Eksempel 1.1 - Bevegelsesgrafer

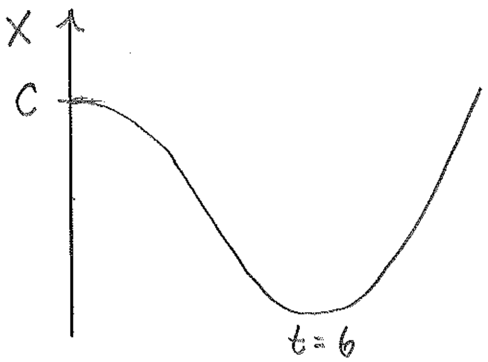
Finne posisjonsgraf:

Vi har at $X'(t) = v(t)$ så $v(t)$ inneholder stigningstallene til $X(t)$ i alle punkter t. Og siden $\int v(t)\,dt = X(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ukjent}}}{C}$ vet vi ikke helt hvor vi skal starte å tegne $X(t)$.

Viktige observasjoner:

- $v(t)$ er negativ i $t \in (0, 6)$ så der må $x(t)$ synke.
- $v(0) = 0$ så der er $x(t)$ flat, og i $v(6)$!
- $v(t)$ er positiv og vokser for $t > 6$.

Basert på opplysningene over bør $x(t)$ se omtrent slik ut:



Tips: Hvilken grad var $v(t)$?
2. gradspolynom, så $X(t)$ er 3. grad.

Eks. 1.1 Fortsettelse.

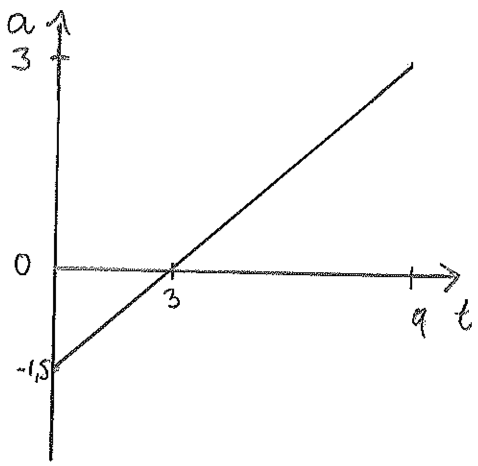
Finne akselerasjonsgraf:

Dette er gjerne litt lettere. Vi har at $a(t) = v'(t)$
så vi må studere stigningstallene til $v'(t)$.
Et trent øye ser også at $v(t)$ er en 2. gradsfunksjon
så da må $a(t)$ være lineær / en rett linje.
Denne linjen / funksjonens verdi er stigningstallet til $v(t)$.

Viktige observasjoner:

- $v'(3) = 0 \Rightarrow a(3) = 0$
- $v'(0) \approx -1{,}5 \Rightarrow a(0) \approx -1{,}5$
- $v'(9) \approx 3 \Rightarrow a(9) \approx 3$

Fra dette får vi noe ala:



Eksempel 1.2 - En funksjon for farten

$$v(t) = e^{-\lambda t}$$

a) $\sum F(t) = ma(t)$ vi må finne a.

$$a(t) = v'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow \underline{\sum F(t) = -m\lambda e^{-\lambda t}}$$

b) $$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_{t_1}^{t_2} = \underline{-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t_2} - \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t_1} \right)}$$

$$= X(t_2) - X(t_1)$$

Eksempel 1.3 - Ball som spretter

a) Ballen kastes nedover med en fart på $-4\,m/s$. Farten øker mens den faller mot gulvet og treffer med $v = -10\,m/s$. Dette er punkt B/C. Ballen snur og farten bytter fortegn til $8\,m/s$, altså $< 10\,m/s$; noe energi er tapt i støtet. Farten avtar så helt konstant til den blir null, dette er toppen av ballbanen og punkt D.

b) Siden fartsgrafen er lineær må akselerasjonen være konstant. Man kan også argumentere med at den kun påvirkes av G. Vi kan da bruke spesialtilfellene av bevegelseslignmingene.

Kjenner v_0, v og t og kan da bruke (1.7).

$$s = \frac{(-4-10)\,m/s}{2}\,0.6\,s = -4{,}2\,m$$ (motsatt av fartsretning, altså opp).

c) Vi kan benytte $v'(t) = a$ og se på stigningstallet i området, eller bruke

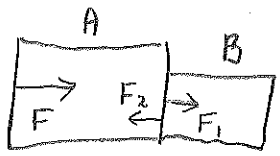
$$v = v_0 + at \iff \frac{v - v_0}{t} = a \,, \quad \frac{(8-0)\,m/s}{0{,}8\,s} = 10\,m/s^2 \approx g$$

d) Vi ser fra figuren at det tok 0,8 s å sprette fra gulvet og til toppen ($v=0$), det er også tiden det vil ta for den å komme ned igjen (hvis a = konstant).

Den var på toppen ved $t = 1{,}4\,s$, så den treffer bunnen ved 1,4 s

Eksempel 2.1 - To sett med klosser

Tilfelle 1:



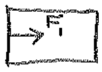
Newtons 3. : $F_2 = -F_1$

Hele systemet, begge klossene, vil få akselerasjonen

$$F = m_{system}\, a_{system} = (2kg + 1kg)\, a_{sys}$$

$$\Rightarrow a_{sys} = \frac{F}{m_{sys}} = \frac{3N}{3kg} = 1\, m/s^2.$$

Ser så kun på kloss B:

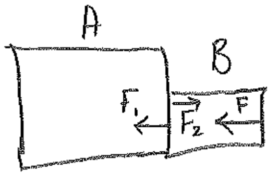


Det er F_1 som gir B akselerasjonen : a_{sys}. Får da

$$F_1 = m_B\, a_{sys} = 1kg \cdot 1m/s^2 = \underline{1\,N}$$

Tilfelle 2:

Akkurat samme analyse:



$$a_{sys} = 1m/s^2$$

B får sin akselerasjon a_{sys} fra F_1 :

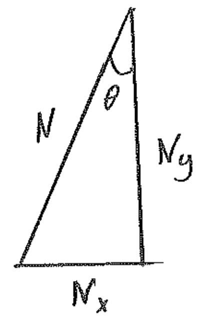
$$F_1 = m_B\, a_{sys} = 2kg \cdot 1m/s^2 = \underline{2\,N}$$

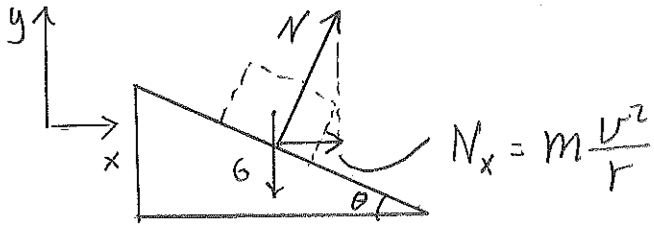
Eksempel 2.2 - En perfekt dosert sving

Kraften som trengs for å holde den i sirkelbane:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Denne må da være horisontal-komponenten til normalkraften.





Dekomponerer N som vist i notatene.

Siden bilen ikke akselererer i y-retning har vi

$$\Sigma F_y = N_y - G = 0 \Rightarrow N_y = mg$$

Vi har et uttrykk for N_y og ønsker å relatere den til N_x. Fra dekomponering:

$$\tan\theta = \frac{N_x}{N_y} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr}$$

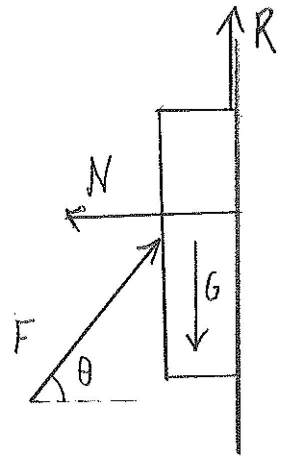
Som gir $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{gr}\right)$$

Eksempel 2.3 - Holde en bok mot en vegg

Fra at boken skal være i ro og Newtons 2. lov får vi

$$\sum F_x = F_x - N = 0 \qquad (1)$$

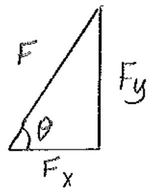
$$\sum F_y = F_y + R - G = 0 \qquad (2)$$



Free body diagram

Om statisk friksjon vet vi:

$$R \leq \mu_s N \qquad (3)$$



Dekomponerer F

$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\theta$$

Kan da skrive (1) og (3) som

$$N = F\cos\theta$$

$$R \leq \mu_s N = \mu F\cos\theta$$

Setter inn i (2):

$$F\sin\theta + \mu F\cos\theta \geq mg$$

$$F \geq \frac{mg}{\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

Ønsker så å minimere F mhp. θ, som er når $\sin\theta + \mu\cos\theta$ er størst. Deriverer og setter lik null (Fra kalkulus)

$$\cos\theta - \mu\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \underline{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}$$

Plot $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ og se at svaret er fornuftig ☺

Stor friksjonskoeffisient → liten vinkel θ, og motsatt.

strikk hopp

Velger nullnivå for potensiell energi slik at ved A så har han $E_A = mgh$

I B vil han da ha $E_B = mg(h-l) + \frac{1}{2}mv^2$. Siden strikken starter å strammes her (likevekt) har ingen elastisk-potensiell energi her.

I bunnen/vendepunktet C har han ingen fart og strikken er strukket s fra likevekt. Vi får da

$$
\begin{aligned}
E_C &= mg(h-l-s) + \frac{1}{2}ks^2 \\
&= mg(h-(l+s)) + \frac{1}{2}ks^2 \\
&= mg(h-h) + \frac{1}{2}ks^2 = \underline{\frac{1}{2}ks^2}
\end{aligned}
$$

Totalt

$$
\begin{array}{ccccc}
E_A & = & E_B & = & E_C \\
mgh & = & mg(h-l) + \frac{1}{2}mv^2 & = & \frac{1}{2}ks^2
\end{array}
$$

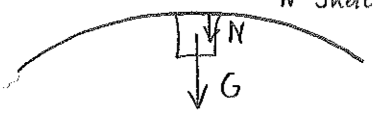
Eksempel 3.1 - Loop

a) Man ser at A og B er i samme høyde og da må den potensielle energien være lik. Den resterende energien er kinetisk og må være det samme: $\underline{v_A = v_B}$.

$$\cancel{U_A} + \frac{1}{2}mv_A^2 = \cancel{U_B} + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \underline{v_A = v_B}$$

b) Free body diagram i toppen

N skal være liten!



Kraften som trengs for å holde den i sirkelbane: $\sum F = m\frac{v^2}{r} = N + G$

Sier så at kraften må være større enn når $N = 0$:

$$\sum F > 0 + G$$

$$\cancel{m}\frac{v^2}{r} > \cancel{m}g$$

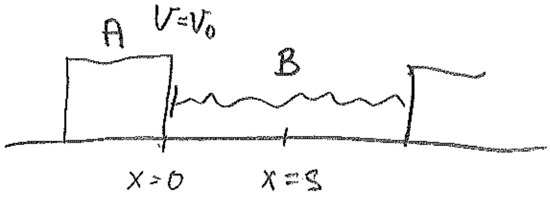
$$\Rightarrow v > \sqrt{rg}$$

Siden $v_B = v_A$ får vi

$$\underline{v_A > \sqrt{rg}}$$

Eksempel 3.2 - Kloss, fjær, Friksjon

Vi gjør energibetraktninger.



Energi i posisjon A:

$$E_A = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Energi i pos. B er mindre, noe har blitt tatt av friksjon.

$$E_A = E_B - W_R = \frac{1}{2} k s^2 + \mu_d N s$$

Skriver ut

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k s^2 + \mu d m g s$$

$$k s^2 + 2 \mu_d m g s - m v_0^2 = 0$$

Dette er en andregradslikning egnet for abc-formel:

$$s = \frac{-2\mu m g \pm \sqrt{(2\mu m g)^2 - 4(k)(-m v^2)}}{2k}$$

Kun den positive løsningen gir fysisk mening.

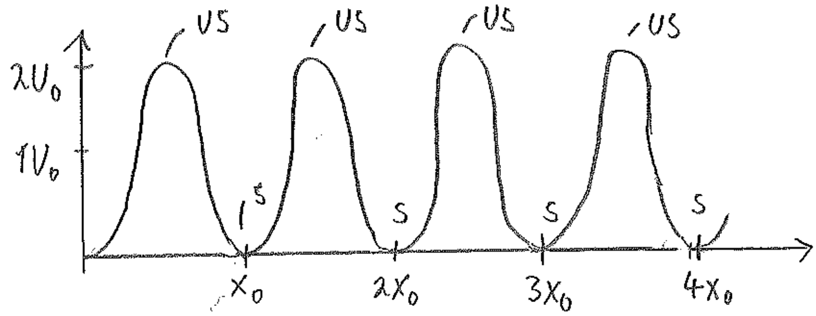
Eksempel 3.3 - Partikkel (1)

Partikkelen er kun påvirket av en konservativ kraft $F = -\nabla U$ og energien er da bevart (lik i alle punkter).

a) $a = \frac{F}{m}$, $F = -\nabla U$. $\nabla U = U_0 \frac{2\pi}{X_0} \sin\left(\frac{2\pi}{X_0} x\right)$

Setter inn og får $\underline{a = -U_0 \frac{2\pi}{X_0 m} \sin\left(\frac{2\pi}{X_0} x\right)}$ (1)

b)



S : $X = nX_0$, $n = 0,1,\ldots$

US : $X = (\frac{1}{2} + n)X_0$.

c) Energien til partikkelen i $X = 0$: $E_0 = U(0) + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

Hadde vi, uten å tegne $U(x)$, bare satt inn for $X = 4X_0$ og fått $U(4X_0) = 0$, kunne det vært lett å tenke at partikkelen bare trenger $E_0 > 0$ for å komme frem. Ser vi på plottet av $U(x)$ blir det klart at E_0 må være større enn den maksimale potensielle energien (den må passere flere slike topper). Kan den passere et slikt maksimum kan den passere alle med samme energi (v). Dette gir:

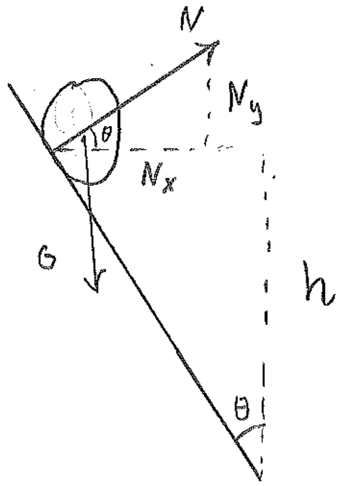
$$E_0 > U\left(\frac{X_0}{2}\right) \iff \frac{1}{2}mv_0^2 > 2U_0 \Rightarrow \underline{V_0 = \sqrt{\frac{4U_0}{m}}}$$

d) For små α har vi $\sin(\alpha) \approx \alpha$ (taylorutvikling).

Får da fra (1):

$$a \approx -\overbrace{U_0 \frac{2\pi}{X_0 m} \frac{2\pi}{X_0}}^{\alpha^2} x = \underline{-\alpha^2 X} \quad , \quad \underline{\alpha = \sqrt{\frac{U_0}{m}\left(\frac{2\pi}{X_0}\right)^2}}$$

ule som sklir i kjegle



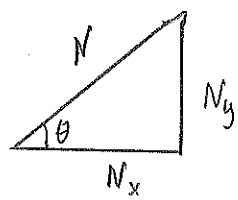
a)

b) Siden kula ikke akselererer i y-retning:

$$\Sigma F_y = N_y - G = 0 \Rightarrow N_y = mg$$

Kan så uttrykke N ved N_y:

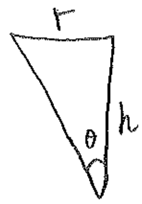
$$N = \frac{N_y}{\sin\theta} = \underline{\frac{mg}{\sin\theta}}$$



$$\sin\theta = \frac{N_y}{N}$$

c) Fra bevegelse i sirkelbane $\Sigma F_x = N_x = m\frac{v^2}{r}$

Kan uttrykke h ved r: $h = \frac{r}{\tan\theta}$



$$N_x = m\frac{v^2}{h\tan\theta}$$

Uttrykker N_x ved N: $N_x = N\cos\theta = \frac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = \frac{mg}{\tan\theta}$

Setter inn for N_x:

$$\frac{\cancel{m}g}{\cancel{\tan\theta}} = \cancel{m}\frac{v^2}{h\cancel{\tan\theta}} \Rightarrow \underline{h = \frac{v^2}{g}}$$