

22 Gödelnummer

Kurt Gödel hat einen Beweis vorgelegt, dass nicht alle Aussagen in einem formalen System beweisbar sind. Es gibt also Aussagen, bei denen man weder sagen kann, ob sie wahr oder falsch sind.

Für diese Aufgabe ist der eigentliche Beweis nicht wichtig.³ Die Beweisführung verfolgt ein Gedankenexperiment, das jedoch eine interessante Berechnungsvorschrift enthält, die es hier zu implementieren gibt.

Gödel will Aussage eine eindeutige Nummer zuordnen. Dazu wies Gödel jedem Zeichen in formalen Aussagen eine Zahl zu, also z.B.:

+	1	Addition
-	2	Subtraktion
*	3	Multiplikation
/	4	Division
=	5	Gleichheitszeichen
0	6	Die Zahl 0
s	7	der Nachfolger einer Zahl
a	8	Variable a
b	9	Variable b
:	:	:

Will man nun die Nummer der Gleichung

$1+a=2$

darstellen, so schreibt man diese mit den Zeichen oben um:

$s0+a=ss0$

Dies wird jetzt als Ziffernfolge dargestellt:

7 6 1 8 5 7 7 6

Da wir abzählbar unendlich viele Zeichen in der Tabelle darstellen können, können wir diese Ziffernfolge hier nicht einfach als Zahl lesen. Auch eine feste Basis anzugeben wäre nicht möglich, da die Basis größer sein muss als die höchste Zahl in der Tabelle, die ja unendlich lang sein kann. Kurt Gödel schug jetzt folgendes Verfahren unter der Ausnutzung der Primfaktorzerlegung von Zahlen vor: Diese Ziffernfolge wird jetzt in eine eindeutige Zahl umgewandelt indem man die erste Primzahl (2) hoch die erste Ziffer (7) plus die zweite Primzahl (3) hoch die zweite Ziffer (6) plus die dritte Primzahl (5) hoch die dritte Ziffer (1) ...

Hier also:

$$2^7 + 3^6 + 5^1 + 7^8 + \dots$$

Die Primzahlen entnehmen Sie [https://de.wikibooks.org/wiki/Primzahlen:_Tabelle_der_Primzahlen_\(2_-_100.000\)](https://de.wikibooks.org/wiki/Primzahlen:_Tabelle_der_Primzahlen_(2_-_100.000)) und speichern diese in einer Datei ab, die beim Programmstart eingelesen wird. Laden und die Verwaltung der Primzahlen soll in einer Klasse geschehen. Das Programm soll es ermöglichen, Formeln mit den oben genannten Zeichen eingeben zu können. Das Programm soll dann die Gödelnummer der Eingabe berechnen.

Teilen Sie das Programm in geeignete Klassen auf, die das Programm besser strukturieren.

³Nicht wichtig für diese Aufgabe, aber durchaus interessant: <https://www.youtube.com/watch?v=HeQX2HjkcNo>