным[15)]следующая

Лемма 63. *Всякое решение уравнения* (47) *на любом отрезке* $K\subset I$ *имеет лишь конечное число нулей.*

$\lhd$ Пусть, напротив, некоторое ненулевое решение y имеет на отрезке K бесконечно много различных нулей. Тогда некоторая их последовательность $t_1,t_2,\ldots$, скажем, строго возрастая, сходится к некоторому числу $t_0\in K$, и по теореме Ролля на каждом интервале $(t_k;t_{k+1})$, $k\in\mathbf{N}$, существует точка s_k, в которой $\dot{\mathsf{y}}(s_k)=0$, поэтому

$$\mathsf{y}(t_0)=\lim_{k\to\infty}\mathsf{y}(t_k)=0,\quad \dot{\mathsf{y}}(t_0)=\lim_{k\to\infty}\dot{\mathsf{y}}(s_k)=0,$$

а значит, согласно теореме 28 существования и единственности, решение y совпадет с нулевым решением, имеющим в точке t_0 те же начальные условия. Противоречие. $\rhd$

II. Если дополнительно предположить, что

$$\dot{p}\in\mathrm{C}(I),\tag{48}$$

то при исследовании нулей решений можно без ограничения общности считать, что $p=0$, как показывает следующая

Лемма 64. *Уравнение* (47)*, при условии* (48)*, с помощью некоторой замены*

$$y=a(t)z,\quad a(t)\neq 0,\quad t\in I,$$

приводится к виду

$$\ddot{z}+r(t)z=0,\quad r\in\mathrm{C}(I).\tag{49}$$

$\lhd$ Из равенств

$$y=az,\quad \dot{y}=\dot{a}z+a\dot{z},\quad \ddot{y}=\ddot{a}z+2\dot{a}\dot{z}+a\ddot{z}$$

[15)] Кстати, как раз у нулевого решения нет ни одной пары соседних нулей.

получаем, что в левой части уравнения

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = a\ddot{z} + (2\dot{a} + pa)\dot{z} + (\ddot{a} + p\dot{a} + qa)z$$

коэффициент при $\dot{z}$ равен нулю, если

$$2\dot{a} + ap = 0 \iff a(t) = Ce^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}, \quad t \in I,$$

где $C > 0$ и $t_0 \in I$ — фиксированы, причем тогда

$$\dot{a} = -\frac{ap}{2},\ \ddot{a} = \frac{ap^2}{4} - \frac{a\dot{p}}{2} \implies r = \frac{\ddot{a} + p\dot{a} + qa}{a} = q - \frac{p^2}{4} - \frac{\dot{p}}{2} \in \mathrm{C}(I).$$

$\triangleright$

3.14. Теорема Штурма

или теорема *сравнения*, позволяет по коэффициентам уравнений

$$\ddot{y} + r(t)y = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{z} + R(t)z = 0, \tag{50}$$

судить о взаимном расположении нулей их решений и фактически утверждает, что чем больше в уравнении указанного вида коэффициент при неизвестной функции, тем чаще колеблются его решения. Более точно, справедлива

Теорема 65. *Если коэффициенты уравнений* (50) *удовлетворяют неравенству*

$$r(t) \leqslant R(t), \quad t \in I, \tag{51}$$

то между (нестрого) любыми нулями всякого решения y *есть хотя бы один нуль всякого решения* z.

$\triangleleft$ Пусть решение z не обнуляется ни в одной точке строго между соседними нулями $t_1 < t_2$ решения y, тогда обе функции[16] y и z имеют на интервале $(t_1; t_2)$ фиксированный знак, скажем для определенности, положительный (если для какого-либо решения это не так, заменим его другим решением, противоположным по знаку):

$$\mathsf{y}(t), \mathsf{z}(t) > 0, \quad t_1 < t < t_2, \qquad \mathsf{y}(t_{1,2}) = 0, \quad \dot{\mathsf{y}}(t_{1,2}) \neq 0$$

[16] Непрерывные.

(иначе, по теореме 28 существования и единственности, $\mathsf{y} = 0$). Поэтому

$$\dot{\mathsf{y}}(t_1) > 0 > \dot{\mathsf{y}}(t_2), \qquad \mathsf{z}(t_{1,2}) \geqslant 0$$

и с учетом равенств

$$(R - r)\mathsf{y}\mathsf{z} = \ddot{\mathsf{y}}\mathsf{z} - \mathsf{y}\ddot{\mathsf{z}} = (\dot{\mathsf{y}}\mathsf{z} - \mathsf{y}\dot{\mathsf{z}})^{\cdot}$$

имеем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \textstyle\int_{t_1}^{t_2} \big(R(t) - r(t)\big)\mathsf{y}(t)\mathsf{z}(t)\,dt &= \big(\dot{\mathsf{y}}(t)\mathsf{z}(t) - \mathsf{y}(t)\dot{\mathsf{z}}(t)\big)\big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \dot{\mathsf{y}}(t_2)\mathsf{z}(t_2) - \dot{\mathsf{y}}(t_1)\mathsf{z}(t_1) \leqslant 0, \end{aligned}$$

поэтому последнее[17)] неравенство в цепочке обращается в равенство и $\mathsf{z}(t_{1,2}) = 0$, что и требовалось доказать. ▷

Фактически в процессе доказательства теоремы 65 получено более сильное

Следствие 66. *Если коэффициенты уравнений* (50) *удовлетворяют неравенству* (51) *и строго между нулями* $t_1 < t_2$ *решения* y *нет ни одного нуля решения* z, *то* t_1, t_2 *— соседние нули обоих решений, причем*

$$r(t) = R(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Следствие 67. *Нули всяких двух линейно зависимых решений уравнения* (47), *удовлетворяющего условию* (48), *совпадают, а линейно независимых — перемежаются*[18)].

◁ 1. Если два решения обнуляются в некоторой общей точке, то они линейно зависимы (так как их определитель Вронского в этой точке равен нулю), следовательно, их нули полностью совпадают.

2. Если же общих нулей у этих двух решений нет, то к ним, как к решениям двух одинаковых уравнений, к которым с помощью леммы 64 приводится исходное уравнение, можно применить теорему 65, согласно которой между (в данном случае строго) нулями одного решения имеется хотя бы один нуль другого. ▷

[17)] Как, между прочим, и первое.

[18)] Т. е. строго между любыми двумя нулями одного решения есть хотя бы один нуль другого решения.

3.15. Оценки колеблемости

I. Из теоремы сравнения 65 выводятся оценки *частоты нулей* решений уравнения (49).

Следствие 68. *Если выполнено неравенство*

$$r(t) \leqslant 0, \quad t \in I,$$

то на интервале I *всякое решение уравнения* (49) *имеет не более одного нуля.*

$\lhd$ Если неравенство выполнено, но какое-то решение уравнения (49) имеет на интервале I два нуля, то по теореме 65 между ними имеет нуль и всякое решение уравнения $\ddot{z} = 0$, в частности, решение $\mathsf{z} = 1$, что неверно. $\rhd$

Следствие 69. *Если для некоторого* $\omega > 0$ *выполнено неравенство*

$$r(t) \leqslant \omega^2 \quad \text{или, наоборот,} \quad r(t) \geqslant \omega^2, \quad t \in I,$$

то на интервале I *любые соседние нули* $t_1 < t_2$ *всякого решения уравнения* (49) *удовлетворяют оценке*

$$t_2 - t_1 \geqslant \pi/\omega \quad \text{или, соответственно наоборот,} \quad t_2 - t_1 \leqslant \pi/\omega.$$

$\lhd$ 1. Расстояние между любыми соседними нулями всякого решения уравнения[19)]

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \iff z &= C_1 \cos\omega t + C_1 \sin\omega t, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}, \\ \iff z &= A\cos(\omega t + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

равно π/ω, причем, подбирая параметр φ, можно располагать эти нули в любом наперед заданном месте интервала I.

2. Если выполнено первое из данных неравенств, то соседние нули всякого решения y удовлетворяют первой оценке, так как иначе

$$t_1 < t_2 < t_1 + \pi/\omega$$

и обе точки t_1 и t_2 лежат внутри некоторого интервала длины π/ω, поэтому решение z с нулями в концах этого интервала не имеет нулей на отрезке $[t_1, t_2]$, что противоречит теореме 65.

[19)] С *постоянными* коэффициентами (см. п. 4.10).

3. Если выполнено второе из данных неравенств, то соседние нули всякого решения y удовлетворяют второй оценке, так как иначе

$$t_2 > t_1 + \pi/\omega$$

и решение с соседними нулями t_1 и t_2 не имеет нулей на некотором отрезке длины π/ω, концы которого являются нулями некоторого решения z, что противоречит теореме 65. $\triangleright$

II. Как мы видели (следствие 69), свойство уравнения (49), состоящее в том, что *всякое его решение имеет на положительной полуоси бесконечно много нулей*, обеспечивается уже отделенностью от нуля положителеного коэффициента r. Следующая теорема *Кнезера*[20] устанавливает, с какой скоростью[21] может убывать этот коэффициент к нулю при $t \to \infty$, не нарушая указанного свойства.

Теорема 70. *Если для данного луча* $I \equiv (t_0, \infty)$, $t_0 > 0$, *выполнено неравенство*

$$r(t) \leqslant \frac{1}{4t^2}, \quad t \in I,$$

или, наоборот, для некоторого $\varepsilon > 0$ — *неравенство*

$$r(t) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4t^2}, \quad t \in I,$$

то на луче I *всякое решение уравнения* (49) *имеет не более одного нуля или, соответственно наоборот, бесконечно много нулей.*

$\triangleleft$ 1. Обозначим $\tau = \ln t$ и для каждого $\delta \geqslant 0$ рассмотрим уравнение[22]

$$\ddot{z} + \frac{1+4\delta^2}{4t^2} z = 0 \iff 4\frac{d^2 z}{d\tau^2} - 4\frac{dz}{d\tau} + (1+4\delta^2)z = 0$$
$$\iff z = \begin{cases} e^{\tau/2}(C_1 \cos\delta\tau + C_1 \sin\delta\tau), & \delta > 0, \\ e^{\tau/2}(C_1 + C_1\tau), & \delta = 0, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

имеющее частное решение

$$\mathsf{z}_\delta(t) = \sqrt{t} \cdot \cos(\delta \ln t), \quad t \in I.$$

[20] Уточняющая следствие 68, а в чем-то и следствие 69.

[21] Измеренной в некоторой специальной шкале.

[22] Уравнение *Эйлера*, сводящееся экспоненциальной заменой времени к уравнению с постоянными коэффициентами (см. задачу XII из п. 4.13).

2. Если выполнено первое из данных неравенств, но какое-то решение y уравнения (49) имеет на луче I два нуля, то по теореме 65 между ними имеет нуль и решение $\mathsf{z}_0(t) = \sqrt{t}$, что неверно.

3. Если выполнено второе из данных неравенств, то по теореме 65 всякое решение y уравнения (49) имеет нуль между любыми нулями решения z_δ, $\delta \equiv \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$, которых бесконечно много. $\triangleright$

3.16. Краевая задача

ставится так: по заданной *правой части*, состоящей из скалярной функции $f \in \mathrm{C}(I)$ и чисел $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$, найти решение уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = f(t), \quad y \in \mathbf{R}, \quad t \in I, \quad p, q \in \mathrm{C}(I), \tag{52}$$

удовлетворяющее двум *краевым условиям*

$$\alpha_i y(t_i) + \beta_i \dot{y}(t_i) = \varphi_i, \quad (\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0), \quad t_i \in I, \quad i = 1, 2, \tag{53}$$

(соответствующая *однородная* задача — это задача с нулевой правой частью). Краевую задачу назовем *корректной*[23], если она для любой правой части имеет единственное решение, и *некорректной*, если для каждой правой части она либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

Заметим, что логически возможна ситуация, когда задача при одних правых частях имеет единственное решение, а при других — нет, т. е. она в смысле данного определения — ни корректна, ни некорректна. Однако описанная ситуация — лишь плод нашей фантазии, как показывает следующая, называемая теоремой *об альтернативе*,

Теорема 71. *Краевая задача либо корректна, либо некорректна.*

$\triangleleft$ Краевые условия (53) накладывают на общее решение

$$y = \mathsf{y}_0(t) + C_1\mathsf{y}_1(t) + C_2\mathsf{y}_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

линейного неоднородного уравнения (52) следующие ограничения

$$\alpha_i\bigl(\mathsf{y}_0(t_i) + C_1\mathsf{y}_1(t_i) + C_2\mathsf{y}_2(t_i)\bigr) + \beta_i\bigl(\dot{\mathsf{y}}_0(t_i) + C_1\dot{\mathsf{y}}_1(t_i) + C_2\dot{\mathsf{y}}_2(t_i)\bigr)$$
$$= \varphi_i \quad \Longleftrightarrow \quad a_iC_1 + b_iC_2 = d_i \quad (i = 1, 2),$$

[23] Обычно в понятие корректности задачи включают также и *непрерывную зависимость* ее решения от правой части.

где коэффициенты в левой части последней системы не зависят от выбора правой части $f, \varphi_{1,2}$, так как полностью определяются левой частью краевой задачи и двумя линейно независимыми решениями соответствующего однородного уравнения (52):

$$a_i = \alpha_i \mathsf{y}_1(t_i) + \beta_i \dot{\mathsf{y}}_1(t_i), \quad b_i = \alpha_i \mathsf{y}_2(t_i) + \beta_i \dot{\mathsf{y}}_2(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому определитель матрицы последней системы либо всегда[24)] не равен нулю, либо всегда равен нулю. В первом случае эта система разрешима однозначно, а во втором — наоборот. ▷

Следствие 72. *Краевая задача корректна тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.*

3.17. Вопросы и задачи для самостоятельного решения

I. Какое наименьшее количество решений уравнения (43) нужно знать, чтобы по ним можно было восстановить все остальные его решения, не зная самого уравнения?

II. Доказать, что в методе вариации постоянной для уравнения (43):

a) импликация, обратная к (46), неверна;

b) при выполнении первых $(n-1)$ равенств системы из левой части импликации (46) последнее равенство равносильно ее правой части.

III. Проверить справедливость явной формулы

$$X(t, s) = e^{\int_s^t a(\tau)\, d\tau}, \quad s, t \in I,$$

для оператора Коши линейного однородного уравнения 1-го порядка

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in I.$$

С помощью этой формулы и формулы вариации постоянной (42) выразить в случае $n = 1$ общее решение линейного неоднородного уравнения 1-го порядка через его коэффициенты.

[24)] Для всех правых частей краевой задачи сразу.

IV. Какому операторному уравнению, подобному тому, что приведено в следствии 44, удовлетворяет при каждом фиксированном значении $s \in I$ оператор Коши $\mathsf{X}(s,\cdot)$ системы (37) как функция второго аргумента?

V. Если функции $A\colon \mathbf{R} \to \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ и $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ — T-периодичны, то и системы (37) и (36) называются *T-периодичными*, а оператор Коши $X(T,0)$ линейной однородной системы (37) и его собственные значения называются ее *оператором монодромии* и *мультипликаторами*, соответственно. Доказать, что:

a) линейная однородная T-периодичная система (37) имеет хотя бы одно ненулевое T-периодичное решение тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее мультипликаторов равен единице;

b) линейная неоднородная T-периодичная система (36) имеет единственное T-периодичное решение тогда и только тогда, когда все мультипликаторы соответствующей однородной системы (37) отличны от единицы.

VI. Верно ли, что определитель Вронского любых $(k-1)$ раз дифференцируемых функций $f_1, \ldots, f_k\colon I \to \mathbf{R}$ либо тождественно равен нулю на интервале I, либо нигде на нем не обнуляется? Верно ли это утверждение для решений $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_k \in E_a$ уравнения (44) n-го порядка, где:

a) $n = k$;

b) $n > k$?

VII. Проверить, что следующие примеры опровергают обратные утверждения к леммам 37 и 57 при $n = 2$ $(t \in \mathbf{R})$:

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f_1(t) = t^3,\ f_2(t) = |t|^3.$$

VIII. Доказать, что коэффициенты уравнения (44) восстанавливаются по фундаментальной системе его решений однозначно.

IX. Доказать, что если определитель Вронского скалярных функций $f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathrm{C}^n(I)$ не обнуляется ни в одной точке интервала I, то существует такая скалярная функция $f_n \in \mathrm{C}^n(I)$, что определитель Вронского $W_{f_1,\ldots,f_n}$ также не обнуляется ни в одной точке этого интервала.

X. Доказать, что если для некоторого натурального $k \leqslant n$ скалярные функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^{n-1}(I)$ удовлетворяют при всех

$t \in I$ условиям

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0, \ldots, W_{f_1,\ldots,f_k}(t) = 0, \quad W_{f_1,\ldots,f_{k-1}}(t) \neq 0$$

(при $k = 1$ последнего условия нет), то они линейно зависимы.

XI. Доказать, что если k скалярных функций на интервале I являются аналитическими или служат решениями некоторого уравнения (44) n-го порядка, где $n \geqslant k$, то тождественное равенство нулю их определителя Вронского на каком-либо интервале $J \subset I$ необходимо и достаточно для их линейной зависимости.

XII. Может ли какое-либо ненулевое решение уравнения (44) с непрерывными коэффициентами иметь на каком-либо отрезке бесконечно много нулей?

XIII. Перемежаются ли нули двух решений уравнения (47), для одного из которых t_0 — точка максимума, а для другого — точка минимума?

XIV. Доказать, что нули всяких двух линейно зависимых решений любого уравнения (47), даже не удовлетворяющего условию (48), совпадают, а линейно независимых — перемежаются.

XV. Имеет ли бесконечно много нулей всякое решение уравнения

$$\ddot{y} + \frac{1}{4t} y = 0, \quad t > 0?$$

XVI. Сколько решений имеет задача

$$\ddot{y} + y = f, \quad y(0) = \varphi_1, \quad y(\pi) = \varphi_2,$$

при:

a) $f = 0,\ \varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = 2$;

b) $f = 1,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 2$?

XVII. Верна ли теорема 71 об альтернативе для краевой задачи с теми же краевыми условиями и с линейным неоднородным уравнением не второго, а:

a) первого порядка;

b) третьего порядка?

4. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами

4.1. Экспонента оператора

$A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ — это оператор, равный, по определению, сумме ряда

$$e^A = \mathsf{I} + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(A), \quad \epsilon_k(A) \equiv \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}, \quad A^0 \equiv \mathsf{I}.$$

Корректность этого определения доказывает следующая

Лемма 73. *Ряд экспоненты любого оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ сходится абсолютно, причем для любого ограниченного множества $M \subset \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ — равномерно по $A \in M$.*

$\lhd$ Свойство ограниченности множества, а также факт абсолютной и равномерной сходимости ряда, как и собственно сумма, не зависят от нормы в конечномерном пространстве $\operatorname{End} \mathbf{R}^n$ (лемма 13). Поэтому достаточно доказать утверждение, например, для операторной нормы (банаховой, см. п. 2.4): действительно, если

$$\sup_{A \in M} \|A\| \equiv a < \infty,$$

то

$$\|\epsilon_k(A)\| = \left\| \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \right\| \leqslant \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = \epsilon_k(a), \quad \text{причем } \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(a) = e^a,$$

откуда, по признаку Вейерштрасса, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

4.2. Связь экспоненты с линейной однородной системой

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{54}$$

(*с постоянными коэффициентами*) раскрывает

Теорема 74. *Оператор Коши* X *системы* (54) *удовлетворяет равенству*

$$\mathsf{X}(t,0) = e^{At}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

$\lhd$ Согласно следствию 44, доказываемое утверждение вытекает из двух фактов: во-первых, $e^{A\cdot 0} = E$ и, во-вторых,

$$(e^{At})^{\cdot} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(At)\right)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\epsilon_k(At)\big)^{\cdot} = A\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(At) = Ae^{At},$$

в силу выкладок[1)]

$$\big(\epsilon_k(At)\big)^{\cdot} = \left(\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!}\right)^{\cdot} = \begin{cases} \frac{A^{k-1}t^{k-2}}{(k-2)!} = A\epsilon_{k-2}(At), & k \geqslant 2, \\ 0, & k = 1, \end{cases}$$

(почленное дифференцирование исходного ряда[2)] — законно, так как ряд из производных его членов согласно лемме 73 сходится равномерно на интервале $(t-\delta; t+\delta)$ при любом $\delta > 0$). $\rhd$

Из теоремы 74 с помощью следствия 47 получаем

Следствие 75. *Столбцы матрицы e^{At} образуют фундаментальную систему решений системы* (54), *а экспонента оператора A удовлетворяет равенствам*[3)]

$$e^A = \mathsf{X}(1,0), \qquad \det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

4.3. Комплексификация линейного оператора

Пространство $\mathbf{R}^n$ естественным образом вкладывется в $\mathbf{C}^n$, а действительный оператор $A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ распространяется до комплексного $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathbf{C}^n$.

Определение 17. Под *комплексификацией* (*действительного*) *пространства* $\mathbf{R}^n$ будем понимать $\mathbf{C}$-линейное пространство

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n,$$

представляющее собой множество векторов

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

[1)] Которые можно было бы и не проводить, если бы заранее была известна их справедливость в случае, когда A — число (т. е. в случае $n = 1$, в котором $(e^{at})^{\cdot} = ae^{at}$), так как для оператора, чисто алгебраически, выкладки те же.

[2)] Сходящегося.

[3)] Первое из которых, кстати, можно принять за *определение* экспоненты оператора A (через оператор Коши системы (54)).

с *компонентами* $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, в котором, помимо покомпонентного *равенства*, *сложения* и умножения на действительные числа, заданы также *умножение на комплексные числа*, основанное на правиле[4)]

$$i(x+iy) = -y + ix, \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

и *комплексное сопряжение*

$$\overline{x+iy} = x - iy, \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Подмножество

$$\operatorname{Re} \mathbf{C}^n \equiv \mathbf{R}^n \oplus i0 \subset \mathbf{C}^n$$

отождествим с исходным пространством $\mathbf{R}^n$. *Комплексификацией (действительного) оператора* $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ назовем *комплексный* оператор $\mathcal{A}\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, задаваемый равенством

$$\mathcal{A}(x+iy) = Ax + iAy, \quad x, y \in \mathbf{R}^n,$$

а его сужение на множество $\operatorname{Re} \mathbf{C}^n$ обозначим через $\operatorname{Re} \mathcal{A}$.

Лемма 76. *Пусть $\mathbf{C}^n$ — комплексификация пространства $\mathbf{R}^n$, а $\mathcal{A}$ — комплексификация оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$. Тогда справедливы утверждения:*

1) $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ и $\operatorname{Re} \mathcal{A} = A$;

2) $\mathbf{C}^n$ — n-мерное $\mathbf{C}$-линейное пространство, причем любой базис в $\mathbf{R}^n$ — базис и в $\mathbf{C}^n$, а матрицы операторов $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ и $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ в этом базисе совпадают.

$\lhd$ 1. Если $C = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и $x, y, x_j, y_j \in \mathbf{R}^n$, $j = 1, 2$, то

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(Cz) = \mathcal{A}\big((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)\big) \\
= (\alpha Ax - \beta Ay) + i(\alpha Ay + \beta Ax) = C(\mathcal{A}z), \quad z = x + iy, \\
\mathcal{A}(z_1 + z_2) = \mathcal{A}\big((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\big) \\
= (\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2) + i(\mathcal{A}y_1 + \mathcal{A}y_2) = \mathcal{A}z_1 + \mathcal{A}z_2, \quad z_j = x_j + iy_j, \\
(\operatorname{Re} \mathcal{A})x = \mathcal{A}(x + i0) = Ax + iA0 = Ax.
\end{gathered}$$

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbf{R}^n$ и $C_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда:

[4)] И доопределяемое с помощью аксиом линейного пространства на все остальные комплексные числа.

a) любой вектор $z \in \mathbf{C}^n$ раскладывается по этому базису, так как если $\operatorname{Re} z = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ и $\operatorname{Im} z = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$, то

$$z = (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) + i(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = C_1 e_1 + \ldots + C_n e_n;$$

b) система векторов $e_1, \ldots, e_n$ — $\mathbf{C}$-линейно независима, так как если $C_1 e_1 + \ldots + C_n e_n = 0$, то

$$(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) + i(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = 0 + i0$$
$$\Longrightarrow \ \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n = 0 \ \Longrightarrow \ \alpha_j = \beta_j = 0,$$

откуда $C_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Поэтому $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbf{C}^n$, причем

$$\mathcal{A} e_j = \mathcal{A}(e_j + i0) = A e_j + iA0 = A e_j,$$

значит, матрицы операторов $\mathcal{A}$ и A одинаковы. $\triangleright$

4.4. Комплексификация линейной системы

(54) приводит ее к *комплексифицированной* линейной однородной системе

$$\dot{z} = \mathcal{A} z, \quad z \in \mathbf{C}^n, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{55}$$

где $\mathbf{C}^n$ и $\mathcal{A}$ — комплексификации пространства $\mathbf{R}^n$ и оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$ соответственно (см. определение 17), а производная комплексной вектор-функции[5)] $\mathsf{z} = \mathsf{x} + i\mathsf{y}$ вычисляется по формуле

$$\dot{\mathsf{z}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathsf{x}(t+h) - \mathsf{x}(t)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{\mathsf{y}(t+h) - \mathsf{y}(t)}{h} = \dot{\mathsf{x}}(t) + i\dot{\mathsf{y}}(t).$$

Доказательства сформулированных ранее теорем о действительных линейных системах практически дословно переносятся на комплексный случай. В частности, все решения комплексной линейной системы с постоянными коэффициентами определены на всей прямой и образуют n-мерное $\mathbf{C}$-линейное пространство, а ее оператор Коши также совпадает с соответствующей экспонентой (теорема 74). Для множеств

$$\mathcal{E}_A \equiv E_{\mathcal{A}}, \quad \operatorname{Re} \mathcal{E}_A \equiv \{\operatorname{Re} \mathsf{z}(\cdot) \mid \mathsf{z} \in \mathcal{E}_A\}$$

[5)] Правда, от действительного аргумента, благодаря чему производная определяется лишь $\mathbf{R}$-линейной структурой пространства $\mathbf{C}^n$.

справедлива

Лемма 77. *Если* $A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, *то*

$$E_A = \operatorname{Re}\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_A.$$

$\lhd$ 1. Если $\mathsf{x} \in E_A$, то

$$\dot{\mathsf{x}} = A\mathsf{x} + iA0 = \mathcal{A}(\mathsf{x} + i0) = \mathcal{A}\mathsf{x} \implies \mathsf{x} \in \mathcal{E}_A, \quad \text{причем } \operatorname{Re}\mathsf{x} = \mathsf{x}$$

а значит, $\mathsf{x} \in \operatorname{Re}\mathcal{E}_A$, поэтому $E_A \subset \big(\operatorname{Re}\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_A\big)$.

2. Если $\mathsf{z} \in \mathcal{E}_A$, то

$$(\operatorname{Re}\mathsf{z})^{\cdot} + i(\operatorname{Im}\mathsf{z})^{\cdot} = \dot{\mathsf{z}} = \mathcal{A}\mathsf{z} = A\operatorname{Re}\mathsf{z} + iA\operatorname{Im}\mathsf{z} \implies (\operatorname{Re}\mathsf{z})^{\cdot} = A\operatorname{Re}\mathsf{z},$$

а значит, $\operatorname{Re}\mathsf{z} \in E_A$, поэтому $\operatorname{Re}\mathcal{E}_A \subset E_A$ и, с учетом доказанного в п. 1, даже $\operatorname{Re}\mathcal{E}_A = E_A$. $\rhd$

Следствие 78. *Если вектор-функции* $\mathsf{z}_1, \ldots, \mathsf{z}_n$ *— действительны и образуют фундаментальную систему решений для комплексифицированной линейной однородной системы, то и для исходной — тоже.*

$\lhd$ Решения $\mathsf{z}_1, \ldots, \mathsf{z}_n \in \operatorname{Re}\mathcal{E}_A = E_A$ — даже $\mathbf{C}$-линейно независимы, а тем более $\mathbf{R}$-линейно независимы, поэтому образуют базис в E_A. $\rhd$

4.5. Жорданова форма матрицы

известна из курса алгебры. Эту, вообще говоря, комплексную форму матрицы действительного оператора описывает

Теорема 79. *Матрица любого оператора* $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathbf{C}^n$, *полученного в результате комплексификации оператора* $A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, *в некотором, называемом жордановым, базисе — жорданова, т. е. имеет клеточно-диагональный вид, причем:*

1) *каждая жорданова клетка*

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

порядка m соответствует некоторому собственному значению λ оператора $\mathcal{A}$ и порождается своей подсистемой векторов $h_1, \ldots, h_m$ жорданова базиса, т. е. образуется как $(m \times m)$-матрица сужения оператора $\mathcal{A}$ на линейную оболочку этих векторов;

2) *если $J_{\lambda,m_1}, \ldots, J_{\lambda,m_j}$ — все клетки, соответствующие собственному значению λ кратности k, то*

$$m_1 + \ldots + m_j = k;$$

3) *если $\lambda \in \mathbf{R}$, то каждая клетка $J_{\lambda,m}$ — действительная и порождается подсистемой также действительных векторов $h_1, \ldots, h_m$;*

4) *если $\lambda \notin \mathbf{R}$, то клетки, соответствующие значениям λ и $\overline{\lambda}$, разбиваются на пары комплексно сопряженных клеток $J_{\lambda,m}$ и $J_{\overline{\lambda},m} \equiv \overline{J_{\lambda,m}}$, которые порождаются также комплексно сопряженными подсистемами векторов $h_1, \ldots, h_m$ и $\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_m}$.*

4.6. Вычисление экспоненты матрицы

оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ (обозначаемой здесь также через A) возможно с помощью теоремы 79 о приведении матрицы к жордановой форме и следующих лемм, благодаря которым матрицу A достаточно привести к жордановой форме и, взяв экспоненту от каждой жордановой клетки, вернуться к исходному базису.

Лемма 80. *Если матрица $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_l \end{pmatrix}$ — клеточно-диагональна, то $e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{A_l} \end{pmatrix}$.*

$\triangleleft$ Матрица e^A вычисляется по определению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(A) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(A_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(A_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{A_l} \end{pmatrix}.$$

$\triangleright$

Лемма 81. *Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*

$\lhd$ Ряды

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \ldots \quad \text{и} \quad e^B = E + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \ldots$$

сходятся абсолютно, поэтому ряд, являющийся их произведением, тоже сходится абсолютно, и его члены можно сгруппировать как угодно, например, в однородные суммы E, $A + B$,

$$\frac{(A+B)^2}{2} = \frac{A^2 + AB + BA + B^2}{2} = \frac{A^2}{2} \cdot E + AB + E \cdot \frac{B^2}{2}, \ldots,$$

и чисто алгебраически, как в случае числовых рядов[6], получить ряд для экспоненты суммы e^{A+B}. $\rhd$

Лемма 82. *При каждом*[7] $t \in \mathbf{R}$ *справедливо равенство*

$$e^{J_{\lambda,m}t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \epsilon_m(t) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_m(t) \equiv \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

$\lhd$ Пусть E — единичная $(m \times m)$-матрица и $N \equiv J_{\lambda,m} - \lambda E$, тогда

$$e^{J_{\lambda,m}t} = e^{\lambda t E + tN} = e^{\lambda t E} \cdot e^{tN} = e^{\lambda t}(E + tN + \ldots + \epsilon_m(t) N^{m-1}),$$

так как $EN = NE$, $Ne_i = e_{i-1}$, где

$$e_i = \begin{pmatrix} \delta_1^i \\ \cdots \\ \delta_m^i \end{pmatrix}, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

[6] Например, последнее из выписанных равенств существенно опирается на возможность переставлять местами (как числа) множители A и B в произведении BA.

[7] Для решения задачи о вычислении экспоненты матрицы достаточно установить настоящее утверждение лишь при $t = 1$.

поэтому $N^k e_i = e_{i-k}$, $N^m = 0$ и

$$N^k = (e_{1-k}, \ldots, e_{m-k}) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \cdots}^{k \text{ нулей}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (56)$$

$\triangleright$

Лемма 83. *Если $A = LBL^{-1}$, то $e^A = Le^B L^{-1}$.*

$\triangleleft$ Действительно, имеем

$$e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(LBL^{-1})^{k-1}}{(k-1)!} = L\left(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k(B)\right) L^{-1} = Le^B L^{-1}.$$

$\triangleright$

4.7. Решение системы с помощью жордановой формы

предполагает нахождение жорданова базиса и жордановой формы матрицы линейной однородной системы с постоянными коэффициентами с последующим построением по ним фундаментальной системы решений.

Теорема 84. *Пусть $A \in \operatorname{End} \mathbf{R}^n$, тогда фундаментальная система решений:*

1) *комплексифицированной линейной системы* (55) *получается в результате слияния одну систему всех функций, которые строятся по жордановой форме матрицы A и соответствующему жорданову базису следующим образом: каждой жордановой клетке $J_{\lambda,m}$, порожденной подсистемой векторов $h_1, \ldots, h_m$ жорданова базиса, ставится в соответствие подсистема функций*

$$\mathsf{z}_1 = e^{\lambda t} h_1,\ \mathsf{z}_2 = e^{\lambda t}(h_2 + t h_1), \ldots,\ \mathsf{z}_m = e^{\lambda t}\left(h_m + \ldots + \epsilon_m(t) h_1\right).$$

2)[8] *действительной линейной системы* (54) *строится аналогично предыдущему пункту теоремы, но со следующим изменением: в случае $\lambda \notin \mathbf{R}$ каждые две подсистемы по m функций,*

[8]Здесь фундаментальная система — уже *действительных* решений.

построенные по паре комплексно сопряженных клеток $J_{\lambda,m}$ *и* $\overline{J_{\lambda,m}}$, *заменяются одной подсистемой из* $2m$ *действительных функций*

$$\mathsf{x}_1 = \operatorname{Re}\mathsf{z}_1,\ \mathsf{y}_1 = \operatorname{Im}\mathsf{z}_1, \ldots,\ \mathsf{x}_m = \operatorname{Re}\mathsf{z}_m,\ \mathsf{y}_m = \operatorname{Im}\mathsf{z}_m.$$

$\lhd$ 1. Согласно теореме 74, e^{At} — оператор Коши линейной системы (55), поэтому решения[9)]

$$\mathsf{z}_j = e^{At}h_j = e^{\lambda t}\left(h_j + th_{j-1} + \ldots + \epsilon_{j-1}(t)h_1\right), \quad j = 1\ldots, m,$$

построенные по каждой жордановой клетке и взятые все вместе, образуют фундаментальную систему решений, так как векторы h_j, взятые все вместе, образуют базис в $\mathbf{R}^n$.

2. В построенной в п. 1 фундаментальной системе решений каждую пару комплексных решений $\mathsf{z}_j, \overline{\mathsf{z}_j}$ $(j = 1\ldots, m)$ можно заменить парой действительных функций

$$\mathsf{x}_j = \frac{\mathsf{z}_j + \overline{\mathsf{z}_j}}{2}, \quad \mathsf{y}_j = \frac{\mathsf{z}_j - \overline{\mathsf{z}_j}}{2i},$$

являющихся $\mathbf{C}$-линейными комбинациями решений, а значит, также решениями и имеющих ту же $\mathbf{C}$-линейную оболочку, так как

$$\mathsf{z}_j = \mathsf{x}_j + i\mathsf{y}_j, \quad \overline{\mathsf{z}_j} = \mathsf{x}_j - i\mathsf{y}_j.$$

В итоге получится снова базис в $\mathcal{E}_A$, а значит, и в E_A (поскольку он состоит только из действительных функций; следствие 78). $\rhd$

4.8. Квазимногочлены

степени $k \geqslant 0$ с *показателем* $\lambda \in \mathbf{C}$ — это любые функции вида

$$q(t) = e^{\lambda t}p_k(t),$$

где p_k — многочлен степени k над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Множество всех действительных или комплексных квазимногочленов степени, *меньшей* k, с показателем λ обозначим через $Q_{\lambda,k}$ или, соответственно, через $\mathcal{Q}_{\lambda,k}$, а множество всех вектор-функций со значениями в $\mathbf{R}^n$, *все координаты* которых в некотором[10)] базисе —

[9)] Задаваемые соответствующими столбцами матрицы оператора e^{At} в том базисе, в котором матрица оператора A — жорданова.

[10)] А значит, в любом.

такие квазимногочлены, обозначим через $Q^n_{\lambda,k}$ или, соответственно, через $\mathcal{Q}^n_{\lambda,k}$. Кроме того, для чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ любую функцию из множества

$$Q^n_{\alpha\pm i\beta,k} \equiv \{q_1(t)\cos(\beta t) + q_2(t)\sin(\beta t)|\; q_{1,2} \in Q^n_{\alpha,k}\}$$

будем также называть *квазимногочленом степени* $k \geqslant 0$, но с *парой комплексно сопряженных показателей* $\alpha \pm i\beta$.

Лемма 85. *Каждое из множеств $\mathcal{Q}^n_{\lambda,k}$ есть $\mathbf{C}$-линейное пространство, а каждое из множеств $Q^n_{\lambda,k}$, $Q^n_{\alpha\pm i\beta,k}$ — $\mathbf{R}$-линейное пространство, причем*

$$\dim \mathcal{Q}_{\lambda,k}, \dim Q_{\lambda,k} \leqslant k, \quad \dim Q_{\alpha\pm i\beta,k} \leqslant 2k, \tag{57}$$

$$\operatorname{Re}\left(\mathcal{Q}^n_{\lambda,k}\right), \operatorname{Re}\left(\mathcal{Q}^n_{\overline{\lambda},k}\right) \subset Q^n_{\operatorname{Re}\lambda\pm i\operatorname{Im}\lambda,k} \subset \left(\mathcal{Q}^n_{\lambda,k} + \mathcal{Q}^n_{\overline{\lambda},k}\right), \tag{58}$$

а при $m \leqslant k$ справедливы включения

$$\mathcal{Q}_{\lambda,m} \subset \mathcal{Q}_{\lambda,k}, \quad Q_{\lambda,m} \subset Q_{\lambda,k}, \quad Q_{\alpha\pm i\beta,m} \subset Q_{\alpha\pm i\beta,k}.$$

$\lhd$ Обозначим $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda$.

1. Неравенства (57) получаются из того факта, что участвующие в них пространства натянуты, соответственно, на следующие системы[11)] функций:

$$e^{\lambda t}, e^{\lambda t}t, \ldots, e^{\lambda t}t^{k-1}; \tag{59}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, e^{\alpha t}t^{k-1}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, e^{\alpha t}t^{k-1}\sin\beta t. \tag{60}$$

2. Включения (58) вытекают из формул Эйлера

$$e^{(\alpha\pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i\sin\beta t),$$
$$\cos\beta t = \tfrac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}, \quad \sin\beta t = \tfrac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}.$$

3. Остальные включения леммы вытекают прямо из определения квазимногочленов. $\rhd$

[11)] Линейно независимые (правда, последняя — только при $\beta \neq 0$); см. следствие 88 ниже.

4.9. Метод неопределенных коэффициентов

представляет собой один из возможных методов решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, согласно которому в систему подставляется выражение определенного вида, но с неопределенными коэффициентами. Этому методу посвящена

Лемма 86. *Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ — все попарно различные собственные значения оператора $A\in\operatorname{End}\mathbf{R}^n$, а $m_1,\ldots,m_l$ — наибольшие порядки соответствующих им жордановых клеток, то*

$$\mathcal{E}_A\subset\sum_{j=1}^{l}\mathcal{Q}^n_{\lambda_j,m_j}.$$

Если, кроме того, первые r чисел λ_j, $j=1,\ldots,r$, — действительные, а остальные $2p=l-r$ чисел разбиваются на p пар комплексно сопряженных, т. е.

$$\lambda_j=\overline{\lambda_{j+p}}=\alpha_j+i\beta_j\quad(\beta_j\ne0),\quad j=r+1,\ldots,r+p,$$

то

$$E_A\subset\sum_{j=1}^{r}Q^n_{\lambda_j,m_j}+\sum_{j=r+1}^{r+p}Q^n_{\alpha_j\pm i\beta_j,m_j}.$$

$\lhd$ 1. Добавим к приведенному набору из l жордановых клеток наибольших порядков, соответствующих всем различным собственным значениям матрицы оператора A, все остальные клетки с номерами $j=l+1,\ldots,l'$. В соответствии с полным набором клеток получаем разложение пространства решений $\mathcal{E}_A$ в прямую сумму подпространств

$$\mathcal{E}_A=\mathcal{F}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{F}_{l'},$$

где каждое из подпространств $\mathcal{F}_j$ размерности m_j есть $\mathbf{C}$-линейная оболочка подсистемы функций $\mathsf{z}_1,\ldots,\mathsf{z}_{m_j}\in Q^n_{\lambda_j,m_j}$, определенной в формулировке теоремы 84 и включенной в фундаментальную систему решений. Тогда из включений $\mathcal{F}_j\subset\mathcal{Q}^n_{\lambda_j,m_j}$ получаем цепочку

$$\mathcal{E}_A\subset\mathcal{Q}^n_{\lambda_1,m_1}+\ldots+\mathcal{Q}^n_{\lambda_{l'},m_{l'}}\subset\mathcal{Q}^n_{\lambda_1,m_1}+\ldots+\mathcal{Q}^n_{\lambda_l,m_l}$$

(каждое из подпространств $\mathcal{Q}^n_{\lambda_j,m_j}$, $j > l$, отброшено, так как оно содержится в одном из первых l подпространств, соответствующем тому же собственому значению; см. лемму 85).

2. Из предыдущего пункта с учетом лемм 77 и 85 имеем

$$E_A = \operatorname{Re}\mathcal{E}_A \subset \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Re}\mathcal{Q}^n_{\lambda_j,m_j} + \sum_{j=r+1}^{r+p} \operatorname{Re}\left(\mathcal{Q}^n_{\lambda_j,m_j} + \mathcal{Q}^n_{\overline{\lambda_j},m_j}\right)$$
$$\subset \sum_{j=1}^{r} Q^n_{\lambda_j,m_j} + \sum_{j=r+1}^{r+p} Q^n_{\alpha_j\pm i\beta_j,m_j}.$$

$\triangleright$

4.10. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \quad y, t \in \mathbf{R}, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}, \quad (61)$$

при *комплексификации* переходит в *комплексифицированное* линейное однородное уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = 0, \quad z \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad (62)$$

множество решений которого будем обозначать через $\mathcal{E}_a$.

Для комплексного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами также справедливы теоремы, доказанные ранее лишь в действительном случае, в частности, все его решения определены на всей прямой и образуют $\mathbf{C}$-линейное пространство, причем $\mathcal{E}_a = \psi^{-1}(\mathcal{E}_A)$, где A — матрица уравнения (61) (определение 12).

Теорема 87. *Если A — матрица уравнения* (61), *а $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — все ее попарно различные собственные значения кратностей $k_1, \ldots, k_l$ соответственно, то*

$$\mathcal{E}_a = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{Q}_{\lambda_j,k_j}.$$

Если, кроме того, первые r чисел λ_j, $j = 1, \ldots, r$, — действительные, а остальные $2p = l - r$ чисел разбиваются на p пар комплексно сопряженных, т. е.

$$\lambda_j = \overline{\lambda_{j+p}} = \alpha_j + i\beta_j \quad (\beta_j \neq 0), \quad j = r+1, \ldots, r+p,$$

то

$$E_a = \sum_{j=1}^{r} Q_{\lambda_j,k_j} + \sum_{j=r+1}^{r+p} Q_{\alpha_j\pm i\beta_j,k_j}.$$

$\lhd$ 1. Если $m_1, \dots, m_l$ — наибольшие порядки жордановых клеток, соответствующих числам $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, то в силу леммы 86 имеют место включения

$$\mathcal{E}_a = \psi^{-1}(\mathcal{E}_A) \subset \sum_{j=1}^{l} \mathcal{Q}_{\lambda_j,m_j},$$

$$E_a = \psi^{-1}(E_A) \subset \sum_{j=1}^{r} Q_{\lambda_j,m_j} + \sum_{j=r+1}^{r+p} Q_{\alpha_j\pm i\beta_j,m_j}.$$

2. Из первого включения получаем цепочку

$$n = \dim \mathcal{E}_a \leqslant \sum_{j=1}^{l} \dim \mathcal{Q}_{\lambda_j,m_j} \leqslant \sum_{j=1}^{l} m_j \leqslant \sum_{j=1}^{l} k_j = n,$$

в которой все неравенства, а с ними и исходное включение, обращаются в равенства, причем

$$m_j = k_j, \quad j = 1, \dots, l.$$

3. Аналогично, с аналогичными же последствиями, из второго включения получаем цепочку

$$n = \dim E_a \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim Q_{\lambda_j,m_j} + \sum_{j=r+1}^{r+p} Q_{\alpha_j\pm i\beta_j,m_j}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{r} m_j + \sum_{j=r+1}^{r+p} 2m_j = \sum_{j=1}^{l} m_j \leqslant \sum_{j=1}^{l} k_j = n.$$

$\rhd$

Следствие 88. *Все суммы пространств квазимногочленов, фигурирующие в формулировке теоремы* 87, *— прямые. В частности, все неравенства* (57), *последнее из которых — только при* $\beta \neq 0$, *обращаются в равенства, а если* $n = 1$ *и* $\lambda \notin \mathbf{R}$, *то сумма во включениях* (58) *— прямая.*

$\lhd$ Фигурирующие в теореме 87 суммы — прямые, так как в каждой из них сумма размерностей слагаемых равна размерности суммы. $\rhd$

Следствие 89. *Фундаментальная система:*

1) *решений комплексифисированного уравнения* (62) *получается в результате слияния в одну систему всех функций, которые строятся по собственным значениям его матрицы следующим образом: каждому собственному значению* λ *кратности* k *ставится в соответствие подсистема функций* (59)*;*

2) *действительных решений действительного уравнения* (61) *строится аналогично предыдущему пункту следствия, но со следующим изменением: в случае* $\lambda \notin \mathbf{R}$ *две подсистемы по* k *функций, построенные по паре комплексно сопряженных собственных значений* $\lambda = \alpha \pm i\beta$, *заменяются одной подсистемой* (60) *из* $2k$ *действительных функций.*

4.11. Характеристический многочлен линейного уравнения

(61) с постоянными (действительными) коэффициентами — это многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

I. Очередную связь между линейным уравнением и его матрицей A (определение 12), упрощающую нахождение ее собственных значений, раскрывает

Лемма 90. *Характеристический многочлен линейного уравнения* (61) *с постоянными коэффициентами совпадает с характеристическим многочленом* $\det(\lambda E - A)$ *матрицы этого уравнения.*

$\lhd$ Доказательство проведем индукцией по степени $n \in \mathbf{N}$ характеристического многочлена.

1. При $n = 1$ имеем

$$\det(\lambda E - A) = \lambda + a_1 = L(\lambda).$$

2. Если утверждение уже доказано для многочленов степени $n - 1$, то, разложив определитель по первому столбцу, получим

требуемое

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} a_n \begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} a_n = L(\lambda).$$

$\triangleright$

II. Пусть Φ^∞ — линейное пространство скалярных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$. Если оператор дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \colon \Phi^\infty \to \Phi^\infty$$

обозначить через D, а тождественный оператор D^0 — через I, то тот же характеристический многочлен L, взятый не от λ, а от D, и имеющий вид

$$L(\mathsf{D}) \equiv \mathsf{D}^n + a_1\mathsf{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathsf{D}^1 + a_n\mathsf{I},$$

будет также линейным оператором $L(\mathsf{D})\colon \Phi^\infty \to \Phi^\infty$, а уравнение (61) запишется в виде $L(\mathsf{D})y = 0$. При взятии многочленов от оператора D произведение многочленов превращается в композицию операторов[12)], что и утверждает следующая

Лемма 91. *Если* $L(\lambda) = M(\lambda) \cdot N(\lambda)$, *то* $L(\mathsf{D}) = M(\mathsf{D}) \cdot N(\mathsf{D})$.

$\triangleleft$ Достаточно проверить свойства:

1) $(M_1 + M_2)(\mathsf{D}) \cdot N(\mathsf{D}) = M_1(\mathsf{D}) \cdot N(\mathsf{D}) + M_2(\mathsf{D})\, N(\mathsf{D})$,

2) $(a\mathsf{D}^i) \cdot (N_1 + N_2)(\mathsf{D}) = (a\mathsf{D}^i) \cdot N_1(\mathsf{D}) + (a\mathsf{D}^i) \cdot N_2(\mathsf{D}), \quad i \geqslant 0,$

---

12) Которая, таким образом, не зависит от порядка сомножителей-многочленов и которую мы можем обозначать по-прежнему, точкой.

3) $(a\mathsf{D}^i)\cdot(b\mathsf{D}^j) = (ab)\mathsf{D}^{i+j}, \quad i, j \geqslant 0,$
последовательным применением которых получается требуемое равенство. $\triangleright$

4.12. Уравнение с квазимногочленом в правой части

I. Множество всех комплексных решений линейного неоднородного уравнения

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = f(t), \quad z \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{63}$$

с постоянными коэффициентами обозначим через $\mathcal{E}_{a,f}$. Неоднородность линейного неоднородного комплексного[13)] уравнения можно разбивать на слагаемые[14)] и работать с каждым из них отдельно, как показывает следующая

Лемма 92. *Если* $f = f_1 + \ldots + f_l$ *и* $\mathsf{z}_j \in \mathcal{E}_{a,f_j}$ *при* $j = 1, \ldots, l$, *то* $\mathsf{z}_1 + \ldots + \mathsf{z}_l \in \mathcal{E}_{a,f}$.

$\triangleleft$ Действительно, из равенств

$$L(\mathsf{D})\mathsf{z}_j = f_j, \quad j = 1, \ldots, l,$$

имеем

$$L(\mathsf{D})(\mathsf{z}_1 + \ldots + \mathsf{z}_l) = f_1 + \ldots + f_l = f.$$

$\triangleright$

II. Для каждого **R**-линейного или **C**-линейного пространства $Q_{\ldots}$ или $\mathcal{Q}_{\ldots}$ действительных или, соответственно, комплексных квазимногочленов (п. 4.8) обозначим

$$Q_{\ldots,k} \equiv \{t^k q(t) |\ q \in Q_{\ldots}\}, \quad \mathcal{Q}_{\ldots,k} \equiv \{t^k q(t) |\ q \in \mathcal{Q}_{\ldots}\}.$$

Определение 18. Пусть неоднородность f линейного неоднородного уравнения (63) есть квазимногочлен с показателем μ или с парой показателей $\alpha \pm i\beta$. Тогда будем говорить, что:

— имеет место *резонанс кратности* k в случае, если число μ или, соответственно, каждое из чисел $\alpha \pm i\beta$ является k-кратным

[13)]Или действительного, причем не только с постоянными коэффициентами.

[14)]По своему усмотрению.

корнем характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения;

— *резонанса нет* или, что то же, его *кратность равна* 0 — в противном случае.

Частное решение уравнения (63) с квазимногочленом в правой части ищется однозначно в специальном виде, который описывает

Теорема 93. *Для любой неоднородности $f \in \mathcal{Q}_{\mu,m}$ существует единственное решение z_0, удовлетворяющее условию*

$$\mathsf{z}_0 \in \mathcal{E}_{a,f} \cap \mathcal{Q}_{\mu,m,k},$$

где k — кратность резонанса.

◁ 1. Характеристический многочлен соответствующего однородного уравнения представляется в виде

$$L(\lambda) = (\lambda - \mu)^k \cdot M(\lambda), \quad \text{где } M(\mu) \neq 0.$$

2. Достаточно доказать, что линейный оператор[15)]

$$L(\mathsf{D}) = M(\mathsf{D}) \cdot (\mathsf{D} - \mu I)^k$$

осуществляет биекцию пространства $\mathcal{Q}_{\mu,m,k}$ в пространство $\mathcal{Q}_{\mu,m}$:

$$\mathcal{Q}_{\mu,m,k} \stackrel{(\mathsf{D}-\mu I)^k}{\longrightarrow} \mathcal{Q}_{\mu,m} \stackrel{M(\mathsf{D})}{\longrightarrow} \mathcal{Q}_{\mu,m}.$$

3. Матрица оператора

$$\mathsf{D}\colon \mathcal{Q}_{\mu,m+k} \to \mathcal{Q}_{\mu,m+k}$$

в базисе

$$e_j,\ j = 1, \ldots, m+k, \quad e_j(t) \equiv e^{\mu t}\epsilon_j(t), \quad \epsilon_j(t) \equiv \frac{t^{j-1}}{(j-1)!},$$

есть жорданова клетка $J_{\mu,m+k} = \mu E + N$, поскольку

$$\mathsf{D}e_j = \mathsf{D}\left(e^{\mu t}\epsilon_j(t)\right) = \mu\left(e^{\mu t}\epsilon_j(t)\right) + e^{\mu t}\epsilon_{j-1}(t) = \mu e_j + e_{j-1} \quad (\epsilon_0 = 0).$$

4. Матрица оператора

$$(\mathsf{D} - \mu \mathsf{I})^k\colon \mathcal{Q}_{\mu,m+k} \to \mathcal{Q}_{\mu,m+k}$$

15) Точнее, его сужение, и ниже — тоже.

имеет вид (56), поэтому оператор

$$(\mathsf{D}-\mu\mathsf{I})^k\colon \mathcal{Q}_{\mu,m,k}\to\mathcal{Q}_{\mu,m}$$

— биекция.

5. Аналогично, матрица оператора

$$\mathsf{D}\colon \mathcal{Q}_{\mu,m}\to\mathcal{Q}_{\mu,m}$$

в базисе e_j $(j=1,\ldots,m)$ есть также жорданова клетка $J_{\mu,m}$, а значит, матрица оператора $M(\mathsf{D})$ в том же базисе — треугольная с числами $M(\mu)\neq 0$ на диагонали[16)]. Поэтому оператор

$$M(\mathsf{D})\colon \mathcal{Q}_{\mu,m}\to\mathcal{Q}_{\mu,m}$$

— также биекция. ▷

III. Если неоднородность и коэффициенты левой части уравнения (63) — действительны, то имеет смысл искать *действительное частное решение*, и это позволяет сделать

Следствие 94. *Пусть $a_j\in\mathbf{R}$, $j=1,\ldots,n$, тогда если $\mu\in\mathbf{R}$, то для любой неоднородности $f\in Q_{\mu,m}$ существует единственное решение y_0, удовлетворяющее условию*

$$\mathsf{y}_0\in\mathcal{E}_{a,f}\cap Q_{\mu,m,k},$$

а если $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, причем $\beta\neq 0$, то для любой неоднородности $f\in Q_{\alpha\pm i\beta,m}$ существует единственное решение y_0, удовлетворяющее условию

$$\mathsf{y}_0\in\mathcal{E}_{a,f}\cap Q_{\alpha\pm i\beta,m,k},$$

где[17)] *k — кратность резонанса.*

◁ 1. Если f — действительная функция и $\mathsf{z}_0\in\mathcal{E}_{a,f}$, то

$$\mathsf{y}_0\equiv\operatorname{Re}\mathsf{z}_0\in E_{a,f},$$

так как

$$L(\mathsf{D})\mathsf{y}_0=L(\mathsf{D})\big(\operatorname{Re}\mathsf{z}_0\big)=\operatorname{Re}\big(L(\mathsf{D})\mathsf{z}_0\big)=\operatorname{Re}f=f.$$

[16)] При перемножении верхне-треугольных матриц их диагонали почленно перемножаются — чисто алгебраический факт.

[17)] В обоих случаях.

2. Если $\mu \in \mathbf{R}$ и $f \in Q_{\mu,m} \subset \mathcal{Q}_{\mu,m}$, то по теореме 93 существует частное решение $\mathsf{z}_0 \in \mathcal{Q}_{\mu,m,k}$, а значит, $\mathsf{y}_0 \in Q_{\mu,m,k}$ и

$$\mathsf{y}_0 \in \mathcal{E}_{a,f} \cap \mathcal{Q}_{\mu,m,k},$$

причем такое решение y_0, согласно теореме 93, единственно.

3. Если же $\mu = \alpha + i\beta \notin \mathbf{R}$ и $f \in Q_{\alpha\pm i\beta,m} \subset (\mathcal{Q}_{\mu,m} \oplus \mathcal{Q}_{\overline{\mu},m})$, то по теореме 93 существует частное решение $\mathsf{z}_0 \in (\mathcal{Q}_{\mu,m,k} + \mathcal{Q}_{\overline{\mu},m,k})$, а значит, $\mathsf{y}_0 \in Q_{\alpha\pm i\beta,m,k}$ и

$$\mathsf{y}_0 \in \mathcal{E}_{a,f} \cap \left(\mathcal{Q}_{\mu,m,k} + \mathcal{Q}_{\overline{\mu},m,k}\right),$$

причем такое решение y_0 единственно, поскольку оператор

$$L(\mathsf{D})\colon \mathcal{Q}_{\mu,m,k} \oplus \mathcal{Q}_{\overline{\mu},m,k} \to \mathcal{Q}_{\mu,m} \oplus \mathcal{Q}_{\overline{\mu},m}$$

— биекция, так как, согласно теореме 93, он осуществляет взаимно-однозначное соответствие между каждым слагаемым первой прямой суммы и соответствующим слагаемым второй (см. следствие 88). $\triangleright$

4.13. Вопросы и задачи для самостоятельного решения

I. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ — комплексификация действительного оператора, который в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n \in \mathbf{R}^n$ записывался матрицей A. Если *овеществить пространство* $\mathbf{C}^n$, рассмотрев его как $\mathbf{R}$-линейное пространство[18)] размерности $2n$, то каким в этом пространстве должен быть *естественный базис*? Если после этого *овеществить оператор* $\mathcal{A}$, рассмотрев его как линейный оператор в овеществленном пространстве $\mathbf{C}^n$, то какова матрица этого оператора в естественном базисе?

II. Доказать, что множество $\mathcal{E}_A$ решений комплексифицированной линейной однородной системы (55) представляется в виде

$$\mathcal{E}_A = E_A + iE_A,$$

где E_A — множество решений исходной (действительной) линейной однородной системы (54).

[18)] Т. е. сохранив в нем умножение лишь на действительные числа и забыв про комплексные.

III. Найти e^A, где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

IV. Привести пример операторов A и B, для которых

$$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B.$$

Обратимо ли утверждение леммы 81?

V. Справедлива ли явная формула

$$X(t,s) = e^{\int_s^t A(\tau)\,d\tau}$$

для оператора Коши линейной однородной системы (37)?

VI. Зная семейство матриц Коши $X(t,s)$, $t, s \in \mathbf{R}$, системы (54), найти матрицу A.

VII. *Логарифм* $\ln A$ оператора $A \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ определяется как любой из операторов[19] $B \in \operatorname{End} \mathbf{C}^n$, удовлетворяющий равенству

$$e^B = A,$$

Доказать, что любой невырожденный оператор имеет логарифм, а вырожденный — нет. Найти все значения $\ln A$, где

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

VIII. Доказать теорему *Флоке — Ляпунова* (см. задачу V из п. 3.17): если функция $A\colon \mathbf{R} \to \operatorname{End} \mathbf{C}^n$ — T-периодична, то для некоторой T-периодичной оператор-функции[20] $L \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$ с помощью замены переменной x на

$$y = L(t)x$$

система (37) *приводима* к системе с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = By, \quad B = \frac{1}{T} \ln X(T, 0).$$

[19] Который в пространстве $\operatorname{End} \mathbf{C}^n$ находится неоднозначно.

[20] Невырожденной при каждом $t \in \mathbf{R}$.

IX. Доказать, что любая система функций, получаемая объединением подсистем (59) для различных значений

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

с соответствующими им значениями $k = k_1, k_2, \ldots, k_r$ и подсистем (60) для различных пар

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_{r+1}, \beta_{r+1}), (\alpha_{r+2}, \beta_{r+2}), \ldots, (\alpha_{r+p}, \beta_{r+p}), \quad \beta \neq 0,$$

с соответствующими им значениями $k = k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_{r+p}$, — линейно независима.

X. Доказать, что в жордановой форме матрицы уравнения (61) каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка, порядок которой равен кратности этого значения.

XI. Верно ли, что если $a_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\mu \in \mathbf{R}$ и неоднородность f — есть квазимногочлен степени m с показателем μ, то существует частное решение $\mathsf{y}_0 \in \mathcal{E}_{a,f}$, являющееся квазимногочленом с тем же показателем степени *именно* $m + k$, где k — кратность резонанса?

XII. Доказать, что замена переменной t на

$$\tau = \ln|t|$$

приводит *уравнение Эйлера*[21)]

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t\dot{y} + a_n y = 0, \quad y \in \mathbf{R},$$

к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами и характеристическим многочленом

$$L(\lambda) = l_n(\lambda) + a_1 l_{n-1}(\lambda) + \ldots + a_{n-1} l_1(\lambda) + a_n l_0(\lambda),$$

где

$$l_0(\lambda) \equiv 1, \quad l_k(\lambda) \equiv l_{k-1}(\lambda)(\lambda - (k-1)),\ k \in \mathbf{N}.$$

[21)] Уравнение вырождается при $t = 0$, поэтому рассматривается отдельно при $t > 0$ и при $t < 0$.

Сергеев Игорь Николаевич
Лекции по дифференциальным уравнениям. I семестр
Учебное пособие

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 4.1.2004 г.
Формат 60×90/16
Объем 6 п. л.
Заказ 2
Тираж 200 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.2.2001

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова